



HAL
open science

Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèle

Anca Maria Nagy, Gilles Mourot, José Ragot, Georges Schutz, Serge Gillé

► **To cite this version:**

Anca Maria Nagy, Gilles Mourot, José Ragot, Georges Schutz, Serge Gillé. Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèle. 3^e Journées Doctorales en Hydrologie Urbaine, JDHU 2008, Oct 2008, Nancy, France. pp.CDRom. hal-00977465

HAL Id: hal-00977465

<https://hal.science/hal-00977465>

Submitted on 11 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèle

Anca Maria Nagy *, Gilles Mourot*, José Ragot*, Georges Schutz**, Serge Gillé **

* Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy Université, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2, avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex France

(E-mail : { *anca-maria.nagy, gilles.mourot, jose.ragot* }@ensem.inpl-nancy.fr)

** Centre de Recherche Public "Henri Tudor", Laboratoire de Technologies Industrielles et Matériaux, 29, Avenue John F.Kennedy, L-1855 Luxembourg-Kirchberg

(E-mail : { *georges.schutz, serge.gille* }@tudor.lu)

Résumé

Cet article propose une méthode analytique de décomposition de systèmes non-linéaires dynamiques sous forme multimodèle, afin d'en réduire la complexité. Cette réduction s'avère nécessaire afin de pouvoir étudier plus facilement des problèmes d'identification, de commande, d'analyse de stabilité. La plupart des méthodes existantes sont basées sur des techniques de réduction d'ordre, qui s'accompagnent d'une perte d'information du système non-linéaire initial, la méthode proposée ici ne l'apportant pas. La structure multimodèle constitue un outil efficace de représentation des systèmes non-linéaires, car présente l'avantage de décomposer un système non-linéaire en plusieurs sous-modèles linéaires à temps invariant (LTI) qui sont pondérés et qui permettent de bénéficier de propriétés importantes comme l'analyse de la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité. Cette méthode est appliquée au modèle ASM1 simplifié d'une station d'épuration à boues activées.

Mots clés

multimodèle ; réacteur biologique ; réduction de complexité ; transformation polytopique

INTRODUCTION

Le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires apparaît dans de nombreux domaines scientifiques et en ingénierie. De nombreuses techniques de décomposition et de simplification ont été développées au cours de ces dernières années, en vue de réaliser une réduction de cette complexité, en fonction d'objectifs d'identification, de commande,...

La réduction de la complexité repose, dans la plupart des études réalisées, sur une réduction de l'ordre du système avec une perte d'information (Dolgin and Zeheb (2005), Sayesel and Barlas (2006), Steffens et al. (1997)). Une autre façon de résoudre le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires est de réécrire le système non-linéaire d'une manière plus facile à étudier, en le décomposant en unités plus simples et maîtrisables, sans perdre de l'information.

Le multimodèle (Murray-Smith and Johansen (1997)) constitue une alternative très intéressante et un outil très utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non-linéaires. Le multimodèle est basée sur la décomposition du comportement dynamique du système en plusieurs zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-modèle. En fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque sous-modèle contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle au modèle global, qui est une combinaison convexe des sous-modèles, est définie par une fonction de pondération. Dans la littérature sont utilisées plusieurs terminologies, qui sont équivalentes, pour définir ce type de modèles : le multimodèle (Murray-Smith and Johansen (1997)), le modèle flou de Takagi-Sugeno (Takagi and Sugeno (1985)), le modèle linéaire polytopique (PLM) (Angelis (2001)).

L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèles est que des propriétés importantes comme la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité ont été largement étudiées dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant (LTI) ; elles peuvent être utilisées, au moins partiellement, sur les multimodèles si les sous-systèmes qui les constituent sont de type linéaire et pour des fonctions de pondération particulières (Akhenak et al. (2004)).

La structure multimodèle est ainsi utilisée pour réduire la complexité d'un modèle de type ASM1 (Activated Sludge Model no.1) (Olsson and Newell (1999)) qui décrit un processus de biodégradation d'un réacteur à boues activées. Différentes techniques de linéarisation ont été proposées, parmi lesquelles une linéarisation autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement (Smets et al. (2006)), en vue d'obtenir un multimodèle. La perte d'information constitue un premier inconvénient de ces techniques. Deuxièmement, le choix de variables de prémisses exprimant les différentes non-linéarités du système, ainsi que le choix des différents points de fonctionnement restent encore très délicat.

Dans la suite, on va présenter une procédure systématique de transformation d'un système non-linéaire en le réécrivant sous une forme multimodèle, en évitant ces inconvénients majeurs : la transformation est réalisée sans perte d'information, le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire, le choix de variables de prémisses est réalisé d'une façon plus systématique. En partant d'une forme générale du système non-linéaire, une représentation d'état linéaire à paramètres variables (LPV) est réalisée. Cette représentation LPV constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope. Ceux-ci sont obtenus en utilisant la transformation polytopique convexe (TPC) (Wang et al. (1996)). Les matrices à coefficients constants forment les représentations des sous-modèles du multimodèle, la non-linéarité du système étant rejetée dans les fonctions de pondération des sous-

modèles. Le multimodèle obtenu par cette méthode n'est pas unique, il dépend du choix des scalaires qui définissent la transformation polytopique convexe et du choix de variables de prémisses.

Cette méthode sera appliquée au modèle ASM1 simplifié d'une station d'épuration à boues activées. Dans la dernière section seront données quelques conclusions sur la méthodologie proposée et quelques perspectives.

MÉTHODOLOGIE

Cette section est consacrée à la méthodologie générale du passage d'un système non-linéaire, présenté sous forme générale, vers un multimodèle. La méthode proposée est analytique et le multimodèle obtenu est équivalent au système non-linéaire initial.

Dans un premier temps, à partir de la forme générale d'un système non-linéaire, on réécrit le système sous la forme LPV. En général, pour un système dynamique non-linéaire, cette représentation n'est pas unique et de ce fait, il faut définir des critères de choix d'une représentation LPV qui correspondent aux objectifs de l'étude. A chaque représentation LPV correspond un ensemble de variables de prémisses. Dans un deuxième temps, ces variables de prémisses seront partitionnées en deux en utilisant la transformation polytopique convexe. La combinaison des partitions des différentes variables de prémisses contribueront à la construction des sous-modèles du multimodèle et des fonctions de pondération correspondantes. Le multimodèle sera ainsi une combinaison convexe de sous-modèles linéaires, la non-linéarité du système étant transférée dans les fonctions de pondération de chaque sous-modèle.

Introduisons les deux notions de transformation polytopique convexe et de multimodèle.

Le multimodèle

Ce type de modèle permet de représenter les systèmes non-linéaires dynamiques sous la forme d'une combinaison convexe de r sous-systèmes linéaires, considérés comme des *modèles locaux*

(Mourot et al. (1999)) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \cdot [A_i \cdot x(t) + B_i \cdot u(t) + \beta_i] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \cdot [C_i \cdot x(t) + D_i \cdot u(t) + \delta_i] \end{cases} \quad (1)$$

$x \in \mathbf{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathbf{R}^m$ le vecteur de entrées et $y \in \mathbf{R}^l$ le vecteur de sorties. $A_i, B_i, \beta_i, C_i, D_i, \delta_i$ sont des matrices à coefficients constants de dimensions appropriées. β_i et δ_i sont des termes issus de la linéarisation qui expriment la caractéristique locale des sous-modèles. La fonction $\mu_i(x, u)$ représente la pondération du modèle local i , représenté, dans le modèle global, par $\{(A_i, B_i, \beta_i, C_i, D_i, \delta_i)\}$. Les fonctions de pondération $\mu_i(x, u)$ ont la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) = 1; \mu_i(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$$

La transformation polytopique convexe

Lemme 1. Soit $h(x(t), u(t))$ une fonction continue et bornée sur le domaine $[x_0, x_1] \times [u_0, u_1]$ à valeurs dans \mathbf{R} , avec $x_0, x_1, u_0, u_1 \in \mathbf{R}$.

Alors il existe deux fonctions ($i = 1, 2$)

$$F_i : [x_0, x_1] \times [u_0, u_1] \longmapsto [0, 1]$$

$$(x(t), u(t)) \longmapsto F_i(x(t), u(t))$$

avec $F_1(x(t), u(t)) + F_2(x(t), u(t)) = 1$ telles que :

$$h(x(t), u(t)) = F_1(x(t), u(t)) \cdot h_1 + F_2(x(t), u(t)) \cdot h_2$$

$$\forall h_1 \geq \max_{x,u} \{h(x, u)\} \text{ et } h_2 \leq \min_{x,u} \{h(x, u)\}$$

Les fonctions F_1 et F_2 sont définies par :

$$F_1(x(t), u(t)) = \frac{h(x(t), u(t)) - h_2}{h_1 - h_2}$$

$$F_2(x(t), u(t)) = \frac{h_1 - h(x(t), u(t))}{h_1 - h_2}$$

Notons que cette décomposition n'est pas unique.

Méthode analytique de simplification de structure

Une large catégorie de systèmes non-linéaires dynamiques peut être représentée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2)$$

où $f(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{R}^n$ et $g(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbf{R}^l$.

Dans une première étape, sous l'hypothèse que $f(x(t), u(t))$ et $g(x(t), u(t))$ soient continues et bornées sur $U \subseteq \mathbf{R}^n$ avec $f(0, \cdot) = 0$ et $g(0, \cdot) = 0$, le système (2) peut être représenté sous forme LPV :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t), u(t)) \cdot x(t) + B(x(t), u(t)) \cdot u(t) \\ y(t) = C(x(t), u(t)) \cdot x(t) + D(x(t), u(t)) \cdot u(t) \end{cases} \quad (3)$$

où $A(x, u) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B(x, u) \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C(x, u) \in \mathbf{R}^{l \times n}$, $D(x, u) \in \mathbf{R}^{l \times m}$.

Présenter le système non-linéaire (2) sous la forme LPV (3) revient à exprimer chaque composante $x_i(t)$ de l'état $x(t)$ et chaque composante $y_j(t)$ de la sortie $y(t)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{q=1}^n a_{i,q}(x, u) \cdot x_q(t) + \sum_{s=1}^m b_{i,s}(x, u) \cdot u_s(t) \\ y_j(t) &= \sum_{q=1}^n c_{j,q}(x, u) \cdot x_q(t) + \sum_{s=1}^m d_{j,s}(x, u) \cdot u_s(t) \end{aligned} \quad (4)$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, l$.

Cette forme LPV explicite (4) réalise une répartition des différentes non-linéarités du système ($a_{i,q}, b_{i,s}, c_{j,q}, d_{j,s}$) auprès des différentes composantes de l'état et/ou de l'entrée.

Les matrices $A(x, u)$, $B(x, u)$, $C(x, u)$ et $D(x, u)$ dépendent respectivement des coefficients $a_{i,q}, b_{i,s}, c_{j,q}, d_{j,s}$. Ainsi :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(x, u) & \cdots & a_{1,n}(x, u) \\ \vdots & & \\ a_{n,1}(x, u) & \cdots & a_{n,n}(x, u) \end{bmatrix} \quad (5)$$

les expressions de B , C et D étant analogue.

A partir de la représentation LPV issue du système

(2) et donnée sous forme explicite dans (3) et (4), on définit l'ensemble des variables de prémisses V_z de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V_z = & \{a_{i,q}(x, u) \mid a_{i,q} \neq \text{const}, i = \overline{1, n}, q = \overline{1, n}\} \cup \\ & \cup \{b_{i,s}(x, u) \mid b_{i,s} \neq \text{const}, i = \overline{1, n}, s = \overline{1, m}\} \cup \\ & \cup \{c_{j,q}(x, u) \mid c_{j,q} \neq \text{const}, j = \overline{1, l}, q = \overline{1, n}\} \cup \\ & \cup \{d_{j,s}(x, u) \mid d_{j,s} \neq \text{const}, j = \overline{1, l}, s = \overline{1, m}\} \end{aligned}$$

Dans la suite on va noter plus simplement :

$$V_z = \{z_1(x, u), \dots, z_p(x, u) \mid p \leq (n+l)(n+m)\}$$

où p représente la dimension de l'ensemble V_z et $z_1(x, u), \dots, z_p(x, u)$ sont les variables de prémisses, qui représentent les non-linéarités identifiées à partir de la forme LPV du système (2).

Remarque 1. $(n+l) \times (n+m)$ représente le nombre maximal de variables de prémisses.

En général, la représentation LPV (3) pour un système non-linéaire de la forme (2) n'est pas unique ; à chaque représentation LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisses ; choisir une représentation LPV est équivalent à choisir un ensemble de variables de prémisses.

Le choix de l'ensemble des variables de prémisses V_z est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et la structure du modèle global. De plus, ce choix est lié à la décomposition (4) de chaque variable d'état et de chaque sortie, car très souvent, comme déjà mentionné, cette décomposition n'est pas unique.

Remarque 2. Le nombre de sous-modèles qui constituent le multimodèle est égal à $r = 2^p$. En effet, chaque variable de prémisses possède un maximum et un minimum qui seront combinées deux à deux pour constituer ces sous-modèles.

Les matrices à paramètres variables qui interviennent dans la forme LPV du système (2) sont des combinaisons linéaires de matrices à coefficients constants ($\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$) ; par exemple, la matrice $A(x, u)$ peut être exprimée comme suit :

$$A(x, u) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_j(x, u) \cdot \mathcal{A}_j \quad (6)$$

L'ensemble \mathcal{I}_A contient les indices correspondants aux variables de prémisses qui interviennent dans la matrice A . La matrice \mathcal{A}_0 , ayant la même dimension que la matrice A , correspond aux éventuels termes constants ($a_{i,j}$) qui peuvent intervenir dans la matrice $A(x, u)$. Les matrices \mathcal{A}_j sont des matrices de la même dimension que A qui contiennent à la position correspondant à z_j le terme constant 1, et des zéros pour toutes les autres positions. Les matrices $B(x, u), C(x, u), D(x, u)$ sont exprimées de la même façon que $A(x, u)$.

Dans une deuxième étape, on génère les 2^p sous-modèles d'un multimodèle caractérisé par les p variables de prémisses, chaque variable étant partitionnée en deux, à l'aide de la transformation polytopique convexe (pour tout $j = 1, \dots, p$) :

$$z_j(x, u) = F_{j,1}(z_j) \cdot z_{j,1} + F_{j,2}(z_j) \cdot z_{j,2} \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{j,1}(z_j) &= \frac{z_j(x) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \\ F_{j,2}(z_j) &= \frac{z_{j,1} - z_j(x)}{z_{j,1} - z_{j,2}} \end{aligned} \quad (8)$$

On choisit, par exemple :

$$\begin{aligned} z_{j,1} &= \max_x \{z_j(x, u)\} \\ z_{j,2} &= \min_x \{z_j(x, u)\} \end{aligned} \quad \forall j = 1, \dots, p \quad (9)$$

A chaque sous-modèle i , représenté dans le tableau par la ligne i , correspond un p -uplet σ_i qui code les partitions des variables de prémisses intervenant dans la fonction de pondération correspondant à ce sous-modèle. On peut ainsi construire, comme dans l'exemple précédent, un tableau regroupant l'ensemble des partitions des variables de prémisses. Ainsi, dans ce tableau, on retient dans la ligne i les colonnes qui contiennent la valeur binaire 1. A chaque valeur binaire 1 choisie correspond une des deux partitions de chaque variable de prémisses. En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions on obtient la fonction de pondération $\mu_i(z)$ correspondant au sous-modèle i ($i = 1, \dots, r$) :

$$\mu_i(z) = \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j}(z_j(x, u)) \quad (10)$$

où σ_i^k représente l'indice à la $k^{\text{ème}}$ position dans le p -uplet σ_i . Alors $\sum_{i=1}^r \mu_i(z) = 1$ et $\mu_i(z) \geq 0$, car :

$$F_{j,1}(z_j(x, u)) + F_{j,2}(z_j(x, u)) = 1, \forall j = 1, \dots, p$$

Table 1. – Tableau de partitionnement des variables de prémisses pour un multimodèle à p variables de prémisses et deux partitions pour chaque variable

Sous-modèle	Partitions						σ_i
	z_1		z_2		z_p		
i	$F_{1,1}$	$F_{1,2}$	$F_{2,1}$	$F_{2,2}$	$F_{p,1}$	$F_{p,2}$	
1	1	0	1	0	1	0	(1,1,...,1)
2	1	0	1	0	0	1	(1,1,...,2)
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2^{p-2}	\vdots	\vdots	1	0	\vdots	\vdots	\vdots
$2^{p-2} + 1$	\vdots	\vdots	0	1	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
					1	0	(1,2,...,1)
2^{p-1}	1	0	0	1	0	1	(1,2,...,2)
$2^{p-1} + 1$	0	1	1	0	1	0	(2,1,...,1)
					0	1	(2,1,...,2)
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	1	0	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	0	1	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
					1	0	(2,2,...,1)
2^p	0	1	0	1	0	1	(2,2,...,2)

Il faut noter que les fonctions matricielles $A(x, u)$, $B(x, u)$, $C(x, u)$ et $D(x, u)$ font intervenir les variables de prémisses z_j pour $j = 1, \dots, p$. Notons respectivement \mathcal{I}_A , \mathcal{I}_B , \mathcal{I}_C , \mathcal{I}_D les ensembles des indices des variables de prémisses qui interviennent dans les matrices $A(x, u)$, $B(x, u)$, $C(x, u)$ et $D(x, u)$. Ainsi, on va évaluer les matrices A , B , C et D aux sommets du polytope définis par les partitions des variables de prémisses intervenant dans ces matrices pour déterminer les matrices A_i , B_i , C_i et D_i ($i = 1, \dots, r$), qui sont les matrices à coefficients constants relatives à chaque sous-modèle :

$$A_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_{j, \sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \quad (11)$$

B_i , C_i et D_i s'écrivent de la même façon. Ce fait est détaillé dans la démonstration du résultat suivant :

Théorème 1. *Le multimodèle (1), qui représente une combinaison convexe de sous-modèles linéaires $\{(A_i, B_i, C_i, D_i)\}$ ($i = 1, \dots, r$), est équivalent au système (2).*

On peut remarquer que cette méthode produit un multimodèle sans utiliser de techniques de linéarisation qui nécessitent un choix délicat de différents points de fonctionnement du système, ainsi qu'un choix des variables de prémisses.

RESULTATS ET DISCUSSIONS

Application de la méthode au modèle d'un réacteur à boues activées

Dans cette section, la méthode analytique de décomposition développée dans la section précédente est appliquée à un modèle de réacteur à boues activées, le modèle ASM1 réduit, en considérant seulement la pollution carbonée (Olsson and Newell (1999)).

L'épuration par boues activées consiste à mettre en contact par brassage les eaux usées avec un mélange riche en bactéries pour dégrader la matière organique en suspension ou dissoute. Dans l'étude du réacteur à boues activées plusieurs modes de fonctionnement peuvent être considérés : asservissement à partir d'un volume de référence, réacteur à volume constant, écoulement libre à la sortie du réacteur, débits entrant et sortant commandés. La première situation est présentée et peut être décrite à partir d'un bilan biomasse, carbone, oxygène en milieu aérobie.

En considérant seulement la pollution carbonée, le réacteur à boues activées peut être représenté par le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{out} \\ \frac{d(V \cdot X_{BH})}{dt} = q_{in} X_{BH, in} - q_{out} X_{BH, out} + r_H V \\ \frac{d(V \cdot S_S)}{dt} = q_{in} S_{S, in} - q_{out} S_{S, out} + r_S V \\ \frac{d(V \cdot S_O)}{dt} = q_{in} S_{O, in} - q_{out} S_{O, out} + r_O V + K q_a V (S_{O, sat} - S_O) \end{cases} \quad (12)$$

où la signification des variables est la suivante : V est le volume du réacteur, X_{BH} est la concentration

de la biomasse hétérotrophe, S_S est la concentration du substrat rapidement biodégradable, S_O est la concentration de l'oxygène dissout, q représente le débit et q_a le débit d'air. Les indices *in* et *out* correspondent à l'entrée et, respectivement à la sortie du réacteur. r_H , r_S et r_O , représentant respectivement les cinétiques des réactions de la biomasse hétérotrophe X_{BH} , du carbone S_S et de l'oxygène S_O , sont modélisées par :

$$\begin{cases} r_H = \frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} - \\ \quad - (1-f) b_H X_{BH} \\ r_S = -\frac{1}{Y_Y} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} + \\ \quad + (1-f) b_H X_{BH} \\ r_O = \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \end{cases} \quad (13)$$

Différente quantités interviennent dans (12) et (13) : $S_{O,sat}$ la concentration de saturation de l'oxygène ; K_S , K_{OH} des constantes de demi-saturation ; Y_Y , Y_H et f des coefficients pour le calcul des taux de conversion des différents produits dans différents processus réactionnels (croissance ou mortalité), b_H , μ_H des coefficients cinétiques hétérotrophe, K le gain du régulateur en oxygène.

Sous l'hypothèse d'homogénéité du réacteur, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} X_{BH,out} = X_{BH} \\ S_{S,out} = S_S \\ S_{O,out} = S_O \end{cases}$$

On suppose nulle la concentration en oxygène dissout à l'entrée du réacteur ($S_{O,in}$).

D'un point de vue pratique, le système est contrôlé et on prend en compte un asservissement à partir d'un volume de référence V_{ref} . Ce dernier utilise une commande combinée a priori/a posteriori du type :

$$q_{out} = q_{in} + K_1 \cdot (V_{ref} - V)$$

Si on remplace r_H , r_S et r_O données dans (13),

alors le système (12) devient :

$$\begin{cases} \dot{V} = -K_1 \cdot (V_{ref} - V) \\ \dot{X}_{BH} = \frac{q_{in}}{V} (X_{BH,in} - X_{BH}) - (1-f) b_H X_{BH} + \\ \quad + \frac{\mu_H}{Y_H} \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \\ \dot{S}_S = \frac{q_{in}}{V} (S_{S,in} - S_S) + (1-f) b_H X_{BH} - \\ \quad - \frac{\mu_H}{Y_Y} \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \\ \dot{S}_O = -\frac{q_{in}}{V} S_O + K q_a (S_{O,sat} - S_O) + \\ \quad + \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \end{cases} \quad (14)$$

Le vecteur des états et le vecteur des commandes sont définis par :

$$x = [V \ X_{BH} \ S_S \ S_O]^T$$

$$u = [X_{BH,in} \ S_{S,in} \ q_a \ V_{ref}]^T$$

Pour mettre le système sous une forme multimodèle, chaque équation d'état de (14) doit être présentée, dans un premier temps, sous une forme LPV, comme dans (4). Alors, on définit les fonctions matricielles :

$$A(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$B(z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{1,4} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{4,3} & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= K_1 \\ a_{2,2} &= \frac{\mu_H}{Y_H} \cdot z_1 - z_2 - (1-f) b_H \\ a_{3,2} &= -\frac{\mu_H}{Y_Y} \cdot z_1 + (1-f) b_H \\ a_{3,3} &= -z_2 \\ a_{4,2} &= \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \cdot z_1 \\ a_{4,4} &= -K \cdot q_a - z_2 \\ b_{1,4} &= -K_1 \\ b_{2,1} &= b_{3,2} = z_2 \\ b_{4,3} &= K \cdot S_{O,sat} \end{aligned}$$

Le système présente deux non-linéarités. On prend alors comme variables de prémisses :

$$\begin{cases} z_1(S_S, S_O) = \frac{S_S}{K_S + S_S} \cdot \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} \\ z_2(q_{in}, V) = \frac{q_{in}}{V} \end{cases} \quad (15)$$

L'idée de prendre la variable de prémisses z_1 comme produit entre deux lois de Monod, sans les séparer, est de réduire ainsi le nombre de variables de prémisses.

Dans un deuxième temps, en utilisant la transformation polytopique convexe (**Lemme 1**), les deux non-linéarités z_1 et z_2 s'écrivent comme dans (7), où les partitions de chaque variable de prémisses sont construites de la même manière que dans (8) et avec les scalaires (9). Pour calculer les maxima et les minima qui interviennent dans les expressions de z_1 et z_2 , on utilise le fait que V , S_S , S_O et q_{in} sont bornées. Alors, on peut calculer les maxima et les minima de z_1 et z_2 , et enfin déterminer les scalaires $z_{j,1}$ et $z_{j,2}$ ($j = 1, 2$) comme dans (9). On a alors $2^2 = 4$ sous-modèles représentés par les paires (A_i, B_i) ($i = 1, \dots, 4$) :

$$\begin{aligned} A_1 &= A(z_{1,1}, z_{2,1}) & B_1 &= B(z_{2,1}) \\ A_2 &= A(z_{1,1}, z_{2,2}) & B_2 &= B(z_{2,2}) \\ A_3 &= A(z_{1,2}, z_{2,1}) & B_3 &= B(z_{2,1}) \\ A_4 &= A(z_{1,2}, z_{2,2}) & B_4 &= B(z_{2,2}) \end{aligned}$$

Le multimodèle est obtenu en agrégeant les quatre sous-modèles précédents, les pondérations $\mu_i(x, u)$ étant calculées conformément à (10). A la figure 1 on peut voir l'évolution du système (14) pour : $K_1 = 0.01$, $V_{ref} = 8[10^6 l]$, $K_S = 20[mg/l]$, $K_{OH} = 0.2[mg/l]$, $S_{O,sat} = 10[mg/l]$, $K = 2.3[mg/l]$, $b_H = 0.4[1/24h]$, $\mu_H = 3.733[1/24h]$, $Y_Y = 0.3$, $Y_H = 0.6$ et $f = 0.1$, avec les conditions initiales :

$$(V(0), X_{BH}(0), S_S(0), S_O(0))^T = (8, 5, 4.2, 3)^T$$

Le débit q_{in} à l'entrée du réacteur influe sur les trois concentrations X_{BH} , S_S et S_O et sur les fonctions de pondération de chaque sous-modèle. Une croissance du débit d'entrée (q_{in}) produit une augmentation de la concentration du substrat (S_S) et de la concentration de biomasse hétérotrophe (X_{BH}), ainsi qu'une baisse de la concentration en oxygène dissout (S_O). En même temps, S_O est directement influencé par le débit d'air (q_a), X_{BH} et S_S à l'intérieur du réacteur étant influencées par les concentrations correspondantes à l'entrée du réacteur ($X_{BH,in}$ et $S_{S,in}$).

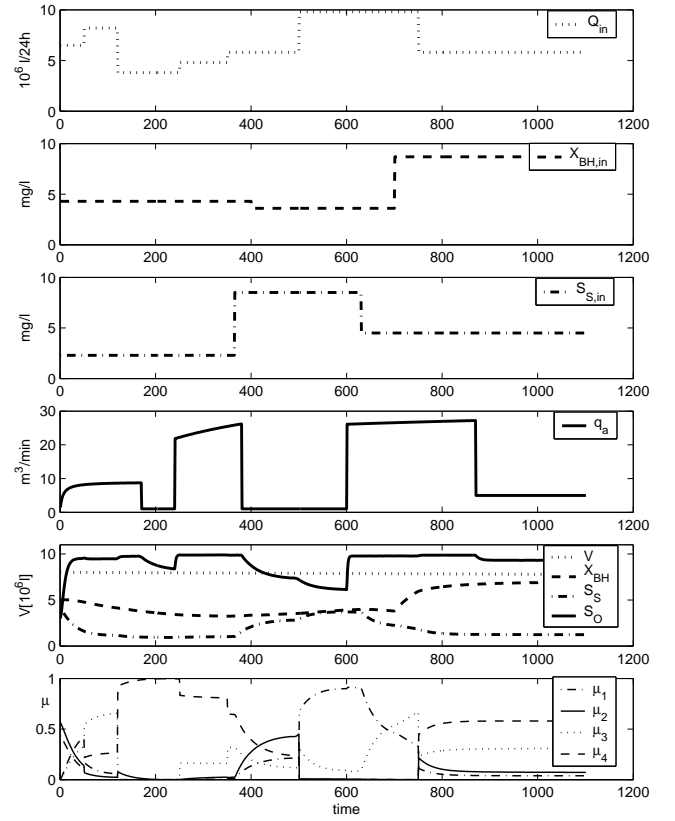


Figure 1. – L'évolution du système (14) et les fonctions de pondération du multimodèle associées

CONCLUSION

Cet article propose une méthode analytique générale de simplification de complexité d'un modèle non-linéaire auquel est substitué un ensemble de sous-modèles de structures plus simples, linéaires, et un ensemble de fonctions d'agrégation appropriées afin de réunir ces sous-modèles pour constituer le modèle global.

En plus de ces points techniques, les multimodèles obtenus seront utilisés, grâce à leurs propriétés particulières, pour l'estimation d'état et ses applications au diagnostic de fonctionnement de systèmes. La méthodologie de simplification de la complexité proposée en général dans la littérature suppose une réduction d'ordre du système, obtenu par différents techniques de linéarisation appliquées autour de points de fonctionnement bien choisis. La diffi-

culté du choix de ces points est la raison pour laquelle cet article propose une méthode analytique plus générale qui réalise une réécriture sous forme multimodèle sans la nécessité de choisir ces points de fonctionnement. Il est important de noter que le multimodèle obtenu est identique au système initial, cette méthode offrant la possibilité de réduire le nombre de sous-modèles par un choix adéquat de variables de prémisses.

D'un point de vue pratique, cette méthode est appliquée à un modèle ASM1 simplifié de réacteur à boues activées, et conduit à une structure multimodèle construite sur la base de quatre sous-modèles. Même si dans cet article on a traité le cas d'un modèle ASM1 réduit, en considérant seulement la partie carbonée, la méthode proposée peut s'étendre à un modèle plus général, les difficultés rencontrées étant similaires.

Comme perspectives de développement de cette méthode, on envisage de définir des critères de choix d'une structure LPV en fonction de l'usage du modèle en commande, simulation et diagnostic.

Bibliographie

- Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., and Maquin, D. (2004). Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model. In *11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM*.
- Angelis, G. Z. (2001). *System Analysis, Modelling and Control with Polytopic Linear Models*. Technische Universiteit Eindhoven.
- Dolgin, Y. and Zeheb, E. (2005). Model reduction of uncertain systems retaining the uncertainty structure. *Systems and Control Letters*, 54 :771–779.
- Mourot, G., Gasso, K., and Ragot, J. (1999). Modelling of ozone concentrations using a takagi-sugeno model. *Control Engineering Practice*, 7(6) :707–715.
- Murray-Smith, R. and Johansen, T. (1997). *Multiple model approaches to modelling and control*. Taylor & Francis, London.
- Olsson, G. and Newell, B. (1999). *Wastewater Treatment Systems. Modelling, Diagnosis and Control*. IWA Publishing.
- Sayesel, A. K. and Barlas, Y. (2006). Model simplification and validation with indirect structure validity tests. *System Dynamics Reviews*, 22(3) :241–262.
- Smets, I., Verdickt, L., and Van Impe, J. (2006). A linear ASM1 based multi-model for activated sludge systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12(5) :489–503.
- Steffens, M., Lant, P., and Newell, R. (1997). A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment models. *Water Research*, 31(3) :590–606.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernet*, 15 :166–172.
- Wang, H. O., Tanaka, K., and Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :14–23.