



HAL
open science

Identification d'une représentation multimodèle des systèmes dynamiques non linéaires par la méthode des sous-espaces

Komi Midzodzi Pekpe, Gilles Mourot, Komi Gasso, José Ragot

► To cite this version:

Komi Midzodzi Pekpe, Gilles Mourot, Komi Gasso, José Ragot. Identification d'une représentation multimodèle des systèmes dynamiques non linéaires par la méthode des sous-espaces. Journées Doctorales d'Automatique, JDA'03, Jun 2003, Valenciennes, France. pp.CDROM. hal-00974357

HAL Id: hal-00974357

<https://hal.science/hal-00974357>

Submitted on 6 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Identification d'une représentation multimodèle des systèmes dynamiques non linéaires par la méthode des sous-espaces

PEKPE Komi Midzodzi[†], MOUROT Gilles[†], GASSO Komi[‡] et RAGOT José[†]

[†] Centre de Recherche en Automatique de Nancy - CNRS UMR 7039

CRAN-INPL, 2 Avenue de La Forêt de Haye. 54516 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex

[‡] PSI - FRE 2645

INSA Rouen, Avenue de l'Université - BP 08. 76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex

(kpekpe, gmourot, jragot)@ensem.inpl-nancy.fr, kgasso@insa-rouen.fr

Abstract – This paper discusses a new subspace identification method for the identification of MIMO nonlinear dynamic systems which are in the form of a weighed combination of local linear state-space models. This method is based on the estimation of Markov parameters and ERA algorithm in order to determine minimal and balanced state realisations of local models. A Monte Carlo experiment on an example illustrates the method performances.

keywords – Multimodel, subspace method, nonlinear system identification, Markov parameters.

Résumé – Cet article propose une méthode d'identification d'une représentation multi-modèle des systèmes dynamiques non linéaires MIMO par la technique des sous-espaces. Cette méthode d'identification des sous-espaces est basée sur l'estimation des paramètres de Markov et l'algorithme ERA qui permet d'obtenir sans itération une réalisation minimale et équilibrée pour chaque modèle local. Une simulation de Monte Carlo sur un exemple académique illustre les performances de la méthode proposée.

Mots Clef – Représentation multi-modèle, méthode des sous-espaces, paramètres de Markov, système dynamique non linéaire, identification de système.

1 Introduction

Que ce soit pour élaborer une loi de commande d'un système, prédire son comportement ou encore effectuer un diagnostic de fonctionnement, l'identification des systèmes dynamiques non linéaires est un point essentiel de l'automatique. Différentes représentations non linéaires ont été proposées dans la littérature. Les plus classiques sont celles utilisant des structures de type NARMAX [1] ou plus particulières comme les modèles d'Hammerstein et de Wiener [2]. Mais il est souvent très difficile de représenter le comportement du système dans toute sa plage de fonctionnement avec ces structures.

L'intérêt de l'approche multimodèle est de représenter le système par un ensemble de modèles simples (linéaires) valides dans une zone de fonctionnement limitée. Le modèle global est obtenu par interpolation des modèles locaux [3]. Des fonctions d'activation déterminent le degré d'activation de chaque modèle dans chaque zone et assurent une transition entre les différents modèles.

Cette approche a surtout été utilisée pour l'identification d'une représentation entrée/sortie

des systèmes dynamiques non linéaires multi-entrées/mono-sortie (MISO) [3] [4] [5] [6] [7]. L'identification d'un multi-modèle comporte différents aspects dont la recherche d'une structure (définitions des zones de fonctionnement et des structures des modèles locaux) ayant de bonnes capacités de généralisation et l'estimation des paramètres de celle-ci. Ces points ont été abordés dans les articles précédemment mentionnés.

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement à l'identification des différents modèles linéaires locaux multi-entrées/multi-sorties (MIMO), notre approche pouvant être utilisée avec n'importe quelle méthode existante de détermination des zones de fonctionnement (nombre et position).

Pour ce faire, nous proposons une nouvelle formulation de la méthode des sous-espaces. Les méthodes des sous-espaces permettent d'identifier une représentation d'état des systèmes dynamiques linéaires MIMO à partir des mesures des entrées et des sorties. Contrairement à la plupart des méthodes des sous-espaces qui passent par une étape de détermination de la matrice d'observabilité et une estimation de la matrice des séquences d'état pour déterminer l'ordre et une réalisation du modèle [8], notre approche est basée sur l'estimation des paramètres de Markov et l'algorithme ERA [9] pour obtenir une réalisation minimale et équilibrée pour chaque modèle local. De plus, contrairement aux récents travaux de Verdult [10] sur l'estimation paramétrique d'un multimodèle (MIMO), notre approche n'est pas itérative.

Dans la section 2, la structure du multimodèle considérée est introduite. Nous définissons, dans la section 3, les notations utilisées dans la suite. Dans la section 4, après avoir expliqué le principe de la méthode d'identification proposée, nous développons deux variantes de cette méthode permettant d'identifier soit un modèle local particulier ou l'ensemble des modèles locaux. Enfin, dans la section 5, les deux techniques d'identification établies dans cet article sont testées sur un exemple de simulation.

2 Position du problème

Nous supposons que le système étudié peut être représenté par un multi-modèle dont la sortie est

définie par :

$$y_k = \sum_{s=1}^h \omega_s(z_k) y_{s,k} \quad (1)$$

où $y_{s,k} \in \mathbb{R}^l$ est la sortie du $s^{ième}$ modèle local, $\omega_s(z_k)$ est le degré d'activation correspondant à ce même modèle local et h indique le nombre de modèles locaux. Le vecteur d'activation z_k caractérise la zone de fonctionnement dans laquelle le système évolue.

Les degrés d'activation sont définis tels qu'à chaque instant :

$$0 \leq \omega_s(z_k) \leq 1, \quad \sum_{s=1}^h \omega_s(z_k) = 1$$

Chaque modèle local s est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x_{s,k+1} = A_s x_{s,k} + B_s u_k + K_s e_k \\ y_{s,k} = C_s x_{s,k} + D_s u_k + e_k \end{cases} \quad (2)$$

où $x_{s,k} \in \mathbb{R}^{n_s}$ est le vecteur d'état du $s^{ième}$ modèle local, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées et $e_k \in \mathbb{R}^l$ est un bruit blanc décorréolé avec les entrées :

$$\mathbf{E}e_k e_t = \begin{cases} R > 0 & , k = t \\ 0 & , \text{ailleurs.} \end{cases}$$

A partir de q mesures des entrées-sorties et des h fonctions d'activation supposées connues, notre objectif est d'identifier les h modèles locaux, i.e. :

- les ordres n_s des modèles locaux,
- les réalisations (A_s, B_s, C_s, D_s) des modèles locaux.

Nous proposons pour cela une méthode des sous-espaces utilisant une écriture matricielle particulière obtenue par "empilement" des équations de sorties. Dans un premier temps, nous allons définir les notations utilisées dans la suite.

3 Notations

La matrice des séquences de sortie du modèle global est définie par :

$$Y^i = (y_i \ y_{i+1} \ \dots \ y_{i+j-1}) \quad (3)$$

avec $q = i + j - 1$ et $i > n_s$.

La matrice de Hankel d'entrée est définie par :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i & u_{i+2} & \dots & u_{i+j-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

La matrice E de Hankel des bruits est définie de la même manière.

La matrice des séquences d'état du $s^{ième}$ modèle local est définie par :

$$X_s = (x_{s,1} \ x_{s,2} \ \dots \ x_{s,j}) \quad (5)$$

La matrice diagonale des degrés d'activation du modèle local s est définie par :

$$\Omega_s = \begin{pmatrix} \omega_s(z_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_s(z_{i+1}) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_s(z_{i+j-1}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

La matrice des séquences de sortie du modèle local s est définie par :

$$Y_s^i = (y_{s,i} \ y_{s,i+1} \ \dots \ y_{s,i+j-1}) \quad (7)$$

La matrice pondérée des séquences de sortie du modèle local s est quant à elle définie par :

$$Y_{s,\omega}^i = Y_s^i \Omega_s \quad (8)$$

La matrice de Hankel d'entrée pondérée du modèle global est définie par :

$$U_\omega = [U_{1,\omega}^T \ U_{2,\omega}^T \ \dots \ U_{h,\omega}^T]^T \quad (9)$$

où

$$U_{s,\omega} = U \Omega_s \quad (10)$$

est la matrice de Hankel d'entrée pondérée du modèle local s .

La matrice d'observabilité étendue $\Gamma_{i,s}$ du $s^{ième}$ modèle local est définie par :

$$\Gamma_{i,s} = \begin{pmatrix} C_s \\ C_s A_s \\ \vdots \\ C_s A_s^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l \times i) \times n_s} \quad (11)$$

La matrice de commandabilité à rebours du $s^{ième}$ modèle $\Delta_{i,s}$ est décrite par :

$$\Delta_{i,s} = (B_s \ A_s B_s \ \dots \ A_s^{i-1} B_s) \quad (12)$$

La matrice des paramètres de Markov de la partie déterministe $H_{s,i}^d$ du $s^{ième}$ modèle local et de la partie stochastique $H_{s,i}^{st}$ de ce modèle sont définies par ¹ :

$$H_{s,i}^d = (C_s A_s^{i-2} B_s \ C_s A_s^{i-3} B_s \ \dots \ C_s B_s \ D_s) \quad (13)$$

$$H_{s,i}^{st} = (C_s A_s^{i-2} K_s \ C_s A_s^{i-3} K_s \ \dots \ C_s K_s \ I) \quad (14)$$

La matrice H_i^d des paramètres de Markov de la partie déterministe est notée :

$$H_i^d = [H_{1,i}^d \ H_{2,i}^d \ \dots \ H_{h,i}^d] \quad (15)$$

4 Identification du système

Afin d'identifier les modèles locaux composant le modèle global, nous allons estimer, dans un premier temps, les matrices contenant les paramètres de Markov des modèles locaux. Puis pour déterminer l'ordre et les réalisations des modèles locaux à partir de cette estimation des paramètres de Markov, nous utilisons l'algorithme ERA (Eigenvalue Realization Algorithm) [9].

¹Les exposants 'd' et 'st' signifient respectivement 'déterministe' et 'stochastique'

4.1 Estimation des paramètres de Markov

Relation matricielle d'entrée-sortie locale

La relation matricielle (16) relie la matrice des séquences de sortie pondérée du modèle local s à la matrice des séquences d'état et aux matrices de Hankel d'entrée et de bruit de ce modèle.

$$Y_{s,\omega}^i = C_s A_s^{i-1} X_s \Omega_s + H_{s,i}^d U_{s,\omega} + H_{s,i}^{st} E \Omega_s \quad (16)$$

Démonstration

La démonstration est établie dans le cas déterministe; le cas stochastique est facilement établi en généralisant le résultat obtenu.

De l'égalité suivante :

$$Y_{s,\omega}^i = (\omega_s(z_i) y_{s,i} \dots \omega_s(z_{i+j-1}) y_{s,i+j-1})$$

nous déduisons :

$$\begin{aligned} & Y_{s,\omega}^i = \\ & \left(\omega_s(z_i) (C_s A_s^{i-1} x_{s,1} + C_s A_s^{i-2} B_s u_1 + \dots + D_s u_i) \right. \\ & \quad \dots \\ & \left. \omega_s(z_{i+j-1}) (C_s A_s^{i-1} x_{s,j} + C_s A_s^{i-2} B_s u_j + \dots \right. \\ & \quad \left. + D_s u_{i+j-1}) \right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes dépendant de l'état et les termes dépendant des entrées, on obtient :

$$\begin{aligned} & Y_{s,\omega}^i = \\ & \left(\omega_s(z_i) C_s A_s^{i-1} x_{s,1} \dots \omega_s(z_{i+j-1}) C_s A_s^{i-1} x_{s,j} \right) \\ & + \left(\omega_s(z_i) (C_s A_s^{i-2} B_s u_1 + \dots + D_s u_i) \dots \right. \\ & \left. \omega_s(z_{i+j-1}) (C_s A_s^{i-2} B_s u_j + \dots + D_s u_{i+j-1}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_{s,\omega}^i = C_s A_s^{i-1} X_s \Omega_s + \\ & H_{s,i}^d \begin{pmatrix} \omega_s(z_i) u_1 & \dots & \omega_s(z_{i+j-1}) u_j \\ \omega_s(z_i) u_2 & \dots & \omega_s(z_{i+j-1}) u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_s(z_i) u_i & \dots & \omega_s(z_{i+j-1}) u_{i+j-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin nous obtenons :

$$Y_{s,\omega}^i = C_s A_s^{i-1} X_s \Omega_s + H_{s,i}^d U_{s,\omega} \quad \blacksquare$$

On peut noter une grande similitude entre la relation (16) et la relation matricielle classique des sous-espaces qui lie les matrices de Hankel d'entrée et sortie (voir [8] page 139 équation (5.4)). Il semblerait alors intéressant de faire une projection qui annulerait la matrice des séquences d'état pondérée et permettrait d'estimer la matrice $H_{s,i}^d$ des paramètres de Markov du modèle local s (voir [11]). Malheureusement, la présence des degrés d'activation dans l'équation (1) ne permet pas de réaliser cette projection. De plus, la matrice des séquences d'état X_s du $s^{ième}$ modèle local est inconnue.

Pour éviter d'estimer cette matrice des séquences d'état, nous supposons que chaque modèle local est stable. A partir d'un ordre i donné, la relation entrée/sortie précédente devient :

$$Y_{s,\omega}^i \simeq H_{s,i}^d U_{s,\omega} + H_{s,i}^{st} E \Omega_s \quad (17)$$

Les sorties sont expliquées uniquement par les entrées, le modèle local est alors approché par un FIR (filtre à réponse impulsionnelle finie).

Remarque 1 – Nous choisirons alors les entrées décalées dans le temps comme vecteur z_k dans l'équation (1).

Démonstration

$$Y_{s,\omega}^i = C_s A_s^{i-1} X_s \Omega_s + H_{s,i}^d U_{s,\omega} + H_{s,i}^{st} E \Omega_s$$

Puisque la matrice A_s est supposée stable, la matrice des séquences d'état est bornée. De plus, la matrice de pondération Ω_s ne contient que des valeurs comprises entre 0 et 1, elle est aussi bornée. Nous pouvons alors négliger le terme $C_s A_s^{i-1} X_s \Omega_s$ à partir d'un ordre i donné. \blacksquare

On peut alors estimer la matrice $H_{s,i}^d$ des paramètres de Markov du modèle s par une technique des moindres carrés. Mais cela suppose la connaissance de la sortie de ce modèle (matrice $Y_{s,\omega}^i$) dont nous ne disposons pas.

Dans la suite, nous proposons deux méthodes pour estimer les h matrices $H_{s,i}^d$ à partir de la sortie globale.

Estimation de la matrice $H_{p,i}^d$ du modèle p

Le théorème suivant permet d'estimer la matrice $H_{p,i}^d$ des paramètres de Markov du modèle p par la projection oblique des sorties parallèlement à l'espace engendré par les entrées pondérées correspondant à tous les modèles locaux excepté le $p^{ième}$ sur l'espace engendré par les entrées pondérées du $p^{ième}$ modèle.

Théorème 1

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. les matrices A_s ($s = 1, \dots, h$) sont stables,
2. la matrice U_ω est de plein rang

alors

$$Y^i \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \left(U_{p,\omega} \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \right)^{(-)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_{p,i}^d \quad (18)$$

où $\bar{U}_{p,\omega}$ est la matrice U_ω (éq. 9) privée de $U_{p,\omega}$ (éq. 10) :

$$\bar{U}_{p,\omega} = [U_{1,\omega}^T \dots U_{p-1,\omega}^T U_{p+1,\omega}^T \dots U_{h,\omega}^T]^T \quad (19)$$

et

$$\Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} = I - \bar{U}_{p,\omega}^T (\bar{U}_{p,\omega} \bar{U}_{p,\omega}^T)^{(-)} \bar{U}_{p,\omega} \quad (20)$$

où $A^{(-)}$ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de A .

Remarque 2 – La condition 2 est satisfaite si :

- $j > m \times i$
- l'entrée est d'excitation persistante d'ordre i ,
- aucune zone de fonctionnement est dépourvue de données, i.e. Ω_s ($s = 1, \dots, h$) est différent de la matrice nulle,
- les zones de fonctionnement ne se recouvrent pas trop fortement, i.e. $\Omega_s \neq \Omega_p$ ($s \neq p$).

Démonstration

Des égalités (1), (3), (8) et (17) :

$$Y^i = \sum_{s=1}^h Y_{s,\omega}^i \quad (21)$$

nous déduisons :

$$Y^i \simeq \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^h (H_{s,i}^d U_{s,\omega} + H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s) + H_{p,i}^d U_{p,\omega} + H_{p,i}^{\text{st}} E \Omega_s$$

$$Y^i \simeq [H_{1,i}^d \dots H_{p-1,i}^d H_{p+1,i}^d \dots H_{h,i}^d] \bar{U}_{p,\omega} + H_{p,i}^d U_{p,\omega} + \sum_{s=1}^h H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s$$

Par projection, nous éliminons le terme $\bar{U}_{p,\omega}$:

$$Y^i \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \simeq 0 + H_{p,i}^d U_{p,\omega} \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} + \sum_{s=1}^h H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp}$$

Calculons à présent l'espérance mathématique du terme b_1 représentant influence du bruit (matrice de Hankel E) sur l'estimation de la matrice $H_{p,i}^d$:

$$b_1 = \sum_{s=1}^h H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \left(U_{p,\omega} \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \right)^{(-)}$$

Les matrices $H_{s,i}^{\text{st}}$ ($s = 1, \dots, h$) étant constantes, nous nous limitons au calcul de l'espérance mathématique du terme b_2 suivant :

$$b_2 = E \Omega_s \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \left(U_{p,\omega} \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} \right)^{(-)}$$

Du fait de la symétrie et de l'idempotence de la matrice $\Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp}$, nous avons :

$$b_2 = E \Omega_s \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} U_{p,\omega}^T \left(U_{p,\omega} \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} U_{p,\omega}^T \right)^{-1}$$

Développons cette expression à partir de la définition de la projection orthogonale $\Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp}$:

$$\mathbf{E} [b_2] = \underbrace{\mathbf{E} [E \Omega_s U_{p,\omega}^T b_5]}_{=0} - \underbrace{\mathbf{E} [E \Omega_s \bar{U}_{p,\omega}^T b_3 b_4 b_5]}_{=0}$$

où $b_3 = (\bar{U}_{p,\omega} \bar{U}_{p,\omega}^T)^{-1}$, $b_4 = (\bar{U}_{p,\omega} U_{p,\omega}^T)$ et $b_5 = (U_{p,\omega} \Pi_{\bar{U}_{p,\omega}^\perp} U_{p,\omega}^T)^{-1}$.

Les entrées étant supposées indépendantes du bruit de moyenne nulle, l'espérance mathématique du terme additif dépendant du bruit est nulle et l'estimation de la matrice $H_{p,i}^d$ des paramètres de Markov est donc asymptotiquement non biaisée. ■

En utilisant le théorème 1, il est possible d'estimer l'une après l'autre les matrices des paramètres de Markov des modèles locaux. En vue de diminuer le nombre d'opérations effectuées dans l'estimation des matrices des paramètres de Markov, nous établissons dans la suite un théorème qui permet d'estimer toutes les matrices des paramètres de Markov en une seule étape.

Estimation de la matrice H_i^d

L'estimation des h matrices des paramètres de Markov des modèles locaux est réalisée par la méthode des moindres carrés.

Théorème 2

Si les conditions du théorème 1 sont vérifiées alors

$$Y^i U_\omega^T (U_\omega^T U_\omega)^{-1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_i^d \quad (22)$$

Démonstration

Des égalités (1) et (17), nous déduisons :

$$Y^i \simeq \sum_{s=1}^h (H_{s,i}^d U_{s,\omega} + H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s)$$

$$Y^i \simeq [H_{1,i}^d H_{2,i}^d \dots H_{h,i}^d] U_\omega + \sum_{s=1}^h H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s$$

Une estimation non biaisée de la matrice H_i^d est facilement obtenue par la méthode des moindres carrés :

$$[H_{1,i}^d H_{2,i}^d \dots H_{h,i}^d] \simeq Y^i U_\omega^T (U_\omega^T U_\omega)^{-1}$$

En effet, l'espérance mathématique du terme additif dépendant du bruit :

$$\sum_{s=1}^h H_{s,i}^{\text{st}} E \Omega_s U_\omega^T (U_\omega^T U_\omega)^{-1}$$

est nulle puisque les entrées sont supposées indépendantes du bruit de moyenne nulle. ■

4.2 Estimation des ordres et des réalisations des modèles locaux

Disposant à présent des paramètres de Markov des h modèles locaux, nous pouvons déterminer l'ordre n_s et une réalisation (A_s, B_s, C_s, D_s) pour chaque modèle local s . Puisque les modèles locaux recherchés sont linéaires, nous pouvons utiliser les algorithmes développés dans le cas linéaire. Pour déterminer l'ordre et une réalisation minimale et équilibrée, nous avons adopté l'algorithme ERA [9] qui utilise les $i - 1$ paramètres de Markov de la matrice $H_{s,i}^d$.

Algorithme ERA

1. Construire les matrices de Hankel contenant les paramètres de Markov $\mathcal{H}_{\nu,s}^0$ et $\mathcal{H}_{\nu,s}^1$:

$$\mathcal{H}_{\nu,s}^r = \begin{pmatrix} C_s A_s^r B_s & C_s A_s^{r+1} B_s & \dots & C_s A_s^{r+\nu-1} B_s \\ C_s A_s^{r+1} B_s & C_s A_s^{r+2} B_s & \dots & C_s A_s^{r+\nu} B_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_s A_s^{r+\nu-1} B_s & C_s A_s^{r+\nu} B_s & \dots & C_s A_s^{r+2\nu-2} B_s \end{pmatrix} \quad (23)$$

Noter que $\nu = \text{int}(i/2)$ et $i > 2 \min(n_s/l, n_s/m) + 1^2$.

²int(f) désigne la partie entière de f.

2. Réaliser la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathcal{H}_{\nu,s}^0$:

$$\mathcal{H}_{\nu,s}^0 = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \simeq U_1 S_1 V_1^T \quad (24)$$

où S_2 contient toutes les valeurs singulières négligeables.

L'ordre n_s du $s^{ième}$ modèle est donné par le nombre de valeurs singulières de S_1 .

3. Déterminer les matrices (A_s, B_s, C_s, D_s) :

- les matrices d'observabilité et de commandabilité étendues sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \Gamma_{\nu,s} = U_1 S_1^{1/2} \\ \Delta_{\nu,s} = S_1^{1/2} V_1^T \end{cases} \quad (25)$$

- la matrice D_s est obtenue directement en prenant les m dernières lignes de la matrice $H_{s,i}^d$.

- la matrice C_s est prise comme étant les l premières lignes de $\Gamma_{\nu,s}$,

- la matrice B_s est égale aux m premières colonnes de $\Delta_{\nu,s}$,

- la matrice A_s est donnée par la formule :

$$A_s = S_1^{-1/2} U_1^T \mathcal{H}_{\nu,s}^1 V_1 S_1^{-1/2} \quad (26)$$

5 Exemple de simulation

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x_{s,k+1} = A_s x_{s,k} + B_s u_k \\ y_{s,k} = C_s x_{s,k} + D_s u_k + e_k \end{cases} \quad s=1, 2, 3 \quad (27)$$

où les matrices prennent les valeurs suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.98 & -0.04 \\ -0.12 & 0.81 & -0.03 \\ -0.02 & -0.05 & -0.18 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.7 \\ 0.71 & -0.5 \\ 0.8 & 0.47 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -0.55 & 0.2 & 0.8 \\ 0.45 & 0.3 & 0.58 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.63 \\ -0.32 & 0.95 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.61 & -0.75 & 0.34 \\ 1.43 & -0.75 & 0.59 \\ -0.64 & 0.55 & 0.24 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.6 \\ 0.32 & -0.66 \\ 0.3 & 0.82 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.48 & 0.9 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -0.67 & 0.91 \\ 0.58 & -0.39 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -0.75 & -0.29 \\ 0.38 & 0.92 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} -0.26 & 0.58 \\ -0.81 & 0.19 \end{pmatrix}$$

Nous disposons de $q = 3000$ mesures des entrées et sorties. Les entrées sont des séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA) d'amplitudes variables. $e_k \in \mathbb{R}^2$ est un bruit blanc gaussien et $\mathbf{E}(e_k e_k^T) = 0,65 \times \mathbf{I}_2$. Le rapport signal sur bruit est de 50.5 dB pour la première sortie et 41.6 dB pour la seconde sortie.

La variable d'activation est la première entrée à l'instant $k - 1$. Les fonctions d'activation des différents modèles sont tracées sur la figure 1.

Détermination de l'ordre

Le tracé des valeurs singulières nous permet de trouver les ordres "réels" : un ordre trois pour les deux premiers modèles locaux et un ordre deux pour le troisième (figure 2).

Estimation des pôles

La figure 3 montre les pôles estimés par la première méthode pour une simulation de Monte Carlo de 100 expériences. Les résultats obtenus par la seconde méthode sont identiques. Comme on le voit sur ces figures, les estimées obtenues sont proches des valeurs réelles.

Dans cette simulation, nous avons également comparé les zéros estimés aux zéros des modèles locaux et nous avons obtenu des résultats identiques à ceux obtenus pour les pôles.

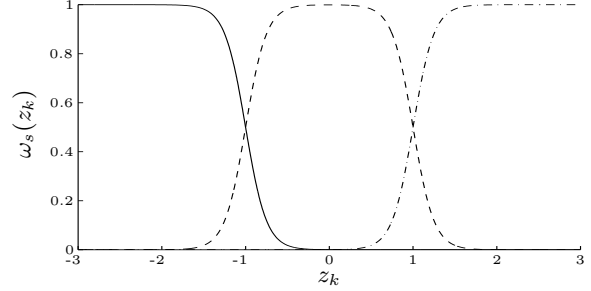


FIG. 1 - Les fonctions d'activation (— premier modèle; -- deuxième modèle; -.- troisième modèle)

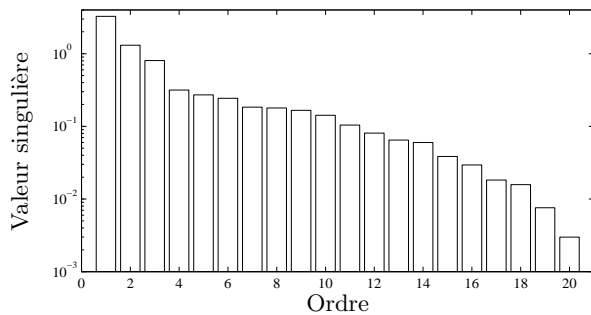
6 Conclusion

Nous avons proposé une méthode des sous-espaces pour l'identification d'une représentation multimodèle des systèmes dynamiques non linéaires MIMO. Dans l'approche multi-modèle, le système est modélisé comme la combinaison pondérée de modèles localement valides. Les modèles locaux sont identifiés à partir d'une estimation des paramètres de Markov et de l'algorithme ERA afin de déterminer une réalisation minimale et équilibrée de chaque modèle. Deux variantes de la méthode permettent d'identifier soit un modèle local particulier ou l'ensemble des modèles locaux. Dans la suite du travail, nous allons chercher à étendre la méthode en levant la condition sur la stabilité des modèles locaux. Nous pourrions alors combiner notre méthode avec les méthodes de détermination des zones de fonctionnement pour identifier un système.

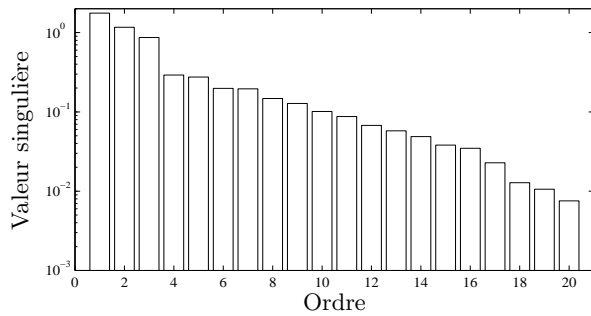
Références

- [1] Chen S. et Billings S. A., Representation of non-linear systems : the NARMAX model. Int. Journal of Control, Vol. 49, n°3, pp. 1013-1032, 1989.
- [2] Haber R., Unbehauen H., Structure identification of nonlinear dynamic systems- A survey on input/output approaches. Automatica, Vol. 26, n°4, pp. 651-677, 1990.
- [3] Johansen T. A. and Foss A. B., Constructing Narmax using Armax. Int. Journal of Control, Vol. 58, n°5, pp. 1125-1153, 1993.
- [4] Babuška R., *Fuzzy modelling for control*. International Series in Intelligent Technologies, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1998.
- [5] Nelles O., Nonlinear system identification with neuro-fuzzy methods, Chapter in Intelligent hybrid systems, Da Ruan (Ed.), Kluwers Academic publishers, Dordrecht, 1997.

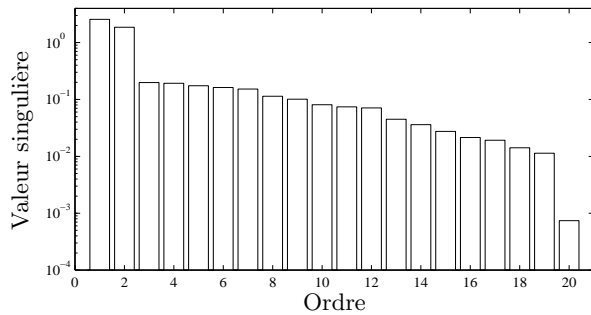
- [6] Boukhris A., Mourot G., Ragot J., Non-linear dynamic system identification : a multiple model approach, *Int. Journal of control*, Vol. 72, n°7/8, pp. 591-604, 1999.
- [7] Gasso K., Gilles M., and Ragot J., Structure identification in multiple model representation : elimination and merging of local models. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2992-2997, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [8] Van Overschee P. and De Moor B., *Subspace identification for linear systems- Theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [9] Juang C., *Applied system identification*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [10] Verdult V., *Nonlinear system identification : a state-space approach*. Ph.D thesis, University of Twente, 2000.
- [11] Pekpe K. M., Gasso K., Mourot G. et Ragot J., Identification par la méthode des sous-espaces : utilisation des paramètres de Markov. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nantes, 8-10 juillet 2002.



a) détermination de l'ordre du premier modèle

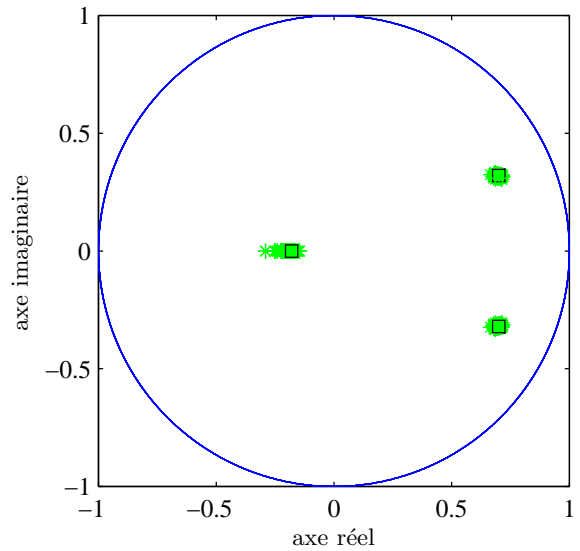


b) détermination de l'ordre du second modèle

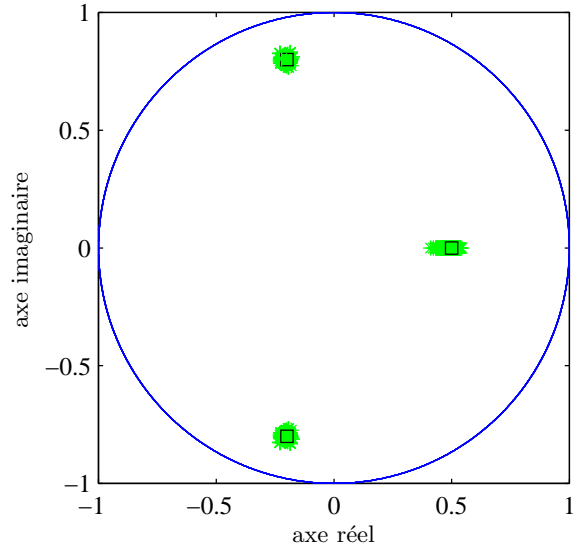


c) détermination de l'ordre du troisième modèle

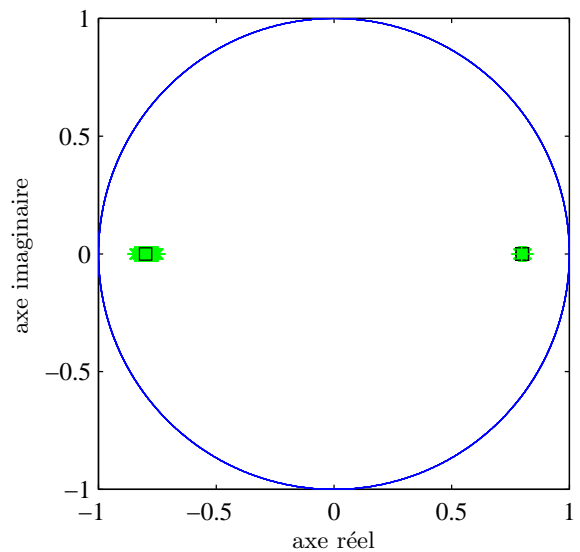
FIG. 2 – Détermination de l'ordre des modèles locaux par la première méthode



a) pôles du premier modèle



b) pôles du second modèle



c) pôles du troisième modèle

FIG. 3 – Comparaison des pôles estimés et simulés des modèles locaux (* pôles estimés ; □ pôles simulés)