HAL
open science

Stabilisation de la formule des traces tordue V: intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel

Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Stabilisation de la formule des traces tordue V: intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel. 2014. hal-00975136

HAL Id: hal-00975136

https://hal.science/hal-00975136v1

Preprint submitted on 8 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation de la formule des traces tordue V : intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel

J.-L. Waldspurger

2 avril 2014

La stabilisation de la formule des traces tordue nécessite quelques travaux préliminaires. Voici l'un d'eux. Dans deux articles précédents ([II] et [III]), on a traité des intégrales orbitales pondérées et de leur stabilisation, le corps de base étant local non-archimédien. On considère ici la même question, le corps de base étant cette fois réel. Quelles sont les différences ? De temps en temps, on doit faire un peu plus de topologie que sur un corps local non-archimédien. En effet, dans le cas réel, les distributions sont des formes linéaires continues sur des espaces de fonctions. Cette continuité est essentielle et intervient dans la plupart des démonstrations. Mais ceci n'induit guère de changement dans la structure des preuves. Il y a une différence beaucoup plus perturbante. Utilisons les notations des articles précedents : G est un groupe réductif connexe défini sur un corps local F, $\tilde{G}$ est un espace tordu sous G et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_F;Z(\hat{G}))$ dont se déduit un caractère ω de $G(F)$. On définit l'espace $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ des distributions ω-équivariantes à support contenu dans un nombre fini de classes de conjugaison. On note $D_{orb}(\tilde{G}(F),\omega)$ le sous-espace engendré par les intégrales orbitales. Si F est non-archimédien, ces deux espaces sont égaux. Dans le présent article, on a $F=\mathbb{R}$ et ces deux espaces ne sont plus du tout égaux. Pour un espace de Levi $\tilde{M}$, on définit à la suite d'Arthur les intégrales orbitales pondérées tordues et leurs variantes ω-équivariantes. On peut considérer ces dernières comme des formes bilinéaires $(\boldsymbol{\gamma},f)\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},f)$, où f appartient à $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $\boldsymbol{\gamma}$ appartient à $D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. La définition ne s'étend pas de façon simple à $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. Quand on veut "stabiliser" ces intégrales, on est conduit à transférer les distributions $\boldsymbol{\gamma}$. Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. Supposons que l'on soit dans une situation simple où le recours à des données auxiliaires ne soit pas nécessaire. On peut alors définir un transfert

$$D_{géom}^{st}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))\to D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega),$$

où $D_{géom}^{st}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))$ est le sous-espace des éléments de $D_{géom}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))$ qui sont stables. Notons de même $D_{orb}^{st}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))$ le sous-espace des éléments de $D_{orb}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))$ qui sont stables. Comme le montre un exemple dû à Magdy Assem (je remercie Kottwitz de me l'avoir indiqué), le transfert n'envoie pas en général l'espace $D_{orb}^{st}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))$ dans $D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. Les constructions que l'on a faites en [II] sur un corps local non-archimédien s'effondrent si on se limite aux espaces D_{orb}. La méthode utilisée par Arthur pour résoudre ce problème consiste à généraliser la définition des intégrales $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ aux éléments $\boldsymbol{\gamma}$ de $D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ tout entier, cf. [A1]. Nous utilisons une autre méthode. Dans un premier temps, on se limite aux éléments de $D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ dont le support est formé d'éléments $\gamma\in\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui sont $\tilde{G}$-équisinguliers, c'est-à-dire tels que $M_\gamma=G_\gamma$. Pour de tels éléments,

il est facile d'étendre la définition des termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$. La théorie, restreinte à ces distributions, est alors très semblable à celle du cas non-archimédien. C'est l'objet de la section 1. Pour traiter les distributions à support quelconque, on définit par récurrence un espace $D_{tr-orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$, cf. section 2. C'est grosso-modo l'espace engendré par $D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ et par les images par transfert endoscopique d'espaces $D_{tr-orb}^{st}(\tilde{M}'(\mathbb{R}))$ quand $\mathbf{M}'$ parcourt toutes les données endoscopiques de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. Cette définition assure que ces espaces sont "stables par transfert", en un sens assez clair. Le point est de montrer que l'on peut étendre la définition des termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ aux éléments $\boldsymbol{\gamma}\in D_{tr-orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. On énonce précisément en 2.4 toutes les propriétés que ces termes doivent vérifier. Les preuves, dont le seul intérêt est d'exister, sont l'objet des sections 3, 4 et 5. En gros, on montre que les termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ peuvent être définis par un procédé de limite similaire à celui qu'utilise Arthur pour les définir dans le cas où $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale à support singulier. En fait, dans le cas général, on ne mène à bien ce programme qu'en admettant une hypothèse. Celle-ci est l'assertion principale de la stabilisation, à savoir l'égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ quand $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale à support fortement $\tilde{G}$-régulier. A ce gros problème de définition près, les preuves sont très similaires à celles du cas non-archimédien. On ne les reprendra que rapidement. Le point qui nous intéressera surtout sera de vérifier que l'on ne sort jamais d'espaces pour lesquels tous les termes sont définis. On obtient les mêmes résultats qu'en [III], c'est-à-dire que tous les résultats espérés résultent de l'assertion principale évoquée ci-dessus. Comme on vient de le dire, la différence est que non seulement les résultats eux-mêmes dépendent de l'assertion principale mais même la définition de certains termes en dépend. Toutefois, on obtient des définitions et résultats non conditionnels dans le cas où G est quasi-déployé, $\tilde{G}$ est à torsion intérieure et $\mathbf{a}=1$. Dans ce cas, on montre par la même méthode qu'en [III] que l'assertion principale est conséquence des résultats d'Arthur.

Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. L'intérêt des constructions des paragraphes 2 à 5 est que le germe en $a=1$ de la fonction $a\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma},f)$ appartient à un espace de germes que l'on contrôle bien. C'est ce qui nous permet d'obtenir les résultats voulus. Toutefois, pour certaines applications ultérieures, la définition qu'elles nous fournissent de $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},f)$ n'a pas la meilleure forme possible. Il s'avère que l'on aura besoin d'une autre approximation de cette intégrale, que nous établissons dans la section 6. Dans cette nouvelle approximation, on perd sur l'espace des germes de fonctions en a, qui est moins contrôlable. Par contre, il n'intervient plus dans la formule que des intégrales $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{L}}(a),f)$, où $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{L}}(a)$ est une distribution sur $\tilde{L}(\mathbb{R})$ à support $\tilde{G}$-équisingulier. On obtient ainsi une approximation de $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},f)$ par de telles intégrales.

Dans la dernière section, on dira quelques mots du cas où le corps de base n'est plus $\mathbb{R}$ mais $\mathbb{C}$.

1 Intégrales orbitales pondérées

1.1 La situation

Dans cet article, le corps de base est $\mathbb{R}$. On considérera soit un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ comme en [IV] 1.1, soit un "K-triplet" $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$ comme en [I] 1.11. Dans le premier cas, on fixe un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0$ de $\tilde{G}$ et un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{R})$ en bonne position relativement à M_0. Dans le second, on écrit $K\tilde{G}=(\tilde{G}_p)_{p\in\Pi}$. Pour

tout $p \in \Pi$, on fixe un espace de Levi minimal $\tilde{M}_{p,0}$ de $\tilde{G}_p$ et un sous-groupe compact maximal K_p de $G_p(\mathbb{R})$ qui soit en bonne position relativement à $M_{p,0}$. On définit le K-espace de Levi minimal $K\tilde{M}_0$ de $K\tilde{G}$ et l'ensemble $\mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ comme en [I] 3.5. On notera symboliquement $K = (K_p)_{p\in\Pi}$. D'une façon générale, on simplifie la notation en supprimant la lettre K de $K\tilde{G}$ pour les objets indépendants de $p \in \Pi$, par exemple on pose $dim(G) = dim(G_p)$ pour tout p.

On raisonne par récurrence sur $dim(G_{SC})$. Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets quasi-déployés et à torsion intérieure $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets quasi-déployés et à torsion intérieure $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$, ainsi que toutes les assertions concernant un triplet $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ quelconque tel que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Si une assertion concerne un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, on suppose connues toutes les assertions concernant le même triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et un espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ tel que $\tilde{L} \neq \tilde{M}$. Pour démontrer une assertion concernant un K-triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets quasi-déployés et à torsion intérieure $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$ et toutes les assertions concernant des K-triplets $(KG', K\tilde{G}', \mathbf{a})$ tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$ (c'est-à-dire que, pour nous, la notion de K-triplet quasi-déployé et à torsion intérieure n'existe pas). Si une assertion concerne un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, on suppose connues toutes les assertions concernant le même triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})$ tel que $K\tilde{L} \neq K\tilde{M}$.

1.2 L'application $\phi_{\tilde{M}}$

Jusqu'en 1.7, on considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. En [W1] 6.4, on a défini, en suivant Arthur, une application $\phi_{\tilde{M}}$ qui, dans le cas qui nous occupe où le corps de base est $\mathbb{R}$, n'était définie que sur l'espace $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ des fonctions K-finies. Cela parce que l'on utilisait le théorème de Paley-Wiener de Delorme-Mezo, qui s'applique à ces fonctions. En utilisant le théorème de Renard, cf. [IV] 1.4, on va étendre cette application à tout $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes qui apparaissent.

Notons $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ l'espace des fonctions $f : \tilde{G}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ telles que, pour toute fonction $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$, la fonction $f(b \circ H_{\tilde{G}}) : \gamma \mapsto b(H_{\tilde{G}}(\gamma))f(\gamma)$ appartienne à $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Considérons l'immense produit

$$\underline{P} = C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))^{C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})}.$$

Ses éléments sont les familles $(\phi_b)_{b\in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})}$, où $\phi_b \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ pour tout b. L'espace $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ étant muni de la topologie usuelle, on munit P de la topologie produit. Notons P le sous-espace de $\underline{P}$ formé des familles $(\phi_b)_{b\in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})}$ telles que, pour tous $b, b' \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$, on ait l'égalité

$$\phi_b(b' \circ H_{\tilde{G}}) = \phi_{b'}(b \circ H_{\tilde{G}}).$$

On vérifie que c'est un sous-espace fermé de P et on le munit de la topologie induite. On a une application linéaire

$$\begin{array}{ccc} C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) & \to & P \\ f & \mapsto & (f(b \circ H_{\tilde{G}}))_{b\in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})} \end{array}$$

On vérifie qu'elle est injective et que son image est P. On munit $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ de la topologie pour laquelle cette application devient un homéomorphisme de cet espace sur P. Concrètement, un voisinage de 0 dans $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est un sous-ensemble U pour lequel il existe un nombre fini d'éléments $b_1, ..., b_n \in C_c^{\infty}(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ et, pour tout i, un voisinage U_i de 0 dans $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ de sorte que U contienne les $f \in C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tels que, pour tout i, $f(b_i \circ H_{\tilde{G}})$ appartienne à U_i.

On vérifie que, pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, l'intégrale orbitale $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. De même, pour un espace de Levi $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, pour une ω-représentation tempérée $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ (de longueur finie) et pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, l'application $f \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ définie en [W1] 6.4 se prolonge en une forme linéaire continue sur $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Modifiant la définition que l'on avait donnée en [W1] 6.4, on note $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ le quotient de $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ par le sous-espace des $f \in C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ telles que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout γ fortement régulier. On voit que ce sous-espace est fermé et on munit le quotient de la topologie quotient. On peut définir des espaces $\underline{IP}$ et IP en remplaçant dans les définitions de $\underline{P}$ et P les espaces $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ par $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. On vérifie qu'une application analogue à celle construite ci-dessus identifie homéomorphiquement $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ à IP. Remarquons que, pour toute ω-représentation de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{G}}$, la forme linéaire $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$ sur $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ se factorise en une forme linéaire continue sur $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Cela résulte de la locale intégrabilité des caractères.

Proposition. *Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Il existe une unique application linéaire continue*

$$\begin{array}{ccc} C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) & \to & I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \\ f & \mapsto & \phi_{\tilde{M}}(f) \end{array}$$

telle que, pour tout $f \in C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, pour toute ω-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et pour tout $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M}}(f)) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f).$$

Remarque. Comme toujours, il est plus canonique de voir l'application $\phi_{\tilde{M}}$ comme une application linéaire de $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))$.

Preuve. On reprend la démonstration donnée en [W1] 6.4, en supprimant des conjugaisons complexes inopportunes. Fixons un sous-ensemble compact $\tilde{C}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et notons $C^{\infty}(\tilde{C})$ le sous-espace des fonctions $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ telles que $Supp(f) \subset \tilde{C}$. Appelons semi-norme pour $\tilde{C}$ toute fonction $\alpha : C^{\infty}(\tilde{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle qu'il existe un nombre fini d'opérateurs différentiels D_1,...,D_m sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ invariants par translations à gauche de sorte que, pour tout $f \in C^{\infty}(\tilde{C})$, on ait l'égalité

$$\alpha(f) = \sum_{i=1,...,m} sup_{\gamma \in \tilde{C}} |(D_i f)(\gamma)|.$$

On va commencer par établir l'existence d'une application linéaire

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(\tilde{C}) & \to & I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \\ f & \mapsto & \phi_{\tilde{M}}(f) \end{array}$$

vérifiant les propriétés de l'énoncé. Soient $f \in C^\infty(\tilde{C})$ et $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Pour une ω-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(\mathbb{R})$, posons

$$\varphi_{f,b}(\tilde{\pi}) = \int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}}} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f) b(X)\, dX.$$

Par inversion de Fourier, on a l'égalité

$$\varphi_{f,b}(\tilde{\pi}) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, f) \hat{b}(-\lambda)\, d\lambda,$$

où

$$\hat{b}(\lambda) = \int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}}} b(X) e^{<X,\lambda>}\, dX.$$

Fixons $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$. Pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$, on définit une fonction $\varphi_{f,b,\boldsymbol{\tau}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$ par

$$\varphi_{f,b,\boldsymbol{\tau}}(\nu) = \varphi_{f,b}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_\nu})).$$

On va prouver les propriétes suivantes

(1) il existe $r > 0$ indépendant de f et, pour tout $N > 0$ et tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\nu \in \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$, on a la majoration

$$|\varphi_{f,b,\boldsymbol{\tau}}(\nu)| \leq C(1 + |\nu|)^{-N} e^{r|Re(\nu)|};$$

(2) pour tout $N > 0$, il existe une semi-norme α pour $\tilde{C}$ de sorte que, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$ et tout $\nu \in i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$, on ait la majoration

$$|\varphi_{f,b,\boldsymbol{\tau}}(\nu)| \leq \alpha(f)(1 + |\mu(\boldsymbol{\tau}) + |\nu|)^{-N},$$

où $\mu(\boldsymbol{\tau})$ est le paramètre infinitésimal de $\boldsymbol{\tau}$.

Notons que le r de (1) et la semi-norme α de (2) peuvent dépendre de b. On a une formule de descente familière

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Ind_{\tilde{Q}}^{\tilde{M}}((\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\nu+\lambda}), f) = \sum_{\tilde{M}' \in \mathcal{L}(\tilde{L})} d_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{M}') J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}((\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\nu+\lambda}, f_{\tilde{P}',\omega}),$$

où les $\tilde{P}'$ sont des éléments de $\mathcal{P}(\tilde{M}')$ déterminés par le choix d'un paramètre auxiliaire. Pour tout $\tilde{M}'$, il existe un sous-ensemble compact $\tilde{C}'$ de $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ tel que l'application $f \mapsto f_{\tilde{P}',\omega}$ envoie continuement $C^\infty(\tilde{C})$ dans $C^\infty(\tilde{C}')$. On ne perd rien à fixer $\tilde{M}'$, à définir une fonction $\phi_{f',b,\boldsymbol{\tau}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$ pour $f' \in C^\infty(\tilde{C}')$ par

$$\phi_{f',b,\boldsymbol{\tau}}(\nu) = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*} J_{\tilde{L}}^{\tilde{M}'}((\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\nu+\lambda}, f') \hat{b}(-\lambda)\, d\lambda,$$

et à démontrer pour cette fonction des propriétés similaires à (1) et (2). On a prouvé en [W1] 6.4 que la fonction $\phi_{f',b,\boldsymbol{\tau}}$ s'écrivait sous la forme

$$\phi_{f',b,\boldsymbol{\tau}}(\nu) = \int_{\mathcal{A}_{\tilde{L}}} \Psi(Y) e^{<\nu,Y>}\, dY,$$

où Ψ est une fonction C^∞ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dont le support est inclus dans un compact qui ne dépend que de b et de $\tilde{C}'$. L'assertion (1) en résulte. On a prouvé en [W1] 5.2 (en copiant une fois de plus Arthur) que, pour tout N, il existait une semi-norme α pour $\tilde{C}'$ telle que, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$ et tout $\nu \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$, on ait la majoration

$$|J^{\tilde{M}'}_{\tilde{L}}((\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_\nu, f')| \leq \alpha(f')(1+|\mu(\boldsymbol{\tau})|)^{-N}(1+|\nu|)^{-N}.$$

Pour $\nu \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$ et $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$, on a la majoration

$$|\nu| \leq |\nu+\lambda| + |\lambda|,$$

d'où

$$1+|\nu| \leq (1+|\nu+\lambda|)(1+|\lambda|),$$

puis

$$(1+|\nu+\lambda|)^{-N} \leq (1+|\nu|)^{-N}(1+|\lambda|)^N.$$

La fonction $\hat{b}$ est de Schwartz, donc vérifie une majoration

$$|\hat{b}(\lambda)| \leq c(1+|\lambda|)^{-N-a_{\tilde{M}}-1}.$$

Il résulte de ces majorations que l'on a l'inégalité

$$|\phi_{f',b,\boldsymbol{\tau}}(\nu)| \leq cc'\alpha(f')(1+|\mu(\boldsymbol{\tau})|)^{-N}(1+|\nu|)^{-N},$$

où

$$c' = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} (1+|\lambda|)^{-a_{\tilde{M}}-1}\, d\lambda.$$

Cela démontre la majoration (2) cherchée.

Fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$ comme en [IV] 1.4 (on utilise dans ce qui suit les notations de cette référence). Les propriétés (1) et (2) jointes au lemme [IV] 1.3 montrent que, pour tout $f \in C^\infty(\tilde{C})$, la famille $(\varphi_{f,b,\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)}$ appartient à $PW^\infty_{ell}(\tilde{L},\omega)$. De plus, l'application qui, à f, associe cette famille, est continue. En sommant ces applications sur tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$, on obtient une application continue de $C^\infty(\tilde{C})$ dans $PW^\infty(\tilde{M},\omega)$ (la condition requise d'invariance par $W^M(\tilde{M}_0)$ résulte de la construction). En composant avec l'homéomorphisme $pw^{-1} : PW^\infty(\tilde{M},\omega) \to I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ du théorème 1.4 de [IV], on obtient une application continue

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} C^\infty(\tilde{C}) & \to & I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \\ f & \mapsto & \phi_{\tilde{M},b}(f). \end{array}$$

Par construction, on a

$$\varphi_{f,b}(\tilde{\pi}) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, \phi_{\tilde{M},b}(f))$$

pour toute ω-représentation tempérée et de longueur finie $\tilde{\pi}$ de $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Pour tout $Y \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on a alors

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b}(f)) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, \phi_{\tilde{M},b}(f)) e^{-<Y,\lambda>}\, d\lambda$$

$$= \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} \varphi_{f,b}(\tilde{\pi}_\lambda) e^{-<Y,\lambda>}\, d\lambda \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{M}}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{\pi}_\lambda, X, f) b(X)\, dX\, e^{-<Y,\lambda>}\, d\lambda.$$

Or, par construction de $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f)$, on a l'égalité

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, X, f) = e^{<X,\lambda>} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f).$$

Par inversion de Fourier, on obtient

$$(4) \qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b}(f)) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, Y, f) b(Y).$$

Remarquons que ces relations déterminent entièrement $\phi_{\tilde{M},b}(f)$. Soit b' un autre élément de $C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. On sait que

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b}(f)(b' \circ H_{\tilde{M}})) = b'(Y) I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b}(f)).$$

D'où

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b}(f)(b' \circ H_{\tilde{M}})) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, Y, f) b(Y) b'(Y).$$

Cette relation est symétrique en b et b'. D'où

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b}(f)(b' \circ H_{\tilde{M}})) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, Y, \phi_{\tilde{M},b'}(f)(b \circ H_{\tilde{M}})).$$

Ces relations entraînent l'égalité $\phi_{\tilde{M},b}(f)(b' \circ H_{\tilde{M}}) = \phi_{\tilde{M},b'}(f)(b \circ H_{\tilde{M}})$. La famille $(\phi_{\tilde{M},b}(f))_{b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{M}})}$ appartient donc à l'analogue $P^{\tilde{M}}$ de l'espace P pour $\tilde{M}$. Il en résulte l'existence d'un unique élément $\phi_{\tilde{M}}(f) \in I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ tel que $\phi_{\tilde{M},b}(f) = \phi_{\tilde{M}}(f)(b \circ H_{\tilde{M}})$ pour tout b. D'après la définition de la topologie sur $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ et parce que les applications (3) sont continues pour tout b, l'application $f \mapsto \phi_{\tilde{M}}(f)$ est continue. Enfin, soit $\tilde{\pi}$ une ω-représentation tempérée et de longueur finie de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Choisissons une fonction $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$ telle que $b(X) = 1$. On a alors

$$\begin{aligned} I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M}}(f)) &= I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M}}(f)) b(X) = I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M}}(f)(b \circ H_{\tilde{M}})) \\ &= I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M},b}(f)) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f) b(X) \end{aligned}$$

d'après (4), d'où, puisque $b(X) = 1$,

$$I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \phi_{\tilde{M}}(f)) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, f).$$

Notre application $\phi_{\tilde{M}}$, définie sur $C^\infty(\tilde{C})$, vérifie ainsi toutes les propriétés requises.

L'application $\phi_{\tilde{M}}$ étant caractérisée par les égalités ci-dessus, il est clair que, si $\tilde{C}'$ est un sous-ensemble compact de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{C}$, l'application $\phi_{\tilde{M}}$ relative à $\tilde{C}$ est la restriction de celle relative à $\tilde{C}'$. Ces applications se recollent donc en une application $\phi_{\tilde{M}} : C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$. Celle-ci est continue par définition de la topologie sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et parce que les applications restreintes à $C^\infty(\tilde{C})$ le sont pour tout $\tilde{C}$.

Soit maintenant $f \in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Soit $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{M}})$. Choisissons une fonction $b^{\tilde{G}} \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ telle que $b^{\tilde{G}}$ vaille 1 sur la projection dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ du support de b dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Définissons une fonction $\phi_{\tilde{M},b}(f) \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ par

$$\phi_{\tilde{M},b}(f) = \phi_{\tilde{M}}(f(b^{\tilde{G}} \circ H_{\tilde{G}}))(b \circ H_{\tilde{M}}).$$

De nouveau, des considérations formelles montrent que l'égalité (4) est satisfaite. En particulier, cette définition ne dépend pas du choix de $b^{\tilde{G}}$. L'application $f \mapsto \phi_{\tilde{M},b}(f)$ est continue car c'est la composée des trois applications continues

$$f \mapsto f(b^{\tilde{G}} \circ H_{\tilde{G}})$$

de $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$,

$$f \mapsto \phi_{\tilde{M}}(f)$$

de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ et

$$f \mapsto f(b \circ H_{\tilde{M}})$$

de $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ dans $I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. Le même calcul que ci-dessus montre que de ces applications $f \mapsto \phi_{\tilde{M},b}(f)$ se déduit une application continue $f \mapsto \phi_{\tilde{M}}(f)$ de $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $I_{ac}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ qui vérifie les propriétés de l'énoncé. $\square$

1.3 Définition des intégrales orbitales pondérées

Dans la première section de [II], on a défini des intégrales orbitales pondérées $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$. Le corps de base était alors non-archimédien. La définition reprenait évidemment celle d'Arthur, tout en la modifiant légèrement. Il n'y a rien à changer sur le corps de base $\mathbb{R}$: on définit de même $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ pour un espace de Levi $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$. Plus canoniquement, notons $D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ l'espace des distributions sur $C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ engendré par les intégrales orbitales relatives à des éléments $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$. Alors on peut définir $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. La différence entre le cas archimédien et le cas non-archimédien est que l'on a l'égalité $D_{orb}(\tilde{M}(F),\omega) = D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)$ quand F est non-archimédien, tandis que l'on a seulement une inclusion $D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \subset D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$. Rappelons (cf. [I] 5.2) que ce dernier espace est celui des formes linéaires continues sur $I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ qui, relevées en des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$, sont supportées par un nombre fini de classes de conjugaison par $M(\mathbb{R})$. Les constructions de [II] ne permettent pas de définir $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.

Quoi qu'il en soit, on va définir les avatars ω-équivariants $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, et même pour $\mathbf{f} \in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Les intégrales orbitales pondérées $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ s'étendent à $\mathbf{f} \in C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$: on a

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}(b \circ H_{\tilde{G}}))$$

pour toute fonction $b \in C_c^\infty(\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ telle que b vaille 1 dans un voisinage de l'image par $H_{\tilde{G}}$ du support de $\boldsymbol{\gamma}$. Quand $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale associée à un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$, Arthur démontre en [A2] corollaire 6.2 que cette intégrale est donnée par une mesure sur l'orbite de γ qui est absolument continue relativement à la mesure de Haar. On en déduit aisément que

$$\mathbf{f} \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$

est continue sur $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On définit une application linéaire continue sur $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, qui se factorise en une application linéaire continue sur $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, par la formule de récurrence

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},\phi_{\tilde{L}}(\mathbf{f})).$$

La continuité de cette application est assurée par ce que l'on vient de dire ci-dessus, par celle des applications analogues relatives à $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ que l'on suppose par récurrence,

et par la continuité de nos applications $\phi_{\tilde{L}}$. Une démonstration assez formelle montre que l'application ainsi définie est ω-équivariante (cf. [A3] proposition 4.1 dans le cas non tordu). Etant continue, elle se factorise donc en une application définie sur $I_{ac}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ (cf. [I] 5.2).

Cette définition étant posée, les intégrales orbitales ω-équivariantes vérifient les mêmes propriétés que dans le cas non-archimédien.

Variante. Supposons $\tilde{G}=G$ et $\mathbf{a}=1$. Supposons fixée une fonction B comme en [II] 1.8. On note $D_{orb,unip}(G(\mathbb{R}))$ le sous-espace des éléments de $D_{orb}(G(\mathbb{R}))$ à support unipotent. Pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{orb,unip}(M(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f}\in I(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on définit la variante $I_M^G(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ comme en [II] 1.8.

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Supposons fixé un sytème de fonctions B comme en [II] 1.9. Pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on définit la variante $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ comme en [II] 1.9.

Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Rappelons que l'on note $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ à support dans l'ensemble des éléments de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$. On dit que que $\mathcal{O}$ est $\tilde{G}$-équisingulière si elle vérifie la condition $M_\gamma=G_\gamma$ pour tout $\gamma\in\mathcal{O}$, cf. [II] 1.2(1). Plus généralement, une réunion finie de classes de conjugaison semi-simples sera dite $\tilde{G}$-équisingulière si chacune de ces classes l'est.

Supposons que $\mathcal{O}$ soit $\tilde{G}$-équisingulière. Fixons $\gamma\in\mathcal{O}$. Soit $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On sait alors qu'il existe une fonction $f'\in C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ et un voisinage de γ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ telle que, pour γ' dans ce voisinage, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\gamma',\omega,f')=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma',\omega,f)$$

cf. [II] 1.7(4). Fixons un tel f'. Pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$, on peut définir $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},f')$. La description que l'on a donnée en [I] 5.2 de l'espace $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ montre que ce terme ne dépend pas du choix de f' : il ne dépend que des $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma',\omega,f)$ pour γ' fortement régulier voisin de γ. Plus précisément, avec les notations de [I] 5.2, il ne dépend que des fonctions $X\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(exp(X)\gamma,\omega,f)$ pour $X\in\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$ tel que $exp(X)\gamma$ soit fortement régulier, où $\tilde{T}\in\tilde{\mathcal{T}}$. On peut donc poser

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},f)=I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},f').$$

Il est clair que, quand $\boldsymbol{\gamma}$ est une simple intégrale orbitale, cette définition coïncide avec la définition initiale.

Notons $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ le sous-espace de $D_{géom}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)$ pour les orbites $\mathcal{O}$ qui sont $\tilde{G}$-équisingulières. En réintroduisant les espaces de mesures de Haar, ce qui précède permet de définir $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ (ou $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$). Dans les paragraphes suivants, on montrera que les constructions du cas non-archimédien s'étendent à ces termes. Montrons ici qu'ils se comportent de la façon attendue relativement à l'induction.

Lemme. *Soit $\tilde{R}$ un espace de Levi contenu dans $\tilde{M}$. Soit $\mathcal{O}$ une orbite semi-simple dans $\tilde{R}(\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ l'unique orbite pour l'action de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}$. On suppose que $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ est $\tilde{G}$-équisingulière.*

(i) Pour tout $\tilde{L}\in\tilde{L}(\tilde{R})$ tel que $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\neq 0$, l'orbite $\mathcal{O}$ est $\tilde{L}$-équisingulière.

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ *et tout* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, *on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

Remarque. L'assertion (i) donne un sens à la formule du (ii).

Preuve. L'assertion (i) est la remarque de [II] 2.11. Prouvons (ii). Oublions les mesures de Haar pour être plus clair et notons f plutôt que $\mathbf{f}$. Fixons encore $\gamma \in \mathcal{O}$. Introduisons une fonction $g \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega)$ telle que, pour $\gamma' \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ assez régulier et assez voisin de γ, on ait

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma',\omega,f) = I^{\tilde{M}}(\gamma',\omega,g).$$

De même, pour tout $\tilde{L}$ comme en (i), introduisons une fonction $g[\tilde{L}] \in I(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)$ telle que, pour $\gamma' \in \tilde{R}(\mathbb{R})$ assez régulier et assez voisin de γ, on ait

$$I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\gamma',\omega,f_{\tilde{L},\omega}) = I^{\tilde{R}}(\gamma',\omega,g[\tilde{L}]).$$

On va montrer que

(1) les deux éléments $g_{\tilde{R},\omega}$ et

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) g[\tilde{L}]$$

de $I(\tilde{R}(\mathbb{R}),\omega)$ coïncident au voisinage de γ.

Pour $\gamma' \in \tilde{R}(\mathbb{R})$ assez régulier, on a par définition du terme constant

$$I^{\tilde{R}}(\gamma',\omega,g_{\tilde{R},\omega}) = I^{\tilde{M}}(\gamma',\omega,g),$$

autrement dit, si γ' est assez proche de γ,

$$I^{\tilde{R}}(\gamma',\omega,g_{\tilde{R},\omega}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma',\omega,f).$$

La formule de l'énoncé que l'on cherche à prouver est valable dans le cas où $\boldsymbol{\gamma}$ est une simple intégrale orbitale. En l'appliquant à l'intégrale orbitale associée à γ', on obtient

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma',\omega,f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\gamma',\omega,f_{\tilde{L},\omega}),$$

ou encore

$$I^{\tilde{R}}(\gamma',\omega,g_{\tilde{R},\omega}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) I^{\tilde{R}}(\gamma',\omega,g[\tilde{L}])$$

si γ' est assez proche de γ. Cela prouve (1).

Par définition

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},f) = I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},g).$$

Par définition de l'induction des distributions,

$$I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},g) = I^{\tilde{R}}(\boldsymbol{\gamma},g_{\tilde{R},\omega}).$$

En appliquant (1), on obtient

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}, f) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) I^{\tilde{R}}(\boldsymbol{\gamma}, g[\tilde{L}]).$$

Mais, pour tout $\tilde{L}$, on a par définition

$$I^{\tilde{R}}(\boldsymbol{\gamma}, g[\tilde{L}]) = I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, f_{\tilde{L},\omega})$$

et la formule précédente devient celle de l'énoncé. □

1.4 Intégrales orbitales pondérées invariantes stables

On suppose dans ce paragraphe $(G, \tilde{G}, \omega)$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. D'après la définition du paragraphe précédent, elle est $\tilde{G}$-équisingulière si toutes les classes de conjugaison par $\tilde{M}(\mathbb{R})$ incluses dans $\mathcal{O}$ le sont. Remarquons que, puisque la définition de cette notion est géométrique, dire que toutes ces classes sont $\tilde{G}$-équisingulières équivaut à dire que l'une d'elles l'est. On note $D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ la somme des $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ parcourt les classes de conjugaison stable semi-simples $\tilde{G}$-équisingulières dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et pour $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on définit l'intégrale orbitale pondérée invariante stable par

$$(1) \qquad S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}; s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

On renvoie à [II] 1.10 pour diverses notations. Expliquons cette formule. Puisque

$$D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \subset D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R})),$$

le premier terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ a été défini au paragraphe précédent. Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Le groupe $G'(s)$ n'est pas en général un sous-groupe de G, mais son système de racines est un sous-système de celui de G. Il en résulte aisément que, pour $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$, le système de racines de $G'(s)_\gamma$ est un sous-système de celui de G_γ. L'égalité $G_\gamma = M_\gamma$ force $G'(s)_\gamma = M_\gamma$. Cela entraîne que $\boldsymbol{\delta}$ appartient à $D^{st}_{géom,\tilde{G}(s)-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Pour $s \neq 1$, la dimension de $G'(s)_{SC}$ est strictement inférieure à celle de G. En raisonnant comme toujours par récurrence sur cette dimension, on peut supposer définies les intégrales orbitales pondérées invariantes stables pour l'espace $\tilde{G}'(s)$. Pour définir le terme $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})$, on a encore besoin, d'une part, de propriétés qui permettent d'étendre les définitions au cadre formel que l'on a introduit en [I] pour les données endoscopiques. On reviendra ci-dessous sur ces propriétés. On a besoin d'autre part de supposer connu par récurrence le théorème ci-dessous.

Théorème . *Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, la distribution $\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est stable.*

Ce théorème sera prouvé dans le paragraphe suivant.

Abandonnons pour simplifier les espaces de mesures de Haar. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple et $\tilde{G}$-équisingulière dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Soit $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Notons $D^{st}_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ l'espace des combinaisons linéaires stables d'intégrales orbitales sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$. On montrera plus loin que

(2) il existe une fonction $f' \in SI(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ et un voisinage de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers dans ce voisinage, on a l'égalité

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f) = S^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f');$$

(3) pour f' comme ci-dessus et pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$, on a l'égalité

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, f) = S^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, f').$$

Commençons à expliquer les propriétés formelles requises. Puisqu'on va les appliquer par récurrence, il est légitime de supposer connues toutes les propriétés nécessaires des intégrales pondérées invariantes stables telles qu'on les a définies ci-dessus. Considérons des extensions compatibles

$$1 \to C_\natural \to G_\natural \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural \to \tilde{G}$$

où $C_\natural$ est un tore central induit et où $\tilde{G}_\natural$ est à torsion intérieure. Considérons un caractère $\lambda_\natural$ de $C_\natural(\mathbb{R})$. On note $\tilde{M}_\natural$ l'image réciproque de $\tilde{M}$ dans $\tilde{G}_\natural$. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple et $\tilde{G}$-équisingulière dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Fixons une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}_\natural$ dans $\tilde{M}_\natural(\mathbb{R})$ qui se projette sur $\mathcal{O}$. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}), \mathcal{O})$ et $f \in I_{\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. Comme on l'a dit en [I] 5.6, il y a une application linéaire surjective

$$D^{st}_{géom}(\mathcal{O}_\natural) \to D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}), \mathcal{O}).$$

Fixons une image réciproque $\dot{\boldsymbol{\delta}} \in D^{st}_{géom}(\mathcal{O}_\natural)$ de $\boldsymbol{\delta}$. Il est facile de voir que la forme linéaire $\varphi \mapsto S^{G_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \varphi)$ sur $I(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ s'étend en une forme linéaire sur $I_{ac}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ par la formule

$$S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \varphi) = S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \varphi(b \circ H_{\tilde{G}_\natural})),$$

où $b \in C^\infty_c(\mathcal{A}_{\tilde{G}_\natural})$ vaut 1 dans un voisinage de l'image par $H_{\tilde{G}_\natural}$ de $\mathcal{O}_\natural$ (cf. [II] 1.10(2)). La fonction f appartient à $I_{ac}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. On peut donc définir $S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, f)$. On doit prouver

(4) $S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, f)$ ne dépend pas des choix de $\mathcal{O}_\natural$ et du relèvement $\dot{\boldsymbol{\delta}}$.

Ainsi, on peut noter ce terme $S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}, f)$.

Considérons maintenant un autre couple d'extensions

$$1 \to C_\flat \to G_\flat \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\flat \to \tilde{G}$$

ainsi qu'un caractère $\lambda_\flat$ de $C_\flat(\mathbb{R})$ vérifiant les mêmes hypothèses que ci-dessus. On note $G_{\natural,\flat}$, resp. $\tilde{G}_{\natural,\flat}$, les produits fibrés de $G_\natural$ et $G_\flat$ au-dessus de G, resp. de $\tilde{G}_\natural$ et $\tilde{G}_\flat$ au-dessus de $\tilde{G}$. Considérons un caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ de $G_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ dont la restriction à $C_\natural(\mathbb{R}) \times C_\flat(\mathbb{R})$ soit $\lambda_\natural^{-1} \times \lambda_\flat$. Considérons une fonction $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ sur $\tilde{G}_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ qui se transforme selon le caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ (cf. [I] 2.6(i)). On déduit de ces données des isomorphismes

$$C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) \simeq C^\infty_{c,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$$

et

$$D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}),\mathcal{O}) \simeq D^{st}_{géom,\lambda_\flat}(\tilde{M}_\flat(\mathbb{R}),\mathcal{O})$$

cf. [II] 1.10. Pour $f_\natural$ et $f_\flat$, resp. $\boldsymbol{\delta}_\natural$ et $\boldsymbol{\delta}_\flat$, se correspondant par ces isomorphismes, on doit prouver que

(5) $S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural, f_\natural) = S^{\tilde{G}_\flat}_{\tilde{M}_\flat,\lambda_\flat}(\boldsymbol{\delta}_\flat, f_\flat)$.

En [II] 1.10, on a vérifié les propriétés (4) et (5) lorsque le corps de base était non-archimédien. On a vu que, grâce à elles, on définissait aisément les termes $S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})$ qui interviennent dans la formule (1). Les preuves de cette référence restent correctes sur le corps de base $\mathbb{R}$, pourvu qu'on se limite à considérer de véritables intégrales orbitales. On ne les refait pas dans ce cas et on tient pour acquis que (4) et (5) sont vérifiées si les éléments $\dot{\boldsymbol{\delta}}$, $\boldsymbol{\delta}_\natural$ et $\boldsymbol{\delta}_\flat$ sont des intégrales orbitales stables. On va en déduire que ces relations sont vérifiées pour des éléments généraux.

Dans la situation de (4), on commence par montrer

(6) il existe $f'_\natural \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$ et un voisinage Ω de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $\dot{\boldsymbol{\tau}} \in D^{st}_{orb}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}_\natural$-réguliers se projetant dans Ω, on ait l'égalité

$$S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f) = S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f'_\natural).$$

Introduisons le groupe dérivé $M_{\natural,der}$. On peut introduire un sous-tore S de $Z(M_\natural)^0$ de sorte que $\mathfrak{c}_\natural \oplus \mathfrak{s} = \mathfrak{z}_{M_\natural}$. L'application produit

$$(7) \qquad C_\natural(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R}) \times M_{\natural,der}(\mathbb{R}) \to M_\natural(\mathbb{R})$$

est un homomorphisme de noyau fini et d'image un sous-groupe ouvert de $M_\natural(\mathbb{R})$. Notons Δ le noyau et Σ sa projection dans $C_\natural(\mathbb{R})$. Le groupe Σ contient le groupe Σ' des $c \in C_\natural(\mathbb{R})$ tels que $c\mathcal{O}_\natural = \mathcal{O}_\natural$. D'après (2), on peut trouver $f'' \in C^\infty_c(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$ de sorte que, pour $\dot{\boldsymbol{\tau}} \in D^{st}_{orb}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}_\natural$-réguliers dans un voisinage de $\mathcal{O}_\natural$, on ait l'égalité

$$S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f) = S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f'').$$

On peut modifier f'' de sorte qu'elle soit nulle au voisinage de $c\mathcal{O}_\natural$ pour $c \in \Sigma - \Sigma'$. Le groupe $C_\natural(\mathbb{R})$ agit sur les espaces de fonctions sur $\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$ ou $\tilde{M}_\natural(\mathbb{R})$ par $(\varphi, c) \mapsto \varphi^c$, où $\varphi^c(\gamma) = \varphi(c\gamma)$. Il agit par dualité sur les espaces de distributions. Soit $c \in \Sigma$ et $\dot{\boldsymbol{\tau}} \in D^{st}_{orb}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}_\natural$-réguliers dans un voisinage de $\mathcal{O}_\natural$. On a l'égalité

$$S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, (f'')^c) = S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^{c^{-1}}, f'').$$

Si $c \notin \Sigma'$, c'est nul . Si $c \in \Sigma'$, c'est

$$S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^{c^{-1}}, f) = S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f^c) = \lambda_\natural(c)^{-1} S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f),$$

la deuxième égalité ci-dessus se vérifiant comme en [II] 1.10. On peut donc aussi bien remplacer f'' par

$$|\Sigma'|^{-1} \sum_{c \in \Sigma} \lambda_\natural(c)(f'')^c.$$

Fixons $\delta_\natural \in \mathcal{O}_\natural$. Définissons une fonction $f'_\natural$ sur $\tilde{M}_\natural(\mathbb{R})$ de la façon suivante. Sur un élément $m\delta_\natural$ où $m \in M_\natural(\mathbb{R})$ n'appartient pas à l'image de (7), on pose $f'_\natural(m\delta_\natural) = 0$. Pour

$$(c, s, x) \in C_\natural(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R}) \times M_{\natural,der}(\mathbb{R})$$

On pose

$$f'_\natural(csx\delta_\natural) = \lambda_\natural(c)^{-1} f''(sx\delta_\natural).$$

La définition est loisible : le membre de droite ne dépend que du produit csx. La fonction ainsi définie appartient à $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$. Soit $\dot{\boldsymbol{\tau}} \in D^{st}_{orb}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R}))$ dont le support est une classe de conjugaison stable d'éléments $\tilde{G}_\natural$-réguliers se projetant dans un voisinage assez petit de $\mathcal{O}$. On peut choisir $c \in C_\natural(\mathbb{R})$ tel que le support de $\dot{\boldsymbol{\tau}}^c$ soit contenu dans un petit voisinage de $\mathcal{O}_\natural$. On peut modifier c de sorte que ce support soit aussi contenu dans l'ensemble $\{sx\delta_\natural; s \in S(\mathbb{R}), x \in M_{\natural,der}(\mathbb{R})\}$. On a alors

$$S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f'_\natural) = S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^c, (f'_\natural)^c) = \lambda_\natural(c)^{-1} S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^c, f'_\natural).$$

D'après la propriété du support de $\dot{\boldsymbol{\tau}}^c$, on a

$$S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^c, f'_\natural) = S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^c, f'') = S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}^c, f) = S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f^{c^{-1}}) = \lambda_\natural(c) S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\tau}}, f).$$

Cette suite d'égalités montre que f satisfait les conditions de (6).

Dans la situation de (4), appliquons (3) à l'espace $\tilde{G}_\natural$, à la fonction f et à la fonction $f'_\natural$ fournie par (6) (on peut les multiplier par une fonction $b \circ H_{\tilde{G}_\natural}$ comme ci-dessus pour les remplacer par des fonctions à support compact). On obtient l'égalité

$$S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, f) = S^{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, f'_\natural).$$

Par définition, ce dernier terme n'est autre que $S^{\tilde{M}_\natural}_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}, f'_\natural)$. Il ne dépend pas du choix de $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ donc le membre de gauche ci-dessus non plus. Cela prouve (4).

Dans la situation de (5), on construit de même des fonctions $f'_\natural$ et $f'_\flat$. La relation qui les définit et le fait que (5) soit vérifié pour des éléments à support régulier implique que ces deux fonctions se correspondent par l'isomorphisme

$$SI_{\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(\mathbb{R})) \simeq SI_{\lambda_\flat}(\tilde{M}_\flat(\mathbb{R})).$$

Puisque $\boldsymbol{\delta}_\natural$ et $\boldsymbol{\delta}_\flat$ se correspondent, cela entraîne

$$S^{\tilde{M}_\natural}_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural, f'_\natural) = S^{\tilde{M}_\flat}_{\lambda_\flat}(\boldsymbol{\delta}_\flat, f'_\flat).$$

Mais on vient de voir que

$$S^{G_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural, f_\natural) = S^{\tilde{M}_\natural}_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural, f'_\natural)$$

et

$$S^{G_\flat}_{\tilde{M}_\flat}(\boldsymbol{\delta}_\flat, f_\flat) = S^{\tilde{M}_\flat}_{\lambda_\flat}(\boldsymbol{\delta}_\flat, f'_\flat).$$

L'égalité (5) en résulte.

Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}}$ avec $s \neq 1$. La démonstration ci-dessus, en particulier le fait que les fonctions $f'_\natural$ et $f'_\flat$ se correspondent, entraîne que les assertions (2) et (3) se généralisent sous la forme suivante. On fixe cette fois $f \in I(\mathbf{G}'(s))$.

(8) Il existe une fonction $f' \in SI(\mathbf{M})$ et un voisinage de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{orb}(\mathbf{M})$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers dans ce voisinage, on a l'égalité

$$S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\tau}, f) = S^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\tau}, f');$$

(9) pour f' comme ci-dessus et pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}, \mathcal{O})$ (avec une définition naturelle de cet espace), on a l'égalité

$$S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, f) = S^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, f').$$

Venons-en à la preuve de (2) et (3). En fait, on peut identifier $SI(\mathbf{M})$ et $SI(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ ainsi que $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}, \mathcal{O})$ et $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$. Pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ avec $s \neq 1$, on applique les relations ci-dessus à la fonction $f^{\mathbf{G}'(s)}$, on en déduit une fonction $f'_s \in SI(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. En appliquant [II] 1.7(4) au terme $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, f)$, on a une fonction $f'_0 \in I(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ qui vérifie des propriétés analogues. En fait, puisqu'on ne lui applique ici que des distributions $\boldsymbol{\delta}$ qui sont stables, on peut remplacer f'_0 par son image dans $SI(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. On pose

$$f' = f'_0 - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}; s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) f'_s.$$

Cette fonction vérifie (2) et (3).

1.5 Preuve du théorème 1.4

On considère d'abord un élément $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments fortement réguliers dans $\tilde{G}$. S'il n'y a pas de torsion du tout, c'est-à-dire si $\tilde{G} = G$, la stabilité de la distribution $\mathbf{f} \mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ a été prouvée par Arthur ([A4] theorem 1.1(b)) . Dans la section 2 de [III], on a effectué une construction qui ramène le cas à torsion intérieure au cas sans torsion. Dans les derniers paragraphes de cette section, on avait supposé le corps de base non-archimédien. Comme on l'avait dit alors, ce n'était que parce que certains objets n'avaient été définis que dans ce cas. Maintenant que ces objets (à savoir l'application $\phi_{\tilde{M}}$ et les intégrales orbitales pondérées stables) ont été définis aussi dans le cas $F = \mathbb{R}$, les résultats de [III] 2 sont valables dans ce cas. En particulier la proposition [III] 2.8, qui afffirme que, pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure et pour $\boldsymbol{\delta}$ comme ci-dessus, la distribution $\mathbf{f} \mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est stable. Passons au cas d'un élément $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom, \tilde{G}-équi}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Soit $\mathbf{f} \in C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dont l'image dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ est nulle. On introduit une fonction f' vérifiant 1.4(2) et (3). Le résultat de stabilité que l'on vient de prouver et la relation 1.4(2) entraînent que les intégrales orbitales stables assez régulières de f' sont nulles au voisinage du support de $\boldsymbol{\delta}$. La relation 1.4(3) entraîne alors que $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = 0$. Cela prouve le théorème.

1.6 Une formule d'induction

Le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est encore quasi-déployé et à torsion intérieure. Soient $\tilde{R} \subset \tilde{M}$ deux espaces de Levi. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}(\mathbb{R})$, notons $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ l'unique classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}$.

Proposition. *On suppose que $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ est $\tilde{G}$-équisingulière.*

(i) Pour tout espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$ tel que $e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \neq 0$, la classe $\mathcal{O}$ est $\tilde{L}$-équisingulière.

(ii) Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$*, on a l'égalité*

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) S^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}_{\tilde{L}}).$$

Le terme $e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L})$ est le même qu'en [II] 1.14. Le (i) est analogue à celui du lemme 1.3. Le (ii) se prouve comme dans le cas non-archimédien, cf. [II] 1.14.

1.7 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes et endoscopie

Revenons au cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. Soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$. On note $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}')$ le sous-espace des éléments de $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$ dont le support dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ est formé d'éléments dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}'$. Il ne correspond pas toujours à $\mathcal{O}'$ de classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$, mais il lui correspond en tout cas une classe de conjugaison par $M(\mathbb{C})$ dans $\tilde{M}(\mathbb{C})$. Nous dirons que $\mathcal{O}'$ est $\tilde{G}$-équisingulière si tout élément γ de cette classe dans $\tilde{M}(\mathbb{C})$ vérifie $M_\gamma = G_\gamma$. On note $D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}')$ la somme des $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}')$ sur les classes de conjugaison stable semi-simples $\mathcal{O}'$ qui sont $\tilde{G}$-équisingulières.

Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Posons

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

On renvoie à [II] 1.12 pour les notations. Les propriétés formelles nécessaires à la définition des termes ci-dessus ont été vues dans le paragraphe 1.4. Le point à souligner est que l'hypothèse $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ entraîne $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}'(\tilde{s})-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ pour tout $\tilde{s}$. En effet, soit δ un élément semi-simple de $\tilde{M}'(\mathbb{R})$. Fixons un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{C})$ dans la classe de conjugaison géométrique correspondant à celle de δ. Soit enfin $\tilde{s}$ comme ci-dessus. Alors il y a une injection du système de racines du groupe $G'(\tilde{s})_\delta$ dans celui du groupe G_γ. Et l'ensemble des racines de M'_δ est celui des racines de $G'(\tilde{s})_\delta$ qui, par cette injection, deviennent des racines de M_γ. L'égalité $M_\gamma = G_\gamma$ entraîne donc $M'_\delta = G'(\tilde{s})_\delta$. En notant $\mathcal{O}'$ la classe de conjugaison stable de δ, on obtient que, si $\mathcal{O}'$ est $\tilde{G}$-équisingulière, elle est aussi $\tilde{G}'(\tilde{s})$-équisingulière.

.

Au lieu d'un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, considérons maintenant un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$, où $K\tilde{G} = (\tilde{G}_p)_{p \in \Pi}$ est un K-espace, cf. [I] 1.11 dont on utilise les notations. Soit $K\tilde{M} = (\tilde{M}_p)_{p \in \Pi_M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. Soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$. Pour chaque composante connexe $\tilde{M}_p$ de $K\tilde{M}$, avec $p \in \Pi_M$, il correspond à $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison $\mathcal{O}_{p,\mathbb{C}}$ par $M_p(\mathbb{C})$ dans $\tilde{M}_p(\mathbb{C})$. Si l'on remplace p par q, $\mathcal{O}_{p,\mathbb{C}}$ est l'image par $\tilde{\phi}_{p,q}$ de $\mathcal{O}_{q,\mathbb{C}}$. Ainsi la condition $M_{p,\gamma} = G_{p,\gamma}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{p,\mathbb{C}}$ est indépendante de $p \in \Pi_M$. Si elle est vérifiée, on dit que $\mathcal{O}'$ est $\tilde{G}$-équisingulière. On

définit alors comme plus haut l'espace $D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}')$. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On pose

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Les termes $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ que l'on a ainsi définis vérifient les mêmes propriétés que dans le cas d'un corps de base non-archimédien. Ils sont invariants par le groupe d'automorphismes $Aut(K\tilde{M},\mathbf{M}')$, au sens précisé en [II] 1.13. Ecrivons complètement ce que devient la proposition 1.14 de [II].

(a) Soit R' un groupe de Levi de M' qui est relevant. On peut lui associer un K-espace de Levi $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tel que $K\tilde{R} \subset K\tilde{M}$ et une donnée endocopique elliptique et relevante $\mathbf{R}'$ de $(KR, K\tilde{R}, \mathbf{a}_R)$. Soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{M}'}$ l'unique classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}'$. On suppose que $\mathcal{O}^{\tilde{M}'}$ est $\tilde{G}$-équisingulière. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{R}',\mathcal{O}') \otimes Mes(R'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a alors l'égalité

(1) $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{M'},\mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}) I^{K\tilde{L},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})$.

On a l'anologue du (i) du lemme 1.3 : l'hypothèse implique que $\mathcal{O}'$ est $\tilde{L}$-équisingulière pour tout $K\tilde{L}$ intervenant dans la somme, ce qui donne un sens aux termes de cette somme.

(b) Soit R' un groupe de Levi de M' qui n'est pas relevant. Soient $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}^{\tilde{M}'}$ comme ci-dessus. On suppose encore que $\mathcal{O}^{\tilde{M}'}$ est $\tilde{G}$-équisingulière. Fixons des données supplémentaires M'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{M}'$. On peut alors définir l'espace $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(\mathbb{R}),\mathcal{O}^{st})$ de distributions sur $\tilde{R}'_1(\mathbb{R})$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(\mathbb{R}),\mathcal{O}') \otimes Mes(R'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a alors l'égalité

(2) $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{M'},\mathbf{f}) = 0$.

Remarque. Dans la preuve de cette propriété, l'usage du lemme 2.1 de [A5] fait dans le cas non-archimédien doit être remplacé par celui du lemme 3.5 de [I].

Soit $p \in \Pi$ et soit $\mathbf{f}_p \in C_c^\infty(\tilde{G}_p(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On peut identifier $\mathbf{f}_p$ à un élément $\mathbf{f} \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dont les composantes $\mathbf{f}_q$ sont nulles pour $q \in \Pi$, $q \neq p$. Si $p \in \Pi_M$, on a par définition

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = I^{K\tilde{G}_p,\mathcal{E}}_{\tilde{M}_p}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}).$$

Par contre, si $p \in \Pi - \Pi_M$, le membre de gauche est bien défini tandis que celui de droite ne l'est pas. Il résultera du théorème 1.10 (quand celui-ci sera prouvé) que le membre de gauche est nul. Mais ce n'est nullement évident a priori.

1.8 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes endoscopiques

On considère un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ où $K\tilde{G}$ est un K-espace. Soit $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathcal{O}$ est $\tilde{G}$-équisingulière, c'est-à-dire que pour tout $p \in \Pi_M$ tel que $\mathcal{O} \cap \tilde{M}_p(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, cette intersection, qui est une classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}_p(\mathbb{R})$, est $\tilde{G}_p$-équisingulière. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ des classes d'équivalence de données endoscopiques de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ qui sont elliptiques et relevantes. Pour tout $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a}_M)$,

il correspond à $\mathcal{O}$ une réunion finie $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ de classes de conjugaison stable dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$. D'après la définition du paragraphe précédent, ces classes sont $\tilde{G}$-équisingulières. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. D'après la proposition 5.7 de [I], il existe une famille $(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'})_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M)}$, avec $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}_{\tilde{M}'}) \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ pour tout $\mathbf{M}'$, de sorte que

$$(1) \qquad \boldsymbol{\gamma} = \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M)} transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}).$$

Fixons de tels objets. Soit $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. La somme suivante est bien définie

$$(2) \qquad \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M}, \mathbf{a}_M)} I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}).$$

De même qu'en [II] 1.15, les propriétés indiquées dans le paragraphe précédent impliquent que cette somme ne dépend pas de la décomposition (1) choisie. On peut définir un terme $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ comme étant cette somme (2). Par linéarité, ce terme est donc défini pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.

Ce terme a les mêmes propriétés relativement à l'induction que les intégrales orbitales ω-équivariantes. C'est-à-dire que soit $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tel que $K\tilde{R} \subset K\tilde{M}$. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $K\tilde{R}(\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ l'unique classe de conjugaison stable dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}$. On suppose que $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ est $\tilde{G}$-équisingulière. Alors, pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ et tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}, \mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) I^{K\tilde{L}}_{K\tilde{R}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}_{K\tilde{L},\omega}).$$

Remarque. Si l'on ne travaillait pas avec un K-espace, mais seulement avec une composante, la somme (2) ne serait plus en général indépendante de la décomposition (1) choisie.

1.9 Une propriété locale des intégrales orbitales ω-équivariantes endoscopiques

On conserve la même situation. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. On se débarrasse ici des espaces de mesures de Haar en fixant de telles mesures sur tous les groupes intervenant.

Lemme. *On suppose que $\mathcal{O}$ est $\tilde{G}$-équisingulière. Soit $f \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$.*

(i) Il existe une fonction $f' \in I(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ telle que, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers et assez voisins de $\mathcal{O}$, on ait l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f').$$

(ii) Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$. Pour f' comme en (i), on a l'égalité

$$I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, f) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, f').$$

Preuve. Introduisons <u>*la*</u> paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ de M, dont on note T^* le tore. Posons

$$V^{K\tilde{M}} = \Big(((T^*/(1-\theta)(T^*))/W^{M,\theta}) \times_{\mathfrak{Z}(M)} \mathfrak{Z}(\tilde{M})\Big)^{\Gamma_{\mathbb{R}}},$$

cf. [I] 1.8. Cet ensemble est une variété analytique réelle. Les classes de conjugaison semi-simples géométriques dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$ sont classifiées par un sous-ensemble de $V^{K\tilde{M}}$. La classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ étant incluse dans une classe de conjugaison semi-simple géométrique, il lui correspond un point $v_{\mathcal{O}} \in V^{K\tilde{M}}$. Soient $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tel que $K\tilde{R} \subset K\tilde{M}$ et $\mathbf{R}' = (R', \mathcal{R}', \tilde{\zeta}) \in \mathcal{E}(K\tilde{R}, \mathbf{a}_R)$. Les classes de conjugaison semi-simples géométriques dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$ sont de même classifiées par une variété $V^{\tilde{R}'}$, qui s'envoie naturellement dans $V^{K\tilde{M}}$. On note $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$ la réunion des classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$ dont l'image dans $V^{K\tilde{M}}$ est $v_{\mathcal{O}}$.

Soient $K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{R})$ tel que $d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \neq 0$ et $\tilde{s} \in Z(\hat{R})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. On a déjà vu que $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$ était $\tilde{L}'(\tilde{s})$-équisingulière (on veut dire par là que cet ensemble est réunion de classes de conjugaison stable qui sont $\tilde{L}'(\tilde{s})$-équisingulières). D'après une variante des relations (2) et (3) de 1.4 (voir aussi les relations (8) et (9) de ce paragraphe), il existe une fonction $g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(K\tilde{L}, \tilde{s}) \in SI(\mathbf{R}')$ telle que

(1) pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{orb}(\mathbf{R}')$ dont le support est formé d'éléments assez réguliers et assez voisins de $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$, on a l'égalité

$$S^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\tau}, (f_{K\tilde{L},\omega})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}) = S^{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\tau}, g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(K\tilde{L}, \tilde{s}));$$

(2) pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{R}', \mathcal{O}_{\tilde{R}'})$, on a l'égalité

$$S^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\delta}, (f_{K\tilde{L},\omega})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}) = S^{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\delta}, g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(K\tilde{L}, \tilde{s})).$$

Introduisons le groupe $Aut^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$ des automorphismes de $(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$, l'espace ambiant étant $K\tilde{M}$. Ce groupe agit sur $SI(\mathbf{R}')$ et cette action se factorise par un quotient fini. Notons $\underline{Aut}^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$ un tel quotient fini. Soit $x \in Aut^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$. L'élément x permute les couples $(K\tilde{L}, \tilde{s})$ intervenant ci-dessus. On vérifie aisément que la fonction $x(g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(K\tilde{L}, \tilde{s}))$ a les mêmes propriétés que $g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(x(K\tilde{L}, \tilde{s}))$. On peut donc aussi bien remplacer chaque fonction $g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(K\tilde{L}, \tilde{s})$ par

$$|\underline{Aut}^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')|^{-1} \sum_{x \in \underline{Aut}^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')} x(g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(x^{-1}(K\tilde{L}, \tilde{s}))).$$

Cela fait, posons

$$(3) \qquad g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'} = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \sum_{\tilde{s} \in Z(\hat{R})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{R}'}(\tilde{L}, \tilde{L}'(\tilde{s})) g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}(K\tilde{L}, \tilde{s}).$$

Alors cette fonction est invariante par $Aut^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}_+(K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ des classes d'équivalence de couples $(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$ comme ci-dessus. Nos constructions définissent une famille $(g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'})_{(K\tilde{R},\mathbf{R}') \in \mathcal{E}_+(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)}$. Considérons les conditions de la proposition 4.11 de [I]. La première condition est l'invariance de $g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}$ par $Aut^{K\tilde{M}}(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$, qui est vérifiée par construction. Pour la deuxième condition, soient $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$, $\tilde{R}'$ un espace de Levi de $\tilde{M}'$ qui est relevant et soit $(K\tilde{R}, \mathbf{R}')$ l'élément de $\mathcal{E}_+(K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ qui lui est associé. La condition de [I] 4.11 impose l'égalité

(4) $(g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'})_{\tilde{R}'} = g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}$.

Celle-ci n'est pas vérifiée en général, mais elle l'est au voisinage de $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$. En effet, soit $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{orb}(\mathbf{R}')$ dont le support est formé d'éléments assez réguliers et assez voisins de $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$. Les propriétés (1) et (3) nous disent que

$$(5) \qquad S^{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\tau}, g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}) I^{K\tilde{L},\mathcal{E}}_{K\tilde{R}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\tau}, f_{K\tilde{L},\omega}).$$

On a aussi

$$S^{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\tau}, (g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'})_{\tilde{R}'}) = S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\tau}^{\tilde{M}'}, g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'}).$$

La relation (5) appliquée au couple $(K\tilde{M}, \mathbf{M}')$ se simplifie en

$$(6) \qquad S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\tau}', g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'}) = I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\tau}', f),$$

pour tout $\boldsymbol{\tau}' \in D^{st}_{orb}(\mathbf{M}')$ dont le support est formé d'éléments assez réguliers et assez voisins de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$. En l'utilisant , on obtient

$$S^{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\tau}, (g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'})_{\tilde{R}'}) = I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\tau}^{\tilde{M}'}, f).$$

La relation 1.6(1) dit que ceci est égal au membre de droite de (5). Donc l'égalité (4) est bien vérifiée au voisinage de $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$.

Nous ne détaillerons pas la troisième condition de la proposition [I] 4.11 : sa validité locale résulte comme ci-dessus de la relation 1.6(2).

Toute fonction ξ sur $V^{K\tilde{M}}$ se relève en une fonction sur $K\tilde{M}(\mathbb{R})$: c'est la fonction $\gamma \mapsto \xi(v_\gamma)$, où, pour $\gamma \in K\tilde{M}(\mathbb{R})$, v_γ est le point de $V^{K\tilde{M}}$ qui classifie la partie semi-simple de γ. Fixons un voisinage Ω_1 de $v_{\mathcal{O}}$ et un voisinage Ω_2 de la clôture de Ω_1. Fixons une fonction ξ sur $V^{K\tilde{M}}$ qui est C^∞, qui vaut 1 sur Ω_1 et vaut 0 hors de Ω_2. Pour tout $\tilde{R}'$ intervenant ci-dessus, $V^{\tilde{R}'}$ s'envoie dans $V^{K\tilde{M}}$. Par composition avec cette application, ξ devient une fonction sur $V^{\tilde{R}'}$, qui se relève en une fonction $\xi_{\tilde{R}'}$ sur $\tilde{R}'(\mathbb{R})$. Remplaçons $g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'}$ par son produit avec $\xi_{\tilde{R}'}$. Cela ne retire rien aux propriétés de cette fonction. Mais il est plus ou moins clair que, si l'on choisit Ω_2 assez petit, l'égalité (4), qui n'était vérifiée que localement, est maintenant vérifiée partout : on a annulé les fonctions là où l'égalité n'était pas vérifiée.

On a maintenant obtenu une famille $(g_{K\tilde{R},\mathbf{R}'})_{(K\tilde{R},\mathbf{R}')\in\mathcal{E}_+(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)}$ qui vérifie les conditions de la proposition 4.11 de [I]. Cette proposition nous dit qu'il existe un unique $f' \in I(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ tel que, pour tout $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$, le terme $g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'}$ soit égal au transfert $(f')^{\mathbf{M}'}$. Soit $\boldsymbol{\tau} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers et assez voisins de $\mathcal{O}$. On peut écrire

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)} transfert(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}'}),$$

où $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}'} \in D^{st}_{orb}(\mathbf{M}')$ a pour support des éléments assez réguliers et voisins de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$. Alors

$$I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f') = \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)} I^{K\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}'}), f') = \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)} S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}'}, (f')^{\mathbf{M}'})$$

$$= \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)} S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}'}, g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'}) = \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(K\tilde{M},\mathbf{a}_M)} I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}'}, f),$$

cette dernière égalité provenant de (6). Par définition, la dernière expression vaut $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\tau}, f)$. Cela prouve que la fonction f' satisfait le (i) de l'énoncé.

La preuve du (ii) est similaire, en utilisant la relation suivante pour $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$:

$$S^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, f),$$

pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}_{\tilde{M}'})$. Elle résulte de la définition de $g_{K\tilde{M},\mathbf{M}'}$ et de (2) ci-dessus. Cela achève la preuve. □

1.10 Le théorème principal

Evidemment, la définition des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes donnée en 1.3 s'adapte aux K-espaces. Soit $K\tilde{M}$ un K-espace de Levi de $K\tilde{G}$.

Théorème (à prouver). *Soient $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Alors on a l'égalité*

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}).$$

1.11 Réduction au cas des intégrales orbitales régulières

Lemme. *Soit $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Supposons l'égalité du théorème vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers. Alors elle l'est pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.*

Preuve. On oublie comme toujours les questions de mesures. On fixe une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui est $\tilde{G}$-équisingulière. On doit montrer que, sous l'hypothèse de l'énoncé, le théorème est vérifié pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$. D'après la définition de 1.3, on peut fixer une fonction $f'' \in I(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ telle que

$$(1) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\tau}, f) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f'')$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ dont le support est formé d'éléments assez réguliers et voisins de $\mathcal{O}$;

$$(2) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, f) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, f'')$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$.

Le lemme 1.8 nous fournit une fonction f' qui a les mêmes propriétés relativement aux intégrales orbitales pondérées endoscopiques :

$$(3) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\tau}, f) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau}, f')$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega)$ dont le support est formé d'éléments assez réguliers et voisins de $\mathcal{O}$;

$$(4) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, f) = I^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, f')$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$.

L'hypothèse de l'énoncé et les relations (1) et (3) impliquent que f' et f'' sont égales au voisinage de $\mathcal{O}$. Mais alors les relations (2) et (4) impliquent l'égalité cherchée. □

1.12 Elimination des K-espaces

Revenons à un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et à un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On peut inclure le triplet comme composante connexe d'un triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$. L'espace $\tilde{M}$ est alors une composante connexe d'un K-espace $K\tilde{M}$ et on ne perd rien à supposer que $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$. **Supposons le théorème 1.10 prouvé pour ces données**. Soient $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(K\tilde{M}, \mathbf{a}_M)$, $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. On a défini $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ en 1.6. On note ici $transfert(\boldsymbol{\delta})$ le transfert de $\boldsymbol{\delta}$ à $\tilde{M}(\mathbb{R})$. On a alors l'égalité

$$(1) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}).$$

En effet, introduisons la fonction $\mathbf{f}^{K\tilde{G}} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ dont la composante sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est $\mathbf{f}$ et dont les autres composantes sont nulles. Introduisons le transfert $transfert^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta})$ de $\boldsymbol{\delta}$ à $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. Sa composante sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ est $transfert(\boldsymbol{\delta})$. On ne connaît pas les autres composantes, mais peu importe. Par définition, on a

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{K\tilde{G}}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{K\tilde{G}}).$$

Grâce au théorème, on obtient

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(transfert^{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{K\tilde{G}}).$$

Puisque $\mathbf{f}^{K\tilde{G}}$ est concentré sur la composante $\tilde{G}(\mathbb{R})$, ce dernier terme est égal par définition à $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f})$. Cela prouve (1).

1.13 Le cas quasi-déployé et à torsion intérieure

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$.

Proposition. *Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}).$$

Preuve. Un argument analogue à celui du paragraphe 1.11 nous ramène au cas où $\boldsymbol{\delta}$ appartient à $D^{st}_{orb}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et le support de $\boldsymbol{\delta}$ est formé d'éléments $\tilde{G}$-réguliers. La preuve est alors la même que celle de la proposition [III] 2.9(ii). C'est-à-dire que les constructions de la section 2 de [III] nous ramènent au cas d'un groupe sans torsion. Dans ce cas, l'assertion résulte de [A5] théorème 1.1(a). □

2 Un nouvel espace de distributions

2.1 Définition de l'espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure. On définit un sous-espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \subset D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ par récurrence sur $dim(G_{SC})$. Une fois cet espace défini, on pose $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) = D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \cap D^{st}_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On a besoin d'étendre les définitions dans la situation habituelle suivante. On considère des extensions compatibles

$$1 \to C_\natural \to G_\natural \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural \to \tilde{G}$$

où $C_\natural$ est un tore central induit et où $\tilde{G}_\natural$ est encore à torsion intérieure. On se donne de plus un caractère $\lambda_\natural$ de $C_\natural(\mathbb{R})$. En supposant défini l'espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$, on note $D_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ son image naturelle dans $D_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. De même, on note $D^{st}_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ l'image naturelle de $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ dans $D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. Supposons donnés d'autres objets

$$1 \to C_\flat \to G_\flat \to G \to 1 \ , \tilde{G}_\flat \to \tilde{G}$$

et $\lambda_\flat$ vérifiant les mêmes conditions. Supposons donnés comme en 1.4 un caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ de $G_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ et une fonction $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ sur $\tilde{G}_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ se transformant selon le caractère $\lambda_{\natural,\flat}$. A l'aide de cette fonction, on construit les isomorphismes habituels

$$D_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) \simeq D_{géom,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$$

$$D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) \simeq D^{st}_{géom,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R})).$$

On montrera plus loin que

(1) $D_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ et $D_{tr-orb,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$ se correspondent par le premier isomorphisme ; $D^{st}_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ et $D^{st}_{tr-orb,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$ se correspondent par le second.

Si maintenant $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique relevante de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, avec $G' \neq G$, on introduit des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. L'espace $D^{st}_{tr-orb,\lambda_1}(\tilde{G}_1(\mathbb{R}))$ est bien défini et on note $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$ le sous-espace de $D^{st}_{géom}(\mathbf{G}')$ auquel il s'identifie. D'après (1), cette définition ne dépend pas du choix des données auxiliaires. On peut montrer que, si $\mathbf{G}'_0$ est une donnée endoscopique équivalente à $\mathbf{G}'$, l'isomorphisme déduit d'une équivalence entre $D^{st}_{géom}(\mathbf{G}')$ et $D^{st}_{géom}(\mathbf{G}'_0)$ envoie $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$ sur $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}'_0)$ (on ne donnera pas la preuve formelle similaire à celle de (1)). Rappelons qu'en général, on note $\mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$ un ensemble de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et relevantes de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On simplifie cette notation en $\mathcal{E}(\tilde{G})$ dans notre situation quasi-déployée à torsion intérieure. Cela étant, on définit $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ comme le sous-espace de $D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ engendré par $D_{orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et par les images par transfert des espaces $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$ pour $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G})$ tel que $G' \neq G$.

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet qui n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure. On définit $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ comme le sous-espace de $D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ engendré par $D_{orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ et par les images par transfert des espaces $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$ pour $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$.

Soit $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ un K-triplet. On définit $D_{tr-orb}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ comme le sous-espace de $D_{géom}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ engendré par $D_{orb}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ et par les images par transfert des espaces $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$ pour $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$.

Remarque. Pour $p \in \Pi$, la projection naturelle $D_{géom}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \to D_{géom}(\tilde{G}_p(\mathbb{R}), \omega)$ envoie $D_{tr-orb}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ sur $D_{tr-orb}(\tilde{G}_p(\mathbb{R}), \omega)$. J'ignore par contre si l'homomorphisme

$$D_{tr-orb}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \to \oplus_{p\in\Pi} D_{tr-orb}(\tilde{G}_p(\mathbb{R}), \omega)$$

est surjectif.

Avant de prouver (1), on doit rappeler qu'en [I] 1.12, on a défini un groupe $G_{ab}(\mathbb{R})$, un groupe réductif connexe G_0 et des homomorphismes

$$G(\mathbb{R}) \to G_{ab}(\mathbb{R}) \stackrel{N^G}{\to} G_{0,ab}(\mathbb{R}).$$

On a des objets similaires pour les espaces tordus, ainsi que des applications

$$\tilde{G}(\mathbb{R}) \to \tilde{G}_{ab}(\mathbb{R}) \stackrel{N^{\tilde{G}}}{\to} \tilde{G}_{0,ab}(\mathbb{R}).$$

On a

(2) $G_0 = G$, $\tilde{G}_0 = \tilde{G}$ et les applications $G(\mathbb{R}) \to G_{ab}(\mathbb{R})$ et $\tilde{G}(\mathbb{R}) \to \tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$ sont surjectives.

Preuve. Les assertions pour les espaces tordus résultent de celles pour les groupes. Le groupe G_0 est le groupe quasi-déployé tel que $\hat{G}_0 = \hat{G}^{\hat{\theta},0}$. Ici, $\hat{\theta} = 1$ et G est quasi-déployé, d'où $G_0 = G$. Par définition, $G_{ab}(\mathbb{R}) = H^{1,0}(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{SC} \to G)$. Fixons une paire de Borel (B, T) de G définie sur $\mathbb{R}$. L'application naturelle

$$H^{1,0}(\Gamma_{\mathbb{R}}; T_{sc} \to T) \to H^{1,0}(\Gamma_{\mathbb{R}}; G_{SC} \to G)$$

est bijective. On a une suite exacte

$$T(\mathbb{R}) = H^0(\Gamma_{\mathbb{R}}; T) \to H^{1,0}(\Gamma_{\mathbb{R}}; T_{sc} \to T) \to H^1(\Gamma_{\mathbb{R}}; T_{sc}).$$

Mais T_{sc} est un tore induit, donc le dernier groupe est nul. La première flèche est donc surjective et, a fortiori, l'homomorphisme $G(\mathbb{R}) \to G_{ab}(\mathbb{R})$ est surjectif. $\square$

Prouvons (1). Rappelons la suite exacte

$$1 \to \hat{G} \to \hat{G}_\natural \to \hat{C}_\natural \to 1.$$

On fixe une paire de Borel épinglée de $\hat{G}_\natural$ conservée par l'action galoisienne. Elle se restreint naturellement en une telle paire pour $\hat{G}$. En notant $\hat{T}$ et $\hat{T}_\natural$ leurs tores, on a la suite exacte

$$1 \to \hat{T} \to \hat{T}_\natural \to \hat{C}_\natural \to 1.$$

Elle se restreint en une suite exacte

$$(3) \qquad 1 \to Z(\hat{G}) \to Z(\hat{G}_\natural) \to \hat{C}_\natural \to 1.$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G})$. On ne perd rien à supposer que $s \in \hat{T}$. On a $\hat{G}' = \hat{G}_s$ (on rappelle que $\hat{G}_s$ est la composante neutre du centralisateur $Z_{\hat{G}}(s)$ de s dans $\hat{G}$) . Posons $\hat{G}'_\natural = (\hat{G}_\natural)_s$. On a $\hat{G}'_\natural = \hat{T}_\natural \hat{G}' = Z(\hat{G}_\natural)\hat{G}'$ et la suite

$$(4) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \hat{G}'_\natural \to \hat{C}_\natural \to 1$$

est exacte. On pose $\mathcal{G}'_\natural = Z(\hat{G}_\natural)\mathcal{G}'$. Ce sous-groupe de ${}^LG$ agit sur $\hat{G}'_\natural$, d'où une action galoisienne sur ce groupe compatible avec la suite exacte ci-dessus. On introduit un groupe $G'_\natural$ quasi-déployé sur $\mathbb{R}$ de sorte que $\hat{G}'_\natural$, muni de son action galoisienne, en soit un groupe dual. On a une suite exacte duale de la précédente

$$1 \to C_\natural \to G'_\natural \to G' \to 1.$$

La donnée $\mathbf{G}'_\natural = (G'_\natural, \mathcal{G}'_\natural, s)$ est une donnée endoscopique pour $(G_\natural, \tilde{G}_\natural)$. On obtient une application $\mathbf{G}' \mapsto \mathbf{G}'_\natural$ qui, à une classe d'équivalence de donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G})$, associe une classe d'équivalence de donnée endoscopique pour $(G_\natural, \tilde{G}_\natural)$. Montrons qu'elle est bijective. Il suffit de définir son inverse. Pour cela, partons d'une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_\natural = (G'_\natural, \mathcal{G}'_\natural, s)$ pour $(G_\natural, \tilde{G}_\natural)$. On suppose $s \in \hat{T}_\natural$. Quitte à multiplier s par un élément de $Z(\hat{G}_\natural)$, on peut grâce à (3) supposer que $s \in \hat{T}$. On a comme ci-dessus $\hat{G}'_\natural = (\hat{G}_\natural)_s = \hat{T}_\natural \hat{G}_s$, d'où $\hat{G}'_\natural \cap \hat{G} = \hat{T}\hat{G}_s = \hat{G}_s$ puisque $\hat{T} \subset \hat{G}_s$. En posant $\hat{G}' = \hat{G}_s$, on a encore la suite exacte (4). On introduit un groupe G' quasi-déployé sur $\mathbb{R}$ de sorte que $\hat{G}'$ soit dual de G'. Posons $\mathcal{G}' = \mathcal{G}'_\natural \cap {}^LG$. Montrons que le triplet $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G})$. La seule condition non évidente est la suivante. Il existe un cocycle $a : W_\mathbb{R} \to Z(\hat{G}_\natural)$, qui est un cobord, de sorte que $sgw(s)^{-1} = a(w)g$ pour tout $w \in W_\mathbb{R}$ et tout $(g, w) \in \mathcal{G}'_\natural$. Quand on se restreint à $(g, w) \in \mathcal{G}'$, tous les termes sauf éventuellement $a(w)$ sont dans $\hat{G}$. Ce dernier terme est donc lui-aussi dans $\hat{G}$, donc dans $Z(\hat{G}_\natural) \cap \hat{G} = Z(\hat{G})$. Donc a est un cocycle de $W_\mathbb{R}$ dans $Z(\hat{G})$. Il faut voir que c'est un cobord. Cela résulte de

(5) l'homomorphisme naturel $H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G})) \to H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}_\natural))$ est injectif.

Il s'insère dans une suite exacte

$$1 \to Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}} \to Z(\hat{G}_\natural)^{\Gamma_\mathbb{R}} \to \hat{C}_\natural^{\Gamma_\mathbb{R}} \to H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G})) \to H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}_\natural)).$$

La suite (3) entraîne que l'homomorphisme $Z(\hat{G}_\natural)^{\Gamma_\mathbb{R},0} \to \hat{C}_\natural^{\Gamma_\mathbb{R},0}$ est surjectif. Or $\hat{C}$ est induit donc $\hat{C}_\natural^{\Gamma_\mathbb{R}}$ est connexe. Il en résulte que le deuxième homomorphisme de la suite ci-dessus est surjectif, d'où (5).

Il est clair que l'application $\mathbf{G}'_\natural \mapsto \mathbf{G}'$ que l'on vient de construire est inverse de la précédente, ce qui prouve la bijectivité de ces deux applications.

Considérons deux données $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}'_\natural$ qui se correspondent ainsi. Rappelons que, puisque $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, $\mathbf{G}'$ est relevante si et seulement si $\tilde{G}'(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ ([I] lemme 1.9). De même pour $\tilde{G}'_\natural$. Puisque $C_\natural$ est induit, l'application $\tilde{G}'_\natural(\mathbb{R}) \to \tilde{G}'(\mathbb{R})$ est surjective. Les deux ensembles sont vides ou non vides simultanément. Donc $\mathbf{G}'$ est relevante si et seulement si $\mathbf{G}'_\natural$ l'est. Supposons ces données relevantes. Fixons des données supplémentaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, Δ_1 pour $\mathbf{G}'$. Notons $G'_{\natural,1}$ le produit fibré de $G'_\natural$ et G'_1 au-dessus de G'. Le groupe dual $\hat{G}'_{\natural,1}$ s'identifie au quotient de $\hat{G}' \times Z(\hat{G}_\natural) \times Z(\hat{G}_1)$ par le sous-groupe des $(z_1, z_2, z_3) \in Z(\hat{G}')$ tels que $z_1 z_2 z_3 = 1$. L'homomorphisme $\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^LG'_1$ se prolonge en un homomorphisme $\hat{\xi}_{\natural,1} : \mathcal{G}'_\natural \to {}^LG'_{\natural,1}$ de la façon suivante. Soit $(g_\natural, w) \in \mathcal{G}'_\natural$. On écrit $g_\natural = z_\natural g$, avec $z_\natural \in Z(\hat{G}_\natural)$ et $(g, w) \in \mathcal{G}'$. Ecrivons $\hat{\xi}_1(g, w) = z_1 h \times w$, avec $z_1 \in Z(\hat{G}'_1)$ et $h \in \hat{G}'$. On note $\hat{\xi}_{\natural,1}(g_\natural, w)$ l'image de $(h, z_\natural, z_1)$ dans $\hat{G}'_{\natural,1}$. On vérifie que ce terme ne dépend pas des choix faits et que l'application $\hat{\xi}_{\natural,1}$ ainsi définie est un homomorphisme. On note $\tilde{G}'_{\natural,1}$ le produit fibré de $\tilde{G}'_\natural$ (qui est l'espace de la donnée endoscopique $\mathbf{G}'_\natural$) et de $\tilde{G}'_1$ au-dessus de $\tilde{G}'$. Soit $(\delta_{\natural,1}, \gamma_\natural)$ un couples d'éléments de $\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R}) \times \tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$ qui sont fortement réguliers et qui se correspondent. Ce couple a une image naturelle $(\delta_1, \gamma) \in \tilde{G}'_1(\mathbb{R}) \times \tilde{G}(\mathbb{R})$ formée d'éléments fortement réguliers qui se correspondent. On pose $\Delta_{\natural,1}(\delta_{\natural,1}, \gamma_\natural) = \Delta_1(\delta_1, \gamma)$. On vérifie que $G'_{\natural,1}$, $\tilde{G}'_{\natural,1}$, C_1, $\hat{\xi}_{\natural,1}$, $\Delta_{\natural,1}$ est un ensemble de données auxiliaires pour $\mathbf{G}'_\natural$.

Considérons maintenant d'autres données indexées par $\flat$ comme en (1). Pour la même donnée $\mathbf{G}'$ et les mêmes données auxiliaires, on construit de même $\mathbf{G}'_\flat$ et des données

auxiliaires $G'_{\flat,1}$,..., $\Delta_{\flat,1}$. On peut appliquer aussi ces constructions pour les produits fibrés $G'_{\natural,\flat}$ et $\tilde{G}'_{\natural,\flat}$. On a donc une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_{\natural,\flat}$ pour $(G'_{\natural,\flat}, \tilde{G}'_{\natural,\flat})$ et des données auxiliaires $G'_{\natural,\flat,1}$,...,$\Delta_{\natural,\flat,1}$. On vérifie que $G'_{\natural,\flat,1}$ est le produit fibré de $G'_{\natural,1}$ et $G'_{\flat,1}$ au-dessus de G'_1 et que $\tilde{G}'_{\natural,\flat,1}$ est le produit fibré de $\tilde{G}'_{\natural,1}$ et $\tilde{G}'_{\flat,1}$ au-dessus de G'_1. D'après [I] 1.12 et (2) ci-dessus, on a un homomorphisme naturel $G'_{ab}(\mathbb{R}) \to G_{ab}(\mathbb{R})$ et une application compatible $\tilde{G}'_{ab}(\mathbb{R}) \to \tilde{G}_{ab}(\mathbb{R})$. De même, on a un homomorphisme $G'_{\natural,\flat,ab}(\mathbb{R}) \to G_{\natural,\flat,ab}(\mathbb{R})$ et une application compatible $\tilde{G}'_{\natural,\flat,ab}(\mathbb{R}) \to \tilde{G}_{\natural,\flat,ab}(\mathbb{R})$. On les compose en un homomorphisme $G'_{\natural,\flat,1,ab}(\mathbb{R}) \to G_{\natural,\flat,ab}(\mathbb{R})$ et une application compatible $\tilde{G}'_{\natural,\flat,1,ab}(\mathbb{R}) \to \tilde{G}_{\natural,\flat,ab}(\mathbb{R})$. Grâce à (2), le caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ se factorise en un homomorphisme de $G_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$ et l'application $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ se factorise en une application définie sur $\tilde{G}_{\natural,\flat}(\mathbb{R})$. Par composition avec les applications précédentes, on obtient un caractère $\lambda'_{\natural,\flat,1}$ de $G'_{\natural,\flat,1}(\mathbb{R})$ et une application compatible $\tilde{\lambda}'_{\natural,\flat,1}$ sur $\tilde{G}'_{\natural,\flat,1}(\mathbb{R})$.

Introduisons des notations pour nos applications

$$\begin{array}{ccc} D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) & & D_{tr-orb}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R})) \\ p_{\lambda_\natural} \downarrow & & p_{\lambda_\flat} \downarrow \\ D_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\iota} & D_{tr-orb,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R})) \end{array}$$

On veut prouver que, pour $\boldsymbol{\gamma}_\natural \in D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$, il existe $\boldsymbol{\gamma}_\flat \in D_{tr-orb}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$ tel que $\iota \circ p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma}_\natural) = p_{\lambda_\flat}(\boldsymbol{\gamma}_\flat)$. Par définition, on peut écrire $\boldsymbol{\gamma}_\natural$ comme somme d'un élément $\boldsymbol{\gamma}_{\natural,orb}$ qui est une honnête intégrale orbitale et d'une somme sur $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G})$ tel que $G' \neq G$, d'éléments $transfert(\boldsymbol{\delta}_\natural)$, où $\boldsymbol{\delta}_\natural \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}'_\natural)$. Pour les intégrales orbitales, il n'y a pas de problème. Il existe presque par définition un élément $\boldsymbol{\gamma}_{\flat,orb} \in D_{orb}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$ tel que $\iota \circ p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma}_{\natural,orb}) = p_{\lambda_\flat}(\boldsymbol{\gamma}_{\flat,orb})$. Fixons $\mathbf{G}'$. En fixant des données auxiliaires comme ci-dessus, on identifie $\boldsymbol{\delta}_\natural$ à un élément de $D^{st}_{tr-orb,\lambda_1}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R}))$ (λ_1 est le caractère de $C_1(\mathbb{R})$). On le relève en un élément $\boldsymbol{\delta}_{\natural,1} \in D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R}))$. On a le diagramme suivant

$$(6) \qquad \begin{array}{ccccc} D^{st}_{géom}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) & \xrightarrow{p_{\lambda_1}} & D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) & \xrightarrow{transfert} & D_{géom}(G_\natural(\mathbb{R})) \\ p_{\lambda_\natural} \downarrow & & p_{\lambda_\natural} \downarrow & & p_{\lambda_\natural} \downarrow \\ D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) & \xrightarrow{p_{\lambda_1}} & D^{st}_{géom,\lambda_\natural\times\lambda_1}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) & & D_{géom,\lambda_\natural}(G_\natural(\mathbb{R})) \end{array}$$

On vérifie que la suite du bas se complète en un homomorphisme que l'on peut appeler

$$transfert : D^{st}_{géom,\lambda_\natural\times\lambda_1}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) \to D_{géom,\lambda_\natural}(G_\natural(\mathbb{R}))$$

qui rend ce diagramme commutatif. On a alors

$$p_{\lambda_\natural} \circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\natural) = p_{\lambda_\natural} \circ transfert \circ p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}_{\natural,1}) = transfert \circ p_{\lambda_1} \circ (\boldsymbol{\delta}'_{\natural,1}),$$

où $\boldsymbol{\delta}'_{\natural,1} = p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}_{\natural,1})$. De l'application $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat,1}$ se déduit un isomorphisme

$$\iota_1^{st} : D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) \to D^{st}_{géom,\lambda_\flat}(\tilde{G}'_{\flat,1}(\mathbb{R})).$$

Il résulte de sa construction qu'il se descend en un isomorphisme encore noté

$$\iota_1^{st} : D^{st}_{géom,\lambda_\natural\times\lambda_1}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) \to D^{st}_{géom,\lambda_\flat\times\lambda_1}(\tilde{G}'_{\flat,1}(\mathbb{R})).$$

On vérifie que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) & \stackrel{p_{\lambda_1}}{\to} & D^{st}_{géom,\lambda_\natural\times\lambda_1}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R})) & \stackrel{transfert}{\to} & D_{géom,\lambda_\natural}(G_\natural(\mathbb{R})) \\ \iota_1^{st}\downarrow & & \iota_1^{st}\downarrow & & \iota\downarrow \\ D^{st}_{géom,\lambda_\flat}(\tilde{G}'_{\flat,1}(\mathbb{R})) & \stackrel{p_{\lambda_1}}{\to} & D^{st}_{géom,\lambda_\flat\times\lambda_1}(\tilde{G}'_{\flat,1}(\mathbb{R})) & \stackrel{transfert}{\to} & D_{géom,\lambda_\flat}(G_\flat(\mathbb{R})) \end{array}$$

En posant $\boldsymbol{\delta}'_{\flat,1} = \iota_1^{st}(\boldsymbol{\delta}'_{\natural,1})$, on obtient

$$\iota\circ p_{\lambda_\natural}\circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\natural) = \iota\circ transfert\circ p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}'_{\natural,1}) = transfert\circ p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}'_{\flat,1}).$$

Puisque $G'\neq G$, on peut appliquer (1) par récurrence en remplaçant $\tilde{G}$, $\tilde{G}_\natural$ et $\tilde{G}_\flat$ par $\tilde{G}'_1$, $\tilde{G}'_{\natural,1}$ et $\tilde{G}'_{\flat,1}$. Puisque $\boldsymbol{\delta}'_{\natural,1}\in D^{st}_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}'_{\natural,1}(\mathbb{R}))$, on obtient que $\boldsymbol{\delta}'_{\flat,1}\in D^{st}_{tr-orb,\lambda_\flat}(\tilde{G}'_{\flat,1}(\mathbb{R}))$. On relève $\boldsymbol{\delta}'_{\flat,1}$ en un élément $\boldsymbol{\delta}_{\flat,1}\in D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}'_{\flat,1}(\mathbb{R}))$. Par un diagramme similaire à (6) pour les indices $\flat$, on a

$$transfert\circ p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}'_{\flat,1}) = p_{\lambda_\flat}\circ transfert\circ p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}_{\flat,1}).$$

L'élément $p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}_{\flat,1})$ s'identifie à un élément $\boldsymbol{\delta}_\flat\in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}'_\flat)$ et l'égalité ci-dessus se récrit

$$transfert\circ p_{\lambda_1}(\boldsymbol{\delta}'_{\flat,1}) = p_{\lambda_\flat}\circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\flat).$$

On a obtenu

$$\iota\circ p_{\lambda_\natural}\circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\natural) = p_{\lambda_\flat}\circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\flat).$$

Notons $\boldsymbol{\gamma}_\flat$ la somme de $\boldsymbol{\gamma}_{\flat,orb}$ et de la somme pour tout $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G})$, avec $G'\neq G$, des éléments $transfert(\boldsymbol{\delta}_\flat)$ que l'on vient de construire. Par définition, on a $\boldsymbol{\gamma}_\flat\in D_{tr-orb}(\tilde{G}_\flat(\mathbb{R}))$ et on a prouvé l'égalité $\iota\circ p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma}_\natural) = p_{\lambda_\flat}(\boldsymbol{\gamma}_\flat)$. Cela démontre la première assertion de (1).

Prouvons la seconde assertion. On voit qu'elle résulte de la propriété suivante, qui porte sur une seule série de données :

(7) on a l'égalité $D^{st}_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})) = D_{tr-orb,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))\cap D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$.

L'inclusion du membre de gauche dans celui de droite est évidente par définition. L'inclusion inverse signifie que, si $\boldsymbol{\gamma}$ est un élément de $D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ tel que $p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma})$ est stable, alors il existe $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ tel que $p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma}) = p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta})$. Avant de le prouver, énonçons deux propriétés de l'espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Le groupe $Z_G(\mathbb{R})$ agit par translations sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et conséquemment sur l'espace de distributions $D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour $z\in Z_G(\mathbb{R})$, on note $\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma}^z$ cette action. Alors

(8) pour $z\in Z_G(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{\gamma}\in D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on a $\boldsymbol{\gamma}^z\in D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Appelons caractère affine de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ une fonction $\tilde{\chi}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un caractère χ de $G(\mathbb{R})$ de sorte que $\tilde{\chi}(x\gamma) = \chi(x)\tilde{\chi}(\gamma)$ pour tous $x\in G(\mathbb{R})$ et $\gamma\in\tilde{G}(\mathbb{R})$. Un caractère affine agit par multiplication sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})$. Cette action se quotiente en une action sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et on a aussi une action duale sur $D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ que l'on note $(\tilde{\chi},\boldsymbol{\gamma})\mapsto\tilde{\chi}\boldsymbol{\gamma}$. Alors

(9) pour tout caractère affine $\tilde{\chi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on a $\tilde{\chi}\boldsymbol{\gamma}\in D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Les propriétés (8) et (9) sont claires si l'on remplace l'espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ par $D_{orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On les prouve alors par récurrence en étudiant comment se comportent les actions de $Z_G(\mathbb{R})$ ou d'un caractère affine relativement au transfert.

Revenons à la preuve de (7). Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. Introduisons le groupe dérivé $G_{\natural,der}$ de $G_\natural$. L'image dans $G_{\natural,der}(\mathbb{R})\backslash\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$ du support de $\boldsymbol{\gamma}$ est finie. On peut donc écrire $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1,...,n} \boldsymbol{\gamma}_i$, de sorte que

- pour tout i, $\boldsymbol{\gamma}_i$ appartient à $D_{géom}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$;
- l'image du support de $\boldsymbol{\gamma}_i$ dans $G_{\natural,der}(\mathbb{R})\backslash\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$ est un unique point x_i ;
- pour $i \neq j$, on a $x_i \neq x_j$.

On peut récupérer chaque $\boldsymbol{\gamma}_i$ comme combinaison linéaire de $\tilde{\chi}\boldsymbol{\gamma}$ pour des caractères affines $\tilde{\chi}$ convenables de $\tilde{G}_\natural(\mathbb{R})$. D'après (9), on a donc $\boldsymbol{\gamma}_i \in D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ pour tout i. Soient $i \neq j$, supposons que $x_i = cx_j$ avec $c \in C_\natural(\mathbb{R})$. Posons $\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\gamma} + \lambda_\natural(c)^{-1}\boldsymbol{\gamma}_j^c - \boldsymbol{\gamma}_j$. Cet élément est encore dans $D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ d'après (8) et vérifie $p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma}') = p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma})$. Mais, pour $\boldsymbol{\gamma}'$, la composante $\boldsymbol{\gamma}_j$ est remplacée par $\lambda_\natural(c)^{-1}\boldsymbol{\gamma}_j^c$ et la projection de son support est x_i. Cette composante s'ajoute à $\boldsymbol{\gamma}_i$ et on a diminué le nombre des composantes. En poursuivant, on arrive à un élément que l'on note encore $\boldsymbol{\gamma}$, qui appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$ et a même image par $p_{\lambda_\natural}$ que le $\boldsymbol{\gamma}$ initial, mais dont l'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ associé vérifie la condition : si $i \neq j$, on a $x_i \notin C_\natural(\mathbb{R})x_j$. Posons $\Delta = C_\natural(\mathbb{R}) \cap G_{\natural,der}(\mathbb{R})$. C'est un groupe fini. Grâce à (8), on peut moyenner $\boldsymbol{\gamma}$ par ce groupe sans changer les propriétés ci-dessus de cet élément et supposer que $\boldsymbol{\gamma}^c = \lambda_\natural(c)\boldsymbol{\gamma}$ pour tout $c \in \Delta$. Supposons alors que $p_{\lambda_\natural}(\boldsymbol{\gamma})$ soit stable. On a prouvé en [II] 1.10(5) qu'un $\boldsymbol{\gamma}$ vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus était stable. Donc $\boldsymbol{\gamma} \in D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}_\natural(\mathbb{R}))$. Cela prouve (7) et la seconde assertion de (1). □

2.2 Premières propriétés de l'espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$

Considérons un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Posons $D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega) = D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \cap D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$. Dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, on pose $D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega) = D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \cap D^{st}_{géom}(\mathcal{O}, \omega)$. On a

(1) $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) = \oplus_{\mathcal{O}} D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega)$ où $\mathcal{O}$ parcourt toutes les classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$;

(2) si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) = \oplus_{\mathcal{O}} D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega)$.

Preuve. L'espace $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ est la somme de $D_{orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ et des espaces $transfert(D_{tr-orb}(\mathbf{G}'))$, où $\mathbf{G}'$ parcourt $\mathcal{E}(\tilde{G}, \mathbf{a})$, avec la restriction $G' \neq G$ si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Pour prouver (1), il suffit de montrer que chacun de ces espaces vérifie une décomposition analogue. C'est clair pour l'espace $D_{orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Pour un espace $transfert(D_{tr-orb}(\mathbf{G}'))$, cela résulte par récurrence de l'assertion (2) appliquée à $\mathbf{G}'$. Cela prouve (1). Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Pour un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ s'écrivant $\sum_{\mathcal{O}} \boldsymbol{\gamma}_{\mathcal{O}}$, où $\boldsymbol{\gamma}_{\mathcal{O}} \in D_{géom}(\mathcal{O})$, l'élément $\boldsymbol{\gamma}$ est stable si et seulement si $\boldsymbol{\gamma}_{\mathcal{O}}$ est stable pour tout $\mathcal{O}$. Alors (2) résulte de (1). □

Pour un K-triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ d'éléments semi-simples dans $K\tilde{G}(\mathbb{R})$, on définit de même $D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega)$ et on a encore

(3) $D_{tr-orb}(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) = \oplus_{\mathcal{O}} D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega)$.

Revenons à un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On a

(4) l'homomorphisme d'induction envoie $D_{tr-orb}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dans $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$; si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, l'homomorphisme d'induction envoie $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dans $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$.

Preuve. On oublie les espaces de mesures. La deuxième assertion résulte de la première puisque l'induction conserve la stabilité. La première assertion est vraie si on remplace les espaces D_{tr-orb} par les espaces d'intégrales orbitales D_{orb}. Il nous suffit donc de fixer

une donnée $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M})$, avec $M' \neq M$ dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, de fixer $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{M}')$ et de prouver que $(transfert(\boldsymbol{\delta}))^{\tilde{G}}$ appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})))$. Il existe un élément $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G})$ dont $\mathbf{M}'$ soit une "donnée de Levi". Puisque le transfert commute à l'induction, on a

$$(transfert(\boldsymbol{\delta}))^{\tilde{G}} = transfert(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{G}'}).$$

En raisonnant par récurrence, on peut supposer que $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{G}'}$ appartient à $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$. Alors l'élément ci-dessus appartient par définition à $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. $\square$

Pour un K-triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$, on a de même

(5) l'homomorphisme d'induction envoie $D_{tr-orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dans $D_{tr-orb}(K\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$.

2.3 Un lemme de séparation

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque et un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On a défini en [II] 3.1 un ensemble $\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ et, pour tout J dans cet ensemble, un espace U_J de germes au point 1 de fonctions définies presque partout sur $A_{\tilde{M}}(F)$. Le corps de base F était non-archimédien dans cette référence. Les mêmes définitions valent sur le corps de base $\mathbb{R}$. On ne les reprend pas en se contentant de renvoyer à [II] 3.1. Toutefois, il nous faut donner une démonstration de la propriété essentielle [II] 3.1(3). Celle donnée dans cette référence ne s'adapte pas au corps de base $\mathbb{R}$. Signalons en passant que la propriété [II] 3.1(2) devient fausse sur $\mathbb{R}$. Mais elle ne nous servait qu'à démontrer (3).

Lemme. *Soient $J \in \mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ et $u \in U_J$. Supposons que $\tilde{M} \neq \tilde{G}$ et que u soit équivalent à une constante. Alors $u = 0$ et cette constante est nulle.*

Preuve. L'élément J est formé de familles $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n}$, où
- $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$;
- les α_i sont des racines de $A_{\tilde{M}}$ dans G linéairement indépendantes ;
- le réseau $\oplus_{i=1,...,n}\mathbb{Z}\alpha_i$ qu'elles engendrent dans $\mathfrak{a}^*_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$ est un réseau fixé R_J.

A une telle famille, on associe la fonction

$$a \mapsto u_{\underline{\alpha}}(a) = \prod_{i=1,...,n} log(|\alpha_i(a) - \alpha_i(a)^{-1}|_{\mathbb{R}})$$

définie presque partout sur $A_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. Introduisons la relation de $\pm$-équivalence dans J : $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n}$ est $\pm$-équivalent à $\underline{\alpha}' = (\alpha'_i)_{i=1,...,n}$ si et seulement si on a l'égalité ensembliste $\{\pm\alpha_i; i = 1, ..., n\} = \{\pm\alpha'_i; i = 1, ..., n\}$ (en adoptant une notation additive pour les racines). La fonction $u_{\underline{\alpha}}$ ne dépend que de la classe de $\pm$-équivalence de $\underline{\alpha}$. Fixons un sous-ensemble $\underline{J} \subset J$ de représentants des classes de $\pm$-équivalence. L'élément u est une combinaison linéaire

$$u = \sum_{\underline{\alpha} \in \underline{J}} c_{\underline{\alpha}} u_{\underline{\alpha}},$$

avec des coefficients complexes $c_{\underline{\alpha}}$. On se limite à un voisinage de 1 dans $A_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. Tout élément dans un tel voisinage s'écrit de façon unique $a = exp(H)$ avec H proche de 0.

On pose $d(a) = ||H||$, où $||.||$ est la norme euclidienne fixée sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Dire que u est équivalent à une constante c signifie qu'il existe $r > 0$ de sorte que, si l'on se restreint à un domaine défini par les relations

$$|\alpha(a) - 1|_{\mathbb{R}} > Cd(a),$$

où C est une constante positive fixée, il existe $C' > 0$ tel que l'on ait une minoration

$$|u(a) - c| \leq C'd(a)^r$$

pour a dans le domaine assez proche de 1. Cette notion d'équivalence se descend à l'algèbre de Lie. Pour chaque $\underline{\alpha} \in \underline{J}$, introduisons la fonction

$$H \mapsto v_{\underline{\alpha}}(H) = \prod_{i=1,\dots,n} log(|2\alpha_i(H)|_{\mathbb{R}})$$

définie presque partout sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. Pour tout i, on a l'égalité

$$log(|exp(\alpha_i(H)) - exp(-\alpha_i(H))|_{\mathbb{R}}) = log(|2\alpha_i(H)|_{\mathbb{R}}) + log(|\frac{exp(\alpha_i(H)) - exp(-\alpha_i(H))}{2\alpha_i(H)}|_{\mathbb{R}}).$$

Le second terme est analytique au voisinage de $H = 0$ et nul en ce point. Cela entraîne que les fonctions $v_{\underline{\alpha}}$ et $H \mapsto u_{\underline{\alpha}}(exp(H))$ sont équivalentes. Posons

$$v = \sum_{\underline{\alpha} \in \underline{J}} c_{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}}.$$

Alors v est équivalent à la constante c. Cela entraîne

(1) $v(H) = c$ pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$.

En effet, fixons un point H en position générale. Considérons l'ensemble $\{tH; t \in \mathbb{R}, 0 < t < 2\}$. Il est contenu dans un domaine comme ci-dessus. En conséquence, la limite de $v(tH) - c$ est nulle quand t tend vers 0. Pour tout $\underline{\alpha} \in J$, la fonction $t \mapsto v_{\underline{\alpha}}(tH)$ est polynomiale en $log(t)$ pour $t > 0$. Donc aussi $v(tH) - c$. Quand t tend vers 0, $log(t)$ tend vers $+\infty$. Un polynôme en $log(t)$ ne peut tendre vers 0 que s'il est identiquement nul. Donc $v(tH) - c = 0$ pour tout t. Appliquée à $t = 1$, cette relation donne (1).

Les fonctions $v_{\underline{\alpha}}$ se quotientent en des fonctions sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})/\mathfrak{a}_{\tilde{G}}(\mathbb{R})$. On ne perd rien à supposer, pour simplifier les notations, que $\mathfrak{a}_{\tilde{G}} = \{0\}$. Considérons une fonction

$$f = \sum_{\underline{\alpha} \in \underline{J}} x_{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}},$$

avec des coefficients $x_{\underline{\alpha}} \in \mathbb{C}$. Notons $J(f)$ l'ensemble des $\underline{\alpha} \in \underline{J}$ tels que $x_{\underline{\alpha}} \neq 0$. Considérons la réunion des $\underline{\alpha} \in J(f)$, vus comme des ensembles de formes linéaires sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. C'est un ensemble fini de racines, notons-le $\Sigma(f)$. Chacune d'elles détermine l'hyperplan de $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$ sur lequel elle s'annule. D'où un ensemble fini d'hyperplans. Le complémentaire dans $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$ de la réunion de ces hyperplans est réunion finie de cônes. La fonction f est clairement analytique sur chacun d'eux. Soit $\mathcal{C}$ l'un de ces cônes et soit $d \in \mathbb{C}$. On va montrer

(2) si $f(H) - d$ est identiquement nul sur $\mathcal{C}$, alors $J(f)$ est vide.

On raisonne par récurrence sur un entier $N \geq 1$: on montre que les relations "$f(H) - d$ identiquement nul sur $\mathcal{C}$" et "$J(f)$ a N éléments" sont contradictoires. L'assertion est

évidente si $N = 1$: une fonction $v_{\underline{\alpha}}$ n'est certainement pas constante sur un cône ouvert (le nombre de racines $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}} = a_{\tilde{M}}$ étant strictement positif d'après l'hypothèse $\tilde{M} \neq \tilde{G}$). Soit $N \geq 2$, supposons que $f(H) - d$ soit identiquement nul sur $\mathcal{C}$ et que $J(f)$ ait N éléments. Notons que, si l'on fixe $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n} \in J(f)$, $\mathcal{C}$ est contenu dans l'une des composantes connexes du complémentaire des hyperplans noyaux des α_i. Puisque les α_i sont linéairement indépendants, il en résulte que $\mathcal{C}$ a au moins n murs. C'est-à-dire qu'il y a au moins n hyperplans $\mathcal{H}_j$ pour $j = 1, ..., n$, d'équations $\beta_j(H) = 0$, avec $\beta_j \in \Sigma(f)$, de sorte .que l'intersection de $\mathcal{H}_j$ avec l'adhérence de $\mathcal{C}$ contienne un ouvert de $\mathcal{H}_j$. On choisit de tels hyperplans. Il y a certainement un j et un $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n} \in J(f)$ tel que $\beta_j \neq \pm\alpha_i$ pour tout i. Sinon, tout $\underline{\alpha} \in J(f)$ contiendrait $\pm\beta_1, ..., \pm\beta_n$, sa classe de $\pm$-équivalence serait uniquement déterminée et $J(f)$ ne contiendrait qu'un élément. Fixons un j comme ci-dessus et posons simplement $\beta = \beta_j$. Il existe un $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n} \in J(f)$ et un i tel que $\beta = \alpha_i$. Cela traduit simplement l'appartenance de β_j à $\Sigma(f)$. Notons $J_1(f)$ le sous-ensemble des $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n} \in J(f)$ tels que β soit l'un des $\pm\alpha_i$ et $J_2(f)$ son complémentaire dans $J(f)$. Ce que l'on vient de dire signifie que $J_1(f)$ et $J_2(f)$ sont tous deux non vides. Notons $\mathcal{H}$ l'hyperplan défini par $\beta(H) = 0$, soit ϖ un élément de $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$ orthogonal à $\mathcal{H}$ et tel que $\mathcal{C}$ soit contenu dans $\mathcal{H} + \mathbb{R}_{>0}\varpi$. Montrons que l'on peut trouver un ensemble ouvert non vide $U \subset \mathcal{H}$ et un réel $\epsilon > 0$ de sorte que

(3) $\{H + t\varpi; H \in U, 0 < t < \epsilon\} \subset \mathcal{C}$;

(4) pour $\alpha \in \Sigma(f)$ avec $\alpha \neq \pm\beta$, on a $\alpha(H) \neq 0$ pour tout $H \in U$.

On peut certainement assurer (3) par l'hypothèse que $\mathcal{H}$ est un bord de $\mathcal{C}$. Pour assurer (4), il suffit de retirer de U le sous-ensemble des H qui sont annulés par une racine $\alpha \in \Sigma(f)$, $\alpha \neq \pm\beta$. Il faut vérifier que l'ensemble obtenu reste non vide. Il suffit pour cela que les α en question ne s'annulent pas identiquement sur $\mathcal{H}$, ou encore qu'ils ne soient pas proportionnels à β. Supposons $\alpha \in \Sigma(f)$ et $\alpha = e\beta$, avec $e \in \mathbb{Q}$ et $e \neq \pm 1$. Par définition, α intervient dans une famille $\underline{\alpha} \in J(f)$ tandis que β intervient dans une famille $\underline{\beta} \in J(f)$. Ces deux familles ne sont pas les mêmes : une famille ne peut pas contenir β et $e\beta$ car ces deux éléments ne sont pas linéairement indépendants. L'hypothèse $\alpha = e\beta$ avec $e \neq \pm 1$ interdit aux éléments de la famille $\underline{\alpha}$ d'engendrer le même réseau que les éléments de la famille $\underline{\beta}$. Cela contredit la définition de J. D'où les assertions ci-dessus.

On fixe U et ϵ comme ci-dessus. Fixons $H \in U$, soit $t \in]0, \epsilon[$. Pour $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,...,n} \in J_1(f)$, on peut supposer $\alpha_1 = \pm\beta$. On pose $\underline{\alpha}' = (\alpha_i)_{i=2,...,n}$. On a

$$v_{\underline{\alpha}}(H + t\varpi) = log(bt) v_{\underline{\alpha}'}(H + t\varpi),$$

où $b = |2\beta(\varpi)|_{\mathbb{R}}$. Dans $\underline{\alpha}'$ n'interviennent que des racines α vérifiant l'hypothèse de (4), donc pour lesquelles $\alpha(H + t\varpi)$ ne s'annule pas en $t = 0$. Il en résulte que $t \mapsto v_{\underline{\alpha}'}(H + t\varpi)$ se prolonge en une fonction analytique en t au voisinage de $t = 0$. Pour la même raison, si $\underline{\alpha} \in J_2(f)$, la fonction $t \mapsto v_{\underline{\alpha}}(H + t\varpi)$ se prolonge en une fonction analytique en t au voisinage de $t = 0$. Posons

$$f_1' = \sum_{\underline{\alpha} \in J_1(f)} x_{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}'},$$

$$f_2 = \sum_{\underline{\alpha} \in J_2(f)} x_{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}}.$$

Alors les fonctions $t \mapsto f_1'(H + t\varpi)$ et $t \mapsto f_2(H + t\varpi)$ se prolongent en des fonctions analytiques en t au voisinage de $t = 0$. De plus

$$(5) \qquad log(bt) f_1'(H + t\varpi) + f_2(H + t\varpi) - d = f(H + t\varpi) - d = 0$$

d'après l'hypothèse et (3). Si $f_1'(H+t\varpi)$ n'est pas identiquement nul, on en déduit

$$log(bt) = \frac{d - f_2(H+t\varpi)}{f_1'(H+t\varpi)},$$

et $log(bt)$ se prolonge en une fonction méromorphe au voisinage de $t=0$. C'est impossible. Donc $f_1'(H+t\varpi)$ est identiquement nul. D'après (5), on a aussi $f_2(H+t\varpi)=d$. Cela est vrai pour $H \in U$ et $t \in]0,\epsilon[$. Donc $f_2(H)=d$ pour H dans un ouvert non vide de $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(\mathbb{R})$. La fonction f_2 est du même type que f. Il lui est associé un ensemble fini de cônes dans lesquels elle est analytique. L'assertion précédente entraîne que $f_2(H)=d$ pour H dans l'un de ces cônes. Le nombre d'éléments de $J_2(f)$ est compris entre 1 et $N-1$. L'hypothèse de récurrence dit que ces deux propriétés sont contradictoires. Cela achève la preuve de (2).

Achevons la preuve du lemme. Les deux assertions (1) et (2) entraînent que les coefficients $c_{\underline{\alpha}}$ de v sont nuls. Donc la fonction u initiale est nulle et alors aussi la constante c. $\square$

Variante. Supposons $G=\tilde{G}$ et $\mathbf{a}=1$. On fixe une fonction B comme en [II] 1.8. On a défini dans cette référence l'ensemble $\Sigma(A_M,B)$. On en déduit en ensemble $\mathcal{J}_M^G(B)$ similaire au $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ précédent. Le lemme reste valable pour cet ensemble.

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en [II] 1.9. Pour un élément semi-simple $\eta \in \tilde{M}(\mathbb{R})$, on a défini dans cette référence l'ensemble $\Sigma(A_M,B_\eta)$. On en déduit un ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_\eta)$ pour lequel le lemme reste valable.

2.4 Programme d'extension des définitions

On considère les trois situations suivantes.

(A) On se donne un K-triplet $(KG,K\tilde{G},\mathbf{a})$, un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ et une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{O}^{K\tilde{G}}$ la classe de conjugaison stable dans $K\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui la contient.

(B) On se donne un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui la contient. On fixe un système de fonctions B sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ comme en [II] 1.9.

(C) On se donne un groupe G, un Levi M de G et une fonction B sur $G(\mathbb{R})$ comme en [II] 1.8. On considère la classe de conjugaison stable dans $M(\mathbb{R})$ réduite à $\{1\}$.

Dans le cas (A), écrivons $K\tilde{M}=(\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M}$. Pour $p,q \in \Pi^M$, les tores $A_{\tilde{M}_p}$ et $A_{\tilde{M}_q}$ s'identifient. On note $A_{K\tilde{M}}$ ce tore commun. Il s'en déduit une identification des ensembles $\mathcal{J}_{\tilde{M}_p}^{\tilde{G}_p}$ et $\mathcal{J}_{\tilde{M}_q}^{\tilde{G}_q}$. On note $\mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ cet ensemble commun. On se propose de définir

- pour tout $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$, une application linéaire

$$\rho_J^{K\tilde{G}} : D_{tr-orb}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}};$$

- pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, une application linéaire $\mathbf{f} \mapsto I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ sur $I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Dans le cas (B), on se propose de définir

- pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, deux applications linéaires

$$\rho_J^{\tilde{G}} : D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}},$$

et

$$\sigma_J^{\tilde{G}} : D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{st,\tilde{G}};$$

- pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, une application linéaire $\mathbf{f} \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f})$ sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$;
- pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, une application linéaire $\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ sur $SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Dans le cas (C), on note par un indice *unip* les objets relatifs à la classe $\{1\} \subset M(\mathbb{R})$. On pose par exemple $D_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) = D_{tr-orb}(\{1\})$. On se propose de définir
- pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, une application linéaire

$$\rho_J^G : D_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{unip}^G;$$

- pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, une application linéaire $\mathbf{f} \mapsto I_M^G(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f})$ sur $I(G(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Si de plus G est quasi-déployé, on se propose de définir
- pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, une application linéaire

$$\sigma_J^G : D_{tr-unip}^{st}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{unip}^{st}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{unip}^{st,G};$$

- pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-unip}^{st}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, une application linéaire $\mathbf{f} \mapsto S_M^G(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ sur $SI(G(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Dans le cas (A), considérons une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ de $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a})$, elliptique et relevante. Considérons une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}'$ dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ qui correspond à $\mathcal{O}$. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. Nos hypothèses de récurrence et quelques formalités que nous passerons nous autorisent à définir
- pour $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$, le terme

$$\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))),$$

cf. [II] 3.8 ; c'est la valeur en a d'un élément de $U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}}$.
- pour $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, l'intégrale endoscopique

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Il y a des variantes de ces définitions dans les cas (B) et (C). Les notations doivent être adaptées de façon évidente. L'unique différence est que, dans le cas (B) et dans le cas (C) avec G quasi-déployé, les hypothèses de récurrence ne permettent de définir ces termes que si $M' \neq M$.

Venons-en aux conditions imposées aux applications que l'on se propose de définir. Considérons le cas (A). Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ on a déjà défini en 1.3 une

application linéaire $\mathbf{f} \mapsto I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$. D'autre part, les définitions du cas non-archimédien de [II] 3.4 s'appliquent et fournissent pour tout $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ un élément

$$\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}) \in U_J \otimes (D_{orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}}$$

On impose

(1) les définitions coïncident pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.

Pour $\mathbf{M}'$, $\mathcal{O}'$, $\boldsymbol{\delta}$ comme ci-dessus, on impose

(2) on a l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$$

pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$;

(3) on a l'égalité

$$\rho_J^{K\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a) = \rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a)$$

pour tout $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ et tout $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1.

On impose

(4) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, tout $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ et tout $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, la distribution induite $\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}}$ appartient à $D_{tr-orb}(\mathcal{O}^{K\tilde{G}}, \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$;

(5) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, le germe en 1 de la fonction $a \mapsto I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$, qui est définie pour $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, est équivalent à

$$\sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}} I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{L}}, \mathbf{f}).$$

Notons que $a\boldsymbol{\gamma}$ est $\tilde{G}$-équisingulier, donc $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ est défini d'après 1.3. D'autre part, d'après (4), les termes $I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{L}}, \mathbf{f})$ sont définis (ou plus exactement, le seront quand notre programme sera rempli).

Nos termes doivent vérifier les propriétes habituelles de compatibilité à l'induction. Soit $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tel que $K\tilde{R} \subset K\tilde{M}$. Soit $\mathcal{O}_{K\tilde{R}}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $K\tilde{R}(\mathbb{R})$, supposons que $\mathcal{O}$ soit la classe de conjugaison stable dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui la contient. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}_{K\tilde{R}}, \omega) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$. On impose

(6) pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{K\tilde{M}}, \mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) I_{K\tilde{R}}^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}_{K\tilde{L},\omega});$$

(7) pour tout $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ et tout $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité

$$\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{K\tilde{M}}, a) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}(K\tilde{R}), J \in \mathcal{J}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{L}}} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \rho_J^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{M}},$$

cf. [II] 3.10.

Les propriétés (4) à (7) ont des analogues dans les cas (B) et (C), qui n'en diffèrent que par la notation. Dans le cas (B) et dans le cas (C) avec G quasi-déployé, on a des propriétés similaires pour les termes stables. Ecrivons-les dans le cas (B). On impose

(8) pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, tout $J \in \mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(B_{\mathcal{O}})$ et tout $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, la distribution induite $\sigma^{\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{G}}$ appartient à $D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}^{\tilde{G}}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$;

(9) pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et tout $\mathbf{f} \in SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, le germe en 1 de la fonction $a \mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$, qui est définie pour $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(B_{\mathcal{O}})} S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\sigma^{\tilde{L}}_J(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}, B, \mathbf{f}).$$

Soit $\tilde{R}$ un espace de Levi tel que $\tilde{R} \subset \tilde{M}$. Soit $\mathcal{O}_{\tilde{R}}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}(\mathbb{R})$, supposons que $\mathcal{O}$ soit la classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ qui la contient. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$. On impose

(10) pour tout $\mathbf{f} \in S(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}}, B, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) S^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}_{\tilde{L}});$$

(11) pour tout $J \in \mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(B_{\mathcal{O}})$ et tout $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité

$$\sigma^{\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}}, a) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R}), J \in \mathcal{J}^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})} e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \sigma^{\tilde{L}}_J(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{M}}.$$

On veut aussi que les applications stables soient déduites des non-stables par les formules habituelles. C'est-à-dire que, soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. On impose

(12) pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)});$$

(13) pour tout $J \in \mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(B_{\mathcal{O}})$ et tout $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité

$$\sigma^{\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\delta}, a) = \rho^{\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\delta}, a) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s \neq 1, J \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'(s)}_{\tilde{M}}(B_{\mathcal{O}})} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \sigma^{\tilde{G}'(s)}_J(\boldsymbol{\delta}, a).$$

Ce programme sera réalisé inconditionnellement dans les cas (B) et (C) dans les sections 3 et 4. Dans le cas (A), il sera réalisé dans la section 5 sous une hypothèse qui sera expliquée dans le paragraphe suivant.

2.5 Réduction des conditions imposées dans le cas (A)

Considérons le cas (A) du paragraphe précédent. Dans le cas où $K\tilde{M} = K\tilde{G}$, on voit que notre problème admet une solution unique. Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$

et $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a $I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$. L'ensemble $\mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{G}}$ est réduit à l'élément vide. L'application $\rho^{K\tilde{G}}_{\emptyset}$ est l'identité, modulo l'identification $U_\emptyset = \mathbb{C}$. On suppose désormais $K\tilde{M} \neq K\tilde{G}$.

On impose l'hypothèse suivante

(Hyp) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments fortement $\tilde{G}$-réguliers et pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité $I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$.

D'après le lemme 1.11, cette hypothèse implique que la même égalité vaut sous l'hypothèse plus faible $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(K\tilde{M}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$.

Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Par définition, il existe

- $\boldsymbol{\gamma}_{orb} \in D_{orb}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$,

- une famille finie de données endoscopiques $(\mathbf{M}'_i)_{i=1,...,n}$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$, elliptiques et relevantes ;

- pour tout $i = 1,...,n$, une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}'_i$ dans $\tilde{M}'_i(\mathbb{R})$ correspondant à $\mathcal{O}$ et un élément $\boldsymbol{\delta}_i \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{M}'_i,\mathcal{O}'_i) \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$,

de sorte que

$$(1) \qquad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_{orb} + \sum_{i=1,...,n} transfert(\boldsymbol{\delta}_i).$$

Cette décomposition n'est toutefois pas uniquement déterminée.

Les conditions (1), (2), (3) de 2.4 imposent les égalités

$$(2) \qquad I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}_{orb},\mathbf{f}) + \sum_{i=1,...,n} I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}'_i,\boldsymbol{\delta}_i,\mathbf{f})$$

pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ et

$$(3) \qquad \rho^{K\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\gamma},a) = \rho^{K\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\gamma}_{orb},a) + \sum_{i=1,...,n} \rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}'_i,\boldsymbol{\delta}_i,a)$$

pour tout $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$ et tout $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. L'assertion d'existence d'applications vérifiant les propriétés (1), (2) et (3) de 2.4 revient à dire que les membres de droite de (2) et (3) ci-dessus ne dépendent pas de la décomposition (1).

L'ensemble $\mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$ admet un unique élément maximal, cf. [II] 3.1. C'est l'élément J_{max} tel que, pour $\underline{\alpha} = \{\alpha_1,...,\alpha_n\} \in J_{max}$, le $\mathbb{Z}$-module $R_{J_{max}}$ engendré par les α_i contient toute racine de $A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire toute racine de $A_{\tilde{M}_p}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}_p(\mathbb{R})$, pour un quelconque $p \in \Pi^M$). Supposons

(4) pour tout $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$, $J \neq J_{max}$, il existe une application linéaire $\rho^{K\tilde{G}}_J$ vérifiant les propriétés (1) et (3) de 2.4.

Comme on vient de le montrer, cette application est uniquement déterminée. On va montrer qu'en admettant cette propriété (4), et sous l'hypothèse (Hyp), on peut réaliser le programme de 2.4. Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(KM,K\tilde{M},\mathbf{a})$, elliptique et relevante. Considérons une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}'$ dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ qui correspond à $\mathcal{O}$. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ et $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Montrons que

(5) le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto I^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_{K\tilde{M}}(\mathbf{M}',a\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}),$$

qui est définie pour $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, est équivalent à

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) + \sum_{J\in\mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}} I^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^{K\tilde{G}},\mathbf{f})$$

$$+ \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}),K\tilde{L}\neq K\tilde{M},K\tilde{G}} \sum_{J\in\mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}} I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),a)^{K\tilde{L}},\mathbf{f}).$$

Preuve. On reprend la preuve de la proposition [II] 3.9. Elle montre que le germe en 1 de la fonction $a \mapsto I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',a\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ est équivalent à celui de la fonction qui, à a, associe

$$(6) \qquad \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J\in\mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}} \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}),J'\mapsto J} I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(\tilde{s}),\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))^{\mathbf{L}'(\tilde{s})},\mathbf{f}).$$

Considérons un $K\tilde{L}$ tel que $K\tilde{L}\neq K\tilde{M}$, $K\tilde{L}\neq K\tilde{G}$. Alors on connaît par récurrence les propriétés de tous les termes. En particulier

$$I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(\tilde{s}),\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))^{\mathbf{L}'(\tilde{s})},\mathbf{f}) = I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}),\mathbf{f})$$

$$= I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a)))^{K\tilde{L}},\mathbf{f}).$$

D'après la définition de $\rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$, la somme en $\tilde{s}$ et J' devient

$$I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^{K\tilde{L}},\mathbf{f}).$$

Puisque $\rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a) = \rho_J^{K\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),a)$, la sous-somme indexée par $K\tilde{L}$ de la formule (6) est égale à celle de la formule (5). Considérons maintenant l'espace de Levi $K\tilde{G}$. On a trivialement

$$I_{K\tilde{G}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{G}'(\tilde{s}),\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))^{\mathbf{G}'(\tilde{s})},\mathbf{f}) = I^{K\tilde{G}}(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}),\mathbf{f})$$

$$= I^{K\tilde{G}}(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a)))^{K\tilde{G}},\mathbf{f}).$$

De nouveau, la sous-somme indexée par $K\tilde{G}$ dans la formule (6) coïncide avec la deuxième somme de la formule (5). Enfin, pour $K\tilde{L} = K\tilde{M}$, la somme en J se réduit à l'unique terme $J = \emptyset$, la somme en $\tilde{s}$ se réduit à l'unique terme $\tilde{s} = \tilde{\zeta}$. La sous-somme indexée par $K\tilde{M}$ dans la formule (6) coïncide avec le premier terme de la formule (5). Cela démontre (5).

Conservons les données $\mathbf{M}'$ et $\mathcal{O}'$. Soit $\tilde{R}'$ un espace de Levi de $\tilde{M}'$. Soit $\mathcal{O}'_{\tilde{R}'}$ une classe de conjugaison stable dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$, supposons que $\mathcal{O}'$ soit la classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ qui la contient. Supposons $\tilde{R}'$ relevant. On construit comme en [I] 3.4 un K-espace de Levi $K\tilde{R} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ tel que $K\tilde{R} \subset K\tilde{M}$, de sorte que $\tilde{R}'$ soit l'espace d'une donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $(KR, K\tilde{R}, \mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{R}',\mathcal{O}'_{\tilde{R}'}) \otimes Mes(R'(\mathbb{R}))^*$. Alors

(7) pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) I_{K\tilde{R}}^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}_{K\tilde{L},\omega});$$

(8) pour tout $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ et tout $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité

$$\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, a) = \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{R}), J\in\mathcal{J}_{K\tilde{R}}^{K\tilde{L}}} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}, a)^{K\tilde{M}}.$$

La preuve de ces propriétés est analogue à celle de la proposition [II] 1.14(i).

Considérons maintenant un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Choisissons une décomposition (1). Etudions le germe en 1 de la fonction qui, à a, associe

$$(9) \qquad I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}_{orb}, \mathbf{f}) + \sum_{i=1,\dots,n} I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i, \xi_i(a)\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{f}).$$

On applique la propriété (5) à chaque terme de la somme en i. Le premier terme $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}_{orb}, \mathbf{f})$ satisfait la propriété 2.4(5), les termes $\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_{orb}, a)$ étant définis comme en [II] 3.2. En effet, la preuve de cette référence s'applique. D'autre part, pour $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$, $J \neq J_{max}$, l'hypothèse (4) assure la validité de l'égalité (3). Notons $\underline{I}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ le membre de droite de (2). Notons $\underline{\rho}_{J_{max}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)$ le membre de droite de (3) pour $J = J_{max}$. On obtient alors que le germe en 1 de la fonction qui à a associe (9), est équivalent à celui de la fonction qui, à a, associe

$$(10) \qquad \underline{I}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) + I^{K\tilde{G}}(\underline{\rho}_{J_{max}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}}, \mathbf{f}) + \sum_{J\in\mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}, J\neq J_{max}} I^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}}, \mathbf{f})$$

$$+ \sum_{K\tilde{L}\in\mathcal{L}(K\tilde{M}), K\tilde{L}\neq K\tilde{M}, K\tilde{G}} \sum_{J\in\mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{L}}} I_{K\tilde{L}}^{K\tilde{G}}(\rho_J^{K\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{L}}, \mathbf{f}).$$

L'hypothèse (Hyp) assure que (9) est égal à $I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$. Ce terme est indépendant de la décomposition (1). Dans (10), tous les termes sauf deux sont aussi indépendants de cette décomposition. On obtient que le germe en 1 de la somme de ces deux termes restants est indépendant de cette décomposition, à équivalence près. Précisément, le germe en 1 de

$$\underline{I}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) + I^{K\tilde{G}}(\underline{\rho}_{J_{max}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}}, \mathbf{f})$$

est bien déterminé à équivalence près. Comme fonction de a, le premier terme est constant, tandis que le second appartient à $U_{J_{max}}$. Le lemme 2.3 assure que chaque terme est bien déterminé. Que le premier soit bien déterminé pour tout $\mathbf{f}$ signifie que le membre de droite de (2) est indépendant de la décomposition (1). Que le deuxième terme soit bien déterminé pour tout $\mathbf{f}$ signifie que $\underline{\rho}_{J_{max}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}}$ est bien déterminé, ou encore que $\underline{\rho}_{J_{max}}(\boldsymbol{\gamma}, a)$ l'est, modulo $Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}}$. C'est-à-dire que le membre de droite de (3) est indépendant de la décomposition (1). Comme on l'a dit, cela assure l'existence de termes vérifiant les conditions (1), (2) et (3) de 2.4. Ces termes étant maintenant

bien définis, l'expression (10) n'est autre que la somme figurant dans 2.4(5) et le calcul précédent prouve cette relation.

Pour vérifier 2.4(4), on peut supposer soit que $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, soit qu'il existe $\mathbf{M}'$, $\mathcal{O}'$ et $\boldsymbol{\delta}$ comme plus haut tels que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Dans le premier cas, la propriété 2.4(4) est claire : on a même $\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}} \in D_{orb}(\mathcal{O}^{K\tilde{G}}, \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Dans le second cas, on applique la définition

$$\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}} = \rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}} = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{J' \in \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}), J' \mapsto J} \left(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))) \right)^{K\tilde{G}}.$$

Par commutation du transfert à l'induction, on récrit le dernier terme

$$transfert \left(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))^{\mathbf{G}'(\tilde{s})} \right).$$

Par récurrence, on sait que le terme entre parenthèse appartient à $D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{G}'(\tilde{s}), \mathcal{O}'^{\tilde{G}'(\tilde{s})}) \otimes Mes(G'(\tilde{s}; \mathbb{R}))^*$, avec une notation évidente. Son transfert appartient donc à $D_{tr-orb}(\mathcal{O}^{K\tilde{G}}, \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Donc aussi $\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{K\tilde{G}}$.

Pour démontrer les propriétés 2.4 (6) et (7), on peut de nouveau supposer soit que $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}_{K\tilde{R}}, \omega) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$, soit qu'il existe $\mathbf{R}'$, $\mathcal{O}'_{\tilde{R}'}$ et $\boldsymbol{\delta}$ comme plus haut tels que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Dans le premier cas, les propriétés se démontrent comme dans le cas non-archimédien, cf. [II] 1.7 et [II] 3.10. Dans le second cas, elles résultent de (7) et (8) ci-dessus. Cela réalise entièrement notre programme.

2.6 Réduction des conditions imposées dans le cas (C)

On considère le cas (C) de 2.4. Comme en [III] 1.1, on peut affaiblir nos hypothèses de récurrence car il est clair qu'en partant de notre groupe non tordu, toutes nos constructions ne font apparaître que de tels groupes. Nos hypothèses sont donc les suivantes. Si G est quasi-déployé, on suppose toutes les assertions connues pour des groupes quasi-déployés G' tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Si G n'est pas quasi-déployé, on suppose toutes les assertions connues pour des groupes quasi-déployés G' tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$ et toutes les assertions connues pour des groupes non-quasi-déployés G' tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Pour une assertion relative à un Levi M de G, on suppose toutes les assertions connues pour le même groupe G et pour tout Levi $L \in \mathcal{L}(M)$ avec $L \neq M$.

De nouveau, le problème posé en 2.4 est à peu près tautologique si $M = G$. On suppose $M \neq G$.

L'ensemble $\mathcal{J}_M^G(B)$ a encore un élément maximal J_{max}. On suppose

(1) pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, $J \neq J_{max}$, il existe une application linéaire ρ_J^G vérifiant les propriétés (1) et (3) de 2.4.

Si G n'est pas quasi-déployé, on impose une hypothèse similaire à celle du paragraphe précédent, que l'on formule différemment. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de M. On suppose

(Hyp) pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb}(M'(\mathbb{R}))\otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments fortement G-réguliers et pour tout $\mathbf{f} \in I(G(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a l'égalité

$$I^{G,\mathcal{E}}_M(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I^G_M(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}).$$

Alors la même démonstration que dans le paragraphe précédent s'applique et notre programme est réalisé. Supposons maintenant G quasi-déployé. On n'a plus besoin de l'hypothèse (Hyp) : elle est vérifiée d'après la proposition 1.13. Dans un premier temps, les hypothèses de récurrence ne permettent de démontrer les propriétés (5), (7) et (8) du paragraphe précédent que pour des données $\mathbf{M}'$ telles que $M' \neq M$. Mais, dans la décomposition (1) de ce paragraphe, il n'apparaît par définition que de telles données. La démonstration s'applique et démontre l'existence d'applications vérifiant les propriétés (1), (2) et (3) de 2.4. On obtient aussi les propriétés (4) à (7) de ce paragraphe.

Passons aux variantes stables des applications. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-unip}(M(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Pour $\mathbf{f} \in I(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on définit $S^G_M(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ par la formule habituelle 2.4(12). Pour $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$ et $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on définit $\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)$ par la formule 2.4(13). On suppose

(2) pour tout $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$, $J \neq J_{max}$, $\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)$ appartient à

$$(D^{st}_{unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann^{st,G}_{unip}.$$

La même preuve qu'en [II] 3.7 montre que le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto S^G_M(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$$

est équivalent à

$$\sum_{J\in\mathcal{J}^G_M(B)} I^G(\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)^G, \mathbf{f}) + \sum_{L\in\mathcal{L}(M), L\neq G} \sum_{J\in\mathcal{J}^L_M(B)} S^G_L(\sigma^L_J(\boldsymbol{\delta}, a)^L, B, \mathbf{f}).$$

Supposons que $\mathbf{f}$ soit instable, c'est-à-dire que son image dans $SI(G(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ soit nulle. D'après le théorème 1.4, $S^G_M(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = 0$. Dans la somme ci-dessus, tous les termes sauf deux sont nuls, soit par hypothèse de récurrence (pour $L \neq M$, $L \neq G$), soit d'après l'hypothèse (2) (pour les $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$, $J \neq J_{max}$). On obtient que le germe en 1 de

$$I^G(\sigma^G_{J_{max}}(\boldsymbol{\delta}, a)^G, \mathbf{f}) + S^G_M(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$$

est équivalent à 0. Comme fonction de a, le premier terme appartient à $U_{J_{max}}$, le second est constant. Le lemme 2.3 implique que ces deux termes sont nuls. Cela étant vrai pour tout $\mathbf{f}$ instable, cela signifie que la distribution $\mathbf{f} \mapsto S^G_M(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ et $\sigma^G_{J_{max}}(\boldsymbol{\delta}, a)^G$ sont stables. D'après le lemme [I] 5.13, cette dernière propriété équivaut à ce que $\sigma^G_{J_{max}}(\boldsymbol{\delta}, a)$ appartienne à $(D^{st}_{unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann^{st,G}_{unip}$.

La propriété 2.4(8) résulte de la définition 2.4(13) par le même argument qui nous a permis de prouver 2.4(4) dans le paragraphe précédent. La propriété 2.4(9) résulte du calcul ci-dessus. Enfin, les propriétés 2.4(10) et 2.4(11) se prouvent comme en [II] 1.14 (ii). Notons que ces trois dernières propriétés impliquent à leur tour les propriétés (5), (7) et (8) du paragraphe précédent pour la donnée $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, cas que l'on avait laissé en suspens. On a ainsi réalisé notre programme.

2.7 Réduction des conditions imposées dans le cas (B)

On considère le cas (B) de 2.4. On n'a pas besoin de l'analogue des hypothèses (Hyp) de 2.5 et 2.6 : elle est vérifiée d'après la proposition 1.13. Par contre, il s'avère que la distinction d'un élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ n'est plus pertinente. On impose

(1) pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, il existe une application linéaire $\rho_J^{\tilde{G}}$ vérifiant les propriétés (1) et (3) de 2.4.

On définit l'application $\sigma_J^{\tilde{G}}$ par la formule 2.4(13). On impose

(2) pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et tout $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)$ appartient à $(D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{st,\tilde{G}}$.

A l'aide de ces deux hypothèses, la même preuve que dans le paragraphe précédent réalise notre programme.

3 Extension des définitions, cas des groupes non tordus

3.1 Rappel des résultats d'Arthur

Dans cette section, on considère un groupe non tordu, c'est-à-dire un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ tel que $\tilde{G} = G$ et $\mathbf{a} = 1$. On fixe une fonction B comme en [II] 1.8. On affaiblit nos hypothèses de récurrence comme on l'a expliqué en 2.6. Soient M un Levi de G et $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique de M elliptique et relevante. Le résultat suivant a été prouvé par Arthur ([A4] théorème 1.1).

(1) Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{orb}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments fortement G-réguliers et soit $\mathbf{f} \in I(G(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Alors on a l'égalité

$$I_M^G(transfert(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}) = I_M^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}).$$

Autrement dit, l'hypothèse (Hyp) de 2.6 est vérifiée. Rappelons qu'une variante du lemme 1.11 montre que cet énoncé s'étend aux éléments $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$.

3.2 Réalisation du programme de 2.4

Soient M un Levi de G et $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$. En [II] 3.1, on a associé à J un groupe G_J contenant M comme Levi. On a $dim(G_{J,SC}) \leq dim(G_{SC})$ et cette inégalité est stricte si J n'est pas l'élément maximal. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. On l'écrit

$$(1) \qquad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_{orb} + \sum_{i=1,\dots,n} transfert(\boldsymbol{\delta}_i)$$

comme en 2.5(1). Les données endoscopiques $\mathbf{M}_i'$ qui apparaissent ici vérifient $M_i' \neq M$ si G est quasi-déployé. Pour $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$ et $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, posons

$$\underline{\rho}_J^G(\boldsymbol{\gamma}, a) = \rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}_{orb}, a) + \sum_{i=1,\dots,n} \rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}_i', \boldsymbol{\delta}_i, a).$$

Comme dans le cas non-archimédien (cf. [II] 3.2), $\rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}_{orb},a)$ est l'image de $\rho_J^{G_J}(\boldsymbol{\gamma}_{orb},a)$ par la projection

$$(2)\qquad (D_{unip}(M(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{unip}^{G_J}\rightarrow (D_{unip}(M(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{unip}^{G}.$$

La même preuve qu'en [III] proposition 1.4(i) montre que, pour tout $i=1,...,n$, $\rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}_i',\boldsymbol{\delta}_i,a)$ est l'image de $\rho_J^{G_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}_i',\boldsymbol{\delta}_i,a)$ par la projection (2). Il en résulte que $\underline{\rho}_J^G(\boldsymbol{\gamma},a)$ est l'image par cette projection de l'élément

$$\rho_J^{G_J}(\boldsymbol{\gamma}_{orb},a)+\sum_{i=1,...,n}\rho_J^{G_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}_i',\boldsymbol{\delta}_i,a).$$

Supposons J non maximal. Alors $dim(G_{J,SC})<dim(G_{SC})$ et, par récurrence, le terme ci-dessus est indépendant de la décomposition (1) : il vaut $\rho_J^{G_J}(\boldsymbol{\gamma},a)$. Il en résulte que $\underline{\rho}_J^G(\boldsymbol{\gamma},a)$ est indépendant de cette décomposition. Cela prouve l'assertion (1) de 2.6.

Supposons G quasi-déployé. Soient $\boldsymbol{\delta}\in D_{tr-unip}^{st}(M(\mathbb{R}))\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, $J\in\mathcal{J}_M^G(B)$ et $a\in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. Comme on l'a dit en 2.6, on définit $\sigma_J^G(\boldsymbol{\delta},a)$ par l'égalité 2.4(13). La même preuve qu'en [III] proposition 1.2(i) montre que

(3) $\sigma_J^G(\boldsymbol{\delta},a)$ est l'image de $i_J^{G_J}\sigma_J^{G_J}(\boldsymbol{\delta},a)$ par la projection (2).

Si J n'est pas maximal, on sait par récurrence que $\sigma_J^{G_J}(\boldsymbol{\delta},a)$ est stable. Il en résulte que $\sigma_J^{G_J}(\boldsymbol{\delta},a)$ l'est aussi. Cela prouve l'assertion (2) de 2.6.

On a ainsi vérifié les trois assertions dont on a vu en 2.6 qu'elles suffisaient à réaliser le programme de 2.4.

3.3 Passage à un revêtement

Considérons deux groupes G et $G_\sharp$ réductifs et connexes et un sous-tore $Z\subset Z(G)$. On pose $G_\flat=Z\times G_\sharp$ et on suppose donnée une suite exacte

$$(1)\qquad 1\rightarrow\Xi_b\rightarrow G_\flat\stackrel{q}{\rightarrow}G\rightarrow 1$$

où Ξ_b est un sous-groupe fini central de $G_\flat$ et où q se restreint à Z en le plongement naturel. Considérons un voisinage ouvert $V_\sharp$ de 1 dans $G_\sharp(\mathbb{R})$, invariant par l'action naturelle de $G_{ad}(\mathbb{R})\simeq G_{\sharp,ad}(\mathbb{R})$ et assez petit pour que q se restreigne en un isomorphisme de $Z(\mathbb{R})\times V_\sharp$ sur $V=q(Z(\mathbb{R})\times V_\sharp)$. On a défini en [III] 3.1 des applications linéaires $\iota_{G_\sharp,G}^*:D_{géom}(V_\sharp)\rightarrow D_{géom}(V)$ et $\iota_{G,G_\sharp}^*:D_{géom}(V)\rightarrow D_{géom}(V_\sharp)$. Leur définition conserve un sens sur le corps de base $\mathbb{R}$. Leur description est un peu plus compliquée que dans le cas non-archimédien, car les distributions sur $Z(\mathbb{R})$ sont un peu plus compliquées. Notons $D_{géom}(V)_\sharp$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(V)$ qui s'annulent sur toute fonction $f\in C_c^\infty(V)$ dont la restriction à $q(V_\sharp)$ est nulle. Notons $D_{géom}(V_\sharp)^{G(\mathbb{R})}$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(V_\sharp)$ qui sont invariants par l'action de $G(\mathbb{R})$. On a une projection naturelle $p:D_{géom}(V_\sharp)\rightarrow D_{géom}(V_\sharp)^{G(\mathbb{R})}$. L'application $\iota_{G_\sharp,G}^*$ se factorise en

$$(2)\qquad D_{géom}(V_\sharp)\stackrel{p}{\rightarrow}D_{géom}(V_\sharp)^{G(\mathbb{R})}\stackrel{\iota_{G_\sharp,G}^*}{\simeq}D_{géom}(V)_\sharp\subset D_{géom}(V).$$

En sens inverse, rappelons que tout élément $H\in Sym(\mathfrak{z})$ définit un opérateur différentiel ∂_H sur $C_c^\infty(Z(\mathbb{R}))$. Pour $z\in Z(\mathbb{R})$ et $H\in Sym(\mathfrak{z})$, notons $\partial_{z,H}$ l'élément de $D_{géom}(Z(\mathbb{R}))$ défini par $I^Z(\partial_{z,H},f)=(\partial_Hf)(z)$. Alors tout élément $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(Z(\mathbb{R}))$ s'écrit de façon

unique $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{z\in Z(\mathbb{R})} \partial_{z,H_z}$, avec $H_z = 0$ pour presque tout z. Fixons une base $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $Sym(\mathfrak{z})$ formée d'éléments homogènes. On suppose $H_0 = 1$. Alors tout élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(V)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{z\in Z(\mathbb{R})} \sum_{i\in\mathbb{N}} \partial_{z,H_i} \otimes \boldsymbol{\gamma}_{z,i},$$

où $\boldsymbol{\gamma}_{z,i}$ est un élément de $D_{géom}(V)_\sharp$. Notons $\boldsymbol{\gamma}_{z,i,\sharp}$ l'unique élément de $D_{géom}(V_\sharp)^{G(\mathbb{R})}$ tel que $\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_{z,i,\sharp}) = \boldsymbol{\gamma}_{z,i}$. On a alors

$$(3) \qquad \iota^*_{G,G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{z\in Z(\mathbb{R})} \boldsymbol{\gamma}_{z,0,\sharp}.$$

L'application $\iota^*_{G_\sharp,G}$ se restreint en une application

$$D_{unip}(G_\sharp(\mathbb{R})) \to D_{unip}(G(\mathbb{R})).$$

Contrairement au cas non-archimédien, elle n'est pas surjective. Par exemple, pour un élément non nul $H \in \mathfrak{z}(\mathbb{R})$, la distribution $f \mapsto \frac{d}{dt} f(exp(tH))_{|t=0}$ sur $C_c^\infty(V)$ est à support unipotent mais n'appartient pas à l'image. Il est toutefois clair que l'application se restreint en une application surjective

$$D_{orb,unip}(G_\sharp(\mathbb{R})) \to D_{orb,unip}(G(\mathbb{R})).$$

Supposons G quasi-déployé. Les constructions s'adaptent aux distributions stables (en supposant $V_\sharp$ invariant par conjugaison stable) et nos applications se restreignent en des applications entre les espaces $D^{st}_{géom}(V_\sharp)$ et $D^{st}_{géom}(V)$. Les groupes G et $G_\sharp$ ont même groupe adjoint. L'action par conjugaison sur $G_\sharp$ d'un élément de $G(\mathbb{R})$ s'identifie à celle d'un élément de $G_{\sharp,AD}(\mathbb{R})$. Or toute distribution stable sur $G_\sharp(\mathbb{R})$ est invariante par conjugaison par $G_{\sharp,AD}(\mathbb{R})$. Il en résulte que la projection p de la relation (2) est l'identité sur $D^{st}_{géom}(V_\sharp)$. A fortiori

(4) l'application $\iota^*_{G_\sharp,G} : D^{st}_{unip}(G_\sharp(\mathbb{R})) \to D^{st}_{unip}(G(\mathbb{R}))$ est injective.

Lemme. *(i) Les homomorphismes $\iota^*_{G_\sharp,G}$ et $\iota^*_{G,G_\sharp}$ se restreignent en des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$ et $\iota^*_{G,G_\sharp}(D_{tr-unip}(G(\mathbb{R})))$. On a les inclusions*

$$\iota^*_{G,G_\sharp}(D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))) \subset p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \subset D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})).$$

(ii) Si G est quasi-déployé, on a les relations

$$\iota^*_{G,G_\sharp}(D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))) = p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \subset D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$$

et

$$\iota^*_{G,G_\sharp}(D^{st}_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))) = p(D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) = D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})).$$

Preuve. On fixe des mesures de Haar sur chacun des groupes. On va prouver l'inclusion

$$(5) \qquad D_{tr-unip}(G(\mathbb{R})) \subset \iota^*_{G_\sharp,G}(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))).$$

Il suffit de démontrer qu'un ensemble de générateurs de $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$ est contenu dans le membre de droite. D'après 2.2(3), l'espace $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$ est engendré par

$D_{orb,unip}(G(\mathbb{R}))$ et les espaces $transfert(D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}'))$, où $\mathbf{G}'$ parcourt les données endoscopiques elliptiques et relevantes de G, avec $G' \neq G$ si G est quasi-déployé. Un élément de $D_{orb,unip}(G(\mathbb{R}))$ appartient l'espace de droite de (5) : tout élément unipotent de $G(\mathbb{R})$ est l'image naturelle d'un élément unipotent de $G_\sharp(\mathbb{R})$. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de G, avec $G' \neq G$ si G est quasi-déployé. Considérons un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$ de la forme $transfert(\boldsymbol{\delta})$, où $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}')$. Dualement à la suite exacte (1), on a une suite exacte

$$(6) \qquad 1 \to \hat{\Xi}_b \to \hat{G} \to \hat{Z} \times \hat{G}_\sharp \to 1,$$

où $\hat{\Xi}_b$ est un sous-groupe fini central de $\hat{G}$. L'élément $s \in \hat{G}$ s'envoie sur un élément $(z, s_\sharp)$ de $\hat{Z} \times \hat{G}_\sharp$. En notant $\hat{G}'_\sharp$ la composante neutre de $Z_{\hat{G}_\sharp}(s_\sharp)$, on a la suite exacte

$$1 \to \hat{\Xi}_b \to \hat{G}' \to \hat{Z} \times \hat{G}'_\sharp \to 1.$$

Le groupe $\mathcal{G}'/\hat{\Xi}_b$ contient $\hat{Z}$ donc est de la forme $\hat{Z} \times \mathcal{G}'_\sharp$, où $\mathcal{G}'_\sharp$ est un sous-groupe de ${}^LG_\sharp$. Ce groupe définit une action galoisienne sur $\hat{G}'_\sharp$. On introduit un groupe quasi-déployé $G'_\sharp$ sur $\mathbb{R}$ dont le groupe dual soit $\hat{G}'_\sharp$. Alors $\mathbf{G}'_\sharp = (G'_\sharp, \mathcal{G}'_\sharp, s_\sharp)$ est une donnée endoscopique pour $G_\sharp$. On vérifie aisément qu'elle est elliptique et relevante. Remarquons que les groupes $G'_\sharp$ et G' sont dans la même situation que $G_\sharp$ et G. C'est-à-dire que l'on a une suite exacte

$$1 \to \Xi_b \to Z \times G'_\sharp \to G' \to 1.$$

On peut appliquer par récurrence la relation (5) à G' et $G'_\sharp$. Modulo quelques formalités, on peut aussi bien l'appliquer à $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}'_\sharp$. On obtient que $\boldsymbol{\delta}$ appartient à l'espace $\iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'}(D_{tr-unip}(\mathbf{G}'_\sharp))$. Mais, d'après (3), l'application $\iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'} \circ \iota^*_{\mathbf{G}',\mathbf{G}'_\sharp}$ est l'identité sur cet espace. Posons $\boldsymbol{\delta}_\sharp = \iota^*_{\mathbf{G}',\mathbf{G}'_\sharp}(\boldsymbol{\delta})$. Alors $\boldsymbol{\delta} = \iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$. D'après le (ii) du lemme appliqué par récurrence, on a $\boldsymbol{\delta}_\sharp \in D_{tr-unip}(\mathbf{G}'_\sharp)$. On a l'égalité

$$(7) \qquad transfert \circ \iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'} = \iota^*_{G_\sharp,G} \circ transfert$$

cf. [III] 3.7(4). On en déduit $\boldsymbol{\gamma} = \iota^*_{G_\sharp,G} \circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$. Mais $transfert(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$ appartient à $D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$ par définition de cet espace. Cela démontre que $\boldsymbol{\gamma}$ appartient au membre de droite de (5). Cela prouve cette assertion.

Le membre de droite de (5) est contenu dans $D_{géom}(V)_\sharp$ d'après (2). La relation (3) entraîne que, pour tout sous-espace X de $D_{géom}(V)_\sharp$, les homomorphismes $\iota^*_{G_\sharp,G}$ et $\iota^*_{G,G_\sharp}$ se restreignent en des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre X et $\iota^*_{G,G_\sharp}(X)$. Donc (5) entraîne la première assertion de l'énoncé. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$, écrivons $\boldsymbol{\gamma} = \iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp)$, avec $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$. Puisque $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(V)_\sharp$ comme on vient de le voir, la relation (3) entraîne que $\iota^*_{G,G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}) = p(\boldsymbol{\gamma}_\sharp)$. D'où la première inclusion de (i). Par simple transport de structure, l'espace $D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$ est stable par tout automorphisme de $G_\sharp$. En particulier, il est stable par l'action de $G(\mathbb{R})$. On en déduit $p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \subset D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$, ce qui achève la preuve de (i).

Supposons G quasi-déployé. On va prouver l'inclusion

$$(8) \qquad \iota^*_{G_\sharp,G}(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \subset D_{tr-unip}(G(\mathbb{R})).$$

De nouveau, il suffit de prouver que, pour $\boldsymbol{\gamma}_\sharp$ dans un ensemble de générateurs de $D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$, on a $\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) \in D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$. C'est clair si $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{orb,unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$.

Soit $\mathbf{G}'_\sharp = (G'_\sharp, \mathcal{G}'_\sharp, s_\sharp)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante pour $G_\sharp$, telle que $G'_\sharp \neq G$. Soit $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$ de la forme $transfert(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$, avec $\boldsymbol{\delta}_\sharp \in D_{tr-unip}(\mathbf{G}'_\sharp)$. Rappelons qu'à la donnée endoscopique $\mathbf{G}'_\sharp$ est associé un caractère $\omega_\sharp$ de $G_{\sharp,ad}(\mathbb{R})$ selon lequel se transforme le facteur de transfert, cf. [I] 2.7. Il se restreint en un caractère de $G(\mathbb{R})$. Si cette restriction est non triviale, l'image de $transfert(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$ par la projection p est nulle. Autrement dit $p(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = 0$. Mais $\iota^*_{G_\sharp,G} \circ p = \iota^*_{G_\sharp,G}$, donc $\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = 0$. A fortiori, $\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) \in D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$. On est ramené au cas où la restriction de $\omega_\sharp$ à $G(\mathbb{R})$ est triviale. Montrons que

(9) pour G quasi-déployé, l'homomorphisme de $H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}))$ dans le groupe des caractères de $G(\mathbb{R})$ est bijective.

Que G soit quasi-déployé ou pas, $H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}))$ s'identifie au groupe des caractères de $G_{ab}(\mathbb{R})$. En effet, en fixant un sous-tore maximal T de G défini sur $\mathbb{R}$, ces deux groupes s'identifient respectivement à $H^{1,0}(W_\mathbb{R}; \hat{T} \to \hat{T}_{ad})$ et $H^{1,0}(\Gamma_\mathbb{R}; T_{sc} \to T)$ et on connaît l'assertion pour ces derniers groupes. L'assertion (9) équivaut à dire que, si G est quasi-déployé, l'homomorphisme $G(\mathbb{R}) \to G_{ab}(\mathbb{R})$ est surjectif. On a démontré cela en 2.1(2).

Fixons $s \in \hat{G}$ qui se projette sur $(1, s_\sharp)$ par l'homomorphisme de la suite (6). Notons $\mathcal{G}'$ l'image réciproque de $\hat{Z} \times \mathcal{G}'_\sharp$ dans ${}^LG$. Il agit sur $\hat{G}_s$ et munit ce groupe d'une action galoisienne. On introduit un groupe G' quasi-déployé sur $\mathbb{R}$ dont $\hat{G}_s$ est le groupe dual. Posons $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$. Montrons que c'est une donnée endoscopique pour G. La seule condition non évidente est la suivante. Pour $w \in W_\mathbb{R}$ et $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on a une égalité $sgw(s)^{-1} = a(w)g$, où a est un cocycle de $W_\mathbb{R}$ dans $Z(\hat{G})$. Il faut voir que ce cocycle est un cobord. En reprenant les définitions de [I] 2.7, on voit que la restriction de $\omega_\sharp$ à $G(\mathbb{R})$ est précisément associée à la classe de a. L'hypothèse que cette restriction est triviale jointe à (9) entraîne que a est un cobord. On poursuit alors la démonstration comme ci-dessus. En appliquant (8) par récurrence à $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}'_\sharp$, on a $\iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_\sharp) \in D_{tr-unip}(\mathbf{G}')$. Puisque $\iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'}$ préserve la stabilité, on a même $\iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_\sharp) \in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}')$. Alors

$$\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = \iota^*_{G_\sharp,G} \circ transfert(\boldsymbol{\delta}_\sharp) = transfert \circ \iota^*_{\mathbf{G}'_\sharp,\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_\sharp).$$

Ce dernier élément appartient à $transfert(D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}'))$ qui est inclus dans $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$. Cela prouve (8).

Les premières assertions de (ii) résultent de (8) comme (i) résultait de (5).

Comme on l'a dit, cf. (4), p est l'identité sur les distributions stables. A fortiori, $p(D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) = D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))$, ce qui est la dernière égalité de l'énoncé. On a aussi

$$\begin{aligned} D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})) = p(D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) &\subset p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \cap D^{st}_{géom}(G_\sharp(\mathbb{R})) \\ &\subset D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})) \cap D^{st}_{géom}(G_\sharp(\mathbb{R})) = D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Les inclusions de cette suite sont forcément des égalités, donc

$$D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})) = p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \cap D^{st}_{géom}(G_\sharp(\mathbb{R})).$$

Puisque $\iota^*_{G_\sharp,G}$ et $\iota^*_{G,G_\sharp}$ sont des isomorphismes inverses entre $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))$ et $p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})))$ et qu'ils préservent la stabilité, on a

$$\iota^*_{G,G_\sharp}(D^{st}_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))) = p(D_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R}))) \cap D^{st}_{géom}(G_\sharp(\mathbb{R})) = D^{st}_{tr-unip}(G_\sharp(\mathbb{R})).$$

C'est l'avant-dernière égalité de (ii) qu'il restait à prouver. $\square$

3.4 Revêtement et applications ρ_J et σ_J

On conserve la situation précédente. Soit M un Levi de G. On note $M_\flat$ son image réciproque. On a $M_\flat = Z \times M_\sharp$, où $M_\sharp$ est un Levi de $G_\sharp$. La fonction B sur G se relève en une fonction encore notée B sur $G_\sharp$. Les ensembles $\mathcal{J}_M^G(B)$ et $\mathcal{J}_{M_\sharp}^{G_\sharp}(B)$ s'identifient et, pour J dans cet ensemble, on peut identifier les deux espaces de germes U_J relatifs aux groupes ambiants G et $G_\sharp$, cf. [III] 3.2. On fixe une mesure de Haar sur $Z(\mathbb{R})$, qui permet d'identifier $Mes(G(\mathbb{R}))$ à $Mes(G_\sharp(\mathbb{R}))$ et $Mes(M(\mathbb{R}))$ à $Mes(M_\sharp(\mathbb{R}))$, cf. [III] 3.1.

Lemme. *(i) Soient $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$ et $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{tr-unip}(M_\sharp(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_\sharp(\mathbb{R}))^*$. Supposons $\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) \in D_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. Alors on a l'égalité*

$$\rho_J^G \circ \iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = \iota^*_{M_\sharp,M} \circ \rho_J^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp).$$

(ii) Supposons G quasi-déployé. Soient $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$ et $\boldsymbol{\delta}_\sharp \in D^{st}_{tr-unip}(M_\sharp(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_\sharp(\mathbb{R}))^*$. Alors on a l'égalité

$$\sigma_J^G \circ \iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\delta}_\sharp) = \iota^*_{M_\sharp,M} \circ \sigma_J^{G_\sharp}(\boldsymbol{\delta}_\sharp).$$

Remarque. Les $\iota^*_{M_\sharp,M}$ intervenant dans les membres de droite sont en fait tensorisés avec l'identité de U_J.

Preuve. Pour simplifier, on abandonne les espaces de mesures. L'action de $M(\mathbb{R})$ sur $M_\sharp(\mathbb{R})$ se prolonge en une action $G(\mathbb{R})$ sur $G_\sharp(\mathbb{R})$. Par simple transport de structure, on voit alors que

$$p \circ \rho_J^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = \rho_J^{G_\sharp} \circ p(\boldsymbol{\gamma}_\sharp).$$

Parce que $\iota^*_{M_\sharp,M} \circ p = \iota^*_{M_\sharp,M}$, le membre de gauche de l'égalité du (i) ne dépend que de $p(\boldsymbol{\gamma}_\sharp)$. Pour la même raison et grâce à l'égalité ci-dessus, on voit que c'est aussi le cas du membre de droite. On peut alors reformuler l'assertion (i) de la façon suivante. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-unip}(M(\mathbb{R}))$. Alors il existe $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{tr-unip}(M_\sharp(\mathbb{R}))$ tel que $\iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = \boldsymbol{\gamma}$ et que l'égalité du (i) soit vérifiée. Il suffit de démontrer cette assertion quand $\boldsymbol{\gamma}$ parcourt un ensemble de générateurs de $D_{tr-unip}(M(\mathbb{R}))$. Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,unip}(M(\mathbb{R}))$, on choisit $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{orb,unip}(M_\sharp(\mathbb{R}))$ et l'égalité résulte des définitions comme dans le cas non-archimédien. Soit maintenant $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de M, avec $M' \neq M$ si G est quasi-déployé. Considérons un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,unip}(M(\mathbb{R}))$ de la forme $transfert(\boldsymbol{\delta})$, où $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{M}')$. Comme dans la preuve du lemme précédent (où l'on remplace le groupe G par M), on construit une donnée endoscopique $\mathbf{M}'_\sharp = (M'_\sharp, \mathcal{M}'_\sharp, \zeta_\sharp)$ de $M_\sharp$ qui est elliptique et relevante. On choisit $\boldsymbol{\delta}_\sharp \in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{M}'_\sharp)$ tel que $\iota^*_{\mathbf{M}'_\sharp,\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}_\sharp) = \boldsymbol{\delta}$. On peut choisir $\boldsymbol{\gamma}_\sharp = transfert(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$. D'après 2.4(3), on a

$$\rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}, a) = \rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) \text{ et } \rho_J^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp, a_\sharp) = \rho_J^{G_\sharp,\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_\sharp, \boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp)$$

pour $a \in A_M(\mathbb{R})$ et $a_\sharp \in A_{M_\sharp}(\mathbb{R})$. C'est-à-dire

$$\rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}, a) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_\mathbb{R}}} i_{M'}(G, G'(s)) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{G'(s)}(B); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))),$$

$$\rho_J^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp, a_\sharp) = \sum_{s \in \zeta_\sharp Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_\mathbb{R}}/Z(\hat{G}_\sharp)^{\Gamma_\mathbb{R}}} i_{M'_\sharp}(G_\sharp, G'_\sharp(s)) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'_\sharp}^{G'_\sharp(s)}(B); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'_\sharp(s)}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, \xi(a_\sharp))).$$

On a

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} = Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} = Z(\hat{M}_{\sharp,ad})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} = Z(\hat{M}_{\sharp})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}_{\sharp})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}.$$

Les sommations en s des deux formules ci-dessus s'identifient. Pour s fixé, on vérifie aisément l'égalité

$$i_{M'}(G, G'(s)) = i_{M'_{\sharp}}(G_{\sharp}, G'_{\sharp}(s)).$$

Les sommations en J' d'identifient. Supposons que a et $a_{\sharp}$ se correspondent par la relation $a = q(a_{\sharp})$. Les termes $\xi(a)$ et $\xi(a_{\sharp})$ se correspondent par une relation similaire. Pour J' fixé, on peut appliquer par récurrence l'assertion (ii) du lemme :

$$\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a)) = \iota^*_{\mathbf{M}'_{\sharp},\mathbf{M}'}(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'_{\sharp}(s)}(\boldsymbol{\delta}_{\sharp}, \xi(a_{\sharp}))).$$

En utilisant 3.7(6), on obtient

$$transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))) = \iota^*_{M_{\sharp},M} \circ transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'_{\sharp}(s)}(\boldsymbol{\delta}_{\sharp}, \xi(a_{\sharp}))).$$

On en déduit

$$\rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}, a) = \iota^*_{M_{\sharp},M}(\rho_J^{G_{\sharp}}(\boldsymbol{\gamma}_{\sharp}, a_{\sharp})).$$

Cela prouve (i). Le (ii) s'en déduit comme dans le lemme [III] 3.6. □

3.5 Un résultat d'induction

On suppose G quasi-déployé. Soit M un Levi de G.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$. Supposons que la distribution induite $(\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\gamma}))^G$ soit stable. Alors il existe $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$ tel que l'on ait l'égalité*

$$(\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\gamma}))^G = (\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\delta}))^G.$$

Remarque. On rappelle que M_{SC} est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de M. Le lemme serait plus facile mais plus faible si l'on remplaçait ce groupe par l'image réciproque M_{sc} de M dans G_{SC}.

Preuve. On fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Introduisons les espaces $I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et $SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ de [I] 5.2 et [I] 5.5. L'indice *unip* remplace comme à notre habitude l'indice $\mathcal{O}$ de ce paragraphe, cette classe $\mathcal{O}$ étant réduite à $\{1\}$. Rappelons la description que l'on a donnée en [I] 5.2 de l'espace $I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. On fixe un ensemble $\mathcal{T}$ de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ de sous-tores maximaux de G. Pour $T \in \mathcal{T}$, notons M_T le plus petit Levi de G contenant T. Il est déterminé par la condition $A_{M_T} = A_T$. Notons $\Sigma^{M_T}(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{m}_T$. Ce sont les racines imaginaires de T. Notons $\mathfrak{t}_\star$ le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{t}$ tels que $\alpha(X) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma^{M_T}(T)$. On note $\underline{\Omega}_T$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathfrak{t}_\star(\mathbb{R})$ et on fixe un élément $\Omega_T \in \underline{\Omega}_T$. Posons $W_{\mathbb{R}}(T) = Norm_{G(\mathbb{R})}(T)/T(\mathbb{R})$ et $W(T) = Norm_G(T)/T$. On a $W_{\mathbb{R}}(T) \subset W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Pour $w \in W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$, notons $n(w)$ le nombre de racines $\alpha \in \Sigma^{M_T}(T)$ telles que l'hyperplan noyau de α sépare Ω_T de $w(\Omega_T)$. On pose $\epsilon(w) = (-1)^{n(w)}$. C'est un caractère de $W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. En remplaçant G par M_T, on définit le sous-groupe $W^{M_T}(T) \subset W(T)$. Remarquons que $\Gamma_{\mathbb{R}}$ agit trivialement sur ce

sous-groupe et que $W^{M_T}(T)$ agit transitivement sur $\underline{\Omega}_T$. On note $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]$ l'espace des séries formelles sur $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Soient $f \in I(G(\mathbb{R}))$, $T \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \underline{\Omega}_T$. On définit une fonction $\phi_{f,T,\Omega}$ sur Ω par $\phi_{f,T,\Omega}(X) = I^G(exp(X), f)$. Cette fonction se prolonge en une fonction C^∞ dans un voisinage de Ω. On note $\varphi_{f,T,\Omega}$ son développement en série formelle en 0. Pour $w \in W_{\mathbb{R}}(T)$ et $X \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \varphi_{f,T,w(\Omega)}(w(X)) = \varphi_{f,T,\Omega}(X).$$

L'application $f \mapsto (\varphi_{f,T,\Omega})_{T\in\mathcal{T},\Omega\in\underline{\Omega}_T}$ se quotiente en une injection

$$I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to \oplus_{T\in\mathcal{T},\Omega\in\underline{\Omega}_T}\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]].$$

Cette injection est un homéomorphisme de l'espace de départ sur son image, laquelle est fermée dans l'espace d'arrivée. L'espace $I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ est muni d'une filtration $(\mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc})_{n=a_G-1,\dots,a_{M_0}}$, où M_0 est un Levi minimal. L'espace $\mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ est celui des $f \in I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ tels que $\varphi_{f,T,\Omega} = 0$ pour tous T, Ω tels que $a_T > n$. Pour décrire le gradué $Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, introduisons les notations suivantes. Pout tout $T \in \mathcal{T}$, le groupe $W_{\mathbb{R}}(T)$ agit naturellement sur $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]$. On note $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W_{\mathbb{R}}(T),\epsilon}$ le sous-espace isotypique pour l'action du groupe $W_{\mathbb{R}}(T)$, de type ϵ. Notons $\mathcal{T}^n$ le sous-ensemble des $T \in \mathcal{T}$ tels que $a_T = n$. Pour $f \in \mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et $T \in \mathcal{T}^n$, la série φ_{f,T,Ω_T} appartient à $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W_{\mathbb{R}}(T),\epsilon}$. Pour une autre composante $\Omega \in \underline{\Omega}_T$, soit $w \in W^{M_T}(T)$ tel que $\Omega = w(\Omega_T)$. On a alors

$$(2) \qquad \varphi_{f,T,\Omega} = \epsilon(w)\varphi_{f,T,\Omega_T}.$$

L'application $f \mapsto (\varphi_{f,T,\Omega_T})_{T\in\mathcal{T}^n}$ se quotiente en un homéomorphisme

$$Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \simeq \oplus_{T\in\mathcal{T}^n}\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W_{\mathbb{R}}(T),\epsilon}.$$

Des descriptions analogues valent pour l'espace $SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. On doit seulement remplacer pour tout T le groupe $W_{\mathbb{R}}(T)$ par $W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}$. Notons $s^G : I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ la projection naturelle et $s^{G,n}$ l'application déduite entre les gradués de degré n. On voit que $s^{G,n}$ est la somme sur $T \in \mathcal{T}$ des applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W_{\mathbb{R}}(T),\epsilon} & \to & \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}},\epsilon} \\ \varphi & \mapsto & \sum_{w\in W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/W_{\mathbb{R}}(T)} \epsilon(w)w(\varphi). \end{array}$$

Cette application admet une section naturelle

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}},\epsilon} & \to & \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W_{\mathbb{R}}(T),\epsilon} \\ \varphi & \mapsto & [W(T)^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W_{\mathbb{R}}(T)]^{-1}\varphi. \end{array}$$

On obtient ainsi une identification de $Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ à un sous-espace de $Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$.

Il est facile de reprendre les preuves des paragraphes 4.15 et 4.16 de [I] (qui concernaient les espaces $I(G(\mathbb{R}))$ et $SI(G(\mathbb{R}))$) et de montrer que les résultats de ces paragraphes valent pour nos espaces $I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et $SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$.

On décrit de même les espaces $I(M(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, $I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ etc... et leurs gradués. Selon notre habitude, on ajoute si nécessaire des exposants M ou M_{SC} dans les notations pour les objets obtenus en remplaçant l'espace ambiant G par M ou M_{SC}.

On dispose de l'application de restriction $res_M : I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to I(M(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. De la projection $M_{SC}(\mathbb{R}) \to M(\mathbb{R})$ se déduit une application naturelle $\iota_{M_{SC},M} : I(M(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to$

$I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. Notons $res_{M_{SC}} = \iota_{M_{SC},M} \circ res_M : I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. Décrivons cette application. Soit $f \in I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, posons $f' = res_{M_{SC}}(f)$. Soient $T' \in \mathcal{T}^M$ et $\Omega' \in \underline{\Omega}_{T'}$. La fonction $\varphi_{f',T',\Omega'}$ appartient à $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})]]$, où T'_{sc} est l'image réciproque de T' dans M_{SC}. Fixons $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $ad_g(T') \in \mathcal{T}$. Posons $T = ad_g(T')$ et $\Omega = ad_g(\Omega')$. Alors, pour $X' \in \mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$\varphi_{f',T',\Omega'}(X') = \varphi_{f,T,\Omega}(ad_g(X')).$$

Pour $f' \in I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, $T \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \underline{\Omega}_T$, considérons la condition

$(Hyp)_{f',T,\Omega}$ il existe $\varphi \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]$ telle que, pour tout $T' \in \mathcal{T}^M$, tout $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $ad_g(T') = T$ et tout $X' \in \mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})$, on ait l'égalité

$$\varphi(ad_g(X') = \varphi_{f',T',ad_{g^{-1}}(\Omega)}(X').$$

Notons V le sous-espace des $f' \in I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ tels que, pour tous $T \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \underline{\Omega}_T$, la condition $(Hyp)_{f',T,\Omega}$ soit vérifiée. D'après la description ci-dessus, l'image de $res_{M_{SC}}$ est contenue dans V. L'application $res_{M_{SC}}$ est compatible aux filtrations. On note $res^n_{M_{SC}}$ l'application déduite entre gradués de degré n. On note $p^n : \mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et $p^{M_{SC},n} : \mathcal{F}^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to Gr^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ les projections naturelles. Nous allons prouver que

(3) l'image de $res_{M_{SC}}$ est égale à V ;

(4) l'intersection avec $\mathcal{F}^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ de l'image de $res_{M_{SC}}$ est l'image par $res_{M_{SC}}$ de $\mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$;

(5) soit $f^n \in Ker(res^n_{M_{SC}})$; alors il existe $f \in Ker(res_{M_{SC}}) \cap \mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ telle que $p^n(f) = f^n$.

On a vu que l'image de $res_{M_{SC}}$ était contenue dans V. On va d'abord prouver

(6) soit $f' \in V \cap \mathcal{F}^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$; alors il existe $f^n \in Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ tel que $res^n_{M_{SC}}(f^n) = p^{M_{SC},n}(f')$.

Soit $T \in \mathcal{T}^n$. Considérons une fonction $\varphi \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]$ satisfaisant l'hypothèse $(Hyp)_{f',T,\Omega_T}$. Soit $w \in W_{\mathbb{R}}(T)$. Montrons que la fonction $\epsilon(w)w(\varphi)$ satisfait encore cette hypothèse. On fixe $x \in Norm_{G(\mathbb{R})}(T)$ tel que w soit la restriction de ad_x à T. Soient $T' \in \mathcal{T}^M$, $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $ad_g(T') = T$ et $X' \in \mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})$. On a

$$\epsilon(w)w(\varphi)(ad_g(X')) = \epsilon(w)\varphi(ad_{x^{-1}g}(X') = \epsilon(w)\varphi_{f',T',ad_{g^{-1}x}(\Omega_T)}(X'),$$

d'après l'hypothèse $(Hyp)_{f',T,\Omega_T}$ appliquée à T' et $x^{-1}g$. Soit $w' \in W^{M_{T'}}(T')$ tel que $ad_{g^{-1}x}(\Omega_T) = w'(ad_{g^{-1}}(\Omega_T)$. On a $T' \in \mathcal{T}^{M,n}$. L'hypothèse $f' \in \mathcal{F}^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ entraîne que l'analogue de la condition (2) est vérifiée. C'est-à-dire que

$$\varphi_{f',T',ad_{g^{-1}x}(\Omega_T)}(X') = \epsilon'(w')\varphi_{f',T',ad_{g^{-1}}(\Omega_T)}(X'),$$

en notant pour plus de précision ϵ' le caractère de $W^{M_{T'}}(T')$. Mais l'application $\alpha \mapsto ad_{g^{-1}}(\alpha)$ se restreint en une bijection entre l'ensemble des racines $\alpha \in \Sigma^{M_T}(T)$ telles que l'hyperplan noyau de α sépare Ω_T de $w(\Omega_T)$ et l'ensemble des racines $\beta \in \Sigma^{M_{T'}}(T')$ telles que l'hyperplan noyau de β sépare $ad_{g^{-1}}(\Omega_T)$ de $ad_{g^{-1}x}(\Omega_T)$. Il en résulte que $\epsilon(w) = \epsilon'(w')$. On obtient alors

$$\epsilon(w)w(\varphi)(ad_g(X')) = \varphi_{f',T',ad_{g^{-1}}(\Omega_T)}(X').$$

Donc $\epsilon(w)w(\varphi)$ vérifie $(Hyp)_{f',T,\Omega_T}$. On peut alors remplacer φ par

$$|W_{\mathbb{R}}(T)|^{-1} \sum_{w \in W_{\mathbb{R}}(T)} \epsilon(w)w(\varphi).$$

Cette fonction satisfait encore $(Hyp)_{f',T,\Omega_T}$ et appartient à $\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]]^{W_{\mathbb{R}}(T),\epsilon}$. Notons plus précisément φ_T cette fonction. La famille $(\varphi_T)_{T\in\mathcal{T}^n}$ s'identifie à un élément $f^n \in Gr^nI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. On vérifie que $res^n_{M_{SC}}(f^n) = p^{M_{SC},n}(f')$. Cela prouve (6).

Montrons maintenant que

(7) $V \cap \mathcal{F}^nI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ est l'image par $res_{M_{SC}}$ de $\mathcal{F}^nI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$.

On raisonne par récurrence sur n. C'est clair si $n < a_G$ puisqu'alors tous les espaces sont nuls. Soit $n \geq a_G$, supposons l'assertion démontrée pour $n-1$. Soit $f' \in V \cap \mathcal{F}^nI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. D'après (6), il existe $f \in \mathcal{F}^nI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ tel que $p^{M_{SC},n}(f' - res_{M_{SC}}(f)) = 0$. Cela entraîne $f' - res_{M_{SC}}(f) \in \mathcal{F}^{n-1}I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. Puisque l'image de $res_{M_{SC}}$ est contenu dans V, on a aussi $f' - res_{M_{SC}}(f) \in V$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, $f' - res_{M_{SC}}(f)$ appartient à l'image par $res_{M_{SC}}$ de $\mathcal{F}^{n-1}I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. Cela entraîne que f' appartient à l'image par $res_{M_{SC}}$ de $\mathcal{F}^nI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, d'où (7).

Pour n maximal, (7) implique (3). Une fois (3) connue, (4) est équivalent à (7). Enfin, soit $f^n \in Ker(res^n_{M_{SC}})$. Choisissons $f_0 \in \mathcal{F}^nI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ tel que $p^n(f_0) = f^n$. L'hypothèse $f^n \in Ker(res^n_{M_{SC}})$ implique $res_{M_{SC}}(f_0) \in \mathcal{F}^{n-1}I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. En appliquant (4), il existe $f_1 \in \mathcal{F}^{n-1}I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ tel que $res_{M_{SC}}(f_1) = res_{M_{SC}}(f_0)$. L'élément $f = f_0 - f_1$ appartient à $Ker(res_{M_{SC}}) \cap \mathcal{F}^nI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et vérifie $p^n(f) = f^n$. Cela prouve (5).

Montrons que

(8) l'image de l'application $res_{M_{SC}}$ est fermée dans $I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$.

Pour tout $T' \in \mathcal{T}^M$, fixons un ensemble de représentants $\mathcal{W}_{T'}$ du quotient $\{g \in G(\mathbb{R}); ad_g(T') \in \mathcal{T}\}/T'(\mathbb{R})$. Considérons l'espace

$$X = \oplus_{T'\in\mathcal{T}^M,\Omega'\in\underline{\Omega}_{T'},g\in\mathcal{W}_{T'}}\mathbb{C}[[\mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})]].$$

L'espace

$$Y = \oplus_{T'\in\mathcal{T}^M,\Omega'\in\underline{\Omega}_{T'}}\mathbb{C}[[\mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})]]$$

s'identifie au sous-espace fermé des éléments de X dont les composantes sont indépendantes de $g \in \mathcal{W}_{T'}$. On a dit que $I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ s'identifiait à un sous-espace fermé de Y. Il s'identifie donc aussi à un sous-espace fermé de X. Posons

$$Z = \oplus_{T\in\mathcal{T},\Omega\in\underline{\Omega}_T}\mathbb{C}[[\mathfrak{t}(\mathbb{R})]].$$

On définit une application $\psi : Z \to X$ de la façon suivante. Soit $(\varphi_{T,\Omega})_{T\in\mathcal{T},\Omega\in\underline{\Omega}_T} \in Z$. Soient $T' \in \mathcal{T}^M$, $\Omega' \in \underline{\Omega}_{T'}$ et $g \in \mathcal{W}_{T'}$. Pour $X' \in \mathfrak{t}'_{sc}(\mathbb{R})$, posons

$$\varphi_{T',\Omega',g}(X') = \varphi_{ad_g(T),ad_g(\Omega')}(ad_g(X')).$$

L'image de $(\varphi_{T,\Omega})_{T\in\mathcal{T},\Omega\in\underline{\Omega}_T}$ par ψ est alors la famille $(\varphi_{T',\Omega',g})_{T'\in\mathcal{T}^M,\Omega'\in\underline{\Omega}_{T'},g\in\mathcal{W}_{T'}}$. L'assertion (3) revient à dire que l'image de $res_{M_{SC}}$ est égale à l'intersection dans X de $I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et de l'image de ψ. Pour prouver (8), il suffit donc de prouver que l'image de ψ est fermée dans X. L'espace des series formelles, disons sur $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$, est le produit sur $i \in \mathbb{N}$ des espaces de polynômes homogènes de degré i sur $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Ce résultat s'étend bien sûr à nos espaces X et Z : on a $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ et $Z = \prod_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. L'application ψ est le produit d'applications $\psi_i : Z_i \to X_i$. Soit alors $x \in X$ qui est dans l'adhérence de l'image de ψ. Pour tout i, la composante $x_i \in X_i$ est dans l'adhérence de l'image de ψ_i. Or les espaces X_i et Z_i sont de dimensions finies donc l'image de ψ_i est fermée. On peut donc choisir $z_i \in Z_i$ tel que $\psi_i(z_i) = x_i$. Mais alors, l'élément $z = \prod_{i\in\mathbb{N}} z_i \in Z$ vérifie $\psi(z) = x$. Donc x appartient à l'image de ψ. Cela démontre (8).

On a de même une application $res^{st}_{M_{SC}} = \iota_{M_{SC},M} \circ res^{st}_M : SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \to SI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. Elle se décrit de la même façon que $res_{M_{SC}}$. Des propriétés analogues à (3), (4), (5) et (8) valent pour cette application.

Nos applications sont compatibles aux filtrations. Pour tout n, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} & \overset{res^n_{M_{SC}}}{\to} & Gr^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc} \\ s^{G,n} \downarrow & & s^{M_{SC},n} \downarrow \\ Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} & \overset{res^{st,n}_{M_{SC}}}{\to} & Gr^n SI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc} \end{array}$$

Montrons que

(9) $Im(res^n_{M_{SC}}) \cap Ker(s^{M_{SC},n}) = res^n_{M_{SC}}(Ker(s^{G,n}))$.

Comme on l'a vu ci-dessus, on peut identifier $Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ à un sous-espace de $Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. On a alors

$$Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} = Ker(s^{G,n}) \oplus Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}.$$

De même

$$Gr^n I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc} = Ker(s^{M_{SC},n}) \oplus Gr^n SI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}.$$

Les deux sections sont compatibles aux applications $res^n_{M_{SC}}$ et $res^{st,n}_{M_{SC}}$. Précisément, $res^n_{M_{SC}}$ envoie $Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ dans $Gr^n SI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ et coïncide avec $res^{st,n}_{M_{SC}}$ sur $Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. Cela résulte des descriptions ci-dessus et de la propriété suivante

(10) pour tout $T' \in \mathcal{T}^M$, on a l'égalité

$$[W(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W_{\mathbb{R}}(T')] = [W^M(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W^M_{\mathbb{R}}(T')].$$

On vérifie que les suites suivantes sont exactes

$$1 \to W^{M_{T'}}(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to W(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \to W(M_{T'}) \to 1,$$

$$1 \to W^{M_{T'}}_{\mathbb{R}}(T') \to W_{\mathbb{R}}(T') \to W(M_{T'}) \to 1.$$

On en déduit l'égalité

$$[W(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W_{\mathbb{R}}(T')] = [W^{M_{T'}}(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W^{M_{T'}}_{\mathbb{R}}(T')].$$

On a de même

$$[W^M(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W^M_{\mathbb{R}}(T')] = [W^{M_{T'}}(T')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} : W^{M_{T'}}_{\mathbb{R}}(T')].$$

D'où (10).

Soit alors $f \in Gr^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, supposons $res^n_{M_{SC}}(f) \in Ker(s^{M_{SC},n})$. Ecrivons $f = f_0 + f^{st}$, avec $f_0 \in Ker(s^{G,n})$ et $f^{st} \in Gr^n SI(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. On a $s^{M_{SC},n} \circ res^n_{M_{SC}}(f) = res^n_{M_{SC}}(f^{st})$. Ce terme est nul par hypothèse. Donc $res^n_{M_{SC}}(f) = res^n_{M_{SC}}(f_0)$, c'est-à-dire $res^n_{M_{SC}}(f)$ appartient à $res^n_{M_{SC}}(Ker(s^{G,n}))$. Cela prouve (9).

Montrons que l'assertion (9) se relève des gradués aux espaces eux-mêmes, c'est-à-dire

(11) $Im(res_{M_{SC}}) \cap Ker(s^{M_{SC}}) = res_{M_{SC}}(Ker(s^G))$.

On démontre par récurrence sur n que

(12) $res_{M_{SC}}(\mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}) \cap Ker(s^{M_{SC}}) \subset res_{M_{SC}}(Ker(s^G))$.

Soit $f' \in res_{M_{SC}}(\mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}) \cap Ker(s^{M_{SC}})$. Alors $p^{M_{SC},n}(f') \in Im(res^n_{M_{SC}}) \cap Ker(s^{M_{SC},n})$. D'après (9), il existe $f^n \in Ker(s^{G,n})$ tel que $res^n_{M_{SC}}(f^n) = p^{M_{SC},n}(f')$. Comme on l'a vu en [I] 4.17 (on a dit que les résultats de ce paragraphe s'appliquaient à nos espaces localisés), il existe $f \in \mathcal{F}^n I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc} \cap Ker(s^G)$ tel que $p^n(f) = f^n$. Posons $f'_0 = f' - res_{M_{SC}}(f)$. Les égalités ci-dessus entraînent $p^{M_{SC},n}(f'_0) = 0$, donc $f'_0 \in \mathcal{F}^{n-1} I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. L'élément f'_0 appartient encore à l'image de $res_{M_{SC}}$. En appliquant (4), on a $f'_0 \in res_{M_{SC}}(\mathcal{F}^{n-1} I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc})$. Puisque $f \in Ker(s^G)$, on a $res_{M_{SC}}(f) \in Ker(s^{M_{SC}})$ donc aussi $f'_0 \in Ker(s^{M_{SC}})$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient $f'_0 \in res_{M_{SC}}(Ker(s^G))$. Alors $f' = f'_0 + res_{M_{SC}}(f)$ appartient aussi à $res_{M_{SC}}(Ker(s^G))$. Cela prouve (12).

Pour n maximal, (12) entraîne que le membre de gauche de (11) est inclus dans celui de droite. L'inclusion opposée est évidente. D'où (11).

Notons $I^{inst}(G(\mathbb{R}))$ le noyau de l'application naturelle $I(G(\mathbb{R})) \to SI(G(\mathbb{R}))$. Rappelons que

(13) l'image naturelle de $I^{inst}(G(\mathbb{R}))$ dans $I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ est dense dans $Ker(s^G)$.

En effet, c'est l'assertion [I] 5.15 (4) dans le cas particulier $k = 1$ et $\tilde{M}_1 = \tilde{G} = G$.

Venons-en à la preuve du lemme. Soit $\boldsymbol{\gamma}$ comme dans l'énoncé. C'est une forme linéaire continue sur $I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. On cherche un élément $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $SI(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$, ou encore une forme linéaire continue sur $I(M_{SC}(\mathbb{R}))_{unip,loc}$ nulle sur $Ker(s^{M_{SC}})$. La condition $(\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\gamma}))^G = (\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\delta}))^G$ revient à dire que $\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\delta}$ coïncident sur l'image de $res_{M_{SC}}$. Cette image est fermée d'après (8) et la somme de cette image avec $Ker(s^{M_{SC}})$ est aussi fermée : c'est l'image réciproque par $s^{M_{SC}}$ de l'image de $res^{st}_{M_{SC}}$ qui est fermée par l'analogue de (8). La condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{\delta}$ existe est donc que $\boldsymbol{\gamma}$ annule $Im(res_{M_{SC}}) \cap Ker(s^{M_{SC}})$. Ou encore, d'après (11), que $\boldsymbol{\gamma}$ annule $res_{M_{SC}}(Ker(s^G))$. D'après (13), cet espace est l'adhérence de l'image par $res_{M_{SC}}$ de l'image naturelle de $I^{inst}(G(\mathbb{R}))$ dans $I(G(\mathbb{R}))_{unip,loc}$. L'hypothèse que $(\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\gamma}))^G$ est stable signifie que $\boldsymbol{\gamma}$ annule cette image. Etant continue, $\boldsymbol{\gamma}$ annule aussi son adhérence, c'est-à-dire $res_{M_{SC}}(Ker(s^G))$. Cela achève la démonstration. $\square$

3.6 Un corollaire

Soient M un Levi de G et $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$.

Corollaire. *(i) Soient $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. Alors il existe $\boldsymbol{\tau} \in D_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$ tel que $\rho^G_J(\boldsymbol{\gamma}, a)$ soit l'image de $\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\tau})$ modulo Ann^G_{unip}.*

(ii) Supposons G quasi-déployé. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. Alors il existe $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$ tel que $\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)$ soit l'image de $\iota^*_{M_{SC},M}(\boldsymbol{\tau})$ modulo $Ann^{st,G}_{unip}$.

Preuve. Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb,unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, l'élément $\rho^G_J(\boldsymbol{\gamma}, a)$ appartient par définition à $D_{orb,unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ (plus exactement, est l'image modulo Ann^G_{unip} d'un élément de cet espace). Puisque $D_{orb,unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ est l'image par $\iota^*_{M_{SC},M}$ de $D_{orb,unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$, l'assertion (i) vaut pour $\boldsymbol{\gamma}$. Soit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de M, avec $M' \neq M$ si G est quasi-déployé. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$, considérons l'élément

$\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Par définition, on a

$$\rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}, a) = \rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{M'}(G, G'(s))$$

$$\sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{G'(s)}(B); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))).$$

Fixons s et J' apparaissant dans cette somme. En appliquant le (ii) de l'énoncé par récurrence, on peut supposer que $\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))$ est l'image par $\iota^*_{M'_{SC}, M'}$ d'un élément $\boldsymbol{\tau}_{s,J'} \in D^{st}_{unip}(M'_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M'_{SC}(\mathbb{R}))^*$. On sait que la donnée $\mathbf{M}'$ détermine une donnée endoscopique $\mathbf{M}'_{sc}$ de M_{SC}. L'application $\iota^*_{M'_{SC}, M'}$ se factorise en $\iota^*_{M'_{sc}, M'} \circ \iota^*_{M'_{SC}, M'_{sc}}$. Posons $\boldsymbol{\tau}'_{s,J'} = \iota^*_{M'_{SC}, M'_{sc}}(\boldsymbol{\tau}_{s,J'})$. On a alors $\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a)) = \iota^*_{M'_{sc}, M'}(\boldsymbol{\tau}'_{s,J'})$, d'où

$$transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))) = \iota^*_{M_{SC}, M} \circ transfert(\boldsymbol{\tau}'_{s,J'}).$$

On a alors $\rho_J^G(\boldsymbol{\gamma}, a) = \iota^*_{M_{SC}, M}(\boldsymbol{\tau})$, où

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{M'}(G, G'(s)) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{G'(s)}(B); J' \mapsto J} transfert(\boldsymbol{\tau}'_{s,J'}).$$

Cela démontre (i) pour $\boldsymbol{\gamma}$ et cela achève la preuve de cette assertion (i).

Supposons G quasi-déployé. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-unip}(M(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, on voit de même, en appliquant (i) et les hypothèses de récurrence, que $\sigma_J^G(\boldsymbol{\delta}, a)$ est l'image par $\iota^*_{M_{SC}, M}$ d'un élément $\boldsymbol{\tau}' \in D_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$. On sait que l'induite $\sigma_J^G(\boldsymbol{\delta}, a)^G$ est stable. En appliquant le lemme 3.5, il existe $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$ tel que les induites à G des distributions $\iota^*_{M_{SC}, M}(\boldsymbol{\tau}')$ et $\iota^*_{M_{SC}, M}(\boldsymbol{\tau})$ soient égales. Mais alors $\sigma_J^G(\boldsymbol{\delta}, a)$ est l'image de $\iota^*_{M_{SC}, M}(\boldsymbol{\tau})$ modulo $Ann^{st,G}_{unip}$. Cela prouve (ii). $\square$

4 Extension des définitions, cas quasi-déployé et à torsion intérieure

4.1 Descente et endoscopie

On a rappelé dans la section 5 de [III] les liens entre descente et endoscopie. Le corps de base y était non-archimédien. Presque tout reste valable sur notre corps de base réel. Il faut toutefois modifier légèrement l'identité cruciale [III] 5.1(3). Rappelons brièvement la situation. Dans ce paragraphe, le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. On considère une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ elliptique et relevante. On fixe des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. Considérons un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ joignant deux éléments semi-simples $\epsilon \in \tilde{G}'(\mathbb{R})$ et $\eta \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. On suppose G'_ϵ quasi-déployé. On fixe un relèvement ϵ_1 de ϵ dans $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$. On fixe une décomposition d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{g}'$. On construit comme en [I] 1.2 une action galoisienne quasi-déployée sur G_η qui conserve une paire de Borel épinglée de ce groupe complétant la paire $(B \cap G_\eta, T \cap G_\eta)$. On note $\bar{G}$ ce groupe muni de cette action. Celle-ci est telle que l'application identité $\psi : G_\eta \to \bar{G}$ est

un torseur intérieur. On a construit en [W2] 3.5 une donnée endoscopique $\bar{\mathbf{G}}' = (\bar{G}', \bar{\mathcal{G}}', \bar{s})$ de $\bar{G}_{SC}$. Le couple $(\bar{G}'_{SC}, G'_{\epsilon,SC})$ se complète en un triplet endoscopique non standard. Soit $y \in G$ tel que $y\sigma(y)^{-1} \in I_\eta = Z(G)^\theta G_\eta$. On pose $\eta[y] = y^{-1}\eta y$. Alors $\psi \circ ad_y$ est un torseur intérieur de $G_{\eta[y]}$ sur $\bar{G}$. Ainsi, la donnée $\bar{\mathbf{G}}'$ est aussi une donnée endoscopique pour $G_{\eta[y]}$. Supposons qu'elle soit relevante. Puisque $\bar{G}_{SC}$ est simplement connexe, il n'est pas besoin de données auxiliaires pour cette donnée et on peut fixer pour celle-ci un facteur de transfert $\Delta(y)$. Soit $Y \in \mathfrak{g}'_\epsilon(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 0. Modulo les isomorphismes de [III] 5.1, on le décompose en $Y_{sc} + Z$ avec $Y_{sc} \in \mathfrak{g}'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R})$ et $Z \in \mathfrak{z}(G'_\epsilon;\mathbb{R})$. On décompose Z en $Z_1 + Z_2$, avec $Z_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G};\mathbb{R})$ et $Z_2 \in \mathfrak{z}(\bar{G}';\mathbb{R})$. On transfère Y_{sc} en un élément $\bar{Y}_{sc} \in \bar{\mathfrak{g}}'_{SC}(\mathbb{R})$. On pose $\bar{Y} = \bar{Y}_{sc} + Z_2$. Supposons que $\bar{Y}$ se transfère en un élément $X[y]_{sc} \in \mathfrak{g}_{\eta[y],SC}(\mathbb{R})$. On pose $X[y] = X[y]_{sc} + Z_1$. On a

(1) il existe $b \in \mathfrak{z}(G'_\epsilon;\mathbb{R})^*$ et, pour tout y comme ci-dessus, il existe $d(y) \in \mathbb{C}^\times$ de sorte que, pour toutes données Y, $X[y]$ comme ci-dessus, on ait l'égalité

$$d(y)\Delta(y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc})) = e^{<b,Z>}\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1, exp(X[y])\eta[y]).$$

Preuve. Commençons par fixer des tores maximaux dans nos différents groupes et supposons que les éléments Y, $\bar{Y}$ et $X[y]$ appartiennent aux algèbres de Lie de ces tores. Le lemme [I] 2.8 entraîne qu'il existe $(b_1, b_2) \in \mathfrak{z}(G'_1;\mathbb{R})^* \oplus (1-\theta)(\mathfrak{z}(G,\mathbb{R})^*)$ de sorte que la fonction

$$e^{-<b_1,Y>-<b_2,X[y]>}\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1, exp(X[y])\eta[y])$$

soit localement constante. On a prolongé par exemple b_1 en une forme linéaire sur $\mathfrak{g}'_1(\mathbb{R})$ nulle sur $\mathfrak{g}'_{1,SC}(\mathbb{R})$. L'égalité se simplifie puisque la projection de $X[y]$ dans $\mathfrak{z}(G;\mathbb{R})$ est invariante par θ : on a $< b_2, X[y] >= 0$. On a aussi $< b_1, Y >=< b_0, Z >$, où b_0 est la restriction de b_1 à $\mathfrak{z}(G'_\epsilon;\mathbb{R})$. Un même résultat vaut pour le facteur $\Delta(y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc}))$: il existe $b'_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G}';\mathbb{R})^*$ tel que la fonction

$$e^{-<b'_1,Z_2>}\Delta(y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc}))$$

soit localement constante. On peut identifier b'_1 à un élément de $\mathfrak{z}(G'_\epsilon;\mathbb{R})^*$, cf. [III] 5.1(1). En posant $b = b'_1 - b_0$, on obtient que le rapport

$$(2) \qquad e^{<b,Z>}\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1, exp(X[y])\eta[y])\Delta(y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc}))^{-1}$$

est localement constant. Il résulte des définitions de [I] 2.8 que les termes b_1 et b'_1 ne dépendent ni des tores fixés, ni de l'élément y (les constructions se situent dans les groupes duaux et ne voient pas y). L'élément b non plus. On peut calculer la fonction localement constante (2) de la même façon qu'en [W2] chapitre 10. On obtient qu'elle est constante, les tores étant fixés. Il reste à prouver que cette constante ne dépend pas des tores. Dans la notation de [W2], il s'agit de prouver l'égalité $\Delta(T, \underline{T}) = 1$. La méthode de [W2] paragraphe 12 consistait à plonger la situation locale dans une situation définie sur un corps de nombres et à utiliser une formule de produit pour déduire la valeur de $\Delta(T, \underline{T})$ de valeurs analogues dans une situation non ramifiée. La même méthode s'applique et ramène l'égalité à prouver à l'égalité analogue dans une situation non ramifiée sur un corps non-archimédien. La preuve dans ce cas a été faite dans [W2]. Cela prouve (1). □

Le facteur exponentiel qui intervient en (1) affecte la description du transfert des distributions si celles-ci font intervenir des dérivations dans la direction centrale de G'_ϵ. Mais ce n'est pas le cas si on se limite aux distributions provenant de $G'_{\epsilon,SC}$ via l'application $\iota^*_{G'_{\epsilon,SC},G_\epsilon}$ de la section 3. En particulier, la relation [III] 5.2(7) reste valide.

4.2 Localisation

Dans la suite de la section, on considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit η un élément semi-simple de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Conformément à la convention de [I] 5.10, nous notons

$$desc_\eta^{\tilde{G},*} : D_{géom}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^* \to D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$$

l'application linéaire déduite de la descente d'Harish-Chandra. Comme on l'a dit dans cette référence, elle n'est définie que sur les éléments de $D_{géom}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$ dont le support est assez voisin de l'origine. Le groupe $Z_G(\eta;\mathbb{R})$ agit naturellement dans $D_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$ via son quotient fini $Z_G(\eta : \mathbb{R})/G_\eta(\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison de η par $G(\mathbb{R})$. Alors la restriction de $desc_\eta^{\tilde{G},*}$ à $D_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$ se factorise en

$$(1) \qquad D_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^* \xrightarrow{p} (D_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*)^{Z_G(\eta;\mathbb{R})}$$

$$\overset{desc_\eta^{\tilde{G},*}}{\simeq} D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^* \subset D_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*,$$

où l'exposant $Z_G(\eta;\mathbb{R})$ désigne selon l'usage le sous-espace des invariants et où p est la projection naturelle sur ce sous-espace.

Supposons G_η quasi-déployé. On a de même une application linéaire

$$desc_\eta^{st,\tilde{G},*} : D^{st}_{géom}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^* \to D^{st}_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*,$$

cf. [I] 5.10. Posons $\Xi_\eta = Z_G(\eta)/G_\eta$. Le groupe $\Xi_\eta^{\Gamma_\mathbb{R}}$ agit naturellement sur $D^{st}_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$. Notons $\mathcal{O}^{st}$ la classe de conjugaison stable de η. Alors la restriction $desc_\eta^{st,\tilde{G},*}$ à $D^{st}_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$ se factorise en

$$(2) \qquad D^{st}_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^* \xrightarrow{p^{st}} (D^{st}_{unip}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*)^{\Xi_\eta^{\Gamma_\mathbb{R}}}$$

$$\overset{desc_\eta^{st,\tilde{G},*}}{\simeq} D^{st}_{géom}(\mathcal{O}^{st}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^* \subset D^{st}_{géom}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*,$$

avec des notations similaires à celles ci-dessus. Notons $\mathcal{Y}(\eta)$ l'ensemble des $y \in G$ tels que $y\sigma(y)^{-1} \in G_\eta$ pour tout $\sigma \in \Gamma_\mathbb{R}$. Fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ de l'ensemble de doubles classes $G_\eta \backslash \mathcal{Y}(\eta)/G(\mathbb{R})$. Pour $y \in \mathcal{Y}(\eta)$, on pose $\eta[y] = y^{-1}\eta y$. L'application ad_y se restreint en un torseur intérieur de $G_{\eta[y]}$ sur sa forme quasi-déployée G_η, grâce auquel on peut transférer une distribution stable sur $G_\eta(\mathbb{R})$ en une distribution sur $G_{\eta[y]}(\mathbb{R})$. On note $transfert_y$ cette application. Les applications $desc_\eta^{\tilde{G},*}$ et $desc_\eta^{st,\tilde{G},*}$ sont reliées par l'égalité

$$(3) \qquad desc_\eta^{st,\tilde{G},*} = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{G},*} \circ transfert_y,$$

cf. [I] 5.10.

4.3 Localisation des espaces $D_{tr-orb}(\mathcal{O})$

Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Fixons $\eta \in \mathcal{O}$ tel que G_η soit quasi-déployé. On introduit un ensemble $\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ comme dans le paragraphe précédent. En général, l'ensemble $\{\eta[y]; y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)\}$ n'est pas un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{O}$. Il est plus gros. On peut toutefois supposer que si $\eta[y]$ est conjugué à $\eta[y']$, alors ces deux points sont égaux. On peut alors fixer un sous-ensemble $\dot{\mathcal{X}}(\eta) \subset \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$ de sorte que $\{\eta[y]; y \in \dot{\mathcal{X}}(\eta)\}$ soit un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{O}$.

Lemme. *(i) L'espace $D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$ est contenu dans la somme sur $y \in \dot{\mathcal{X}}(\eta)$ des images par $desc_{\eta[y]}^{\tilde{G},*}$ de $D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$.*

(ii) L'espace $D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$ est contenu dans l'image par $desc_\eta^{st,\tilde{G},*}$ de $D_{tr-unip}^{st}(G_\eta(\mathbb{R})) \otimes Mes(G_\eta(\mathbb{R}))^*$.

Preuve. Oublions les espaces de mesures. Considérons (i). Il est clair que $D_{orb}(\mathcal{O})$ est contenu dans la somme sur $y \in \dot{\mathcal{X}}(\eta)$ des images par $desc_{\eta[y]}^{\tilde{G},*}$ de $D_{orb,unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$. Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $(G, \tilde{G})$ avec $G' \neq G$. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O})$, supposons qu'il existe $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{G}')$ tel que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. On veut prouver que $\boldsymbol{\gamma}$ appartient à la somme des images par $desc_{\eta[y]}^{\tilde{G},*}$ de $D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$. Par linéarité, on peut fixer une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}'$ dans $G'(\mathbb{R})$ qui se transfère en $\mathcal{O}$ et supposer que $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{G}', \mathcal{O}')$. On fixe $\epsilon \in \mathcal{O}'$ tel que G'_ϵ soit quasi-déployé. On fixe des données auxiliaires G'_1,...Δ_1 pour $\mathbf{G}'$ et un point $\epsilon_1 \in G'_1(\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ. On applique (ii) par récurrence (plus exactement, on applique une forme de (ii) adaptée comme toujours à la situation des données auxiliaires ; on laisse cette adaptation au lecteur). On peut donc fixer $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1} \in D_{tr-unip}^{st}(G'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}))$ tel que $\boldsymbol{\delta} = desc_{\epsilon_1}^{st,\tilde{G}'_1,*}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1})$. Appliquons le lemme 3.3(ii) : on peut fixer $\boldsymbol{\delta}_{SC} \in D_{tr-unip}^{st}(G'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$ tel que $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1} = \iota^*_{G'_{\epsilon,SC},G'_{1,\epsilon_1}}(\boldsymbol{\delta}_{SC})$. Alors $\boldsymbol{\gamma}$ est calculé par la formule [III] 5.2(7). Cette formule se simplifie dans notre situation quasi-déployée et à torsion intérieure. Les constantes $c(y)$ valent 1. Surtout, le groupe $\bar{G}'_{SC}$, qui en général est en situation d'endoscopie non standard avec $G'_{\epsilon,SC}$, est ici égal à ce groupe. On obtient le résultat suivant. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)$, on note $\boldsymbol{\delta}[y]$ l'image de $\iota^*_{\bar{G}'_{SC},\bar{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{SC})$ par l'application $transfert_y$ à $G_{\eta[y],SC}(\mathbb{R})$, avec la convention que ce transfert est nul si $\bar{\mathbf{G}}'$ n'est pas relevante pour $G_{\eta[y],SC}$. Alors

$$(1) \qquad \boldsymbol{\gamma} = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}(\eta)} d(y) desc_{\eta[y]}^{\tilde{G},*} \circ \iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\delta}[y]).$$

Le lemme 3.3(ii) assure que $\iota^*_{\bar{G}'_{SC},\bar{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{SC}) \in D_{tr-unip}^{st}(\bar{G}'(\mathbb{R}))$. On a alors $\boldsymbol{\delta}[y] \in D_{tr-unip}(G_{\eta[y],SC}(\mathbb{R}))$. Mais, parce que $G_{\eta[y]}$ n'est pas quasi-déployé, le lemme 3.3 n'assure pas que $\iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\delta}[y])$ appartient à $D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$. Pour le voir, il faut utiliser encore une simplification due à notre situation quasi-déployée et à torsion intérieure. Non seulement $G'_{\epsilon,SC}$ s'identifie au groupe $\bar{G}'_{SC}$, mais G'_ϵ lui-même s'identifie au groupe d'une donnée endoscopique de $\bar{G}$, ou encore de $G_{\eta[y]}$. Notons $\mathbf{G}''$ cette donnée. La donnée précédente $\mathbf{G}'$ est déduite de $\mathbf{G}''$ par la construction de la preuve du lemme 3.3. Posons $\boldsymbol{\delta}' = \iota^*_{\bar{G}'_{SC},\bar{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{SC})$. On peut considérer que c'est un élément de $D_{tr-unip}^{st}(\mathbf{G}')$. On a alors

$$\iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\delta}[y]) = \iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}} \circ transfert_y(\boldsymbol{\delta}') = transfert_y \circ \iota^*_{\mathbf{G}',\mathbf{G}''}(\boldsymbol{\delta}').$$

Parce que G'_ϵ est quasi-déployé, le lemme 3.3(ii) assure que $\iota^*_{\mathbf{G}',\mathbf{G}''}(\boldsymbol{\delta}')$ appartient à $D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}'')$. Alors $\iota^*_{G_{\eta[y]},SC,G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\delta}[y])$ appartient à $D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$. La formule (1) se récrit

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)} desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}(\boldsymbol{\gamma}[y]),$$

où

$$\boldsymbol{\gamma}[y] = \sum_{y'\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta);\eta[y']=\eta[y]} d(y')\iota^*_{G_{\eta[y']},SC,G_{\eta[y']}}(\boldsymbol{\delta}[y']).$$

Cela assure que $\boldsymbol{\gamma}$ appartient à l'espace indiqué en (i) et cela achève la preuve de cette assertion.

Soit maintenant $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O})$. D'après ce que l'on vient de prouver, on peut écrire

$$(2)\qquad \boldsymbol{\delta} = \sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)} desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}(\boldsymbol{\gamma}[y]),$$

avec $\boldsymbol{\gamma}[y]\in D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$ pour tout y. Appliquons 4.2(1) en remplaçant η par $\eta[y]$. On note p_y la projection qui intervient dans cette relation. Cette application consiste à moyenner sur un groupe d'automorphismes de $G_{\eta[y]}$. Comme on l'a déjà dit, l'espace $D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$ est invariant par automorphismes, donc aussi par p_y. On peut remplacer $\boldsymbol{\gamma}[y]$ par $p_y(\boldsymbol{\gamma}[y])$, qui appartient encore à $D_{tr-unip}(G_{\eta[y]}(\mathbb{R}))$. D'autre part, d'après 4.2(2), on peut écrire

$$(3)\qquad \boldsymbol{\delta} = desc^{st,\tilde{G},*}_{\eta}(\boldsymbol{\delta}_\eta),$$

avec $\boldsymbol{\delta}_\eta\in D^{st}_{unip}(G_\eta(\mathbb{R}))^{\Xi_\eta^{\Gamma_\mathbb{R}}}$. Appliquons 4.2(3). On obtient

$$(4)\qquad \boldsymbol{\delta} = \sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)} desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}(\boldsymbol{\gamma}'[y]),$$

où

$$\boldsymbol{\gamma}'[y] = \sum_{y'\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta);\eta[y']=\eta[y]} transfert_{y'}(\boldsymbol{\delta}_\eta).$$

Fixons $y'\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta)$. Pour $g\in Z_G(\eta[y'],\mathbb{R})$, on vérifie que $ad_g\circ transfert_{y'} = transfert_{y'}\circ ad_{y'g(y')^{-1}}$. On a $y'g(y')^{-1}\in Z_G(\eta)$ et on vérifie que l'image de cet élément dans Ξ_η est fixe par $\Gamma_\mathbb{R}$. Donc $\boldsymbol{\delta}_\eta$ est fixe par $ad_{y'g(y')^{-1}}$, donc $transfert_{y'}(\boldsymbol{\delta}_\eta)$ est fixe par $Z_G(\eta[y'],\mathbb{R})$. Il en résulte que, pour tout $y\in\dot{\mathcal{X}}(\eta)$, $\boldsymbol{\gamma}'[y]$ est invariant par $Z_G(\eta[y],\mathbb{R})$. Puisque $desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}$ est injectif sur les distributions fixées par ce groupe, les égalités (2) et (4) entraînent que $\boldsymbol{\gamma}[y]=\boldsymbol{\gamma}'[y]$ pour tout y. Appliquons cela à $y=1$ (on peut supposer que 1 appartient à notre système de représentants $\dot{\mathcal{X}}(\eta)$). Cela entraîne $\boldsymbol{\gamma}'[1]\in D_{tr-unip}(G_\eta(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire

$$\sum_{y'\in\dot{\mathcal{Y}}(\eta);\eta[y']=\eta} transfert_{y'}(\boldsymbol{\delta}_\eta)\in D_{tr-unip}(G_\eta(\mathbb{R})).$$

Un élément $y'\in\mathcal{Y}(\eta)$ tel que $\eta[y']=\eta$ appartient à $Z_G(\eta)$ et son image dans Ξ_η est fixe par $\Gamma_\mathbb{R}$. On voit que $transfert_{y'}$ n'est autre que l'action de l'élément de $\Xi_\eta^{\Gamma_\mathbb{R}}$ ainsi défini. Puisque $\boldsymbol{\delta}_\eta$ est fixe par cette action, on obtient $transfert_{y'}(\boldsymbol{\delta}_\eta)=\boldsymbol{\delta}_\eta$. Le membre de gauche de la relation précédente n'est autre que $\boldsymbol{\delta}_\eta$ multiplié par le nombre d'éléments de l'ensemble de sommation. Donc $\boldsymbol{\delta}_\eta\in D_{tr-unip}(G_\eta(\mathbb{R}))$. Puisque c'est une distribution stable, on a $\boldsymbol{\delta}_\eta\in D^{st}_{tr-unip}(G_\eta(\mathbb{R}))$. Alors l'assertion (ii) résulte de (3). $\square$

4.4 Un résultat d'induction

Soit $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Fixons $\eta \in \mathcal{O}^{\tilde{G}}$ tel que G_η soit quasi-déployé. Notons $\tilde{M}$ le commutant de A_{G_η} dans $\tilde{M}$. C'est un espace de Levi de $\tilde{G}$, on a $\eta \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ et $M_\eta = G_\eta$. On note $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$.

Lemme. *Les applications d'induction*

$$D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to D_{tr-orb}(\mathcal{O}^{\tilde{G}}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$$

et

$$D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}^{\tilde{G}}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$$

sont surjectives.

Preuve. On oublie les espaces de mesures. L'application

$$(1) \qquad M_\eta \backslash \mathcal{Y}^M(\eta)/M(\mathbb{R}) \to G_\eta \backslash \mathcal{Y}(\eta)/G(\mathbb{R})$$

est toujours injective et l'hypothèse $M_\eta = G_\eta$ entraîne qu'elle est surjective, cf. [I] lemme 5.12. Un système de représentants $\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$ du premier ensemble de doubles classes est donc aussi un tel système pour le second ensemble. Un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})$ est combinaison linéaire d'intégrales orbitales dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$ associées à des éléments $u\eta[y]$ où $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)$ et u est un élément unipotent de $G_{\eta[y]}(\mathbb{R}) = M_{\eta[y]}(\mathbb{R})$. Il est induit de la même combinaison linéaire d'intégrales orbitales dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associées aux mêmes éléments. Cette combinaison linéaire appartient à $D_{orb}(\mathcal{O})$. Soit maintenant $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(G, \tilde{G})$ avec $G' \neq G$. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O})$ tel qu'il existe $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}')$ de sorte que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. On veut prouver que $\boldsymbol{\gamma}$ est induit d'un élément de $D_{tr-orb}(\mathcal{O}^{\tilde{M}})$. Par linéarité, on peut fixer une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}^{\tilde{G}'}$ dans $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ et supposer $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}(\mathbf{G}', \mathcal{O}^{\tilde{G}'})$. On fixe $\epsilon \in \mathcal{O}^{\tilde{G}'}$ avec G'_ϵ quasi-déployé et on fixe un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$. Notons $\tilde{R}'$ le commutant de $A_{G'_\epsilon}$ dans $\tilde{G}'$. Puisque $(G, \tilde{G})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, $\tilde{R}'$ détermine un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{G}$ de sorte que $T \subset R$ et que l'isomorphisme $T' \simeq T$ se restreigne en un isomorphisme $A_{R'} \simeq A_R$. Alors $\tilde{R}'$ est l'espace d'une donnée endoscopique elliptique $\mathbf{R}'$ de $(R, \tilde{R})$. L'élément η appartient à $\tilde{R}(\mathbb{R})$. On a les relations $A_M = A_{G_\eta} \subset A_{G'_\epsilon} = A_{R'} = A_R$, donc $\tilde{R} \subset \tilde{M}$. Notons $\mathcal{O}'$ la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$. En appliquant par récurrence la deuxième assertion du lemme (adaptée à la situation endoscopique), il existe $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{R}', \mathcal{O}')$ tel que $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'})^{\mathbf{G}'}$. Posons $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}} = transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'})$. Cette distribution appartient à $D_{tr-orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}})$, où $\mathcal{O}_{\tilde{R}}$ est la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{R}(\mathbb{R})$. Par commutation du transfert à l'induction, $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}})^{\tilde{G}} = (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}}$, où $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}} = (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}})^{\tilde{M}}$. Puisque $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O})$, cela démontre l'assertion cherchée, d'où la première assertion du lemme.

Soit maintenant $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})$. D'après ce que l'on vient de prouver, il existe $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O})$ tel que $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}}$. D'après le lemme [I] 5.12(iii), il existe aussi $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{M}} \in D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ tel que $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_{\tilde{M}})^{\tilde{G}}$. Introduisons le groupe N des éléments $n \in G(\mathbb{R})$ tels que ad_n conserve $\tilde{M}$ et $\mathcal{O}$. Il agit via son quotient fini $N/(N \cap M(\mathbb{R}))$ sur $D_{géom}(\mathcal{O})$. Cette action conserve (par transport de structure) les sous-espaces $D_{tr-orb}(\mathcal{O})$ et $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$. Evidemment, l'induction est insensible à l'action de ce groupe, c'est-à-dire

que $(ad_n(\boldsymbol{\gamma}_1))^{\tilde{G}} = \boldsymbol{\gamma}_1^{\tilde{G}}$ pour tout $\boldsymbol{\gamma}_1 \in D_{géom}(\mathcal{O})$ et tout $n \in N$. On peut donc remplacer les éléments $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ et $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{M}}$ par leur moyenne sous l'action de N sans changer les propriétés précédentes. Autrement dit, on peut supposer $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}}$ et $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{M}}$ invariantes par N. D'après le lemme [I] 5.12(iii), l'induction induit un isomorphisme de l'espace des invariants $D_{géom}(\mathcal{O})^N$ sur $D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})$. Cela entraîne $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{M}} = \boldsymbol{\delta}_{\tilde{M}}$. Cet élément appartient donc à $D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O})$. Cela prouve que $\boldsymbol{\delta}$ est induit d'un élément de cet espace, ce qui démontre la seconde assertion du lemme.

4.5 Définition des termes $\rho_J^{\tilde{G}}$ et $\sigma_J^{\tilde{G}}$, premier cas

On fixe pour la suite de la section un système de fonctions B comme en [II] 1.9. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui la contient. Fixons $\eta \in \mathcal{O}$ avec M_η quasi-déployé, introduisons le sous-espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ tel que $A_R = A_{M_\eta}$. On note $\mathcal{O}_{\tilde{R}}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{R}(\mathbb{R})$. On suppose dans ce paragraphe

(1) $\tilde{R} \neq \tilde{M}$.

Soit $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$. Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$, fixons grâce au lemme 4.4 (appliqué avec $\tilde{G}$ et $\tilde{M}$ remplacés par $\tilde{M}$ et $\tilde{R}$) un élément $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ tel que $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}})^{\tilde{M}}$. Pour $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, posons

$$(2) \qquad \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R}); J \in \mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}, a)^{\tilde{M}}.$$

Tous les termes sont définis par récurrence, en vertu de l'hypothèse (1). On a

(3) ce terme ne dépend pas du choix de $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}$.

Preuve. On a introduit un groupe $N \subset M(\mathbb{R})$ dans la preuve du lemme 4.4. Ce groupe agit sur $D_{tr-orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ et aussi sur $\mathcal{L}(\tilde{R})$. On vérifie que, pour $n \in N$, ad_n permute les espaces de Levi $\tilde{L}$ tels que $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \neq 0$ et $J \in \mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})$. Par transport de structure, il est plus ou moins clair que

$$\rho_J^{ad_n(\tilde{L})}(ad_n(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}), a) = ad_n(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}, a)).$$

Puisque l'induction de $\tilde{R}$ à $\tilde{M}$ est insensible à la composition avec ad_n, on obtient que remplacer $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}$ par $ad_n(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}})$ ne change pas le membre de droite de (2). On peut alors aussi bien remplacer $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}$ par sa projection naturelle sur l'espace des invariants par N. Mais, d'après le lemme [I] 5.12(iii), cette projection est uniquement déterminée par $\boldsymbol{\gamma}$. L'assertion (3) s'ensuit. $\square$

La formule (2) définit une application linéaire

$$\rho_J^{\tilde{G}} : D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}.$$

On va prouver qu'elle vérifie les conditions (1) et (3) de 2.4, c'est-à-dire :

(4) cette définition coïncide avec celle de [II] 3.4 pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$;

(5) soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M})$ avec $M' \neq M$; soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ correspondant à $\mathcal{O}$; soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$; alors $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}))$.

Dans la situation de (4), on peut choisir $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}} \in D_{orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$. L'égalité cherchée résulte alors du lemme [II] 3.10. Dans la situation de (5), on voit en reprenant

la preuve du lemme 4.4 que l'on peut introduire une donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $(R, \tilde{R})$, qui est une donnée de Levi de $\mathbf{M}'$, une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}'_{\tilde{R}'}$ dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$ correspondant à $\mathcal{O}'$ et à $\mathcal{O}_{\tilde{R}}$, et un élément $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{R}', \mathcal{O}'_{\tilde{R}'})$, de sorte que $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'})^{\mathbf{M}'}$. D'après l'analogue de la relation 2.5(8) (qui est valide d'après l'hypothèse $M' \neq M$), on a alors

$$(6) \qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R}); J \in \mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)^{\tilde{M}}.$$

En utilisant les hypothèses de récurrence, on a

$$\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a) = \rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}, a)$$

où $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}} = transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'})$. Mais $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}}$ est un élément de $D_{tr-orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ tel que $(\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{R}})^{\tilde{M}} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Alors le membre de droite de (6) coïncide avec celui de (2) pour $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Cela prouve (5).

On définit une application linéaire

$$\sigma_J^{\tilde{G}} : D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$$

par la formule habituelle 2.4(13). On doit prouver qu'elle prend ses valeurs dans $U_J \otimes (D^{st}_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{st,\tilde{G}}$. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. D'après le lemme 4.4, on peut fixer $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{R}} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}) \otimes Mes(R(\mathbb{R}))^*$ de sorte que $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_{\tilde{R}})^{\tilde{M}}$. A partir des relations d'induction déjà connues, en particulier la formule (2), on prouve formellement que

$$(7) \qquad \sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R}); J \in \mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})} e_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}_{\tilde{R}}, a)^{\tilde{M}}$$

pour $a \in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. Les distributions du membre de droite sont stables modulo $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$, d'où l'assertion cherchée.

On a ainsi vérifié les conditions (1) et (2) de 2.7 et on a vu dans ce paragraphe qu'elles suffisaient à réaliser le programme de 2.4. Cela valide ce programme sous l'hypothèse (1).

4.6 Définition des termes $\rho_J^{\tilde{G}}$ et $\sigma_J^{\tilde{G}}$, deuxième cas

On fixe encore $\eta \in \mathcal{O}$ avec M_η quasi-déployé et on suppose maintenant que $A_{M_\eta} = A_M$.

Du système de fonctions B se déduit une fonction B_η sur le système de racines de G_η. Pour simplifier, on note encore B cette fonction. L'égalité $A_M = A_{M_\eta}$ identifie les racines de A_{M_η} dans G_η à des racines de A_M dans G. Si $A_G \subsetneq A_{G_\eta}$, l'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ est vide et on n'a rien à démontrer. Supposons $A_G = A_{G_\eta}$. Alors les deux ensembles $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ et $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}(B)$ s'identifient. Les deux espaces U_J possibles associés à un élément J de cet ensemble s'identifient par l'égalité $A_M = A_{M_\eta}$. Soient $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$. Grâce au lemme 4.3(i), on écrit

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{y \in \dot{\mathcal{X}}(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}[y]),$$

avec $\boldsymbol{\gamma}[y] \in D_{tr-unip}(M_{\eta[y]}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{\eta[y]}(\mathbb{R}))^*$. On pose

$$(1) \qquad \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{X}}(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y])).$$

Les éléments $\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y])$ ne sont définis que modulo l'annulateur $Ann_{unip}^{G_{\eta[y]}}$ de l'application d'induction de $M_{\eta(y]}$ à $G_{\eta[y]}$. Il est clair que $desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}$ envoie cet annulateur dans $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$ de l'application d'induction de $\tilde{M}$ à $\tilde{G}$. L'élément $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma})$ est donc bien défini dans

$$U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}.$$

La définition ne dépend pas des choix faits. En effet, pour $y \in \dot{\mathcal{X}}(\eta)$, notons p_y la projection de 4.2(1) relative à $\eta[y]$. Puisque $desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ p_y = desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}$, on peut remplacer $desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}$ par $desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ p_y$ dans les égalités précédentes. On a déjà dit que $\rho_J^{G_{\eta[y]}}$ était équivariant par p_y, c'est-à-dire que

$$p_y(\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y])) = \rho_J^{G_{\eta[y]}}(p_y(\boldsymbol{\gamma}[y])).$$

L'élément $p_y(\boldsymbol{\gamma}[y])$ est uniquement déterminé et appartient à $D_{tr-unip}(M_{\eta[y]}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{\eta[y]}(\mathbb{R}))^*$. Cela prouve que la formule (1) ne dépend pas des choix de $\boldsymbol{\gamma}[y]$. De même, changer l'ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}(\eta)$ revient à transporter les distributions $\boldsymbol{\gamma}[y]$ par des isomorphismes, ce qui ne modifie pas le résultat.

On va montrer que l'application $\rho_J^{\tilde{G}}$ ainsi définie vérifie les conditions (1) et (3) de 2.4, c'est-à-dire

(2) cette définition coïncide avec celle de [II] 3.4 pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$;

(3) soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M})$ avec $M' \neq M$; soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ correspondant à $\mathcal{O}$; soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$; alors $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}))$.

Dans la situation de (2), on peut choisir des $\boldsymbol{\gamma}[y] \in D_{orb,unip}(M_{\eta[y]}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_{\eta[y]}(\mathbb{R}))^*$. La preuve est alors la même qu'en [III] 4.1.

Dans la situation de (3), fixons $\epsilon \in \mathcal{O}'$ avec M'_ϵ quasi-déployé. On fixe un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$ d'espaces ambiants $\tilde{M}'$ et $\tilde{M}$. On a $A_M = A_{M'}$ par ellipticité et on suppose d'abord

(4) $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$.

On fixe des données auxiliaires M'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{M}'$ et un élément $\epsilon_1 \in \tilde{M}'_1(\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ. Grâce au lemme 4.3(ii), on peut fixer $\boldsymbol{\delta}_\epsilon \in D_{tr-unip}^{st}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M'_\epsilon(\mathbb{R}))^*$ de sorte que

$$\boldsymbol{\delta} = desc_{\epsilon_1}^{st,\tilde{M}'_1,*}(\boldsymbol{\delta}_\epsilon).$$

Remarquons qu'on peut identifier un voisinage stablement invariant de 1 dans $M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R})$ à un tel voisinage de 1 dans le produit $C_1(\mathbb{R}) \times M'_\epsilon(\mathbb{R})$. Ainsi $D_{tr-unip}^{st}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}) \otimes Mes(M'_\epsilon(\mathbb{R}))^*$ s'identifie à $D_{tr-unip}^{st}(M'_\epsilon(\mathbb{R}) \otimes Mes(M'_\epsilon(\mathbb{R}))^*$. On a expliqué en 4.1 que les résultats de la section 5 de [III] valaient, mutatis mutandis, sur notre corps de base réel. On peut alors reprendre la preuve de [III] 7.1. Dans notre situation quasi-déployée et à torsion intérieure, les constructions se simplifient. Le groupe M'_ϵ apparaît comme le groupe de la donnée endoscopique $\bar{\mathbf{M}}'$ de cette référence. On n'a plus besoin de passer aux revêtements simplement connexes des groupes dérivés. On obtient les formules parallèles

$$transfert(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ transfert_y(\boldsymbol{\delta}_\epsilon),$$

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\rho_J^{G_{\eta[y]},\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{M}}',\boldsymbol{\delta}_\epsilon,a))$$

pour tout $a\in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. D'après 2.4(3) qui est déjà prouvé pour le groupe $G_{\eta[y]}$ (puisqu'il n'est pas tordu), on a

$$\rho_J^{G_{\eta[y]},\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{M}}',\boldsymbol{\delta}_\epsilon,a)=\rho_J^{G_{\eta[y]}}(transfert_y(\boldsymbol{\delta}_\epsilon),a)$$

pour tout y. On a une application surjective $p:\dot{\mathcal{Y}}^M(\eta)\to\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)$ et on peut supposer nos systèmes de représentants choisis de sorte que $\eta[y]$ soit constant sur les fibres. Pour $y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)$, posons

$$\boldsymbol{\gamma}[y]=\sum_{y'\in p^{-1}(y)}transfert_{y'}(\boldsymbol{\delta}_\epsilon).$$

Les formules ci–dessus se récrivent

$$transfert(\boldsymbol{\delta})=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}[y])$$

et

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y],a)).$$

Il suffit d'appliquer la définition (1) pour conclure à l'égalité $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta})=\rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}))$. Cela prouve (3) sous l'hypothèse (4).

Supposons maintenant $A_{M'_\epsilon}\neq A_{M'}$. On introduit l'espace de Levi $\tilde{R}'$ de $\tilde{M}'$ tel que $A_{M'_\epsilon}=A_{R'}$. C'est l'espace d'une donnée endoscopique elliptique d'un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ contenant η. On note $\mathcal{O}'_{\tilde{R}'}$ la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_{\tilde{R}}$ celle de η dans $\tilde{R}(\mathbb{R})$. Appliquant le lemme 4.4, on peut fixer $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}\in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{R}',\mathcal{O}'_{\tilde{R}'})\otimes Mes(R'(\mathbb{R}))^*$ de sorte que $\boldsymbol{\delta}=(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'})^{\mathbf{M}'}$. On applique l'analogue de 2.5(8) qui est valide puisque $M'\neq M$:

$$(5)\qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R}),J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'},a)^{\tilde{M}}.$$

Fixons $\tilde{L}$ apparaissant ci-dessus. Par récurrence, on peut supposer que

$$\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'},a)=\rho_J^{\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}),a)).$$

On a les relations $A_R\subset A_{R_\eta}\subset A_{R'_\epsilon}=A_{R'}=A_R$. Donc $A_R=A_{R_\eta}$. On est donc dans la situation de départ, avec $\tilde{G}$ et $\tilde{M}$ remplacés par $\tilde{L}$ et $\tilde{R}$. Ecrivons

$$(6)\qquad transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'})=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{R},*}(\boldsymbol{\gamma}[y]).$$

On peut supposer que $\rho_J^{\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'},a))$ est donné par l'analogue de la formule (1), à savoir

$$\rho_J^{\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}),a)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{R},*}(\rho_J^{L_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y],a)).$$

D'où par induction

$$\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'},a)^{\tilde{M}}=\rho_J^{\tilde{L}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}),a)^{\tilde{M}}=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\rho_J^{L_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y],a)^{M_{\eta[y]}}).$$

Revenant à la formule (5), on obtient

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(X_J[y]),$$

où

$$X_J[y]=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R}),J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\rho_J^{L_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y],a)^{M_{\eta[y]}}.$$

Notons E l'ensemble des $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})$ tels que $J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})$ et $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\neq 0$. Fixons $y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)$. Notons $E_{\eta[y]}$ l'ensemble des $L'\in\mathcal{L}^{G_{\eta[y]}}(R_{\eta[y]})$ tels que $J\in\mathcal{J}_{R_{\eta[y]}}^{L'}(B)$ et $d_{R_{\eta[y]}}^{G_{\eta[y]}}(M_{\eta[y]},L')\neq 0$. Montrons que

(7) l'application $\tilde{L}\mapsto L_{\eta[y]}$ se restreint en une bijection de E sur $E_{\eta[y]}$; pour $\tilde{L}\in E$, on a l'égalité $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})=d_{R_{\eta[y]}}^{G_{\eta[y]}}(M_{\eta[y]},L_{\eta[y]})$.

On ne perd rien à supposer $y=1$ (on n'utilisera pas ici le fait que G_η est quasi-déployé). Comme on l'a dit plus haut, le fait que $\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})$ soit non-vide implique que $A_{L_\eta}=A_L$ et que $\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}})=\mathcal{J}_{R_\eta}^{L_\eta}(B)$. Si $\tilde{L}\in E$, on a donc $J\in\mathcal{J}_{R_\eta}^{L_\eta}(B)$ et les égalités $\mathcal{A}_S=\mathcal{A}_{S_\eta}$ pour $S=G,M,L,R$. Il en résulte que $d_{R_\eta}^{G_\eta}(M_\eta,L_\eta)=d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\neq 0$. Donc $L_\eta\in E_\eta$. Notons que l'égalité précédente est la dernière assertion de (7). L'égalité $A_{L_\eta}=A_L$ implique que $\tilde{L}$ est uniquement déterminé par L_η. Réciproquement, pour $L'\in E_\eta$, on définit $\tilde{L}$ par l'égalité $A_L=A_{L'}$ et des arguments analogues montrent que $\tilde{L}\in E$. Cela prouve (7).

Grâce à (8), on peut récrire

$$X_J[y]=\sum_{L'\in\mathcal{L}^{G_{\eta[y]}}(R_{\eta[y]}),J\in\mathcal{J}_{R_{\eta[y]}}^{L'}(B)}d_{R_{\eta[y]}}^{G_{\eta[y]}}(M_{\eta[y]},L')\rho_J^{L'}(\boldsymbol{\gamma}[y],a)^{M_{\eta[y]}}.$$

En vertu de la formule de descente 2.4(7) déjà prouvée pour le groupe $G_{\eta[y]}$, on obtient

$$X_J[y]=\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y]^{M_{\eta[y]}},a),$$

d'où

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y]^{M_{\eta[y]}},a)).$$

Par induction, la formule (6) donne

$$transfert(\boldsymbol{\delta})=(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}))^{\tilde{M}}=\sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)}desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}[y]^{M_{\eta[y]}}).$$

Il y a une application naturelle de $\dot{\mathcal{X}}^R(\eta)$ dans $\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)$: à un élément y' du premier ensemble, on associe l'unique élément y du second tel que les points $\eta[y']$ et $\eta[y]$ soient conjugués par un élément de $M(\mathbb{R})$. En fixant une telle conjugaison, on peut identifier

$\boldsymbol{\gamma}[y']^{M_{\eta[y']}}$ à un élément de $D_{tr-orb}(M_{\eta[y]}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_{\eta[y]}(\mathbb{R}))^*$. En notant $\boldsymbol{\gamma}[y]$ la somme des $\boldsymbol{\gamma}[y']^{M_{\eta[y']}}$ sur les éléments y' s'envoyant sur y, on obtient

$$transfert(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}[y])$$

et

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{X}}^M(\eta)} desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}(\rho_J^{G_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\gamma}[y],a)).$$

Mais alors, la définition (1) conduit à l'égalité

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}),a).$$

Cela achève la preuve de (3).

On définit l'application $\sigma_J^{\tilde{G}}$ par la formule 2.4(13). Soit $\boldsymbol{\delta}\in D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. D'après le lemme 4.3 (ii), on peut choisir $\boldsymbol{\delta}_\eta\in D_{tr-unip}^{st}(M_\eta(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_\eta(\mathbb{R}))^*$ de sorte que $\boldsymbol{\delta} = desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\boldsymbol{\delta}_\eta)$. Pour $a\in A_M(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on a

$$(9)\qquad \sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a) = e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\sigma_J^{G_\eta}(\boldsymbol{\delta}_\eta,a)),$$

cf. [III] 4.3 pour la définition de $e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)$. Cela se prouve comme en [III] 7.3, à partir de la formule de descente déjà prouvée pour le terme $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a)$. La formule (9) implique que $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a)$ est stable modulo $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$.

On a ainsi vérifié les conditions (1) et (2) de 2.7. Elles impliquent la validité du programme de 2.4.

5 Extension des définitions, cas général

5.1 Un résultat complémentaire pour l'endoscopie non standard

On considère ici un triplet endoscopique non standard (G_1,G_2,j_*), cf. [III] 6.1 dont on reprend les notations. Rappelons qu'il y a une correspondance bijective entre classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}_1(\mathbb{R})$ et classes de conjugaison stable semi-simples dans $\mathfrak{g}_2(\mathbb{R})$. De cette correspondance résulte un isomorphisme

$$SI(\mathfrak{g}_1(\mathbb{R}))\otimes Mes(G_1(\mathbb{R}))\simeq SI(\mathfrak{g}_2(\mathbb{R}))\otimes Mes(G_2(\mathbb{R}))^*.$$

En effet, les espaces $SI(\mathfrak{g}_i(\mathbb{R}))$ sont décrits par Shelstad (celle-ci traite le cas des groupes mais la description vaut a fortiori pour les algèbres de Lie). Le point essentiel de cette descrition sont les conditions de saut. Mais celles-ci sont insensibles au remplacement d'une racine par un multiple réel (ici rationnel) de cette racine. L'assertion ci-dessus s'ensuit.

Soient M_1 et M_2 des Levi de G_1 et G_2 qui se correspondent. En remplaçant ci-dessus G_1 et G_2 par M_1 et M_2, puis en dualisant, on obtient un isomorphisme

$$(1)\qquad D_{géom}^{st}(\mathfrak{m}_1(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_1(\mathbb{R}))^*\simeq D_{géom}^{st}(\mathfrak{m}_2(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_2(\mathbb{R}))^*.$$

En le restreignant aux distributions à support nilpotent, puis en passant aux groupes par l'exponentielle, on obtient un isomorphisme

$$(2) \qquad D^{st}_{unip}(M_1(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_1(\mathbb{R}))^*\simeq D^{st}_{unip}(M_2(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_2(\mathbb{R}))^*.$$

En reprenant la preuve du lemme [II] 3.1, on voit que cet isomorphisme envoie $Ann^{G_1,st}_{unip}$ sur $Ann^{G_2,st}_{unip}$.

On impose

(3) la fonction b (cf. [III] 6.1) est constante sur l'ensemble de racines $\Sigma^{M_2}(T_2)$.

Montrons que

(4) sous l'hypothèse (3), l'isomorphisme (2) se restreint en un isomorphisme

$$D^{st}_{tr-unip}(M_1(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_1(\mathbb{R}))^*\simeq D^{st}_{tr-unip}(M_2(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_2(\mathbb{R}))^*.$$

L'hypothèse (3) entraîne que les revêtements simplement connexes des groupes dérivés de M_1 et M_2 sont isomorphes. Notons M_{SC} ce revêtement commun et notons $\underline{b}$ la valeur constante de b sur $\Sigma^{M_2}(T_2)$. L'automorphisme $X\mapsto \underline{b}X$ de $\mathfrak{m}_{SC}$ induit un automorphisme $\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma}[\underline{b}]$ de $D^{st}_{nil}(\mathfrak{m}_{SC}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$, qui se relève en un automorphisme de $D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$ noté de la même façon. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D^{st}_{unip}(M_1(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_1(\mathbb{R}))^* & \simeq & D^{st}_{unip}(M_2(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_2(\mathbb{R}))^* \\ \iota^*_{M_{SC},M_1}\uparrow & & \uparrow\iota^*_{M_{SC},M_2} \\ D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^* & \overset{\gamma\mapsto\gamma[\underline{b}]}{\to} & D^{st}_{unip}(M_{SC}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*. \end{array}$$

D'après le lemme 3.3, les applications $\iota^*_{M_{SC},M_i}$ pour $i=1,2$ deviennent des isomorphismes quand on remplace les espaces D^{st}_{unip} par les espaces $D^{st}_{tr-unip}$. Il suffit donc de prouver que l'espace $D^{st}_{tr-unip}(M_{SC}(\mathbb{R}))\otimes Mes(M_{SC}(\mathbb{R}))^*$ est stable par l'application $\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma}[\underline{b}]$. Plus généralement, considérons un groupe réductif connexe G sur $\mathbb{R}$ et un réel non nul r. On définit comme ci-dessus l'automorphisme $\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma}[r]$ de $D_{unip}(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. On montre que

(5) l'espace $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$ est invariant par cet automorphisme ;

(6) si G est quasi-déployé, $D^{st}_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$ est invariant par cet automorphisme.

Puisque l'automorphisme respecte clairement la stabilité, (6) résulte de (5). Il est clair que l'espace $D_{orb,unip}(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$ est invariant par l'automorphisme. Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de G, avec $G'\neq G$. Soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}')\otimes Mes(G'(\mathbb{R}))^*$, posons $\boldsymbol{\gamma}=transfert(\boldsymbol{\delta})$. On doit prouver que $\boldsymbol{\gamma}[r]$ appartient à $D_{tr-unip}(G(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Comme dans la preuve de [III] 6.7, on montre qu'il existe une constante $c(r)\neq 0$ telle que $\boldsymbol{\gamma}[r]=c(r)transfert(\boldsymbol{\delta}[r])$. En utilisant (6) par récurrence, on a $\boldsymbol{\delta}[r]\in D^{st}_{tr-unip}(\mathbf{G}')\otimes Mes(G'(\mathbb{R}))^*$, d'où la conclusion. Cela prouve (5) et (4).

Supposons que le triplet (G_1,G_2,j_*) est équivalent à un triplet quasi-élémentaire. Notons $(G_{0,1},G_{0,2},j_{0*})$ le triplet élémentaire sur $F_0=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que (G_1,G_2,j_*) soit équivalent au triplet déduit de $(G_{0,1},G_{0,2},j_{0*})$ par restriction des scalaires de F_0 à $\mathbb{R}$. Aux Levi M_1 et M_2 sont associés des Levi $M_{0,1}$ et $M_{0,2}$ de $G_{0,1}$ et $G_{0,2}$. Supposons l'une des conditions suivantes vérifiée :

(7) $(G_{0,1},G_{0,2},j_{0*})$ est du type (1) de [III] 6.1 ;

(8) $(G_{0,1},G_{0,2},j_{0,*})$ est de l'un des types (2) ou (3) de [III] 6.1 ; pour $i=1,2$, si $G_{0,i}$ est de type B_n, resp. C_n, les éléments de $\Sigma^{M_{0,i}}(T_{0,i})$ sont des racines longues, resp. courtes.

Chacune de ces conditions implique (3). La condition (8) implique que le groupe M_{SC} défini ci-dessus est isomorphe à un produit de groupes $SL_k(\mathbb{R})$ si $F_0 = \mathbb{R}$, de groupes $SL_k(\mathbb{C})$ si $F_0 = \mathbb{C}$.

Soient B_1 et B_2 des fonctions comme en [III] 6.4, vérifiant toutes deux les hypothèses de [II] 1.8. On a alors un lemme similaire à [III] 6.5.

Lemme. *On suppose vérifiée l'une des conditions (7) ou (8). Pour $i = 1, 2$, soient $J_i \in \mathcal{J}_{M_i}^{G_i}(B_i)$ et $\boldsymbol{\delta}_i \in D_{tr-unip}^{st}(M_i(\mathbb{R})) \otimes Mes(M_i(\mathbb{R}))^*$. On suppose que J_1 et J_2 se correspondent par la bijection entre les ensembles $\Sigma(A_{M_i}, B_i)$ et que $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$ se correspondent par l'isomorphisme (4) ci-dessus. Alors, pour tout $X_1 \in \mathfrak{a}_{M_1}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 0, les éléments $\sigma_{J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, exp(X_1))$ et $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}\sigma_{J_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, exp(j_*(X_1)))$ se correspondent par l'isomorphisme (4).*

Ce lemme sera démontré sous hypothèses en 5.7. Il faut l'inclure dans notre schéma de récurrence. On a défini l'entier $N(G_1, G_2, j_*)$ en [III] 6.1. Rappelons que (G_2, G_1, j_*^{-1}) est aussi un triplet quasi-élémentaire. On pose

$$N^{max}(G_1, G_2, j_*) = sup(N(G_1, G_2, j_*), N(G_2, G_1, j_*^{-1})).$$

Plus simplement, si (7) est vérifiée, $N^{max}(G_1, G_2, j_*) = 0$. Si (8) est vérifiée et que les systèmes de racines de $G_{0,1}$ et $G_{0,2}$ sont de type B_n ou C_n, on a $N^{max}(G_1, G_2, j_*) = [F_0 : \mathbb{R}](4n^2 - 1)$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour démontrer le lemme relativement à un triplet tel que $N^{max}(G_1, G_2, j_*) = N$, on le suppose vérifié pour tout triplet (G_1', G_2', j_*') vérifiant des conditions similaires et tel que $N^{max}(G_1', G_2', j_*') < N$. On suppose aussi vérifiés tous nos résultats concernant des triplets $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ tels que $dim(G_{SC}) \leq N$. Par ailleurs, pour démontrer un résultat concernant un tel triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ tel que $dim(G_{SC}) = N$, on suppose le lemme ci-dessus vérifié pour tout triplet (G_1, G_2, j_*) comme ci-dessus tel que $N^{max}(G_1, G_2, j_*) < N$.

On a

(9) supposons le lemme vérifié dans le cas où les trois conditions suivantes sont satisfaites : (G_1, G_2, j_*) est quasi-élémentaire, (8) est vérifiée et B_1 est constante de valeur 1 ; alors le lemme est vérifié.

Preuve. Comme en [III] 6.7, on montre que l'assertion du lemme est insensible à la multiplication de j_*, B_1 ou B_2 par des constantes. Cela nous ramène au cas où (G_1, G_2, j_*) est quasi-élémentaire. Si (7) est vérifié, j_* provient d'un isomorphisme de G_1 sur G_2 et l'assertion est tautologique. Si (8) est vérifiée, on voit que l'une des fonctions B_1 ou B_2 est constante. Il est clair que le lemme pour (G_1, G_2, j_*) est équivalent à celui pour (G_2, G_1, j_*^{-1}). Quitte à échanger ces deux triplets et à multiplier nos fonctions par des constantes, on peut donc supposer B_1 constante de valeur 1. Cela prouve (9).

5.2 Réalisation conditionnelle du programme de 2.4

On considère un K-triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$, un K-espace de Levi $K\tilde{M} \in \mathcal{L}(K\tilde{M}_0)$ et une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. On va réaliser le programme fixé en 2.4 sous l'hypothèse (Hyp) de 2.5, que l'on rappelle :

(Hyp) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(K\tilde{M}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ dont le support est formé d'éléments fortement $\tilde{G}$-réguliers et pour tout $\mathbf{f} \in I(K\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, on a

l'égalité

$$I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}).$$

Ecrivons $K\tilde{G} = (\tilde{G}_p)_{p\in\Pi}$, $K\tilde{M} = (\tilde{M}_p)_{p\in\Pi^M}$. Soit $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$. Pour $p \in \Pi^M$, on peut identifier J à un élément de $\mathcal{J}_{\tilde{M}_p}^{\tilde{G}_p}$. En [II] 3.1, on a associé à J un sous-groupe $G_{p,J} \subset G_p$ et un sous-espace tordu $\tilde{G}_{p,J} \subset \tilde{G}_p$, qui contiennent respectivement M_p et $\tilde{M}_p$. On voit que la collection $(\tilde{G}_{p,J})_{p\in\Pi^M}$ s'étend en un K-espace tordu $K\tilde{G}_J = (\tilde{G}_{p,J})_{p\in\Pi_J}$, dont $K\tilde{M}$ est un K-espace de Levi. Signalons que, parce qu'on se s'intéressera qu'à des distributions induites à partir de $K\tilde{M}$, les composantes $\tilde{G}_{p,J}$ pour $p \in \Pi_J - \Pi^M$ ne joueront aucun rôle.

Soient $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. On définit comme en [II] 3.2 le terme

$$\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a) \in (D_{géom}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}}.$$

Comme dans ce paragraphe, c'est l'image de $\rho_J^{K\tilde{G}_J}(\boldsymbol{\gamma},a)$ par l'application naturelle

$$(1) \qquad (D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}_J} \to (D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{K\tilde{G}}.$$

Soit $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$, elliptique et relevante, soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ corespondant à $\mathcal{O}$ et soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{M}',\mathcal{O}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$. Pour a comme ci-dessus, on définit $\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ comme en 2.4.

Proposition. *Le terme $\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ est l'image de $\rho_J^{K\tilde{G}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ par l'application (1).*

Cela sera prouvé dans les paragraphes 5.3 et 5.5.

Admettons ce résultat. On va vérifier la condition 2.5(4). Soit donc $J \in \mathcal{J}_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ un élément non-maximal. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$. On l'écrit

$$(2) \qquad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_{orb} + \sum_{i=1,\dots,n} transfert(\boldsymbol{\delta}_i)$$

comme en 2.5(1). On pose

$$\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a) = \rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_{orb},a) + \sum_{i=1,\dots,n} \rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}_i',\boldsymbol{\delta}_i,a).$$

On doit prouver que cette expression ne dépend pas de la décomposition (2). D'après ce que l'on a dit ci-dessus pour $\boldsymbol{\gamma}_{orb}$ et d'après la proposition pour les autres termes, $\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a)$ est l'image de

$$\rho_J^{K\tilde{G}_J}(\boldsymbol{\gamma}_{orb},a) + \sum_{i=1,\dots,n} \rho_J^{K\tilde{G}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}_i',\boldsymbol{\delta}_i,a)$$

par l'application (1). Or $dim(G_{J,SC}) < dim(G_{SC})$ puisque J n'est pas maximal. Par récurrence, l'expression ci-dessus ne dépend pas de la décomposition (1) : elle vaut $\rho_J^{K\tilde{G}_J}(\boldsymbol{\gamma},a)$. Il en est donc de même de $\rho_J^{K\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a)$. Cela prouve 2.5(4). Comme on l'a vu en 2.5, cette relation suffit, sous l'hypothèse (Hyp), pour valider le programme de 2.4.

5.3 Preuve de la proposition 5.2, premier cas

On fixe $\mathbf{M}'$, $\mathcal{O}'$, $\boldsymbol{\delta}$ comme dans cette proposition. Pour simplifier, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes qui apparaissent, afin de se débarrasser des espaces de mesures. On fixe un élément $\epsilon \in \mathcal{O}'$ tel que M'_ϵ soit quasi-déployé et un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$ joignant ϵ à un élément $\eta \in \mathcal{O}$. L'élément η appartient à une composante $\tilde{M}_p(\mathbb{R})$ de $K\tilde{M}(\mathbb{R})$. Fixons des données auxiliaires M'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{M}'$ et un élément $\epsilon_1 \in \tilde{M}'_1(\mathbb{R})$ au-dessus de ϵ. On note $\mathcal{O}'_1$ la classe de conjugaison stable de ϵ_1 dans $\tilde{M}'_1(\mathbb{R})$. On peut identifier $\boldsymbol{\delta}$ à un élément $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{tr-orb,\lambda_1}(\mathcal{O}'_1)$. Supposons d'abord

(1) $A_{M'_\epsilon} \neq A_{M'}$.

Notons $\tilde{R}'$ le commutant de $A_{M'_\epsilon}$ dans $\tilde{M}'$ et $\mathcal{O}_{\tilde{R}'}$ la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{R}'(\mathbb{R})$. On note $\tilde{R}'_1$ l'image réciproque de $\tilde{R}'$ dans $\tilde{M}'_1$ et $\mathcal{O}'_{\tilde{R}'_1}$ la classe de conjugaison stable de ϵ_1 dans $\tilde{R}'_1(\mathbb{R})$. D'après le lemme 4.4, on peut fixer $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{R}'_1} \in D^{st}_{tr-orb,\lambda_1}(\mathcal{O}'_{\tilde{R}'_1})$ de sorte que $\boldsymbol{\delta}_1$ soit l'image de $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{R}'_1}$ par induction de $\tilde{R}'_1$ à $\tilde{M}'_1$. Du diagramme fixé se déduit un homomorphisme $\xi : T^{\theta,0} \to T'$. On note par anticipation $A_{\tilde{R}_p}$ la composante neutre de l'image réciproque de $A_{M'_\epsilon}$ par cet homomorphisme. Dans la composante $\tilde{M}_p$, on a fixé un espace de Levi minimal $\tilde{M}_{p,0}$. Quitte à conjuguer η, on peut supposer $A_{\tilde{R}_p} \subset A_{\tilde{M}_{p,0}}$. On note $\tilde{R}_p$ le commutant de $A_{\tilde{R}_p}$ dans $\tilde{M}_p$. C'est un espace de Levi semi-standard, qui se complète en un K-espace de Levi $K\tilde{R}$. On note $\mathcal{O}_{\tilde{R}}$ la classe de conjugaison stable de η dans $K\tilde{R}(\mathbb{R})$. L'espace $\tilde{R}'$ apparaît comme l'espace endoscopique d'une donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $(KR, K\tilde{R}, \mathbf{a})$. Des données auxiliaires fixées pour $\mathbf{M}'$ se déduisent des données auxiliaires pour $\mathbf{R}'$. On voit que $\boldsymbol{\delta}_{\tilde{R}'_1}$ s'identifie à un élément de $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{R}', \mathcal{O}'_{\tilde{R}'})$ que l'on note $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}$. Pour $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$ et $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1, on a alors la formule d'induction 2.5(8) :

$$(2) \qquad \rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{K\tilde{L} \in \mathcal{L}^{K\tilde{G}}(K\tilde{R}), J \in \mathcal{J}^{K\tilde{L}}_{K\tilde{R}}} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)^{K\tilde{M}}.$$

On a la formule parallèle

$$(3) \qquad \rho_J^{K\tilde{G}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{K\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{K\tilde{G}_J}(K\tilde{R}), J \in \mathcal{J}^{K\tilde{L}'}_{K\tilde{R}}} d^{\tilde{G}_J}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}') \rho_J^{K\tilde{L}',\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)^{K\tilde{M}}.$$

On voit aisément que l'application $K\tilde{L} \mapsto K\tilde{L}_J$ est une bijection de l'ensemble des $K\tilde{L} \in \mathcal{L}^{K\tilde{G}}(K\tilde{R})$ tels que $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{L}}_{K\tilde{R}}$ sur l'ensemble des $K\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{K\tilde{G}_J}(K\tilde{R})$ tels que $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{L}'}_{K\tilde{R}}$. Pour $K\tilde{L}$ dans l'ensemble de départ, on a

$$d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) = d^{\tilde{G}_J}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}_J).$$

En effet, cela résulte des égalités $\mathcal{A}_{\tilde{G}_J} = \mathcal{A}_{\tilde{G}}$, $\mathcal{A}_{\tilde{L}_J} = \mathcal{A}_{\tilde{L}}$. L'hypothèse (1) permet d'appliquer par récurrence la proposition 5.2 à tous les termes apparaissant dans les formules ci-dessus. C'est-à-dire que, pour tout $K\tilde{L}$ intervenant dans (2), $\rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)$ est l'image de $\rho_J^{K\tilde{L}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)$ par l'application

$$D_{géom}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}, \omega)/Ann^{K\tilde{L}_J}_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}} \to D_{géom}(\mathcal{O}_{\tilde{R}}, \omega)/Ann^{K\tilde{L}}_{\mathcal{O}_{\tilde{R}}}.$$

Il en résulte que $\rho_J^{K\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)^{K\tilde{M}}$ est l'image de $\rho_J^{K\tilde{L}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{R}'}, a)^{K\tilde{M}}$ par l'application

$$D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)/Ann^{K\tilde{G}_J}_{\mathcal{O}} \to D_{géom}(\mathcal{O}, \omega)/Ann^{K\tilde{G}}_{\mathcal{O}}.$$

Les formules (2) et (3) entraînent que $\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ est l'image de $\rho_J^{K\tilde{G}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ par la même application. Cela prouve la proposition 5.2 sous l'hypothèse (1).

5.4 Comparaison des espaces $K\tilde{G}$ et $K\tilde{G}_J$

On conserve les mêmes notations qu'au début du paragraphe précédent (mais on n'impose pas l'hypothèse (1) de ce paragraphe). On a noté p l'élément de Π tel que $\eta \in \tilde{M}_p(\mathbb{R})$. Pour simplifier, posons simplement $\tilde{M} = \tilde{M}_p$, $\tilde{G} = \tilde{G}_p$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G de sorte que M soit standard pour (B,T). On peut supposer que $(B\cap M, T)$ est la paire de Borel pour M figurant dans le diagramme fixé en 5.3. On note $\Sigma^G(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$ et $\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$ celui des racines de $A_{\tilde{M}}$ dans $\mathfrak{g}$. On peut considérer que $\Sigma^G(A_{\tilde{M}}) \subset \mathfrak{a}_{\tilde{M}}^*$. On a une application de restriction

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^G(T) & \to & \Sigma^G(A_{\tilde{M}}) \cup \{0\} \\ \alpha & \mapsto & \alpha_{A_{\tilde{M}}} \end{array}$$

Soit $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Cet élément détermine un $\mathbb{Z}$-module R_J de rang $a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ dans $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}^*$. Le groupe G_J est engendré par T et les sous-espaces radiciels associés aux $\alpha \in \Sigma^G(T)$ tels que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$. On note $\Sigma^{G_J}(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}_J$. On a donc $\Sigma^{G_J}(T) \subset \Sigma^G(T)$. La paire $\mathcal{E}$ est munie d'un automorphisme θ. L'ensemble $\Sigma^{G_J}(T)$ est invariant par θ. Posons $B_J = B\cap G_J$. Notons Δ_J l'ensemble des éléments de $\Sigma^{G_J}(T)$ qui sont simples pour l'ordre associé à B_J. Les ensembles Δ et Δ_J contiennent tous deux l'ensemble Δ^M des racines simples de T dans $\mathfrak{m}$ pour l'ordre associé à B^M. Complétons (B_J, T) en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}_J = (B_J, T, (E_{J,\alpha})_{\alpha\in\Delta_J})$ de sorte que $E_{J,\alpha} = E_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta^M$.

Soit $\alpha \in \Sigma^{G_J}(T)$. On voit que, si α est de type 1, resp. 2, en tant qu'élément de $\Sigma^G(T)$, α est encore de type 1, resp. 2, en tant qu'élément de $\Sigma^{G_J}(T)$. Par contre, si α est de type 3 en tant qu'élément de $\Sigma^G(T)$, α peut être de type 1 ou 3 en tant qu'élément de $\Sigma^{G_J}(T)$. En effet, il existe $\beta \in \Sigma^G(T)$ qui est de type 2, de sorte que $\alpha = \beta + \theta^{n_\beta/2}(\beta)$. Si $\beta \in \Sigma^{G_J}(T)$, α reste de type 3 dans $\Sigma^{G_J}(T)$. Si $\beta \notin \Sigma^{G_J}(T)$, α devient de type 1 dans $\Sigma^{G_J}(T)$. Notons $\Sigma_{irr}^{G_J}(T)$ l'ensemble des $\alpha \in \Sigma^{G_J}(T)$ qui sont de type 3 dans $\Sigma^G(T)$ et de type 1 dans $\Sigma^{G_J}(T)$ (l'indice irr évoquant peut-être "irrégulier"). Soient $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ et $e_J \in Z(\tilde{G}_J, \mathcal{E}_J)$. On a $e_J = t_J e$, avec un $t_J \in T$. L'égalité $E_{J,\alpha} = E_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta^M$ entraîne que $t_J \in Z(M)$. Montrons que

(1) pour $\alpha \in \Sigma^{G_J}(T)$, on a $(N\alpha)(t_J) = 1$ si $\alpha \notin \Sigma_{irr}^{G_J}(T)$ et $(N\alpha)(t_J) = -1$ si $\alpha \in \Sigma_{irr}^{G_J}(T)$.

Preuve. Notons $\theta = ad_e$ et $\theta_J = ad_{e_J}$. Ce sont des automorphismes respectivement de G et G_J. Il s'en déduit des automorphismes de $\Sigma^G(T)$ et $\Sigma^{G_J}(T)$. L'automorphisme θ_J de $\Sigma^{G_J}(T)$ est la restriction de l'automorphisme θ de $\Sigma^G(T)$. Soit $\alpha \in \Sigma^{G_J}(T)$, notons comme toujours n_α le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\theta^n(\alpha) = \alpha$ (ou $\theta_J^n(\alpha) = \alpha$, c'est pareil). Soit $\mathfrak{u}_\alpha$ l'espace radiciel associé à α. On sait que θ^{n_α} agit sur $\mathfrak{u}_\alpha$ par 1 si α, vu comme élément de $\Sigma^G(T)$, est de type 1 ou 2, et qu'il agit par -1 si α est de type 3 (cf. [KS] 1.3). Une propriété analogue vaut pour $\theta_J^{n_\alpha}$. On en déduit que $\theta_J^{n_\alpha}$ coïncide avec θ^{n_α} sur $\mathfrak{u}_\alpha$ si $\alpha \notin \Sigma_{irr}^{G_J}(T)$, tandis que $\theta_J^{n_\alpha}$ coïncide avec $-\theta^{n_\alpha}$ sur $\mathfrak{u}_\alpha$ si $\alpha \in \Sigma_{irr}^{G_J}(T)$. Or, par construction, $\theta_J^{n_\alpha}$ coïncide avec $(N\alpha)(t_J)\theta^{n_\alpha}$ sur $\mathfrak{u}_\alpha$. L'assertion (1) s'ensuit.

Passons maintenant aux groupes duaux. On fixe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_{\hat{\alpha}})_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$. Rappelons qu'il y a une bijection $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ entre $\Sigma^G(T)$ et $\Sigma^{\hat{G}}(\hat{T})$. On identifie $\hat{M}$ au Levi standard associé au sous-ensemble Δ^M de Δ. On peut identifier

$\hat{G}_J$ au sous-groupe de $\hat{G}$ engendré par $\hat{T}$ et les sous-espaces radiciels associés aux $\hat{\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma^{G_J}(T)$. On pose $\hat{B}_J = \hat{G}_J \cap \hat{B}$ et on complète $(\hat{B}_J, \hat{T})$ en une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}_J = (\hat{B}_J, \hat{T}, (\hat{E}_{J,\hat{\alpha}})_{\alpha \in \Delta_J})$ de sorte que $\hat{E}_{J,\hat{\alpha}} = \hat{E}_{\hat{\alpha}}$ si $\alpha \in \Delta^M$. On note $\hat{\theta}$ l'automorphisme de $\hat{G}$ associé à θ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$ et $\sigma \mapsto \sigma_G$ l'action galoisienne qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$. On définit de façon similaire l'automorphisme $\hat{\theta}_J$ et l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G_J}$. L'automorphisme $\hat{\theta}_J$ n'est pas en général la restriction de $\hat{\theta}$ à $\hat{G}_J$ car cette restriction n'a pas de raison de respecter l'épinglage de ce groupe. Mais il existe $s_J \in \hat{T}$ tel que $\hat{\theta}_J$ soit la restriction de $ad_{s_J} \circ \hat{\theta}$. L'égalité $\hat{E}_{J,\hat{\alpha}} = \hat{E}_{\hat{\alpha}}$ si $\alpha \in \Delta^M$ entraîne que $s_J \in Z(\hat{M})$. Comme ci-dessus

(2) pour $\alpha \in \Sigma^{G_J}(T)$, on a $(N\hat{\alpha})(s_J) = 1$ si $\alpha \notin \Sigma^{G_J}_{irr}(T)$ et $(N\hat{\alpha})(s_J) = -1$ si $\alpha \in \Sigma^{G_J}_{irr}(T)$.

De même l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G_J}$ n'est pas en général la restriction de $\sigma \mapsto \sigma_G$. Prolongeons ces actions galoisiennes en des actions de $W_{\mathbb{R}}$. La preuve de [II] 1.10(10) montre qu'il existe un cocycle $\chi : W_{\mathbb{R}} \to Z(\hat{M})$ de sorte que w_{G_J} soit la restriction de $ad_{\chi(w)} \circ w_G$ pour tout $w \in W_{\mathbb{R}}$.

Introduisons les espaces tordus $(\hat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}$, $(\hat{G}_J \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}_J$ et $(\hat{M} \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}^M$, où $\hat{\theta}^M$ est la restriction commune de $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}_J$ à $\hat{M}$. Il n'y a pas en général de plongement d'espaces tordus

$$(\hat{G}_J \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}_J \to (\hat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}.$$

On a toutefois deux plongements

$$\begin{array}{ccc} & & (\hat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta} \\ & \nearrow & \\ (\hat{M} \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}^M & & \\ & \searrow & \\ & & (\hat{G}_J \rtimes W_{\mathbb{R}})\hat{\theta}_J \end{array}$$

Les restrictions à $\hat{T}$ de $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}_J$ et $\hat{\theta}^M$ coïncident. Pour simplifier, nous noterons $\hat{\theta}$ cette restriction.

5.5 Preuve de la proposition 5.2, deuxième cas

On conserve les notations de 5.3, on suppose maintenant

(1) $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$.

Rappelons que $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$. On peut supposer $\tilde{\zeta} = \zeta\hat{\theta}^M$, avec $\zeta \in \hat{T}$. Soient $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$ et $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ en position générale et proche de 1. Par définition

$$(2) \qquad \rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s\hat{\theta}))$$

$$\sum_{J' \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'(s\hat{\theta})}_{\tilde{M}'}(B); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s\hat{\theta})}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))),$$

$$(3) \qquad \rho_J^{K\tilde{G}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{t \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}_J, \tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J))$$

$$\sum_{J' \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J)}_{\tilde{M}'}(B_J); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'_J(t\hat{\theta}_J)}(\boldsymbol{\delta}, a)).$$

Pour simplifier, on a noté uniformément B les fonctions $B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'}$ qui interviennent dans la première somme et B_J les analogues de la deuxième somme. Rappelons que les sommes en J' sont vides ou réduites à un seul élément.

Soit $s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. Introduisons le système de racines $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T')$ de $G'(s\hat{\theta})_\epsilon$ relativement au tore T'. Comme en [II] 1.8, on note $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T',B)$ l'ensemble des $B(\beta)^{-1}\beta$ pour $\beta \in \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T')$. Un élément β de $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T')$ ou de $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T',B)$ peut s'identifier à un élément de $\mathfrak{t}^{\theta,*}$ via l'isomorphisme $\xi : \mathfrak{t}^\theta \to \mathfrak{t}'$. Notons $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T',B)$ le sous-ensemble des $\beta \in \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T',B)$ tels que $\beta_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$. Notons $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T')$ le sous-ensemble des $\beta \in \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T')$ tels que $B(\beta)^{-1}\beta \in \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T',B)$. Par définition, il existe $J' \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'(s\hat{\theta})}_{\tilde{M}'}(B)$ tel que $J' \mapsto J$ si et seulement s'il existe $\beta_1,...,\beta_n \in \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T',B)$, de sorte $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ et que la famille $(\beta_{i,A_{\tilde{M}}})_{i=1,...,n}$ engendre R_J. Cette description entraîne

(4) supposons qu'il existe $J' \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'(s\hat{\theta})}_{\tilde{M}'}(B)$ tel que $J' \mapsto J$; alors $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ est elliptique.

En effet, pour une famille $(\beta_i)_{i=1,...,n}$ comme ci-dessus, la famille $(\beta_{i,A_{\tilde{M}}})_{i=1,...,n}$ est linéairement indépendante, donc les restrictions à $\mathfrak{a}_{M'_\epsilon}$ des β_i sont linéairement indépendantes. A fortiori, $a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}} = n \leq a_{M'_\epsilon} - a_{G'(s\hat{\theta})}$. Par l'hypothèse (1) et l'ellipticité de $\mathbf{M}'$, on a $a_{M'_\epsilon} = a_{\tilde{M}}$, d'où $a_{G'(s\hat{\theta})} \leq a_{\tilde{G}}$. Cette inégalité est forcément une égalité, donc $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ est elliptique.

Supposons qu'il existe $J' \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'(s\hat{\theta})}_{\tilde{M}'}(B)$ tel que $J' \mapsto J$. Soit J_s l'unique élément qui s'envoie sur J, introduisons le groupe $G'(s\hat{\theta})_{\epsilon,J_s}$ comme en [II] 3.3. On a alors $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T') = \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_{\epsilon,J_s}}(T')$.

Notons t l'image de s par l'application naturelle

$$\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} \to \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}.$$

Par analogie avec ce qui précède, on définit les ensembles $\Sigma^{G'_J(t\hat{\theta}_J)_\epsilon}(T')$ et $\Sigma^{G'_J(t\hat{\theta}_J)_\epsilon}(T',B_J)$. Montrons que

(5) on a l'égalité $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T',B) = \Sigma^{G'_J(t\hat{\theta}_J)_\epsilon}(T',B_J)$.

On doit une fois de plus rappeler la description du système de racines $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon}(T')$ ainsi que la description de la fonction B. On écrit $\eta = \nu e$, avec $\nu \in T$ et $e \in \mathcal{Z}(\tilde{G},\mathcal{E})$. D'après [W2] 3.3 et [II] 1.11, le système de racines est la réunion des ensembles suivants

(a) les $N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ de type 1 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$; on a $B(N\alpha) = n_\alpha$;

(b) les $2N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$; on a $B(2N\alpha) = 2n_\alpha$;

(c) les $2N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu) = -1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$; on a $B(2N\alpha) = n_\alpha$;

(d) les $N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ de type 3 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = -1$; on a $B(N\alpha) = 2n_\alpha$.

Evidemment, les α parcourent ici les orbites dans $\Sigma^G(T)$ pour l'action du groupe d'automorphismes engendré par θ. Rappelons qu'à tout α_2 de type 2 est associé une racine $\alpha_3 = \alpha_2 + \theta^{n_{\alpha_2}/2}(\alpha_2)$ de type 3. On a $N\alpha_2 = N\alpha_3$, $N\hat{\alpha}_2 = N\hat{\alpha}_3$ mais $n_{\alpha_2} = 2n_{\alpha_3}$. Cette correspondance se quotiente en une bijection entre orbites de type 2 et orbites de type (3). Ainsi, les cas (c) et (d) peuvent être remplacés par

(c') les $2N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ de type 3 tels que $N\alpha(\nu) = -1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$; on a $B(2N\alpha) = 2n_\alpha$;

(d') les $N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = -1$; on a $B(N\alpha) = n_\alpha$.

Pour tout $\alpha \in \Sigma^G(T)$, notons α_{res} sa restriction à $\mathfrak{t}^\theta$. Pour $\beta = N\alpha$, l'élément $n_\alpha^{-1}\beta$ coïncide avec α_{res} comme forme linéaire sur $\mathfrak{t}^\theta$. De même, pour $\beta = 2N\alpha$, l'élément $(2n_\alpha)^{-1}\beta$ coïncide avec α_{res}. Dire que la restriction à $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$ appartient à R_J revient à dire que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$. On voit alors que le système $\Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T', B)$ est formé des α_{res} pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ tel que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$ et tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée

(e) α de type 1, $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$;

(f) α de type 2, $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = \pm 1$;

(g) α de type 3, $N\alpha(\nu) = -1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$.

L'ensemble $\Sigma^{G'_J(t\hat{\theta}_J)_\epsilon}(T')$ se décrit par des conditions analogues à (a), (b), (c'), (d'). Le système $\Sigma^G(T)$ doit être remplacé par $\Sigma^{G_J}(T)$, c'est-à-dire le sous-ensemble des $\alpha \in \Sigma^G(T)$ tels que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$. Les types 1, 2 et 3 sont relatifs à ce système et, pour les distinguer des précédents, on note ces types 1_J, 2_J et 3_J. Le terme s ne change pas. Par contre, l'écriture $\eta = \nu e$ est remplacée par $\eta = \nu_J e_J$, avec $\nu_J \in T$ et $e_J \in \mathcal{Z}(\tilde{G}_J, \mathcal{E}_J)$. On a $\nu_J = \nu t_J^{-1}$, où t_J vérifie 5.4(1). Le calcul se poursuit et on obtient que $\Sigma^{G'_J(t\hat{\theta}_J)_\epsilon}(T', B_J)$ est formé des α_{res} pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$ tel que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$ et tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée

$(e)_J$ α de type 1_J, $N\alpha(t_J^{-1}\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$;

$(f)_J$ α de type 2_J, $N\alpha(t_J^{-1}\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = \pm 1$;

$(g)_J$ α de type 3_J, $N\alpha(t_J^{-1}\nu) = -1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$.

Soit $\alpha \in \Sigma^G(T)$ tel que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$. Supposons d'abord que son type soit le même dans $\Sigma^G(T)$ et dans $\Sigma^{G_J}(T)$. D'après 5.4(1), on a $N\alpha(t_J) = 1$. Les conditions (e), (f) , (g) sont alors respectivement équivalentes à $(e)_J$, $(f)_J$, $(g)_J$. Supposons maintenant que le type de α change. On a vu qu'alors α est de type (3) et de type $(1)_J$. D'après 5.4(1), on a $N\alpha(t_J) = -1$. Mais alors, les conditions (g) et $(e)_J$ (qui sont les seules pouvant concerner α) sont équivalentes. Cela prouve l'égalité (5).

Notons $\mathcal{Z}$ l'ensemble des $s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ tels que $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s\hat{\theta})) \neq 0$ (c'est-à-dire que $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ est elliptique) et qu'il existe $J' \in \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(s\hat{\theta})}(B)$ tel que $J' \mapsto J$. Notons $\mathcal{Z}_J$ l'ensemble des $t \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ tels que $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}_J, \tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J)) \neq 0$ et qu'il existe $J' \in \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'_J(s\hat{\theta}_J)}(B_J)$ tel que $J' \mapsto J$. Montrons que

(6) $\mathcal{Z}$ est l'image réciproque de $\mathcal{Z}_J$ par la projection naturelle

$$\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} \to \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}.$$

L'assertion (4) montre que, dans la définition de $\mathcal{Z}$, la condition que $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ est elliptique est superflue : elle est entraînée par l'existence de J'. La condition $s \in \mathcal{Z}$ équivaut donc à ce qu'il existe $\beta_1, ..., \beta_n \in \Sigma^{G'(s\hat{\theta})_\epsilon,J}(T', B)$, de sorte $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ et que la famille $(\beta_{i,A_{\tilde{M}}})_{i=1,...,n}$ engendre R_J. De même, la condition $t \in \mathcal{Z}_J$ équivaut à ce qu'il existe $\beta_1, ..., \beta_n \in \Sigma^{G'_J(t\hat{\theta}_J)_\epsilon}(T', B_J)$, de sorte $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ et que la famille $(\beta_{i,A_{\tilde{M}}})_{i=1,...,n}$ engendre R_J. L'assertion (5) montre que la condition pour s équivaut à la condition pour t, où t est l'image de s par la projection naturelle. Cela prouve (6).

Posons $\hat{Z} = Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta},0}$. Soit $s \in \mathcal{Z}$, notons t son image dans $\mathcal{Z}_J$. Le groupe $\hat{Z}$ est d'indice fini dans $Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$ comme dans $Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}$. On pose

$$[Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} : Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}] = [Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} : \hat{Z}][Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} : \hat{Z}]^{-1}.$$

Montrons que

(7) on a l'égalité

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}_J,\tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J))[Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}:Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}]=[Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}]i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(s\hat{\theta})).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} & \stackrel{A}{\to} & Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}} \\ B\downarrow & & C\downarrow \\ Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/\hat{Z} & \stackrel{D}{\to} & Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} \\ E\downarrow & & \\ Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & \end{array}$$

Toutes les flèches sont surjectives et de noyaux finis. On en déduit les égalités

$$|ker(A)||ker(C)|=|ker(B)||ker(D)|=|ker(EB)||ker(E)|^{-1}|ker(D)|.$$

Par définition, on a

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}_J,\tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J))=|ker(C)|^{-1},$$
$$[Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}:Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}]=|ker(D)||ker(E)|^{-1},$$
$$[Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}]=|ker(A)|,$$
$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(s\hat{\theta}))=|ker(EB)|^{-1}.$$

L'assertion (7) s'en déduit.

Pour $s\in\mathcal{Z}$, resp. $t\in\mathcal{Z}_J$, notons J_s, resp. J_t, l'unique élément de $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(s\hat{\theta})}(B)$, resp. de $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J)}(B_J)$, qui s'envoie sur J.

Lemme. *Soit $s\in\mathcal{Z}$, notons t son image dans $\mathcal{Z}_J$. On a l'égalité*

$$[Z(\hat{G}'_J(t\hat{\theta}_J))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}:Z(\hat{G}'(s\hat{\theta}))^{\Gamma_{\mathbb{R}}}]transfert(\sigma_{J_s}^{\mathbf{G}'(s\hat{\theta})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a)))=transfert(\sigma_{J_t}^{\mathbf{G}'_J(t\hat{\theta}_J)}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))).$$

Nous prouverons ce lemme au paragraphe suivant. Admettons-le et achevons la preuve de la proposition 5.2. La formule (2) se récrit

$$\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{s\in\mathcal{Z}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(s\hat{\theta}))transfert(\sigma_{J_s}^{\mathbf{G}'(s\hat{\theta})}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))).$$

En utilisant (7) et (8), on obtient

$$\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=[Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}]^{-1}\sum_{s\in\mathcal{Z}}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}_J,\tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J))transfert(\sigma_{J_t}^{\mathbf{G}'_J(t\hat{\theta}_J)}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))),$$

où t est la projection de s dans $\mathcal{Z}_J$. Le nombre d'éléments du noyau de cette projection $\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}_J$ est égal à $[Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}:Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}},\hat{\theta}}]$. La formule ci-dessus devient

$$\rho_J^{K\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{t\in\mathcal{Z}_J}i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}_J,\tilde{G}'_J(t\hat{\theta}_J))transfert(\sigma_{J_t}^{\mathbf{G}'_J(t\hat{\theta}_J)}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))).$$

Mais le membre de droite est égal à celui de la formule (3), donc est égal à $\rho_J^{K\tilde{G}_J,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$. Cela prouve la proposition 5.2.

5.6 Preuve du lemme 5.5

On fixe $s \in \mathcal{Z}$, on note t son image dans $\mathcal{Z}_J$. Pour simplifier, on pose $\mathbf{G}' = \mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ et $\mathbf{G}'_J = \mathbf{G}'_J(t\hat{\theta}_J)$. On fixe des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour la donnée $\mathbf{G}'$ et $G'_{J,1}$,...,$\Delta_{J,1}$ pour la donnée $\mathbf{G}'_J$. On note $\tilde{M}'_1$ et $\tilde{M}'_{J,1}$, resp. $\tilde{T}'_1$ et $\tilde{T}'_{J,1}$, les images réciproques de $\tilde{M}'$, resp. $\tilde{T}'$, dans $\tilde{G}'_1$ et $\tilde{G}'_{J,1}$. On fixe des éléments $\epsilon_1 \in \tilde{T}'_1(\mathbb{R})$ et $\epsilon_{J,1} \in \tilde{T}'_{J,1}(\mathbb{R})$ se projetant sur ϵ. On note $\mathcal{O}'_1$ la classe de conjugaison stable de ϵ_1 dans $\tilde{M}'_1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}'_{J,1}$ celle de $\epsilon_{J,1}$ dans $\tilde{M}'_{J,1}(\mathbb{R})$. Notons $M'_{\epsilon,sc}$ l'image réciproque de M'_ϵ dans $G'_{\epsilon,SC}$. Puisque $G'_{\epsilon,SC} = G'_{1,\epsilon_1,SC}$, c'est aussi l'image réciproque $M'_{1,\epsilon_1,sc}$ de M'_{1,ϵ_1} dans $G'_{1,\epsilon_1,SC}$. On a une suite d'homomorphismes

$$(1) \qquad D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R})) \overset{\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{\epsilon,sc}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R})) \simeq D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1,sc}(\mathbb{R}))$$

$$\overset{\iota^*_{M'_{1,\epsilon_1,sc},M'_{1,\epsilon_1}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R})) \overset{desc^{st,\tilde{M}'_1,*}_{\epsilon_1}}{\to} D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_1) \to D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(\mathbb{R}),\mathcal{O}'_1) \simeq D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}').$$

Introduisons le groupe $\Xi_\epsilon = Z_{M'}(\epsilon)/M'_\epsilon$. Son sous-groupe d'invariants $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$ agit sur chacun des espaces ci-dessus, de la façon suivante. Il agit trivialement sur $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')$ et $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(\mathbb{R}),\mathcal{O}'_1)$. Posons $C_{1,\sharp} = \{c \in C_1(\mathbb{R}); c\epsilon_1 \in \mathcal{O}'_1\}$. Soit $x \in Z_{M'}(\epsilon)$ dont l'image dans Ξ_ϵ soit fixe par $\Gamma_\mathbb{R}$. Alors $ad_x(\epsilon_1) = c_1(x)\epsilon_1$ où $c_1(x) \in C_{1,\sharp}$. L'appication $x \mapsto c_1(x)$ se quotiente en un homomorphisme $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}} \to C_{1,\sharp}$. Le groupe $C_{1,\sharp}$ agit par multiplication sur $\mathcal{O}'_1$, donc aussi sur $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_1)$. On tord cette action par la restriction à $C_{1,\sharp}$ du caractère λ_1. Via l'homomorphisme précédent, on obtient une action de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$ sur $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_1)$. Pour x comme ci-dessus, l'application ad_x préserve M'_{1,ϵ_1}. Ce groupe est quasi-déployé. Fixons-en une paire de Borel épinglée définie sur $\mathbb{R}$. Quitte à multiplier x par un élément de M'_ϵ, on peut supposer que ad_x respecte cette paire de Borel épinglée. Alors ad_x est un automorphisme de M'_{1,ϵ_1} qui est défini sur $\mathbb{R}$. On obtient ainsi une action de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$ sur M'_{1,ϵ_1} par automorphismes définis sur $\mathbb{R}$. D'où aussi une action sur $D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}))$. On tord cette action par le caractère $x \mapsto \lambda_1(c_1(x))$ et on obtient l'action cherchée de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$ sur $D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}))$. La même connstruction définit des actions de ce groupe sur $D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1,sc}(\mathbb{R}))$, $D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R}))$ et $D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$. Les homomorphismes de la suite ci-dessus sont équivariants pour les actions de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$. En notant par un exposant les sous-espaces d'invariants, on obtient une suite d'homomorphismes

$$(2) \quad D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \overset{\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{\epsilon,sc}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \simeq D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1,sc}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}}$$

$$\overset{\iota^*_{M'_{1,\epsilon_1,sc},M'_{1,\epsilon_1}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \overset{desc^{st,\tilde{M}'_1,*}_{\epsilon_1}}{\to} D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_1)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}}$$

$$\to D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(\mathbb{R}),\mathcal{O}'_1) \simeq D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}').$$

Maintenant, les homomorphismes de cette suite sont injectifs. En effet, les homomorphismes $\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{\epsilon,sc}}$ et $\iota^*_{M'_{1,\epsilon_1,sc},M'_{1,\epsilon_1}}$ sont injectifs d'après 3.3 (4), même sans passer aux invariants. L"application $desc^{st,\tilde{M}'_1,*}_{\epsilon_1}$ ci-dessus est injective d'après [I] 4.8. Enfin, l'injectivité de l'homomorphisme $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_1)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \to D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(\mathbb{R}),\mathcal{O}'_1)$ se vérifie aisément sur les définitions.

D'après la définition de 2.1, notre distribution $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')$ se remonte en un élément $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}'_1)$. On voit que l'action que l'on a définie de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$ sur $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_1)$

respecte le sous-espace $D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}'_1)$. Quitte à moyenner par cette action, on peut supposer $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{tr-orb}(\mathcal{O}'_1)^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}}$. D'après le lemme 4.3(ii), $\boldsymbol{\delta}_1$ se relève en un élément $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1} \in D_{tr-unip}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}))$. Pour la même raison, on peut supposer $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1} \in D_{tr-unip}(M'_{1,\epsilon_1}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}}$. D'après le lemme 3.3, $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1}$ se relève en un élément $\boldsymbol{\delta}_{sc} \in D^{st}_{tr-unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R}))$ dont on peut encore supposer qu'il est invariant par $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$. Enfin, toujours d'après le lemme 3.3, $\boldsymbol{\delta}_{sc}$ se relève en un élément $\boldsymbol{\delta}_{SC} \in D^{st}_{tr-unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$, dont on peut encore supposer qu'il est invariant par $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$. L'injectivité des homomorphismes de la suite (10) entraîne que toutes ces distributions sont uniquement déterminées par $\boldsymbol{\delta}$.

L'élément $J_s \in \mathcal{J}^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(B)$ s'identifie à un élément de $\mathcal{J}^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}'_1}(B)$, puis à un élément de $\mathcal{J}^{G'_{1,\epsilon_1}}_{M'_{1,\epsilon_1}}(B)$, puis à un élément de $\mathcal{J}^{G'_{\epsilon,SC}}_{M'_{\epsilon,sc}}(B)$. Les formalités que l'on a passées entraînent que $\sigma^{\mathbf{G}'}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))$ est l'image naturelle dans $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}')/Ann^{st,\mathbf{G}'}_{\mathcal{O}'}$ de l'élément $\sigma^{\tilde{G}'_1}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_1, a_1)$, où a_1 est un élément quelconque de $A_{M'_1}(\mathbb{R})$ se projetant sur $\xi(a) \in A_{M'}(\mathbb{R})$. L'hypothèse (1) de 5.5 permet d'appliquer la relation 4.6 (9) : $\sigma^{\tilde{G}'_1}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_1, a_1)$ est l'image par $desc^{st,\tilde{M}'_1,*}_{\epsilon_1}$ de $e^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}_1}(\epsilon_1)\sigma^{G'_{1,\epsilon_1}}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1}, a_1)$. Un calcul facile, cf. [III] 7.1(4), montre que $e^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}_1}(\epsilon_1) = e^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\epsilon)$. D'après le lemme 3.4, $\sigma^{G'_{1,\epsilon_1}}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_1}, a_1)$ est l'image par $\iota^*_{M'_{1,\epsilon_1,sc},M'_{1,\epsilon_1}}$ de $\sigma^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_{sc}, a')$, où a' est un élément quelconque de $A_{M'_{\epsilon,sc}}(\mathbb{R})$ ayant même projection que a_1 dans $A_{M'_1}(\mathbb{R})/A_{G'_1}(\mathbb{R})$, ou encore ayant même projection que $\xi(a)$ dans $A_{M'}(\mathbb{R})/A_{G'}(\mathbb{R})$. En résumé, $\sigma^{\mathbf{G}'}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))$ provient par la suite (1) de l'élément $e^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\epsilon)\sigma^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_{sc}, a') \in D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R}))/Ann^{st,G'_{\epsilon,SC}}_{unip}$.

Des constructions analogues valent pour la donnée $\mathbf{G}'_J$. On note cette fois $M'_{\epsilon,J,sc}$ l'image réciproque de M'_ϵ dans $G'_{J,\epsilon,SC}$. De façon analogue à (1), on a une suite

$$(3) \qquad D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R})) \overset{\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{\epsilon,J,sc}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,J,sc}(\mathbb{R})) \simeq D^{st}_{unip}(M'_{J,1,\epsilon_{J,1},sc}(\mathbb{R}))$$

$$\overset{\iota^*_{M'_{J,1,\epsilon_{J,1},sc},M'_{J,1,\epsilon_{J,1}}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{J,1,\epsilon_{J,1}}(\mathbb{R})) \overset{desc^{st,\tilde{M}'_{J,1},*}_{\epsilon_{J,1}}}{\to} D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_{J,1})$$

$$\to D^{st}_{géom,\lambda_{J,1}}(\tilde{M}'_{J,1}(\mathbb{R}), \mathcal{O}'_{J,1}) \simeq D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}').$$

On a aussi une suite analogue à (2)

$$(4) \qquad D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \overset{\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{\epsilon,J,sc}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,J,sc}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \simeq D^{st}_{unip}(M'_{J,1,\epsilon_{J,1},sc}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}}$$

$$\overset{\iota^*_{M'_{J,1,\epsilon_{J,1},sc},M'_{J,1,\epsilon_{J,1}}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{J,1,\epsilon_{J,1}}(\mathbb{R}))^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}} \overset{desc^{st,\tilde{M}'_{J,1},*}_{\epsilon_{J,1}}}{\to} D^{st}_{géom}(\mathcal{O}'_{J,1})^{\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}}$$

$$\to D^{st}_{géom,\lambda_{J,1}}(\tilde{M}'_{J,1}(\mathbb{R}), \mathcal{O}'_{J,1}) \simeq D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}').$$

L'élément $\boldsymbol{\delta}$ se remonte successivement en éléments $\boldsymbol{\delta}_{J,1}$, $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon_{J,1}}$, $\boldsymbol{\delta}_{J,sc}$ et $\boldsymbol{\delta}_{J,SC}$. Le même calcul que plus haut montre que $\sigma^{\mathbf{G}'_J}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))$ provient par la suite (3) de l'élément $e^{\tilde{G}'_J}_{\tilde{M}'}(\epsilon) i^{G'_{J,\epsilon,SC}}_{J_t} \sigma^{G'_{J,\epsilon,SC}}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}_{J,sc}, a'_J) \in D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,J,sc}(\mathbb{R}))/Ann^{st,G'_{J,\epsilon,SC}}_{unip}$, où a'_J est un élément quelconque de $A_{M'_{\epsilon,J,sc}}(\mathbb{R})$ ayant même projection que $\xi(a)$ dans $A_{M'}(\mathbb{R})/A_{G'_J}(\mathbb{R})$.

Les composés des suites (1) et (3) ne sont pas égaux. L'isomorphisme composé

$$D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(\mathbb{R}), \mathcal{O}'_1) \simeq D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \simeq D^{st}_{géom,\lambda_{J,1}}(\tilde{M}'_{J,1}(\mathbb{R}), \mathcal{O}'_{J,1})$$

est donné par la fonction de transition $\tilde{\lambda}$ entre les deux séries de données auxiliaires pour $\mathbf{M}'$ déduites des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'$ et pour $\mathbf{G}'_J$. En général, cet isomorphisme est plus difficile à calculer que dans le cas non-archimédien. Quand des distributions font intervenir des dérivées dans les directions centrales de M'_1 ou $M'_{J,1}$, la formule fait intervenir des dérivées de cette fonction de transition. Mais ce n'est pas le cas pour les distributions provenant de $M'_{\epsilon,SC}$. Pour celles-ci, le calcul est le même que dans le cas archimédien. On obtient que les composés des suites (1) et (3) sont proportionnels, la constante de proportionnalité étant la valeur $\tilde{\lambda}(\epsilon_1, \epsilon_{J,1})$. On note simplement c cette valeur. Précisément, pour $\boldsymbol{\tau}_{SC} \in D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$, l'image de $\boldsymbol{\tau}_{SC}$ par (1) est égale à l'image de $c\boldsymbol{\tau}_{SC}$ par (3). D'autre part, dans les suites (2) et (4) interviennent des actions de $\Xi_\epsilon^{\Gamma_\mathbb{R}}$ sur $D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$. Ces actions sont les mêmes d'après [I] 4.8(2). Puisque les suites (2) et (4) sont injectives, on en déduit l'égalité $\boldsymbol{\delta}_{J,SC} = c\boldsymbol{\delta}_{SC}$.

Posons

$$C = e^{\tilde{G}'_J}_{\tilde{M}'}(\epsilon) e^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\epsilon)^{-1} [Z(\hat{G}'_J)^{\Gamma_\mathbb{R}} : Z(\hat{G}')^{\Gamma_\mathbb{R}}]^{-1}.$$

Supposons démontrée l'assertion suivante, où a' et a'_J sont comme ci-dessus :

(5) il existe un élément $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$ dont l'image dans $D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R}))/Ann^{st,G'_{\epsilon,SC}}_{unip}$ soit $\sigma^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_{sc}, a')$ et dont l'image dans $D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,J,sc}(\mathbb{R}))/Ann^{st,G'_{J,\epsilon,SC}}_{unip}$ soit $c^{-1}C\sigma^{G'_{J,\epsilon,SC}}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}_{J,sc}, a'_J)$.

Fixons un tel $\boldsymbol{\tau}$ et notons $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ son image dans $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}', \mathcal{O}')$ par la suite (1). C'est aussi l'image de $c\boldsymbol{\tau}$ par la suite (3). Alors $\sigma^{\mathbf{G}'}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))$ est l'image de $e^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\epsilon)\underline{\boldsymbol{\tau}}$ modulo $Ann^{\mathbf{G}'}_{\mathcal{O}'}$, tandis que $\sigma^{\mathbf{G}'_J}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))$ est l'image de $C^{-1}e^{\tilde{G}'_J}_{\tilde{M}'}(\epsilon)\underline{\boldsymbol{\tau}}$ modulo $Ann^{\mathbf{G}'_J}_{\mathcal{O}'}$. Donc $transfert(\sigma^{\mathbf{G}'}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a)))$, resp. $transfert(\sigma^{\mathbf{G}'_J}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a)))$, est l'image de $e^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\epsilon)transfert(\underline{\boldsymbol{\tau}})$, resp. $C^{-1}e^{\tilde{G}'_J}_{\tilde{M}'}(\epsilon)transfert(\underline{\boldsymbol{\tau}})$, dans $D_{géom}(\mathcal{O})/Ann^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}$. Compte tenu de la définition de C, cela démontre le lemme 5.5.

Démontrons (5). Introduisons le groupe $(G'_{\epsilon,SC})_{J_s}$ et son revêtement simplement connexe que l'on note simplement G^1. Notons M^1 l'image réciproque de $M'_{\epsilon,sc}$ dans G^1 et T^1 le sous-tore maximal de M^1 qui se projette dans T'. Posons $G^2 = G'_{J,\epsilon,SC}$, $M^2 = M'_{\epsilon,J,sc}$ et notons T^2 le sous-tore maximal de M^2 qui se projette dans T'. L'homomorphisme

$$D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R})) \overset{\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{\epsilon,sc}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R}))$$

est le composé de la suite

$$D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R})) \overset{\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M^1}}{\to} D^{st}_{unip}(M^1(\mathbb{R})) \overset{\iota^*_{M^1,M'_{\epsilon,sc}}}{\to} D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,sc}(\mathbb{R})).$$

En utilisant successivement 3.2(3) et le lemme 3.4, on voit que $\sigma^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}_{sc}, a')$ est l'image par le deuxième homomorphisme ci-dessus de $i^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s}\sigma^{G^1}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}^1, a^1)$, où $\boldsymbol{\delta}^1 = \iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M^1}(\boldsymbol{\delta}_{SC})$ et a^1 est est un élément quelconque de $A_{M^1}(\mathbb{R})$ ayant même projection que $\xi(a)$ dans $A_{M'}(\mathbb{R})/A_{G'}(\mathbb{R})$. Posons

$$C' = C(i^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s})^{-1}$$

et $\boldsymbol{\delta}^2 = c^{-1}\boldsymbol{\delta}_{J,sc} = \iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M^2}(\boldsymbol{\delta}_{SC})$. Pour $i = 1, 2$, on note a^i un élément de $A_{M^i}(\mathbb{R})$ qui a même projection que $\xi(a)$ dans $A_{M'}(\mathbb{R})/A_{G'}(\mathbb{R}) = A_{M'}(\mathbb{R})/A_{G'_J}(\mathbb{R})$. L'assertion (5) résulte de

(6) il existe un élément $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{unip}(M'_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$ dont l'image dans $D^{st}_{unip}(M^1(\mathbb{R}))/Ann^{G^1}_{unip}$ soit $\sigma^{G^1}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}^1, a^1)$ et dont l'image dans $D^{st}_{unip}(M^2(\mathbb{R}))/Ann^{G^2}_{unip}$ soit $C'\sigma^{G^2}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}^2, a^2)$.

Dans la preuve de 5.5(5), on a calculé les ensembles de racines $\Sigma^{G^i}(T^i)$ pour $i = 1, 2$. On peut de même calculer les ensembles de coracines associés $\check{\Sigma}^{G^i}(T^i)$, en utilisant les formules de [W2] 3.3. Donnons le résultat. Pour $\alpha \in \Sigma^G(T)$, notons $\check{\alpha}^{res}$ l'image de $\check{\alpha} \in \mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{t}'$ par l'application ξ. On obtient que les éléments de $\check{\Sigma}^{G^1}(T^1)$ sont de la forme $c^1(\alpha)\check{\alpha}^{res}$, où $\alpha \in \Sigma^G(T)$ est tel que $\alpha_{A_{\tilde{M}}} \in R_J$ et $c^1(\alpha) \in \mathbb{Q}^\times$. Les α sont soumis à l'une des conditions suivantes et le terme $c^1(\alpha)$ est décrit dans chaque cas :

(a) α de type 1, $N\alpha(\nu) = 1$, $N\hat{\alpha}(s) = 1$; $c^1(\alpha) = 1$;

(b) α de type 2, $N\alpha(\nu) = 1$, $N\hat{\alpha}(s) = 1$; $c^1(\alpha) = 1$;

(c) α de type 3, $N\alpha(\nu) = -1$, $N\hat{\alpha}(s) = 1$; $c^1(\alpha) = 1/2$;

(d) α de type 2, $N\alpha(\nu) = 1$, $N\hat{\alpha}(s) = -1$; $c^1(\alpha) = 2$.

Une description analogue vaut pour $\check{\Sigma}^{G^2}(T^2)$. Les types 1, 2, 3 sont remplacés par 1_J, 2_J, 3_J, l'élément ν est remplacé par $t_J^{-1}\nu$ et la fonction c^2 est donnée par les mêmes formules que ci-dessus. En utilisant la relation 5.4(1), on voit que la seule différence entre les ensembles $\check{\Sigma}^{G^1}(T^1)$ et $\check{\Sigma}^{G^2}(T^2)$ provient des racines vérifiant (c) et telles que α soit de type 1_J. Dans ce cas, $\check{\Sigma}^{G_1}(T^1)$ contient $\check{\alpha}^{res}/2$ tandis que $\check{\Sigma}^{G_2}(T^2)$ contient $\check{\alpha}^{res}$. Puisque $\mathfrak{t}^1$ et $\mathfrak{t}^2$, vus comme sous-espaces de $\mathfrak{t}'$, sont engendrés par les ensembles de coracines, on en déduit déjà que $\mathfrak{t}^1 = \mathfrak{t}^2$. On note $j_* : \mathfrak{t}^1 \to \mathfrak{t}^2$ et $j^* : \mathfrak{t}^{2*} \to \mathfrak{t}^{1*}$ les identités. En reprenant les calculs de 5.5, on voit que, de même, la seule différence entre les ensembles de racines $\Sigma^{G^1}(T^1)$ et $\Sigma^{G^2}(T^2)$ provient des racines vérifiant (c) et telles que α soit de type 1_J. Dans ce cas, $\Sigma^{G^1}(T^1)$ contient $2N\alpha$ tandis que $\Sigma^{G^2}(T^2)$ contient $N\alpha$. On définit une fonction $b : \Sigma^{G^2}(T^2) \to \mathbb{Q}_{>0}$ qui vaut 1 sauf sur les racines $N\alpha$ précédentes, pour lesquelles $b(N\alpha) = 1/2$. On obtient que $\Sigma^{G^1}(T^1)$, resp. $\check{\Sigma}^{G^1}(T^1)$, est formé des $b(\beta_2)^{-1}j^*(\beta_2)$, resp. $b(\beta_2)j_*^{-1}(\check{\beta}_2)$, pour $\beta_2 \in \Sigma^{G^2}(T^2)$. Cela montre que (G^1, G^2, j_*) est un triplet endoscopique non standard. On a une fonction B sur $\Sigma^{G^1}(T^1)$ et une fonction B_J sur $\Sigma^{G^2}(T^2)$. En reprenant les formules de 5.5, on voit que ces fonctions sont reliées comme en [III] 6.4. C'est-à-dire, soit $\beta_2 \in \Sigma^{G^2}(T^2)$, notons $\beta_1 = b(\beta_2)^{-1}j^*(\beta_2)$ l'élément de $\Sigma^{G^1}(T^1)$ qui lui correspond ; on a alors $B(\beta_1) = \frac{B_J(\beta_2)}{b(\beta_2)}$.

Les sous-ensembles $\Sigma^{M^1}(T^1)$ et $\Sigma^{M^2}(T^2)$ se décrivent comme ci-dessus, en remplaçant la condition $\alpha \in \Sigma^G(T)$ par $\alpha \in \Sigma^M(T)$. Puisque $\Sigma^M(T) \subset \Sigma^{G_J}(T)$, une racine dans $\Sigma^M(T)$ est de même type dans G et G_J. Cela entraîne que la fonction b vaut 1 sur $\Sigma^{M^2}(T^2)$. Autrement dit, la correspondance endoscopique non standard se restreint en la correspondance naturelle entre les ensembles de racines de M^1 et M^2 (celle qui provient de l'identification de ces ensembles de racines à celui de $M_{\epsilon,SC}$).

On peut décomposer notre triplet endoscopique non standard en produit de triplets $(G_i^1, G_i^2, j_{*,i})$ pour $i = 1, ..., m$, chacun d'eux étant équivalent à un triplet quasi-élémentaire. Les Levi M^1 et M^2 et les tores T^1 et T^2 se décomposent conformément en produits $\prod_{i=1,...,m} M_i^1$ etc.... On note b_i la restriction de la fonction b à $\Sigma^{G_i^2}(T_i^2)$. On va prouver que

(7) pour tout $i = 1, ..., m$, les données $(G_i^1, G_i^2, j_{*,i})$, M_i^1, M_i^2 et b_i vérifient les conditions du lemme 5.1 et on a l'inégalité $N^{max}(G_i^1, G_i^2, j_{*,i}) < dim(G_{SC})$.

Un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 6.1 de [III] nous ramène au cas où le groupe G_{AD} est simple. Il y a un cas particulier : celui où G_{AD} est de type A_{2n} et où l'action de θ sur ce système est l'automorphisme non trivial. Hors de ce cas, il n'y a pas de racines de type 3. La définition de b entraîne alors que cette fonction est constante de valeur 1. Donc j_* provient d'un isomorphisme de G^1 sur G^2 et l'assertion est claire. Considérons le cas particulier ci-dessus : G_{AD} est de type A_{2n} et l'action de θ est non triviale. Le groupe G_J peut se réaliser comme intersection de commutants dans G d'éléments de $A_{\tilde{M}}$. Dans un groupe de type A_{2n}, un tel commutant est de type

$A_{n_1} \times ... A_{n_h}$. De plus, le système de racines de G_J est stable par θ. Il en résulte que ce système de racines, muni de son automorphisme θ, est produit de sous-systèmes de l'un des types suivants

(e) $A_{2n'}$ muni de l'automorphisme non trivial ;

(f) $A_{2n'-1}$ muni de l'automorphisme non trivial ;

(g) $A_{n'} \times A_{n'}$ muni de la permutation des deux facteurs.

Quant à l'action galoisienne, l'élément non trivial de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ ne peut agir sur le système A_{2n} que par l'identité ou par θ. Il en résulte que chacun des sous-systèmes ci-dessus est stable par cette action. Rappelons que le groupe G^2 est déduit de $\tilde{G}_J$ par la suite d'opérations suivantes : on passe de $\tilde{G}_J$ à un groupe $G'_J(t\hat{\theta}_J)$, on passe de celui-ci au commutant $G'_J(t\hat{\theta})_\epsilon$, on passe ensuite au revêtement simplement connexe. Il est clair que ces opérations se décomposent selon la décomposition ci-dessus du système de racines de G_J. C'est-à-dire que, si on fixe $i \in \{1, ..., m\}$, il existe une composante de l'un des types (e), (f), (g) ci-dessus de sorte que G_i^2 soit une composante irréductible (sur $\mathbb{R}$) d'un groupe issu par le même procédé que G^2 à partir de cette composante. Comme plus haut, l'assertion à prouver pour les données indexées par i est claire si b_i est constante. Par construction de la fonction b, la fonction b_i est constante sauf si la composante en question contient des racines de type 1 provenant de racines de type 3 dans G. Les racines de type 3 dans G sont celles qui sont fixées par θ. Une telle racine n'intervient pas dans une composante de type (g). Elle peut intervenir dans une composante de type (e), mais alors elle y est encore de type 3. Il reste les composantes de type (f). Supposons que G_i^2 soit issu d'une telle composante. Les racines de type 1 de cette composante provenant de racines de type 3 dans G sont exactement celles qui sont fixées par θ. Par endoscopie tordue, on crée des groupes de systèmes de racines de type $B_p \times D_q \times A_{r_1} \times ... \times A_{r_k}$. En passant à un commutant, les types D_q ou A_r ne créent que des systèmes de même type. Or, d'après la classification des données endoscopiques non standard élémentaires, cf. [III] 6.1, de tels types ne peuvent intervenir que dans des données élémentaires "triviales". On obtient la conclusion pour notre triplet $(G_i^1, G_i^2, j_{*,i})$ sauf si celui-ci provient d'une composante B_p ci-dessus. En passant à un commutant dans une telle composante, on obtient un groupe de même type que ci-dessus, c'est-à-dire $B_{p'} \times D_{q'} \times A_{r'_1} \times ... \times A_{r'_k}$. Par le même argument de classification, on obtient la conclusion pour notre triplet $(G_i^1, G_i^2, j_{*,i})$ sauf si le système de racines de G_i^2 est la composante $B_{p'}$. Supposons qu'il en soit ainsi. On vérifie aisément que les racines de $A_{2n'+1}$ fixées par θ créent des racines courtes dans la composante B_p. Cela passe à la composante $B_{p'}$ ci-dessus. Il en résulte que les racines de G_i^2 sur lesquelles b ne vaut pas 1 sont les racines courtes de G_i^2. Sur celles-ci, b vaut $1/2$. Puisque b vaut 1 sur les racines dans M_i^2, ce groupe ne contient pas de racines courtes. D'autre part, d'après la classification de [III] 6.1, ou bien le triplet $(G_i^1, G_i^2, j_{*,i})$ est trivial, ou bien G_i^1 est de type $C_{p'}$ (la première possibilité est d'ailleurs exclue sauf si $p' = 1$ puisque, d'après la description ci-dessus, b n'est pas constante si $p' > 1$). Cela montre que les données indexées par i vérifient les hypothèses de 5.1. Par ailleurs, il résulte des définitions que $N^{max}(G_i^1, G_i^2, j_{*,i}) = 4(p')^2 - 1$. On a nécessairement $p' \leq n'$ (où n' est l'entier associé à la composante de type (f) fixée). On a aussi $n' \leq n$. Puisque $dim(G_{SC}) = (2n+1)^2 - 1$, on en déduit l'inégalité $N^{max}(G_i^1, G_i^2, j_{*,i}) < dim(G_{SC})$. Cela vérifie (7).

Remarquons que, dans l'égalité (6), les faits que les points a^1 et a^2 soient proches de 1 et que $j_* : \mathfrak{t}^1 \to \mathfrak{t}^2$ soit l'identité (ces espaces étant vus comme sous-espaces de $\mathfrak{t}'$) entraînent que l'on peut identifier ces deux points a^1 et a^2. Ou encore, avec les notations du lemme 5.1, on a $a^1 = exp(X)$ et $a^2 = exp(j_*(X))$, pour un $X \in \mathfrak{a}_{M^1}(\mathbb{R})$. D'après (7), on peut appliquer ce lemme 5.1. Celui-ci nous dit que $\sigma_{J_s}^{G^1}(\boldsymbol{\delta}^1, a^1)$ s'envoie

sur $c^{G^1,G^2}_{M^1,M^2}\sigma^{G^2}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}^2,a^2)$ par la correspondance

$$D^{st}_{unip}(M^1(\mathbb{R}))/Ann^{G^1,st}_{unip}\simeq D^{st}_{unip}(M^2(\mathbb{R}))/Ann^{G^2,st}_{unip}.$$

Comme on l'a vu en 5.1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & D^{st}_{unip}(M_{\epsilon,SC}(\mathbb{R})) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ D^{st}_{unip}(M^1(\mathbb{R})) & & \rightarrow & & D^{st}_{unip}(M^2(\mathbb{R})) \end{array}$$

D'après le corollaire 3.6(ii), l'élément $\sigma^{G^1}_{J_s}(\boldsymbol{\delta}^1,a^1)$ provient d'un élément $\boldsymbol{\tau}\in D^{st}_{unip}(M_{\epsilon,SC}(\mathbb{R}))$. Donc $\boldsymbol{\tau}$ s'envoie sur $c^{G^1,G^2}_{M^1,M^2}\sigma^{G^2}_{J_t}(\boldsymbol{\delta}^2,a^2)$. Pour démontrer (6) et le lemme 5.5, il reste à prouver l'égalité

$$(8)\qquad c^{G^1,G^2}_{M^1,M^2}=C'.$$

Puisque b prend pour valeurs 1 et 1/2, j_*^{-1} envoie le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\check{\Sigma}^{G^2}(T^2)$ dans le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\check{\Sigma}^{G^1}(T^1)$. Puisque les groupes G^1 et G^2 sont simplement connexes, l'homomorphisme j_*^{-1} se relève en un homomorphisme $T^2\rightarrow T^1$. Dualement, on a un homomorphisme $\hat{T}^1\rightarrow\hat{T}^2$. Il se restreint en un homomorphisme

$$\hat{j}:Z(\hat{M}^1)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\rightarrow Z(\hat{M}^2)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}.$$

En se reportant à la définition de [III] 6.4, on vérifie l'égalité $c^{G^1,G^2}_{M^1,M^2}=|ker(\hat{j})|^{-1}$. Notons $\hat{M}'_{\epsilon,ad}$ le dual du groupe $M'_{\epsilon,sc}$ introduit plus haut. Notons aussi $\hat{H}$ le dual de $(G'_{\epsilon,SC})_{J_s}$. Alors $\hat{M}^1=\hat{M}'_{\epsilon,ad}/Z(\hat{H})$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/\hat{Z} & = & Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/\hat{Z}\\
\downarrow & & \downarrow\\
Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\\
\downarrow & & \downarrow\\
Z(\hat{M}'_\epsilon)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'_\epsilon)^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & Z(\hat{M}'_\epsilon)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G}'_{J,\epsilon})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}\\
\| & & \\
Z(\hat{M}'_{\epsilon,ad})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & \\
\downarrow & & \|\\
Z(\hat{M}'_{\epsilon,ad})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{H})^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & & \\
\| & & \\
Z(\hat{M}^1)^{\Gamma_{\mathbb{R}}} & \xrightarrow{\hat{j}} & Z(\hat{M}^2)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}
\end{array}$$

Toutes les flèches sont surjectives et à noyaux finis. Calculons le nombre d'éléments du noyau de l'application composée

$$Z(\hat{M}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/\hat{Z}\rightarrow Z(\hat{M}^2)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}.$$

En utilisant le chemin nord-est du diagramme, et en appliquant la définition de [III] 4.3, on obtient

$$[Z(\hat{G}'_J)^{\Gamma_{\mathbb{R}}}:\hat{Z}]e^{\tilde{G}'_J}_{\tilde{M}'}(\epsilon)^{-1}.$$

En utilisant le chemin sud-ouest, on obtient

$$[Z(\hat{G}')^{\Gamma_{\mathbb{R}}}:\hat{Z}]e^{\tilde{G}'}_{\tilde{M}'}(\epsilon)^{-1}|Z(\hat{H})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}|(c^{G^1,G^2}_{M^1,M^2})^{-1}.$$

En utilisant la définition de [III] 1.2, on voit que $|Z(\hat{H})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}|=(i^{G'_{\epsilon,SC}}_{J_s})^{-1}$. L'assertion (8) résulte alors de la définition de C'. Cela achève la preuve.

5.7 Preuve du lemme 5.1

On considère un triplet (G_1, G_2, j_*) muni de diverses données comme en 5.1. Grâce à 5.1(9), on suppose de plus que notre triplet est quasi-élémentaire, que la condition 5.1(8) est vérifiée et que B_1 est constante de valeur 1. Comme on l'a remarqué en 5.1, la condition 5.1(8) implique que le revêtement simplement connexe commun M_{SC} des groupes dérivés de M_1 et M_2 est isomorphe à un produit de groupes $SL_k(\mathbb{R})$ si $F_0 = \mathbb{R}$, de groupes $SL_k(\mathbb{C})$ si $F_0 = \mathbb{C}$. Soit H un groupe quasi-déployé tel que H_{SC} soit isomorphe à un produit de groupes $SL_k(\mathbb{R})$ ou $SL_k(\mathbb{C})$. On a

(1) $D^{st}_{tr-unip}(H(\mathbb{R})) = D^{st}_{orb,unip}(H(\mathbb{R}))$.

Preuve. Le lemme 3.3 nous ramène au cas $H = H_{SC}$. Il suffit donc de traiter les cas $H = SL_k(\mathbb{R})$ ou $H = SL_k(\mathbb{C})$. Le même lemme nous ramène aux cas $H = GL_k(\mathbb{R})$ ou $H = GL_k(\mathbb{C})$. Mais alors, ces groupes n'ont pas de données endoscopiques elliptiques autres que la donnée "maximale" $\mathbf{H}$. La définition de 2.1 montre que $D_{tr-orb}(H(\mathbb{R})) = D_{orb}(H(\mathbb{R}))$ et l'assertion s'ensuit. $\square$

Reprenons la preuve de [III] 7.7. On introduit le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ associé à (G_1, G_2, j_*) comme en [III] 6.2. On fixe un élément $\eta \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ qui conserve une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G définie sur $\mathbb{R}$. De cette paire se déduit une paire de Borel épinglée de G_η définie sur $\mathbb{R}$. On peut identifier G_1 à G_η de sorte que le Levi M_1 de G_1 devienne un Levi de G_η standard pour cette paire. On note $\tilde{M}$ le commutant de A_{M_1} dans $\tilde{G}$. On a $\eta \in \tilde{M}(\mathbb{R})$, $M_\eta = M_1$ et M est standard pour $\mathcal{E}$. Décrivons plus concrètement ces objets. Il y a quatre cas.

(a) $G_1 = Sp(2n)$ et M_1 est un Levi isomorphe à $GL(n_1) \times ... \times GL(n_k)$, avec $n_1 + ... + n_k = n$. Dans ce cas, $G = SL(2n)$ et ad_η est l'automorphisme extérieur habituel de ce groupe. On vérifie que M est le Levi standard de G de blocs $n_1 \times ... \times n_k \times n_k \times ... \times n_1$.

(b) $G_1 = Spin(2n+1)$ et M_1 est l'image réciproque dans ce groupe d'un Levi de $SO(2n+1)$ isomorphe à $GL(n_1) \times ... \times GL(n_k)$, avec $n_1 + ... + n_k = n$. Précisément, M_1 est isomorphe au groupe des $(x_1, ..., x_k, t) \in GL(n_1) \times ... \times GL(n_k) \times GL(1)$ tels que $det(x_1)...det(x_k)t^2 = 1$. Dans ce cas, $G = Spin(2n+2)$. L'action de $O(2n+2)$ sur $SO(2n+2)$ se relève en une action sur G et on peut réaliser ad_η comme la conjugaison par une symétrie élémentaire qui est un élément de $O(2n+2)$ de déterminant -1. On vérifie que M est l'image réciproque dans G d'un Levi de $SO(2n+2)$ isomorphe à $GL(n_1) \times ... \times GL(n_k) \times GL(1)$. Comme ci-dessus, M est isomorphe au groupe des $(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, t) \in GL(n_1) \times ... \times GL(n_k) \times GL(1) \times GL(1)$ tels que $det(x_1)...det(x_k)x_{k+1}t^2 = 1$. Mais on peut faire disparaître l'élément x_{k+1} et M est simplement isomorphe $GL(n_1) \times ... \times GL(n_k) \times GL(1)$.

(c) Les objets sont déduits par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ des objets du cas (a) définis sur $\mathbb{C}$.

(d) Les objets sont déduits par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ des objets du cas (b) définis sur $\mathbb{C}$.

On doit inclure le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ dans un K-triplet $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$. L'espace de Levi $\tilde{M}$ s'étend en un K-espace de Levi $K\tilde{M}$. On a en fait $K\tilde{M} = \tilde{M}$. En effet, on sait que $K\tilde{M}$ est lui-même un K-espace. D'après la définition de [I] 1.11, ce K-espace est réduit à une seule composante connexe pouvu que $H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M_{SC})$ soit trivial. C'est le cas d'après la description ci-dessus : le groupe M_{SC} est produit de groupes $SL(m)$ ou de groupes déduits par restriction des scalaires de $SL(m)$ sur $\mathbb{C}$. Comme en [III] 5.1, on note $\mathcal{Y}^M$ l'ensemble des $y \in M$ tels que $y\sigma(y)^{-1} \in I^M_\eta$. Rappelons que, parce que G est simplement connexe, $Z_G(\eta)$ est connexe et cette propriété perdure lorsqu'on passe à un Levi. Il en

résulte que $I_\eta^M = M_\eta$. Considérons l'ensemble de doubles classes

$$M_\eta \backslash \mathcal{Y}^M / M(\mathbb{R}).$$

Montrons que

(2) cet ensemble de doubles classes est réduit à un élément.

Preuve. On sait que cet ensemble est en bijection avec le noyau de l'application

$$H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M_\eta) \to H^1(\Gamma_\mathbb{R}, M).$$

Il suffit de prouver que $H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M_\eta) = \{1\}$. Rappelons que $M_\eta = M_1$. Dans les cas (c) et (d), le groupe M_1 est complexe et $H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M_1) = \{1\}$. Dans le cas (a), M_1 est un produit de groupes $GL(m)$, d'où la même conclusion. Dans le cas (b), posons $L = GL(n_1) \times ... \times GL(n_k)$. On a une suite exacte

$$1 \to \{\pm 1\} \to M_1 \to L \to 1$$

D'où une suite exacte

$$M_1(\mathbb{R}) \to L(\mathbb{R}) \to H^1(\Gamma_\mathbb{R}; \{\pm 1\}) \to H^1(\Gamma_\mathbb{R}; M_1) \to H^1(\Gamma_\mathbb{R}; L) = \{1\}$$

Puisque $H^1(\Gamma_\mathbb{R}; \{\pm 1\})$ a deux éléments, il suffit de prouver que la première application de la suite ci-dessus n'est pas surjective. Mais il résulte de la description de M_1 que cette image est formée des $(x_1, ..., x_k) \in L(\mathbb{R})$ tels que $det(x_1)...det(x_k) > 0$. Cela prouve (2). $\square$

On peut prendre comme ensemble de représentants de notre ensemble de doubles classes l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^M = \{1\}$.

On introduit les données endoscopiques maximales $\mathbf{G}' = (G', \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_\mathbb{R}, \hat{\theta})$ de $(KG, K\tilde{G}, \mathbf{a})$ et $\mathbf{M}' = (M', \hat{M}_{\hat{\theta}} \rtimes W_\mathbb{R}, \hat{\theta})$ de $(KM, K\tilde{M}, \mathbf{a}) = (M, \tilde{M}, \mathbf{a})$. Remarquons que $\mathbf{G}'$ est aussi la donnée $\mathbf{G}'(\hat{\theta})$ déduite de $\mathbf{M}'$ et de l'élément $\tilde{s} = \hat{\theta}$. Comme en [III] 6.3, l'élément $\eta \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ détermine un élément $\epsilon \in \mathcal{Z}(\tilde{G}')^{\Gamma_\mathbb{R}}$. Si l'on remplace les espaces ambiants $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ par $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$, on obtient évidemment le même élément ϵ. On fixe un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$, où $B^M = B \cap M$. Remarquons que $G_2 = G'_\epsilon = G'$ et $M_2 = M'_\epsilon = M'$.

Comme d'habitude, on néglige les espaces de mesures. On dispose d'éléments $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$. On peut identifier $\boldsymbol{\delta}_2$ à un élément de $D^{st}_{tr-unip}(M'_\epsilon(\mathbb{R}))$. En fait, d'après (1), il appartient à $D^{st}_{orb,unip}(M'_\epsilon(\mathbb{R}))$. On pose

$$\boldsymbol{\delta} = desc^{st,M',*}_\epsilon(\boldsymbol{\delta}_2).$$

C'est un élément de $D^{st}_{orb}(\mathcal{O}')$, où $\mathcal{O}'$ est la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$. Posons $\boldsymbol{\tau} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. C'est un élément de $D_{géom}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Montrons que

(3) $\boldsymbol{\tau}$ appartient à $D_{orb}(\mathcal{O})$.

Preuve. On a calculé $\boldsymbol{\tau}$ à la fin de la preuve de [III] 7.1. Avec les notations de cette référence, on a

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y] desc^{\tilde{M},*}_{\eta[y]} \circ transfert_y(\boldsymbol{\delta}_1).$$

Remarquons que l'application $\iota^*_{M_{\eta[y],sc}, M_{\eta[y]}}$ qui figure en [III] 7.1 disparaît puisque les groupes $G_{\eta[y]}$ sont ici simplement connexes. L'élément $\boldsymbol{\delta}_1$ appartient à $D^{st}_{orb}(\mathcal{O}')$, c'est-à-dire que c'est une combinaison linéaire stable d'intégrales orbitales. L'homomorphisme

$desc^{\tilde{M},*}_{\eta[y]}$ envoie une combinaison linéaire d'intégrales orbitales sur une telle combinaison linéaire. En général, les applications $transfert_y$ ne vérifient pas cette propriété. Mais elles les vérifient dans notre cas particulier car $\dot{\mathcal{Y}}^M$ est réduit à $\{1\}$ et $transfert_1$ est l'identité. $\square$

Les éléments J_1 et J_2 du lemme 5.1 déterminent un élément $J \in \mathcal{J}^{K\tilde{G}}_{K\tilde{M}}$. Soit $a \in A_{K\tilde{M}}(\mathbb{R})$ un élément en position générale et proche de 1. D'après (3), on peut définir un élément $\rho^{K\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\tau}, a) \in D_{géom}(\mathcal{O})/Ann^{K\tilde{G}}_{\mathcal{O}}$, où $\mathcal{O}$ est la classe de conjugaison stable de θ^* dans $K\tilde{M}(\mathbb{R}) = \tilde{M}(\mathbb{R})$. On peut aussi l'élément $\rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a)$ du même espace. Nos hypothèses de récurrence posées en 5.1 nous autorisent à appliquer les résultats de 2.4 : on a l'égalité $\rho^{K\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\tau}, a) = \rho^{K\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a)$. A partir de cette égalité, la preuve de [III] 7.7 entraîne l'égalité du lemme 5.1. Il faut toutefois vérifier que cette preuve s'applique. En inspectant cette preuve, on voit que la seule chose à vérifier et que l'hypothèse (2) de [III] 7.1 est vérifiée pour les triplets $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ qui apparaissent et qui sont différents de notre triplet (G_1, G_2, j_*) de départ. Pour un tel triplet, le groupe $\bar{G}'(\bar{s})$ est un groupe endoscopique de G_η, déduit de la façon habituelle du groupe endoscopique "maximal" du Levi M_η de G_η. Autrement dit, il se déduit de G_1 et du groupe endoscopique "maximal" de M_1. Les groupes endoscopiques de G_1 étant bien connus, on voit que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ est produit de triplets équivalents à des triplets quasi-élémentaires $(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*i})$, pour $i = 1, ..., m$, qui sont de l'un des types (1), (2) ou (3) de [III] 6.1 ; le Levi $\bar{M}' \simeq M_1$ de $\bar{G}'(\bar{s})$ détermine pour chaque i un Levi $M_{1,i}$ de $G_{1,i}$;

- si un triplet $(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*i})$ est de type (2), resp. (3), les racines dans $M_{1,i}$ sont longues, resp. courtes ;

- si $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ est différent de (G_1, G_2, j_*), on a pour tout i l'inégalité $N^{max}(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*i}) < N^{max}(G_1, G_2, j_*)$.

Les deux premières propriétés impliquent que le triplet $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ vérifie les conditions de 5.1. On voit qu'alors, l'hypothèse (2) de [III] 7.1 équivaut au lemme 5.1. La dernière propriété ci-dessus et nos hypothèses de récurrence assurent que ce lemme est vérifié pour les triplets $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ différents de (G_1, G_2, j_*). La démonstration de [III] 7.7 s'applique donc bien. Cela achève la preuve.

6 Un résultat d'approximation

6.1 Un espace de germes de fonctions

Dans toute la section, $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Une racine $\alpha \in \Sigma^G(A_M)$ (considérée comme une forme linéaire sur $\mathcal{A}_M$), se décompose en $\alpha_L + \alpha^L$, où $\alpha_L \in \mathcal{A}^*_L$ et $\alpha^L \in \mathcal{A}^{L,*}$. Considérons l'ensemble des formes linéaires α_L, pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ et $\alpha \in \Sigma^G(A_M)$. On note V^G_M le sous-ensemble des éléments non nuls. On note U^G_M le sous-ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ tels que $\alpha(H) \neq 0$ pour tout $\alpha \in V^G_M$. C'est le complémentaire dans $\mathcal{A}_M$ d'un ensemble fini d'hyperplans. Notons $\underline{\mathcal{V}}^G_M$ l'espace des fonctions sur U^G_M , qui sont combinaisons linéaires de fonctions

$$H \mapsto \prod_{i=1,...,n} log(|exp(r_i\alpha_i(H)) - exp(-r_i\alpha_i(H))|_{\mathbb{R}})$$

où les α_i appartiennent à V_M^G et les r_i sont des réels non nuls. On considère les éléments de $\underline{\mathcal{V}}_M^G$ comme des fonctions définies presque partout sur $\mathcal{A}_M$. Remarquons que ces fonctions sont invariantes par translations par $\mathcal{A}_G$. On peut aussi bien considérer qu'elles sont définies sur $\mathcal{A}_M^G$.

Appelons domaine adéquat dans $\mathcal{A}_M$ l'intersection d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{A}_M$ avec l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ qui vérifient la condition $|\alpha(H)|_{\mathbb{R}} > c||H||$ pour tout $\alpha \in V_M^G$, où $c > 0$ est un réel fixé (on note ici $||.||$ la norme euclidienne fixée sur $\mathcal{A}_M$) . Soit u un germe de fonction défini presque partout au voisinage de 0 dans $\mathcal{A}_M$. On dit qu'il est faiblement équivalent à 0 s'il existe $r > 0$ et si, pour tout domaine adéquat, il existe $C > 0$ tel que $|u(H)| \leq C||H||^r$ pour tout H dans le domaine et assez proche de 0. On dit que deux germes u et u' sont faiblement équivalents si et seulement si $u - u'$ est faiblement équivalent à 0.

Remarque. Ces définitions dépendent de G mais cela ne nous gênera pas.

Une fonction dans $\underline{\mathcal{V}}_M^G$ peut être faiblement équivalente à 0. On note $\underline{\mathcal{V}}_{0,M}^G$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{V}_M^G$ qui sont faiblement équivalents à 0 et on pose $\mathcal{V}_M^G = \underline{\mathcal{V}}_M^G/\underline{\mathcal{V}}_{0,M}^G$. Remarquons que, si u est une fonction définie presque partout sur $\mathcal{A}_M$ qui est faiblement équivalente à 0 et si $v \in \underline{\mathcal{V}}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, alors uv est faiblement équivalente à 0 : le produit d'une fonction à croissance logarithmique et d'une fonction décroissante en $||H||^r$ est décroissante en $||H||^{r-\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$.

6.2 Approximation des intégrales orbitales pondérées invariantes

On note $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ l'homomorphisme d'induction

$$\begin{array}{ccc} D_{orb}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* & \to & D_{orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^* \\ \boldsymbol{\gamma} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma}^{\tilde{G}} \end{array}.$$

On fixe une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison semi-simples par $M(\mathbb{R})$ dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. Considérons un élément

$$\zeta \in \mathcal{V}_M^G \otimes Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*).$$

Relevons-le en un élément $\underline{\zeta} \in \underline{\mathcal{V}}_M^G \otimes Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{orb}(\mathcal{O}^{\tilde{G}}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*)$. On peut l'évaluer en un point $H \in U_M^G$, on obtient un élément $\underline{\zeta}(H) \in Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)$. La fonction $H \mapsto \underline{\zeta}(H)$ ne dépend du choix du relèvement $\underline{\zeta}$ qu'à faible équivalence près (en un sens similaire à celui du paragraphe précédent). Une telle équivalence importera peu, on notera donc simplement $H \mapsto \zeta(H)$ cette fonction. On rappelle que, si $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O})$ et $a \in A_M(\mathbb{R})$, on peut définir la distribution $a\boldsymbol{\gamma}$. Sa valeur sur une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ est égale à la valeur de $\boldsymbol{\gamma}$ sur la fonction ${}^a\varphi$, où ${}^a\varphi(\delta) = \varphi(a\delta)$ pour tout $\delta \in \tilde{M}(\mathbb{R})$. Fixons désormais un système de fonctions B sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Proposition. *Il existe un unique homomorphisme*

$$\xi^{\tilde{G}}(B) : D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to \mathcal{V}_M^G \otimes Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)$$

tel que, pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, le germe de la fonction définie presque partout sur $\mathcal{A}_M$ qui, à $H \in \mathcal{A}_M$, associe

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H^L), \mathbf{f})$$

soit faiblement équivalent au germe constant de valeur

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}).$$

Remarques. (1) Comme souvent, il est implicite que les fonctions $\xi^{\tilde{L}}(B)$ intervenant pour $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ ont été déterminées par récurrence par le même énoncé appliqué en remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{L}$.

(2) Pour $\tilde{M} = \tilde{G}$, on a $\mathcal{V}_M^M = \mathbb{C}$. L'application $\xi^{\tilde{M}}(B)$ est l'identité.

Preuve de l'unicité. On peut supposer par récurrence que les $\xi^{\tilde{L}}$ sont déterminés pour $\tilde{L} \neq \tilde{G}$. Pour un tel $\tilde{L}$, la classe d'équivalence faible de la fonction

$$H \mapsto I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H^L), \mathbf{f})$$

est bien déterminée. En effet, $\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H^L)$ est uniquement déterminée modulo une combinaison linéaire de fonctions $H \mapsto u(H^L)\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{L}}$, où $u \in \underline{\mathcal{V}}_{0,M}^L$ et $\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{L}} \in D_{orb}(\mathcal{O}^{\tilde{L}}) \otimes Mes(L(\mathbb{R}))^*$. Or, pour de telles données, la relation 2.4(5) (qui est vérifiée dans notre situation quasi-déployée et à torsion intérieure) entraîne que la fonction

$$H \mapsto u(H^L) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\boldsymbol{\gamma}_{\tilde{L}}, \mathbf{f})$$

est faiblement équivalente à 0. Alors la formule de l'énoncé détermine la classe d'équivalence faible de la fonction

$$H \mapsto I^{\tilde{G}}(\xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H), \mathbf{f}).$$

Fixons une base $(v_i)_{i \in I}$ d'un supplémentaire de $\underline{\mathcal{V}}_{0,M}^G$ dans $\underline{\mathcal{V}}_M^G$. On peut relever $\xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B)$ de façon unique en un terme

$$\underline{\xi}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B) = \sum_{i \in I} v_i \otimes \boldsymbol{\gamma}_i,$$

où les $\boldsymbol{\gamma}_i$ appartiennent à $Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)$. Alors $I^{\tilde{G}}(\xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H), \mathbf{f})$ est faiblement équivalent à

$$\sum_{i \in I} v_i(H) I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{f}).$$

Donc la classe d'équivalence faible de cette somme est bien déterminée. Par définition de la base $(v_i)_{i \in I}$, cela entraîne que les coefficients $I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{f})$ sont bien déterminés. Cela étant vrai pour tout $\mathbf{f}$, les distributions $\boldsymbol{\gamma}_i$ sont uniquement déterminées. Donc $\underline{\xi}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B)$ est uniquement déterminé, ce qui prouve l'unicité.

Preuve de l'existence. Par linéarité, il suffit de traiter le cas où $\boldsymbol{\gamma}$ est l'intégrale orbitale associée à un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ de partie semi-simple dans $\mathcal{O}$ et à une mesure de Haar sur $M_\gamma(\mathbb{R})$. Pour deux espaces de Levi $\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$ tels que $\tilde{M} \subset \tilde{L} \subset \tilde{L}'$, on sait définir la fonction $H \mapsto r_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\gamma, exp(H), B)$ pour un point H en position générale dans $\mathcal{A}_M$, cf. [II] 1.9. Elle est d'ailleurs invariante par translations par $\mathcal{A}_{L'}$, donc définie pour H en position générale dans $\mathcal{A}_M^{L'}$. En fait, on a montré en [II] 1.7(9) qu'elle s'étendait par continuité au voisinage de tout point de $\mathcal{A}_L^{L'}$ en position générale (dans cette référence, il n'y avait pas de système de fonctions B mais le résultat s'étend à ce cas). On peut donc

définir $r_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\gamma, exp(H_L), B)$ pour tout $H \in \mathcal{A}_M$ en position générale. Plus précisément, le résultat de [II] 1.7(9) affirme que l'on a l'égalité

$$(3) \qquad r_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\gamma, exp(H_L), B) = r_{\tilde{L}}^{\tilde{L}'}(\gamma', exp(H_L), B)$$

où γ' est un élément quelconque de l'orbite induite de γ à $\tilde{L}$. Cela implique que cette fonction est définie pour $H \in U_M^G$ proche de 0. Définissons une fonction $H \mapsto \bar{r}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, H, B)$ sur U_M^G par la formule de récurrence

$$(4) \qquad \bar{r}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, H, B) = -\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L}\neq\tilde{G}} \bar{r}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, H^L, B) r_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma, exp(H_L), B).$$

On vérifie facilement que c'est un élément de $\mathcal{V}_M^G$.

Cela étant, on pose

$$\xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, H, B) = (-1)^{a_M - a_G} \bar{r}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, H, B)\boldsymbol{\gamma}.$$

Pour prouver que cette définition satisfait la condition de l'énoncé, on doit calculer le germe de l'expression

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H^L), \mathbf{f}).$$

Ceci n'est autre que

$$(5) \qquad \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} (-1)^{a_M - a_L} \bar{r}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, H^L, B) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}, \mathbf{f}).$$

Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Fixons une famille $(\gamma_i)_{i=1,\dots,m}$ de représentants des classes de conjugaison par $L(\mathbb{R})$ dans l'orbite induite par γ. On peut décomposer $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}, \mathbf{f})$ en somme de $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{f})$, où $\boldsymbol{\gamma}_i$ est l'intégrale orbitale associée à γ_i et une certaine mesure sur $L_{\gamma_i}(\mathbb{R})$. On a montré en [II] 3.2(1) que le germe de $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{f})$ était équivalent à

$$\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L})} (-1)^{a_L - a_R} r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma_i, exp(H_L), B) I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_i^{\tilde{R}}, B, \mathbf{f}).$$

L'équivalence utilisée dans cette référence n'était pas la même qu'ici, mais elle était plus forte d'après les définitions. La même assertion vaut donc pour notre équivalence faible. La relation (3) nous dit que les coefficients $r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma_i, exp(H_L), B)$ sont indépendants de i et valent $r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma, exp(H_L), B)$. On peut regrouper les expressions ci-dessus et on obtient que $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}, \mathbf{f})$ est faiblement équivalent à

$$\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L})} (-1)^{a_L - a_R} r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma, exp(H_L), B) I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{R}}, B, \mathbf{f}).$$

L'équivalence faible se conserve par multiplication par une fonction de $\mathcal{V}_M^G$. Donc l'expression (5) est faiblement équivalente à

$$\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} (-1)^{a_M - a_R} X^{\tilde{R}}(H) I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{R}}, B, \mathbf{f}),$$

où

$$X^{\tilde{R}}(H) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{R}}(\tilde{M})} \bar{r}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, H^L, B) r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma, exp(H_L), B).$$

Mais la définition (4) entraîne que $X^{\tilde{M}}(H) = 1$ tandis que $X^{\tilde{R}}(H)$ est équivalent à 0 si $\tilde{R} \neq \tilde{M}$. Donc (5) est faiblement équivalent à $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f})$. $\square$

6.3 Approximation des intégrales orbitales pondérées invariantes stables

On fixe une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. En fixant pour un instant les mesures, on définit l'espace

$$D_{tr-orb}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \mathcal{O}) = D_{tr-orb}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \cap Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{géom}^{st}(\mathcal{O})).$$

Proposition. *Il existe un unique homomorphisme*

$$\xi^{\tilde{G},st}(B) : D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to \mathcal{V}_M^G \otimes D_{tr-orb}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \mathcal{O}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$$

tel que, pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *et tout* $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, *le germe de la fonction définie presque partout sur* $\mathcal{A}_M$ *qui, à* $H \in \mathcal{A}_M$, *associe*

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}} S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f})$$

soit faiblement équivalent au germe constant de valeur

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}).$$

Remarques. (1) Pour H en position générale, la distribution $exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)$ est $\tilde{G}$-équisingulière (c'est-à-dire supportée par des éléments $\gamma \in \tilde{L}(\mathbb{R})$ tels que $L_\gamma = G_\gamma$), donc l'intégrale $S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f})$ est bien définie.

(2) Si $\tilde{M} = \tilde{G}$, $\xi^{\tilde{M},st}(B)$ est l'inclusion naturelle.

L'assertion d'unicité se démontre comme pour la proposition précédente. L'existence sera démontrée en 6.5.

6.4 Approximation des intégrales orbitales pondérées invariantes associées aux éléments de $D_{tr-orb}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$

On fixe une réunion finie $\mathcal{O}$ de classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$. En fixant pour un instant les mesures, on définit l'espace

$$D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \mathcal{O}) = D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \cap Ind_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(D_{géom}(\mathcal{O})).$$

Proposition. *Il existe un unique homomorphisme*

$$\xi^{\tilde{G}}(B) : D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^* \to \mathcal{V}_M^G \otimes D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \mathcal{O}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$$

tel que, pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ *et tout* $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, *le germe de la fonction définie presque partout sur* $\mathcal{A}_M$ *qui, à* $H \in \mathcal{A}_M$, *associe*

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, B, H^L)^{\tilde{L}}, \mathbf{f})$$

soit faiblement équivalent au germe constant de valeur

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}).$$

Remarque. Si $\tilde{M} = \tilde{G}$, $\xi^{\tilde{M}}(B)$ est l'inclusion naturelle.

Preuve. L'unicité se démontre comme en 6.2. Démontrons l'existence. Par linéarité, on peut supposer que $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale appartenant à $D_{orb}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ ou qu'il existe une donnée endoscopique elliptique et relevante $\mathbf{M}'$ de $(M, \tilde{M})$, avec $M' \neq M$, qu'il existe une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}'$ dans $\tilde{M}'(\mathbb{R})$ correspondant à une classe dans $\mathcal{O}$ et qu'il existe $\boldsymbol{\delta} \in D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$, de sorte que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Le premier cas est traité par la proposition 6.2. Traitons le second. On écrit $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$. D'après 2.4(2) (qui est valide dans notre situation), on a l'égalité

$$(1) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

On peut appliquer la proposition 6.3 par récurrence à chacun des termes intervenant ici. Comme toujours, on doit développer quelques formalités pour adapter cette proposition au cas de données endoscopiques. Le seul point à expliquer est que la multiplication $(H, \boldsymbol{\delta}) \mapsto exp(H)\boldsymbol{\delta}$ a un sens dans $D_{géom}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$, pour $H \in \mathcal{A}_M \simeq \mathcal{A}_{M'}$. En effet, introduisons des données auxiliaires M_1',...,Δ_1. Identifions $\boldsymbol{\delta}$ à un élément $\boldsymbol{\delta}_1$ de $D_{géom,\lambda_1}^{st}(\tilde{M}_1'(\mathbb{R})) \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$. L'élément $H \in \mathcal{A}_M \simeq \mathcal{A}_{M'}$ se relève en un élément $H_1 \in \mathcal{A}_{M_1'}$ et la distribution $exp(H_1)\boldsymbol{\delta}_1$ est bien définie. On a introduit en [IV] 2.1 un caractère $\lambda_{\mathfrak{A}_{M_1'}}$ de $\mathfrak{A}_{M_1'} = exp(\mathcal{A}_{M_1'})$. La distribution $\lambda_{\mathfrak{A}_{M_1'}}(exp(H_1))exp(H_1)\boldsymbol{\delta}_1$ ne dépend pas du relèvement H_1 de H. En effet, on ne peut modifier H_1 que par un élément de $\mathcal{A}_{C_1}$, donc $exp(H_1)$ par un élément $c \in \mathfrak{A}_{C_1}$. Or $c\boldsymbol{\delta}_1 = \lambda_1(c)^{-1}\boldsymbol{\delta}_1$ et λ_1 coïncide sur $\mathfrak{A}_{C_1}$ avec $\lambda_{\mathfrak{A}_{M_1'}}$. D'où l'invariance cherchée. On vérifie que, si l'on change de données auxiliaires, les distributions $\lambda_{\mathfrak{A}_{M_1'}}(exp(H_1))exp(H_1)\boldsymbol{\delta}_1$ se recollent en un unique élément de $D_{géom}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(\mathbb{R}))^*$, que l'on note $exp(H)\boldsymbol{\delta}$. On applique la proposition. Chaque terme $S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})$ se développe en une somme indexée par des espaces de Levi $\tilde{L}_s' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M}')$. Comme on l'a déjà vu plusieurs fois, un tel espace de Levi donne naissance à un espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. Le terme s définit une donnée endoscopique $\mathbf{L}'(s)$ de $(L, \tilde{L})$ de sorte que $\tilde{L}_s' \simeq \tilde{L}'(s)$. Pour simplifier les notations, on anticipe cela dans la formule suivante. On obtient que le membre de droite de (1) est faiblement équivalent à la fonction sur $\mathcal{A}_M$ qui à H associe

$$\sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \sum_{\tilde{L}_s' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M}')} S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

En regroupant les couples $(s, \tilde{L}'_s)$ selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ associé, on obtient comme en [II] 3.7 que l'expression ci-dessus est égale à

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{s\in\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s)) \sum_{t\in sZ(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G}, \tilde{G}'(t))$$

$$S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(t)})$$

ou encore

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{s\in\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s)) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s), exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}).$$

Les distributions $exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, H^L, B)$ sont $\tilde{G}$-équisingulières pour H en position générale et on peut appliquer la proposition 1.13. Cela nous permet de remplacer ci-dessus

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s), exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f})$$

par

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(transfert(exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)), \mathbf{f}).$$

On a

$$transfert((exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)) = exp(H_L)(transfert(\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L))).$$

La somme se récrit

$$(2) \qquad \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}),$$

où

$$(3) \qquad \xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L) = \sum_{s\in\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s)) transfert(\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)).$$

Pour tout s apparaissant ci-dessus, le terme $\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B)$ appartient à $\mathcal{V}_{M'}^{L'(s)} \otimes D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{L}'(s), \mathcal{O}') \otimes Mes(L'(s;\mathbb{R}))^*$. On a l'inclusion naturelle $\mathcal{V}_{M'}^{L'(s)} \subset \mathcal{V}_M^L$. En reprenant les définitions, on voit que le transfert envoie $D_{tr-orb}^{st}(\mathbf{L}'(s), \mathcal{O}') \otimes Mes(L'(s;\mathbb{R}))^*$ dans $D_{tr-orb}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \mathcal{O}) \otimes Mes(L(\mathbb{R}))^*$. Donc $\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B)$ est bien un élément de $\mathcal{V}_M^L \otimes D_{tr-orb}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \mathcal{O}) \otimes Mes(L(\mathbb{R}))^*$ comme on le voulait. On a montré que le membre de droite de (1) était faiblement équivalent à (2). C'est la relation de l'énoncé. □

6.5 Preuve de la proposition 6.3

Comme on l'a déjà vu plusieurs fois, la preuve est essentiellement la même que la précédente. On part de la formule

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, f) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, f) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

On applique la proposition 6.4 au premier terme et la proposition 6.3 par récurrence aux autres. On obtient que $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, f)$ est faiblement équivalente à la fonction sur $\mathcal{A}_M$ qui à H associe

$$(1) \qquad \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \left(I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}) - X_{\tilde{L}}(H) \right),$$

où

$$X_{\tilde{L}}(H) = \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s)) \sum_{t\in sZ(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, t\neq 1} i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G}, \tilde{G}'(t))$$
$$S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Supposons d'abord $\tilde{L} \neq \tilde{G}$. D'après notre hypothèse de récurrence, le terme $\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)$ est déjà défini. On voit qu'ajouter à $X_{\tilde{L}}(H)$ le terme $S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f})$ revient à supprimer la restriction $t \neq 1$ dans la formule ci-dessus. La somme en t devient alors

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s), exp(H_L)\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}).$$

En appliquant la proposition 1.13, c'est aussi

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)transfert(\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)), \mathbf{f}).$$

Alors

$$S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}) + X_{\tilde{L}}(H) = I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\underline{\xi}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f}),$$

où

$$\underline{\xi}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L) = \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s))transfert(\xi^{\mathbf{L}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)).$$

On applique la définition 6.4(3), en se rappelant qu'il s'agissait d'une égalité dans $\mathcal{V}_M^L$, c'est-à-dire à faible équivalence près. Elle implique que $\xi^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)$ et $\underline{\xi}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L)$ sont faiblement équivalents. Alors le terme indexé par $\tilde{L}$ de la formule (1) est faiblement équivalent à $S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H^L), \mathbf{f})$.

Supposons maintenant $\tilde{L} = \tilde{G}$. La définition se simplifie :

$$X_{\tilde{G}}(H) = \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))S^{\mathbf{G}'(s)}(\xi^{\mathbf{G}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})$$
$$= \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))I^{\tilde{G}}(transfert(\xi^{\mathbf{G}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H)), \mathbf{f})$$
$$= I^{\tilde{G}}(\xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, H), \mathbf{f}) - I^{\tilde{G}}(\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H), \mathbf{f}),$$

où on a posé

$$(2) \qquad \underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta}, B, H) = \xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, H)$$
$$- \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_{\mathbb{R}}}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))transfert(\xi^{\mathbf{G}'(s),st}(\boldsymbol{\delta}, B, H)).$$

Alors le terme indexé par $\tilde{G}$ dans la formule (1) est égal à $I^{\tilde{G}}(\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H),\mathbf{f})$. Cette formule devient

$$(3)\qquad I^{\tilde{G}}(\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H),\mathbf{f})+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta},B,H^L),\mathbf{f}).$$

La distribution $\xi^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},B,H)$ appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Les distributions $\xi^{\mathbf{G}'(s),st}(\boldsymbol{\delta},B,H)$ appartiennent à $D^{st}_{tr-orb}(\mathbf{G}'(s))\otimes Mes(G'(s;\mathbb{R}))^*$. Leur transfert appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. La formule (2) montre que $\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H)$ appartient aussi à cet espace. Pour la même raison, $\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H)$ appartient à $Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(D_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*)$. Donc $\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H)$ appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\mathcal{O})\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Fixons un supplémentaire $\underline{\mathcal{W}}$ de $\underline{\mathcal{V}}^G_{0,M}$ dans $\underline{\mathcal{V}}^G_M$. Il existe un unique élément $\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B)\in\underline{\mathcal{W}}\otimes D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\mathcal{O})\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$ qui soit faiblement équivalent à $\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B)$. Dans la formule (3), on peut remplacer $\underline{\xi}^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H)$ par $\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H)$. Supposons que $\mathbf{f}$ soit instable, c'est-à-dire que son image dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ soit nulle. En vertu du théorème 1.4 et des propriétés énoncées en 2.4, les termes $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})$ et $S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(exp(H_L)\xi^{\tilde{L},st}(\boldsymbol{\delta},B,H^L),\mathbf{f})$ sont nuls. On obtient que $I^{\tilde{G}}(\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H),\mathbf{f})$ est faiblement équivalent à 0. On peut écrire

$$\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},H,B)=\sum_{i=1,\dots,n}u_i(H)\boldsymbol{\gamma}_i,$$

où $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ est une famille d'éléments linéairement indépendants de $\underline{\mathcal{W}}$ et les $\boldsymbol{\gamma}_i$ appartiennent à $D_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\mathcal{O})\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Alors

$$I^{\tilde{G}}(\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H),\mathbf{f})=\sum_{i=1,\dots,n}u_i(H)I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_i,\mathbf{f}).$$

Par définition de $\underline{\mathcal{W}}$, ceci ne peut être faiblement équivalent à 0 que si tous les coefficients sont nuls. Cela étant vrai pour tout $\mathbf{f}$ instable, les distributions $\boldsymbol{\gamma}_i$ sont stables. Grâce au lemme [I] 5.13, elles sont induites d'éléments de $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(\mathbb{R}))^*$ et appartiennent donc à $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\mathcal{O})\otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. Donc $\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B)$ prend ses valeurs dans l'espace voulu. Puisque ces valeurs sont stables, on peut remplacer le premier terme de (3) par $S^{\tilde{G}}(\xi^{\tilde{G},st}(\boldsymbol{\delta},B,H),\mathbf{f})$. Alors (3) devient la formule de l'énoncé de la proposition 6.3. Cela achève la démonstration. □

7 Le cas des groupes complexes

Considérons très brièvement le cas où le corps de base n'est plus $\mathbb{R}$ mais $\mathbb{C}$. On considère donc un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ défini sur $\mathbb{C}$. Tous les résultats de l'article restent valables. Pour le voir, on peut reprendre les démonstrations et constater qu'elles valent aussi bien dans le cas complexe. Certaines se simplifient : par exemple, les K-espaces disparaissent. On peut aussi appliquer les résultats du cas réel au triplet réel $(G_{\mathbb{R}},\tilde{G}_{\mathbb{R}},\mathbf{a}_{\mathbb{R}})$ déduit du triplet initial par restriction des scalaires. Cette deuxième méthode perturbe les hypothèses de récurrence. Pour $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$, celles-ci concernent des triplets complexes $(G',\tilde{G}',\mathbf{a}')$ vérifiant en tout cas $dim(G'_{SC})\leq dim(G_{SC})$. Pour $(G_{\mathbb{R}},\tilde{G}_{\mathbb{R}},\mathbf{a}_{\mathbb{R}})$, elles

concernent des triplets réels $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ vérifiant $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{\mathbb{R},SC}) = 2dim(G_{SC})$. En fait, on n'applique ces hypothèses de récurrence qu'à des triplets déduits de $(G_{\mathbb{R}}, \tilde{G}_{\mathbb{R}}, \mathbf{a}_{\mathbb{R}})$ par des opérations naturelles : passage à un Levi, à une composante neutre d'un commutant, à l'espace d'une donnée endoscopique etc... On constate que toutes ces opérations construisent des objets de même type que $(G_{\mathbb{R}}, \tilde{G}_{\mathbb{R}}, \mathbf{a}_{\mathbb{R}})$, c'est-à-dire déduits par restriction des scalaires d'objets définis sur $\mathbb{C}$. On voit ainsi que les hypothèses de récurrence posées pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ suffisent à assurer la validité des raisonnements pour le triplet $(G_{\mathbb{R}}, \tilde{G}_{\mathbb{R}}, \mathbf{a}_{\mathbb{R}})$.

Bibliographie

[A1] J. Arthur : *Germ expansions for real groups*, prépublication (2004)

[A2] ———— : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), p. 223-293

[A3] ———— : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p. 1-74

[A4]————- : *Parabolic transfer for real groups*, J. AMS 21 (2008), p. 171-234

[A5]————- : *On the transfer of distributions : weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 99 (1999), p. 209-283

[W1] J.-L. Waldspurger : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[W2] ———————— : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[I] ——————————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*, prépublication 2014

[II] ——————————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; définitions et énoncés des résultats*, prépublication 2014

[III] ——————————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves*, prépublication 2014

[IV] ——————————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue IV : transfert spectral archimédien*, prépublication 2014

Institut de mathématiques de Jussieu-CNRS
2 place Jussieu 75005 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr