



HAL
open science

Extension de la platitude aux systèmes fractionnaires MIMO : application à un système thermique

Stephane Victor, Pierre Melchior, Jocelyn Sabatier, Alain Oustaloup

► **To cite this version:**

Stephane Victor, Pierre Melchior, Jocelyn Sabatier, Alain Oustaloup. Extension de la platitude aux systèmes fractionnaires MIMO : application à un système thermique. 5ème IEEE Conférence Internationale Franco-phonie d'Automatique (CIFA 2008), Sep 2008, Bucarest, Roumanie. pp.1-8. <hal-00978490>

HAL Id: hal-00978490

<https://hal.science/hal-00978490v1>

Submitted on 7 Jan 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Extension de la platitude aux systèmes fractionnaires MIMO : application à un système thermique

Stéphane VICTOR , Pierre MELCHIOR, Jocelyn SABATIER et Alain OUSTALOUP

IMS - UMR 5218 CNRS
Université Bordeaux1 - ENSEIRB - ENSCPB
351 cours de la Libération, F 33405 Talence cedex, France

{prenom.nom}@laps.ims-bordeaux.fr

Résumé— Cet article présente l'application des principes de la platitude aux systèmes linéaires non entiers MIMO à l'aide d'une pseudo représentation d'état. L'objectif est de déterminer les sorties linéaires plates pour les systèmes LTI commandables représentés sous la forme de matrices polynômiales.

Les matrices de définition, exprimées à l'aide des variables du système, la sortie plate et ses dérivées successives, caractérisent le noyau d'une matrice polynômiale. La platitude en planification de trajectoire est utilisée afin de déterminer les commandes à appliquer, sans avoir à intégrer d'équation différentielle quand la trajectoire est connue. De nombreux développements ont été effectués pour les systèmes LTI, cependant, concernant les systèmes non entiers, et particulièrement en MIMO, les travaux de recherche sont ouverts. L'approche présentée ici consiste à appliquer la platitude, en utilisant les matrices polynômiales, aux systèmes fractionnaires linéaires multivariables.

Mots-clés— Platitude, planification de trajectoire, dérivée non entière, domaine temporel, pseudo représentation d'état, systèmes fractionnaires MIMO, systèmes thermiques.

I. INTRODUCTION

Des études théoriques et expérimentales montrent que les systèmes thermiques [1], électro-chimiques [2] et viscoélastiques [3] sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas appropriée pour identifier ce type de systèmes, à moins d'avoir recours à des modèles entiers complexes. Des modèles fractionnaires, basés sur le concept de la dérivation non entière et issus de l'identification par modèles non entiers, ont été développés dans les thèses de Le Lay [4], Lin [5], Cois [6] et Aoun [7] montrant un comportement plus proche des systèmes réels, ces approches nécessitant un nombre réduit de paramètres.

La notion de platitude est une propriété caractérisant une certaine classe de systèmes non linéaires permettant d'appliquer une commande simple et robuste [8], [9], [10]. Elle a été introduite par M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin and P. Rouchon [11], [12], [13], [14], [15]. En se limitant aux systèmes linéaires et invariant dans le temps (LTI), il s'avère que ces systèmes sont commandables ssi il est possible de trouver une sortie plate issue de la forme canonique de commandabilité de Brunovsky [11], [12]. Les sorties plates résument, à elles seules, toutes les dynamiques

du système. En d'autres termes, l'état et la commande du système peuvent être exprimés comme des fonctions différentielles de la sortie plate et de ses dérivées, sans la nécessité d'intégrer des équations différentielles. Trouver l'expression de cette sortie plate en fonction des variables du système et de ses dérivées s'avère être plus délicat. La platitude est bien adaptée pour la planification de trajectoire et favorise directement la génération de trajectoire. En effet, elle a en commun avec la commande prédictive de mettre l'accent sur les trajectoires de référence dont les conditions initiales sont fixées. L'un des intérêts de la platitude réside dans la possibilité de calculer directement de la commande qui permet de générer la trajectoire désirée en sortie en l'absence de perturbations.

Cette étude concerne la commande des systèmes LTI commandables. Tout système plat est commandable [11], [12]; cette notion a été étendue aux systèmes non entiers SISO (Single Input Single Output); une première étude a été effectuée dans [16], où les principes de platitude sont appliqués par une approche par fonction de transfert monovariante. L'originalité de l'étude ci-présente est l'extension du principe de la platitude aux systèmes non entiers par pseudo représentation d'état (représentation d'état adaptée pour les systèmes non entiers [17]), d'en établir leur inversion dynamique, sans intégrer d'équations différentielles mais en utilisant une sortie plate issue d'une pseudo représentation d'état le long d'une trajectoire voulue, puis l'application de ces extensions à un système multivariable (MIMO, Multiple Input multiple Output) non entier.

Dans ce papier, la Section 2 établit dans un premier temps un rappel succinct sur les notions de la dérivation non entière et de la pseudo représentation d'état, et présente l'extension de la platitude aux systèmes non entiers. Dans la Section 3, la caractérisation des matrices de définition des sorties linéaires plates ainsi que l'inversion dynamique d'un système non entier sont détaillées. Enfin, en Section 4, les principes théoriques présentés sont illustrés à travers une application : la diffusion de deux flux thermiques à travers un barreau métallique, qui représente un système fractionnaire MIMO. La section 5 présente les résultats de la simulation.

II. PSEUDO REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES NON ENTIERS ET PRINCIPES DE LA PLATITUDE

A. Rappels sur les systèmes non entiers

La dérivation non entière (ou fractionnaire) à un ordre quelconque (non entier),

$$\mathbf{D}^\nu \triangleq \left(\frac{d}{dt} \right)^\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{R}_+^*,$$

a été définie au 19^{ème} siècle par Riemann et Liouville. La dérivée fractionnaire d'ordre ν d'une fonction $x(t)$ est définie comme étant la dérivée entière d'ordre $[\nu]+1$ (où $[\cdot]$ est l'opérateur définissant la partie entière) d'une intégrale non entière d'ordre $\nu - [\nu]$ [18] :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\nu x(t) &= \mathbf{D}^{[\nu]+1} \left(\mathbf{I}^{[\nu]+1-\nu} x(t) \right) \triangleq \\ &\left(\frac{d}{dt} \right)^{[\nu]+1} \left(\frac{1}{\Gamma([\nu]+1-\nu)} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\nu-[\nu]}} \right), \quad (1) \end{aligned}$$

où $t > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{R}_+^*$, et la fonction Γ d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{\mathbb{N}^-\}. \quad (2)$$

Sous la forme la plus générale, un modèle non entier monovarié peut être défini par une équation différentielle caractérisée par des ordres de dérivation réels, entiers ou non entiers, soit :

$$a_0 \mathbf{D}^{n_{a_0}} y(t) + a_1 \mathbf{D}^{n_{a_1}} y(t) + \dots + a_L \mathbf{D}^{n_{a_L}} y(t) = b_0 \mathbf{D}^{n_{b_0}} u(t) + \dots + b_M \mathbf{D}^{n_{b_M}} u(t), \quad (3)$$

où \mathbf{D} représente l'opérateur de dérivation. On considère également que pour tout i, j où $0 \leq i < j \leq L$, $\nu_{a_i} < \nu_{a_j}$. De même, pour tout p, q où $0 \leq p < q \leq M$, $\nu_{a_p} < \nu_{a_q}$.

Definition : L'ordre commensurable [7] est défini comme étant le plus grand diviseur réel positif des ordres de dérivation $(\nu_{a_1}, \dots, \nu_{a_n}, \nu_{b_0}, \dots, \nu_{b_m})$ dans (3) (le plus grand nombre est généralement choisi). Pour les systèmes rationnels, l'ordre commensurable est égal à 1.

B. Simulation temporelle des systèmes non entiers

L'objectif de cette étude est d'une part d'étendre la platitude aux systèmes non entiers, et d'autre part que cette approche puisse fonctionner à l'aide des algorithmes de simulation des systèmes fractionnaires dans le domaine temporel. Cependant, seul l'algorithme de simulation utilisé ici est détaillé, étant donné que l'objectif n'est pas d'examiner les différents algorithmes de simulation.¹

Étant donné que les systèmes réels physiques présentent un comportement fractionnaire sur une bande passante limitée et les limitations pratiques des signaux d'entrée et de sortie (la fréquence de coupure de Shannon pour la borne supérieure, et le spectre du signal d'entrée pour la borne

1. Se référer à [19] pour une étude détaillée sur les simulations temporelles des systèmes à dérivées non entières.

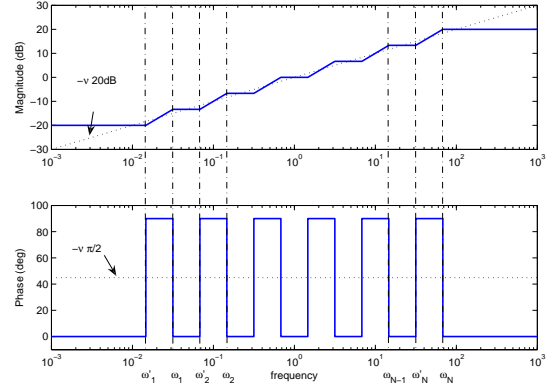


Fig. 1. Approximation de l'opérateur de dérivation non entier par une distribution par pôles et zéros récursifs

inférieure), les opérateurs fractionnaires sont souvent approchés à des modèles rationnels d'ordre élevé. L'approximation en s^ν la plus utilisée dans la bande de fréquences $[\omega_A, \omega_B]$ est la distribution récursive de pôles et de zéros proposée par Oustaloup [17] (voir figure (1)) :

$$s^\gamma \rightarrow s_{[\omega_A, \omega_B]}^\gamma = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_A}}{1 + \frac{s}{\omega_B}} \right)^\gamma \approx C_0 \prod_{k=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \quad (4)$$

où $\omega_i = \alpha \omega'_i$, $\omega'_{i+1} = \eta \omega'_i$ et

$$\gamma = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}, \quad (5)$$

α et η définissent l'ordre de dérivation γ . Plus N est grand, meilleure est l'approximation de l'opérateur de différentiation s^ν .

C. Extension de la platitude aux systèmes non entiers

Tout au long de l'article, $u^{(k)}$ représente la dérivée temporelle d'ordre k de u , où k est un scalaire non entier. Soit un système défini par l'équation différentielle suivante :

$$x^{(\nu)} = f(x, u), \quad (6)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ étant l'entrée du système, $\nu \in [0, 2]^\mathbb{Z}$ l'ordre commensurable et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une fonction régulière de x et u où le rang de $\frac{\partial f}{\partial u}$ vaut m .

Un système est dit différentiellement plat [11], [12] s'il existe un ensemble de variables indépendantes, faisant référence à la sortie plate, tel que chaque variable du système, incluant les entrées, est une fonction de la sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées successives. Plus précisément, le système (6) est dit différentiellement plat s'il existe un ensemble de variables (la sortie plate fractionnaire) z tel que

$$z = h(x, u, u^{(\nu)}, u^{(2\nu)}, \dots, u^{(\beta\nu)}), \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

avec β un multi-entier fini de dimension m^3 , ν étant l'ordre

2. Il est montré dans [20] que les systèmes non entiers sont instables pour $\nu \notin [0, 2]$.

3. Pour un multi-entier $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ de dimension m et un vecteur u de dimension m , la notation $u^{(\beta)}$ représente $(u^{(\beta_1)}, \dots, u^{(\beta_m)})$.

commensurable, tel que

$$\begin{cases} x = \mathcal{A}(z, z^{(\nu)}, \dots, z^{(\alpha\nu)}) \\ u = \mathcal{B}(z, z^{(\nu)}, \dots, z^{((\alpha+1)\nu)}) \end{cases}, \quad (8)$$

avec α un multi-entier fini de dimension m , et tel que les équations du système suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(\nu)}(z, z^{(\nu)}, \dots, z^{((\alpha)\nu)}) = \\ f(\mathcal{A}(z, z^{(\nu)}, \dots, z^{(\alpha\nu)}), \mathcal{B}(z, z^{(\nu)}, \dots, z^{((\alpha+1)\nu)})), \end{aligned} \quad (9)$$

soient identiquement satisfaites. La sortie du système est également fonction de la sortie plate :

$$y = \mathcal{C}(z, z^{(\nu)}, \dots, z^{(\sigma\nu)}), \quad (10)$$

où σ est un multi-entier fini. Ainsi, les trajectoires du système peuvent être calculées par l'intermédiaire de la sortie plate par dérivation pure.

D. Pseudo Représentation d'état

Les équations différentielles, dans lesquelles l'ordre est sujet à deux niveaux de généralisation [17], interviennent dans l'extension de la représentation d'état pour les systèmes non entiers. Dans le premier niveau de généralisation, les ordres de dérivation de chaque équation différentielle élémentaire sont les mêmes et sont donnés par l'ordre commensurable selon :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(\nu)}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (11)$$

où A , B et C sont des matrices de dimensions $n \times n$, $n \times m$ et $r \times n$ respectivement. A , B et C sont des matrices constantes.

Dans le deuxième niveau de généralisation, les ordres de dérivation des équations différentielles élémentaires sont différentes, et le système prend la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(\underline{\nu})}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (12)$$

où $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_K)^T$, $\nu_{i=1, \dots, K} \in \mathbb{R}$. La variable d'état de rang i est dérivée à l'ordre ν_i . Une fois l'ordre commensurable obtenu, il est possible de se ramener à une pseudo représentation d'état de premier niveau de généralisation. Ainsi, pour des raisons de simplicité, l'étude qui suit se fera sous la pseudo représentation d'état de premier niveau.

III. SORTIE PLATE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE NON ENTIER ISSUS DE MATRICES POLYNÔMIALES

A. Sortie plate d'un système linéaire non entier

Dans la suite, on introduit la transformation de Laplace \mathcal{L} qui est un outil algébrique souvent utilisé pour représenter les systèmes fractionnaires [21] :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^\gamma x(t)\} = s^\gamma X(s) \quad \text{if } x(t) = 0 \quad \forall t \leq 0. \quad (13)$$

Dans la suite, toutes les variables sont dans le domaine opérationnel; pour revenir au domaine temporel, il est nécessaire d'appliquer l'opérateur inverse de Laplace \mathcal{L}^{-1} .

Les notions de polynômes en s^ν sont définies en annexe -A.1. Les systèmes linéaires (11) peuvent alors s'écrire à l'aide de la représentation polynomiale sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A(s^\nu)x = Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (14)$$

avec $A(s^\nu) = s^\nu I - A$ une matrice de dimension $n \times n$ dont les composantes sont des polynômes fractionnaires en s^ν (I étant la matrice identité) et B une matrice constante de dimension $n \times m$ et de rang m . Le système (14) est supposé commandable, i.e. A et B sont premières entre elles à gauche [13].

On appelle *sortie plate linéaire* une sortie définie par (10) et (8) avec h , \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} étant linéaires, selon :

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\alpha_j} a_{i,j,k} z_j^{(k\nu)}, \quad i = 1, \dots, n, \\ u_l &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\alpha_j+1} b_{l,j,k} z_j^{(k\nu)}, \quad l = 1, \dots, m, \\ y_q &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\sigma_j} c_{q,j,k} z_j^{(k\nu)}, \quad q = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (15)$$

avec z une combinaison linéaire de x , u et d'un nombre fini de dérivées successives d'ordre ν de u . Il est à noter que les ordres de dérivation sont multiples de l'ordre commensurable ν .

Mis sous forme de matrices polynômiales, (15) s'écrit

$$x = P(s^\nu)z, \quad u = Q(s^\nu)z, \quad (16)$$

avec P (resp. Q) une matrice polynômiale de s^ν (de puissance non entière) de dimension $n \times m$ (resp. $m \times m$),

de composantes $P_{i,j}(s^\nu) = \sum_{k=0}^{\alpha_j} a_{i,j,k} s^{k\nu}$ (resp. $Q_{l,j}(s^\nu) = \sum_{k=0}^{\alpha_j+1} b_{l,j,k} s^{k\nu}$).

Les matrices P et Q satisfaisant (16) sont appelés des matrices de définition de la sortie linéarisante (ou sortie plate) z .

Théorème *La variable $z = (z_1, \dots, z_m)$ est une sortie plate linéaire de (14) ssi ses matrices de définition P et Q sont données par*

$$\begin{aligned} R^T A(s^\nu) P(s^\nu) &= 0, \\ A(s^\nu) P(s^\nu) &= BQ(s^\nu), \end{aligned} \quad (17)$$

avec R une matrice arbitraire de rang $n - m$ orthogonale à B (i.e. $R^T B = 0$), et avec $P(s^\nu)$ et $Q(s^\nu)$ de rang m pour tout s^ν et première entre elles à droite.

De plus, une sortie plate linéaire z du système commandable (14) existe toujours (et par conséquent P et Q existent également). La démonstration se trouve en annexe -B.

B. Détermination des matrices de définition

L'un des problèmes majeur consiste à déterminer les matrices de définition P et Q . Il n'y a pas unicité de la sortie plate, cependant, une fois les matrices de P et Q définies, elle sera fixée.

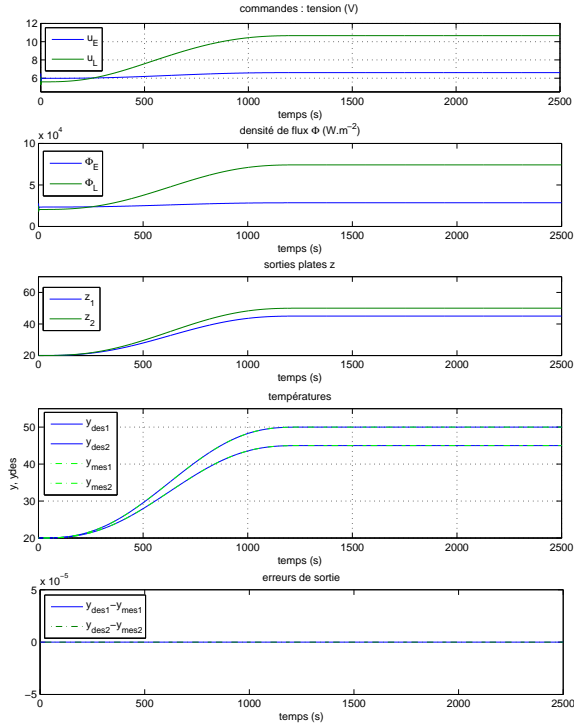


Fig. 4. Simulation du système thermique : commandes (u_E et u_L , densités de flux (Φ_E et Φ_L), sorties plates (z_1 et z_2), sorties effectives ($y_{mes,n}$) et désirées $y_{des,n}$, et erreurs de sortie

montre que les sorties effectives, $y_{mes,1}$ et $y_{mes,2}$, obtenues à partir des commandes u_E et u_L sont les mêmes que les trajectoires désirées $y_{des,1}$ et $y_{des,2}$: les erreurs de sortie sont quasiment nulles en simulation. Ainsi, une trajectoire bruitée conduira à des commandes reproduisant ces imperfections. Il est donc nécessaire d'avoir des trajectoires désirées qui soient préalablement déjà filtrées. D'autre part, les commandes générées ne permettent que de suivre une trajectoire désirée; des perturbations intervenant lors d'une simulation ne seraient alors pas corrigées, ce qui ne nous permettrait pas d'atteindre parfaitement les trajectoires souhaitées. Une loi de commande adaptée serait alors intéressante à effectuer pour mieux contrôler ces erreurs de sortie. D'autre part, les sorties plates n'ont pas de sens physique : elles sont justes nécessaires pour le calcul des entrées.

V. CONCLUSION

L'extension des principes de la platitude aux systèmes fractionnaires MIMO a été présentée. L'approche repose sur l'utilisation de la pseudo représentation d'état et l'ordre commensurable. Tout d'abord, les définitions du principe de la platitude ainsi que la pseudo représentation d'état ont été rappelées. Puis, en employant la forme matricielle polynomiale, la sortie plate a été calculée après inversion du système fractionnaire. Ensuite, sachant que la relation liant la densité de flux à la température est définie par des équations différentielles non entières [6], cette méthode a été appliquée à un système non entier MIMO : un barreau en aluminium soumis à deux sources de chaleur placées à chacune de ses extrémités, de manière à contrôler les températures en deux points précis de mesure.

Les sorties effectives, ainsi que les trajectoires désirées sont quasiment les mêmes, avec une erreur de sortie proche de zéro. Cependant, cela signifie que pour une trajectoire désirée bruitée, l'algorithme calculera des commandes d'entrée de façon à obtenir les mêmes signaux bruités. Ainsi, afin de s'affranchir du bruit, il est nécessaire d'avoir des trajectoires désirées qui aient été filtrées auparavant.

Seule la commande en boucle ouverte a été présentée ici. Par la suite, cette étude sera étendue à une commande robuste en boucle fermée à l'aide d'un régulateur CRONE, permettant d'obtenir une génération de trajectoire robuste. De plus, cette étude pourra être étendue aux systèmes non entiers non linéaires.

ANNEXES

A. Polynômes en s^ν et forme de Smith

A.1 Polynômes en s^ν

En introduisant la notion d'ordre commensurable, un polynôme dont les puissances sont non entières s'écrit de la forme suivante :

$$f = a_n X^{n\nu} + a_{n-1} X^{(n-1)\nu} + \dots + a_1 X^\nu + a_0 \quad (31)$$

où les coefficients (a_0, \dots, a_n) sont des éléments d'un anneau \mathbf{k} , ν est l'ordre commensurable et X l'indéterminée du polynôme. Dans l'algèbre classique des polynômes rationnels, ν est fixé à 1.

L'ensemble des polynômes en X^ν est défini comme l'ensemble des polynômes non entiers en ν . L'ensemble des polynômes en X^ν dont les coefficients sont dans un anneau \mathbf{k} et dont l'ordre commensurable est ν , noté $\mathbf{k}[X^\nu]$, n'est autre que l'ensemble des suites d'éléments de \mathbf{k} à support fini (suites presque nulles, nulles à partir d'un certain rang) dont les ordres sont multiples entiers de l'ordre commensurable ν .

Deux polynômes $P(X^\nu)$ et $Q(X^\gamma)$ non entiers en ν et en γ respectivement, sont égaux ssi les suites de leurs coefficients sont égales et que l'ordre commensurable de chacun des polynômes est le même ($\nu = \gamma$). Les polynômes dans $\mathbf{k}[X^\nu]$ à coefficients dans \mathbf{k} peuvent être ajoutés simplement par l'addition des coefficients correspondants et multipliés en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et les règles suivantes : $X^\nu a = a X^\nu$ pour tous les éléments a de l'anneau \mathbf{k} $X^{k\nu} X^{l\nu} = X^{(k+l)\nu}$ pour tous les entiers naturels k et l .

Il est alors possible de vérifier que l'ensemble de tous les polynômes en X^ν à coefficients dans l'anneau \mathbf{k} , forme lui-même un anneau. L'anneau des polynômes en X^ν à coefficients dans \mathbf{k} est désigné par $\mathbf{k}[X^\nu]$.

Si \mathbf{k} est commutatif, alors $\mathbf{k}[X^\nu]$ est une algèbre sur \mathbf{k} .

L'anneau $\mathbf{k}[X^\nu]$ peut être généré à partir de \mathbf{k} en adjoignant un nouvel élément X^ν à \mathbf{k} et en exigeant que X^ν commute avec tous les éléments de l'ensemble \mathbf{k} . Pour que l'ensemble obtenu devienne un anneau, toutes les sommes de puissances de X^ν doivent être adjointes à l'ensemble.

Les matrices, dont les entiers appartiennent à l'anneau $\mathbf{k}[X^\nu]$ des polynômes non entiers en X^ν , où ν représente l'ordre commensurable (i.e. tous les ordres sont multiples de ν), sont appelées matrices polynomiales. L'inverse d'une matrice polynomiale inversible n'est pas en générale une matrice polynomiale, puisque l'inverse d'un polynôme non

constant n'est pas un polynôme. Ainsi, la sous-classe $GL_n(\mathbf{k}[X^\nu])$ des matrices unimodulaires, défini comme l'ensemble des matrices inversibles carrées de dimension $n \times n$, dont l'inverse est un polynôme, ou similairement, dont le déterminant est une constante, joue un rôle important.

A.2 Forme de Smith

Théorème Soit A une matrice polynômiale de dimension $p \times q$, avec $p \leq q$ (resp. $p \geq q$), il existe une matrice $V \in GL_p(\mathbf{k}[s^\nu])$ et $U \in GL_q(\mathbf{k}[s^\nu])$ tels que :

$$VAU = (\Delta|0) \text{ (resp. } = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}), \quad (32)$$

où Δ est une matrice diagonale de dimension $p \times q$ (resp. $q \times p$) dont les éléments diagonaux $(\delta_1, \dots, \delta_\sigma, 0, \dots, 0)$ sont telles que δ_i est un polynôme en s^ν non nul pour $i = 1, \dots, \sigma$ et est un diviseur de δ_j pour tout $\sigma \geq j \geq i$. L'entier σ , qui est inférieur ou égal à $\min(p, q)$ est du rang de A .

Pour la démonstration, voir [23].

B. Théorème

Théorème La variable $z = (z_1, \dots, z_m)$ est une sortie plate linéaire de (14) ssi ses matrices de définition P et Q sont données par

$$R^T A(s^\nu) P(s^\nu) = 0, \quad (33)$$

$$A(s^\nu) P(s^\nu) = BQ(s^\nu), \quad (34)$$

avec R une matrice arbitraire de rang $n - m$ orthogonal à B (i.e. $R^T B = 0$), et avec $P(s^\nu)$ et $Q(s^\nu)$ de rang m pour tout s^ν et première entre elles à droite.

Démonstration : On suppose que z est une sortie plate linéaire. Ainsi x et u sont exprimées par

$$x = P(s^\nu) z, \quad u = Q(s^\nu) z. \quad (35)$$

Puisque l'application $y \mapsto P(s^\nu) y = x$ est surjective (par la définition de la platitude), le rang de $P(s^\nu)$ doit être égal à $\min(n, m) = m$ pour tout s^ν . En combinant

$$A(s^\nu) x = Bu \quad (36)$$

avec (35), on obtient (34).

Comme B est de rang m , il existe une matrice constante de dimension $n \times (n - m)$ et de rang $n - m$ de telle sorte que $R^T B = 0_{n-m, m}$ où $0_{n-m, m}$ est une matrice de 0, de dimension $(n - m) \times m$. Ainsi, en multipliant (36) par R^T , $P(s^\nu)$ satisfait

$$R^T A(s^\nu) P(s^\nu) z = R^T BQ(s^\nu) z = 0_{n-m, 1}$$

pour toute fonction régulière z de dimension m ; ce qui implique que $R^T A(s^\nu) P(s^\nu) = 0_{n-m, m}$, et les relations (33) et (34) sont prouvées.

Comme $A(s^\nu)$ et B sont premières entre elles à gauche et comme le rang de $A(s^\nu) P(s^\nu)$ et B est de m , quelque soit s^ν , il en est de même pour $Q(s^\nu)$ (par contradiction).

En utilisant le fait que z est une sortie plate linéaire, elle doit satisfaire : $z = X(s^\nu) x + Y(s^\nu) u$, pour des matrices appropriées $X(s^\nu)$ de dimension $m \times n$ et $Y(s^\nu)$ de dimension $m \times m$. Ainsi en substituant les expressions de x et de u , on obtient :

$$z = X(s^\nu) P(s^\nu) z + Y(s^\nu) Q(s^\nu) z.$$

Or, $X(s^\nu) P(s^\nu) + Y(s^\nu) Q(s^\nu) = I$, ce qui selon l'identité de Bezout signifie que $P(s^\nu)$ et $Q(s^\nu)$ sont premières entre elles à droite. Ce qui prouve que z est une sortie plate linéaire et que la première partie du théorème est complète.

A l'inverse, soit $P(s^\nu)$ et $Q(s^\nu)$ données par les relations (33) et (34), avec $P(s^\nu)$ et $Q(s^\nu)$ premières entre elles à droite. D'après l'identité de Bezout, il existe 2 matrices polynômiales $X(s^\nu)$ et $Y(s^\nu)$ tels que : $X(s^\nu) P(s^\nu) + Y(s^\nu) Q(s^\nu) = I$. En multipliant à droite par z , on obtient $X(s^\nu) P(s^\nu) z + Y(s^\nu) Q(s^\nu) z = z$. En posant $x = P(s^\nu) z$ et $u = Q(s^\nu) z$, on a :

$$\begin{aligned} z &= X(s^\nu) x + Y(s^\nu) u \\ A(s^\nu) x &= A(s^\nu) P(s^\nu) z = BQ(s^\nu) z = Bu \end{aligned} \quad (37)$$

ce qui prouve que z est une sortie plate linéaire.

L'existence d'une solution à la relation (33) peut alors être démontrée. D'après le théorème -A.2, $R^T A(s^\nu)$ peut être décomposé sous la forme de Smith, c'est-à-dire qu'il existe deux matrices unimodulaires $V \in GL_{n-m}(\mathbf{k}[s^\nu])$ et $U \in GL_n(\mathbf{k}[s^\nu])$ et une matrice polynômiale $\Delta(s^\nu)$ de dimension $(n - m) \times (n - m)$, telles que :

$$V(s^\nu) R^T A(s^\nu) U(s^\nu) = (\Delta(s^\nu) | 0_{n-m, m}) \quad (38)$$

ou, avec la décomposition $U(s^\nu) = (U_1(s^\nu) | U_2(s^\nu))$, U_1 de dimension $n \times (n - m)$ et U_2 de dimension $n \times m$, la relation (38) devient :

$$\begin{aligned} V(s^\nu) R^T A(s^\nu) U_1(s^\nu) &= \Delta(s^\nu) \\ V(s^\nu) R^T A(s^\nu) U_2(s^\nu) &= 0_{n-m, m}. \end{aligned} \quad (39)$$

Soit $P_0(s^\nu)$ une matrice unimodulaire $m \times m$. En posant :

$$\begin{aligned} P(s^\nu) &= U(s^\nu) \begin{pmatrix} 0_{n-m, m} \\ P_0(s^\nu) \end{pmatrix} \\ &= (U_1(s^\nu) | U_2(s^\nu)) \begin{pmatrix} 0_{n-m, m} \\ P_0(s^\nu) \end{pmatrix} = U_2(s^\nu) P_0(s^\nu) \end{aligned} \quad (40)$$

la relation (39) devient :

$$V(s^\nu) R^T A(s^\nu) P(s^\nu) = V(s^\nu) R^T A(s^\nu) U_2(s^\nu) P_0(s^\nu) = 0.$$

Comme $V(s^\nu)$ est unimodulaire, on a montré que $R^T A(s^\nu) P(s^\nu) = 0$, ce qui signifie que $P(s^\nu)$ définie dans (40), est solution de (33) pour toute matrice unimodulaire $P_0(s^\nu)$ de dimension $m \times m$.

Il en est clairement de même pour la multiplication à droite par la matrice unimodulaire $P_0(s^\nu)$, ce qui prouve que le $\text{rang}(P(s^\nu)) = m$ pour tout s^ν . ■

C. Transfert thermique d'une source de chaleur à travers un barreau thermique

Le transfert de chaleur en 1D est donné par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (a) \\ T(x,t) = T_E(x,t) + T_L(x,t) \quad (b) \\ -\lambda \frac{\partial T_E(x,t)}{\partial x} = \varphi_E(t), \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (c) \\ -\lambda \frac{\partial T_L(x,t)}{\partial x} = \varphi_L(t), \quad x = L \quad t > 0 \quad (d) \\ T_E(x,t) = T_L(x,t) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t = 0 \quad (e) \end{array} \right. \quad (41)$$

avec $T(x,t)$ la température mesurée en x , $T_E(x,t)$ la température mesurée en x venant de $x = 0$, $T_L(x,t)$ la température mesurée en x venant de $x = L$.

On note $\bar{T}(x,s) = \mathcal{L}(T(x,t))$, où \mathcal{L} correspond à la transformation de Laplace. L'équation (a) dans l'espace de Laplace peut se réécrire par :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x,s) = 0 \quad (42)$$

qui est une équation différentielle de la variable x présentant une solution de la forme :

$$\bar{T}(x,s) = K_1(s) e^{-x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}} + K_2(s) e^{x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}}. \quad (43)$$

De (c), (d), et (e) les conditions initiales, et en utilisant le théorème de superposition (le système est supposé linéaire), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_E(x,s) = 2K_{1E}(s) \cosh\left((L-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) \\ \varphi_E(x,s) = 2\lambda K_{1E}(s) \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left((L-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) \\ \bar{T}_L(x,s) = 2K_{1L}(s) e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha}}} \cosh\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) \\ \varphi_L(x,s) = 2\lambda K_{1L}(s) \sqrt{\frac{s}{\alpha}} e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha}}} \sinh\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) \end{array} \right. \quad (44)$$

Avec ces deux systèmes, les expressions de $H_E(x,s)$ et $H_L(x,s)$ peuvent être exprimées par :

$$H_E(x,s) = \frac{T_E(x,s)}{\varphi_E(0,s)} = \frac{\cosh\left((L-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)} \quad (45)$$

$$H_L(x,s) = \frac{T_L(x,s)}{\varphi_L(L,s)} = \frac{\cosh\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)}. \quad (46)$$

RÉFÉRENCES

- [1] J.-L. Battaglia, L. Le Lay, J.-C. Batsale, A. Oustaloup, et O. Cois. Heat flux estimation through inverted non integer identification models. *Int. J. of Thermal Science*, 39(3) :374–389, 2000.
- [2] R. Darling et J. Newman. On the short behavior of porous intercalation electrodes. *J. Electrochem. Soc.*, 144(9) :3057–3063, 1997.
- [3] C. Ramus-Serment. *Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, 2001.
- [4] L. Le Lay. *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. PhD thesis, Université Bordeaux I, Talence, 1998.
- [5] J. Lin. *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*. PhD thesis, Université de Poitiers, France, 2001.
- [6] O. Cois. *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, 2002.

- [7] M. Aoun. *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, 2005.
- [8] M. Ayadi. *Contributions à la commande des systèmes linéaires plats de dimension finie*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [9] L. Lavigne. *Outils d'analyse et de synthèse des lois de commande robuste des systèmes dynamiques plats*. PhD thesis, Talence, 2003.
- [10] N. Dubois. *Systèmes plats*. PhD thesis, Laboratoire du STIX, Ecole polytechnique, Paris, CNRS, 2000.
- [11] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, et P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61 :1327–1361, 1995.
- [12] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, et P. Rouchon. A lie-bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. of Autom. Control*, 44 :922–937, 1999.
- [13] J. Levine et D. V. Nguyen. Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. *System and Control Letters*, 48 :69–75, 2003.
- [14] J. Levine. Systèmes plats : Mode d'emploi. *IEEE CIFA'04, Douz, Tunisie*, Decembre 2004.
- [15] L. Bitauld, M. Fliess, et J. Lévine. A flatness based control synthesis of linear systems and application to windshield wipers. *ECC'97, Brussels*, 1997.
- [16] P. Melchior, M. Cugnet, J. Sabatier, et A. Oustaloup. Flatness control : application to a fractional thermal system. *20th ASME IDETC/CIE'05*, Long Beach, California, USA, September 2005.
- [17] A. Oustaloup. *La dérivation non-entière*. Hermès - Paris, 1995.
- [18] S.G. Samko, A.A. Kilbas, et O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science, 1993.
- [19] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, et A. Oustaloup. Numerical simulations of fractional systems : an overview of existing methods and improvements. *An Int. J. of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems. Special issue : Fractional Derivatives and Their Applications.*, 38(1-4) :117–131, 2004.
- [20] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM proceedings - Systèmes Différentiels Fractionnaires - Modèles, Méthodes et Applications*, 5, 1998.
- [21] K.B. Oldham et J. Spanier. *The fractional calculus*. Academic Press, New-York and London, 1974.
- [22] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, et J.-L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. *Proceedings of 12th IFAC Symposium on System Identification, SYSID*, Santa Barbara, USA, June 2000.
- [23] F.R. Gantmacher. *Théorie des matrices*. t.1, Dunod, Paris, 1966.