



**HAL**  
open science

# théorèmes de la cible et émergence naturelle des ultra ltres

Christophe Chalons

► **To cite this version:**

| Christophe Chalons. théorèmes de la cible et émergence naturelle des ultra ltres. 1999. hal-00974318

**HAL Id: hal-00974318**

**<https://hal.science/hal-00974318>**

Preprint submitted on 6 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Théorèmes de la cible et émergence naturelle des ultrafiltres

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

April 6, 2014



# Contents

0.1	Introduction . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Opérations <i>matches</i> à deux joueurs</b>	<b>5</b>
1.1	Game-étermination vs superdétermination . . . . .	5
1.2	preuves des lemmes . . . . .	5
1.2.1	lemme (a) . . . . .	5
1.2.2	lemme (b) . . . . .	5
1.2.3	Remarque importante sur les jeux habituels . . . . .	6
1.3	Phénomènes "targétiens" généraux sur les opérations <i>matches</i> . . . . .	6
1.3.1	Définitions: . . . . .	6
1.3.2	Preuve brutale . . . . .	7
1.4	Une remarque . . . . .	8
1.5	Théorèmes de la cible (target) . . . . .	8
1.6	Le cas des jeux de longueur $\omega$ . . . . .	8
1.6.1	Exemple naturel . . . . .	10
1.7	Pas de notion de stratégies à la fois symétriques, déterminées, "éternelle" . . . . .	10
1.8	Preuve du théorème . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Réflexion platonicienne autour de la notion de jeu, sur quelques exemples</b>	<b>13</b>
2.0.1	Exemple1 . . . . .	13
	Remarque . . . . .	13
2.0.2	Exemple2 . . . . .	13
2.0.3	Exemple3 . . . . .	14
2.1	Limites à la détermination . . . . .	14
2.2	Les jeux de type courses . . . . .	15
2.3	L'approche <i>point fixe</i> des jeux quelconques . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Emergence des ultrafiltres</b>	<b>17</b>
3.1	Introduction . . . . .	17
3.2	Depuis le target . . . . .	17
3.3	Depuis les jeux . . . . .	17
3.4	Depuis les grands cardinaux . . . . .	18
3.5	Depuis les probabilités intuitives . . . . .	18
3.6	Un ordre total . . . . .	18
3.6.1	Ultrafiltre sigma-additif . . . . .	18
3.6.2	L'ultrafiltre précédent est presque totalement additif . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Récapitulation des théorèmes</b>	<b>21</b>
4.0.3	Application aux théorèmes de la cible . . . . .	21
	Le jeu $G(E, F, \leq, n, \phi, \psi)$ . . . . .	21
	Le jeu $H(E, F, \leq \phi, \psi, A)$ . . . . .	21
	Condition de gain . . . . .	21

4.0.4	Théorèmes de la cible avec option d'obligation d'éternité lors d'un coup . . . . .	21
	Le jeu $GG(E, F, \leq, n, \phi)$ . . . . .	22
	Le jeu $HH(E, F, \leq, \phi)$ . . . . .	22
	Condition de gain . . . . .	22
4.0.5	Théorèmes min-max de la cible . . . . .	22
4.0.6	Remarques . . . . .	23
4.1	Quand le retournement est inoffensif . . . . .	23

## 0.1 Introduction

Nous donnons les preuves des "[target theorems](#)" publiés en 1999 au CRAS. Une version ultérieure précisera le lien entre les phénomènes de target et l'éternité des degrés de Tukey. Nous énonçons en appendice les théorèmes émergeant des raisonnements abstraits qui précèdent.

# Chapter 1

## Opérations *matches* à deux joueurs

### 1.1 Game-étermination vs superdétermination

Soit  $S_1, S_2, M$  trois ensembles (quelconques) et  $match$  une application de  $S_1 \times S_2$  dans  $M$ .

**Définition 1** *Le triplet  $(S_1, S_2, M)$  sera appelée une cour des jeux. De plus:*

- *match est dite "réactive" quand: pour tous  $x, y, u, v, p : p = match(x, y) = match(u, v) \Rightarrow match(x, v) = match(u, y) = p$*
- *match est dite "déterminée" quand pour toute partie  $A$  de  $M$ , ou bien il existe  $x \in S_1 : \forall y \in S_2 : match(x, y) \in A$  ou bien il existe  $x \in S_2 : \forall y \in S_1 : match(y, x) \notin A$*
- *match est dite "superdéterminée" quand pour toutes applications allant respectivement de  $S_1$  dans  $S_2$  et de  $S_2$  dans  $S_1$  il existe  $(x, y) \in S_1 \times S_2$  tel que  $match(x, f(x)) = match(g(y), y) = match(x, y)$*

**Lemme 2** (a): *toute cour des jeux superdéterminée est déterminée*

Ce lemme affirme une sorte de "supériorité" du regard fonctionnel sur le regard "binaire gagner/perdre". Le lemme suivant réunit:

**Lemme 3** (b): *toute cour des jeux réactive et déterminée est superdéterminée*

### 1.2 preuves des lemmes

#### 1.2.1 lemme (a)

(utilise l'axiome du choix): soit  $A$  une partie de  $M$ . Supposons que pour tout  $x \in S_1$  il existe  $f(x) \in S_2 : match(x, y) \notin A$  Supposons que pour tout  $x \in S_2$  il existe  $g(x) \in S_1 : match(g(x), x) \in A$  La superdétermination entraîne alors l'existence de  $(x, y) \in S_1 \times S_2$  tel que  $match(x, f(x)) = match(g(y), y)$  ce qui est une contradiction puisque l'un appartient à  $A$  et l'autre non.

#### 1.2.2 lemme (b)

(utilise l'axiome du choix): soit  $f, g$  comme dans l'énoncé de (b). Soit  $A$  l'ensemble des éléments  $match(g(x), x)$  quand  $x$  parcourt  $S_2$ . Il existe donc forcément  $e \in S_1$  tel que  $\forall y \in S_2 : match(e, y) \in A$  En particulier  $match(e, f(e)) \in A$  donc il existe  $u \in S_2$  tel que  $match(e, f(e)) = match(g(u), u)$ . Et la réactivité de  $match$  entraîne alors que  $match(e, f(e)) = match(g(u), u) = match(e, u)$

### 1.2.3 Remarque importante sur les jeux habituels

Tous les jeux à information parfaite, à deux joueurs, définis en général dans le cadre de la recherche mathématique sont des cours de jeux réactive

## 1.3 Phénomènes "targétiens" généraux sur les opérations matchs

Dans ce paragraphe, nous regardons des opérations matchs  $C := (S_1, S_2, M_1 \times M_2, match)$  presque générales. Leur particularité est que chaque match se partage en deux composantes que l'on va considérer comme "l'espace intime" de chaque joueur.

Pour  $(x_1, x_2) = match(a, b)$  nous noterons  $match_i(a, b) := x_i$

### 1.3.1 Définitions:

- nous dirons que C est scindée quand pour tout  $x \in M_1$ , il existe  $a \in S_1$ , pour tout  $b \in S_2$   $match_1(a, b) = x$  et pour tout  $x \in M_2$ , il existe  $a \in S_2$ , pour tout  $b \in S_1$   $match_2(a, b) = x$
- nous dirons que C est pseudocompact à gauche quand pour toute suite d'éléments  $a_n$  de  $S_1$ , il existe une suite d'éléments  $b_n$  de  $S_2$  pour tout entier n:  $match_2(a_n, b_n) = match_1(a_{n+1}, b_{n+1})$
- nous dirons que C est pseudocompact à droite quand pour toute suite d'éléments  $a_n$  de  $S_2$ , il existe une suite d'éléments  $b_n$  de  $S_1$  pour tout entier n:  $match_2(b_n, a_n) = match_1(b_{n+1}, a_{n+1})$
- nous dirons que C est symétrique quand  $M_1 = M_2 =: N$  et  $S_1 = S_2 =: S$  et  $\forall (x, y) \in S^2 : match(x, y) = p(match(y, x))$  où  $p(x, y) := (y, x)$  pour tout x,y dans N.
- nous dirons que C est composable à gauche quand: pour tous  $a, b$  dans  $S_1$  il existe  $c \in S_1$  pour tous u,v dans  $S_2$ , pour tous x,y,z: si  $match(a, u) = (x, y)$  et  $match(b, v) = (y, z)$  alors  $match(c, v) = (x, z)$

Les résultats suivants montrent que les notions d'ultrafiltres, en particulier d'ultrafiltres qui sont stables par intersection dénombrable, **émergent** naturellement de principes de détermination et de compacité de cours de jeu .

**Théorème 4** Soit  $C := (S, S, M \times M, match)$  une cour de jeu pseudocompacte à droite et à gauche, composable à gauche, et déterminée soit  $f$  une application de  $M$  dans  $\mathbb{N}$

Il existe alors un unique entier  $n$  vérifiant:

il existe  $a \in S_1$  tel que pour tout  $b \in S_2$ , pour tous  $x, y$  : si  $match(a, b) = (x, y)$  alors  $f(x) > f(y)$  ou  $f(x) = f(y) = n$

L'existence est assurée par la seule hypothèse de pseudocompacité (en plus de la détermination), l'unicité par l'hypothèse de composabilité

Il y a plusieurs façons de démontrer ce théorème, mais nous allons décrire un cheminement très progressif qui illustre une particularité des ordres totaux dans le présent contexte

Avant voici une démonstration "brutale":

### 1.3.2 Preuve brutale

Soit  $j$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  tel que chaque entier  $a$  a une infinité d'antécédents par  $j$ . Soit  $A(n)$  le sous-ensemble de  $M \times M$  constituée des couples  $(x, y)$  tels que  $f(x) > f(y)$  ou  $f(x) = f(y) = j(n)$

Supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $b_n \in S_2$  tel que pour tout  $a \in S_1$  :  $match(a, b_n) \notin A_n$  Soit une suite de  $a_n \in S_1$  telle que pour tout  $n$ :

$$match_1(a_n, b_n) = match_2(a(n+1), b(n+1))$$

Posons  $u(n) := match_2(a_n, b_n)$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $match(a_n, b_n) = (u(n+1), u(n)) \notin A(n)$ , donc  $f(u(n+1)) \leq f(u(n))$  (1) et  $non(f(u(n+1)) = f(u(n)) = j(n))$  (2)

La suite  $n \mapsto f(u(n))$  est décroissante, donc stationne à une valeur  $v$ , à partir d'un certain rang. Soit  $n$  un entier assez grand tel que  $j(n) = v$ . Cela offre une contradiction avec (2).

Il existe donc un entier  $n$  et (détermination) un élément  $a \in S_1$  tel que pour tout  $b \in S_2$  :  $match(a, b) \in A_n$

**Définition 5** On appelle l'entier  $j(n)$  un "target" de  $f$ .

Montrons son unicité: soit donc  $u, v$  des éléments de  $S_1$  témoignant que des entiers (différents)  $x, y$  soient des targets attachés à  $f$ . La composabilité entraîne qu'il existe  $w \in S_1$  tel que pour tout  $b \in S_2$ , pour tous  $x, y$ : si  $match(w, b) = (x, y)$  alors  $f(x) > f(y)$ . La pseudo-compacité à droite entraîne l'existence d'une suite de  $b_n \in S_2$  telle que pour tout entier  $n$ :  $match_1(w, b(n)) = match_2(w, b(n+1))$  ce qui donne la suite  $y_n := match_1(w, b(n))$  qui vérifie forcément  $f(y_n) > f(y_{n+1})$ , ce qui est une contradiction

En fait dans la suite, nous allons donner une preuve moins brutale qui montre peut-être mieux ce qui est sous-jacent dans ce phénomène d'existence et d'unicité "d'une cible"

Ci-dessus, nous avons vu que le caractère bienfondé de l'ordre sur  $\mathbb{N}$  a joué un rôle dans les deux parties (existence et unicité) de la preuve. Le fait que  $\mathbb{N}$  est dénombrable a aussi joué un rôle crucial

En fait, il n'est ni besoin d'avoir un bon ordre, ni besoin qu'il soit dénombrable. Pour le comprendre, nous modifions légèrement la présentation de la notion de cour de jeu.

**Définition 6** Soit  $E$  un ensemble, et  $S_1, S_2$  deux parties de  $P(E^2)$ . Le triplet  $T := (S_1, S_2, E)$  sera appelé un "espace de jeu"

Le lien avec les cours de jeu est le suivant: dans le cas où  $\forall X \in S_1, \forall Y \in S_2 : X \cap Y$  est un singleton, on récupère une opération match définie par  $\{match(X, Y)\} = X \cap Y$

Par contre, ce qui nous intéresse ici c'est en quelque sorte "qui gagne". Par conséquent, nous supposons que pour chacun des  $S_i$  et pour tout  $X \in S_i$  et  $Y \supseteq X : Y \in S_i$

Nous montrons dans l'argument suivant comment les ultrafiltres émergent d'hypothèses de détermination, de composabilité et de pseudo-compacité.

Soit donc un ensemble  $(F, \leq)$  totalement ordonné et une application  $h$  de  $E$  dans  $F$ . Pour chaque  $i \in F$ , nous notons  $A(i)$  l'ensemble des  $(x, y) \in E^2$  tels que  $h(y) > h(x)$  ou  $h(y) = h(x) = i$

Notons  $D$  l'ensemble des  $(x, y)$  tels que  $h(y) > h(x)$

- Supposons que  $A(i)$  et  $A(j)$  soient tous deux des éléments de  $S_2$ . Notons  $B := A(j) \circ A(i)$ , autrement dit l'ensemble des  $(x, y)$  tels que  $\exists z : [(x, z) \in A(i) \text{ et } (z, y) \in A(j)]$ .



- Soit  $(x, y) \in B$  et supposons que  $B \in S_2$ . soit  $z$  tel que  $[(x, z) \in A(i) \text{ et } (z, y) \in A(j)]$  Supposons que  $i \neq j$ . On ne peut alors avoir que  $h(x) = h(y) = h(z) = i = j$  Il s'ensuit que  $h(y) > h(x)$  et que  $B \subseteq D$

Interrompons la preuve le temps de donner une définition:

**Définition 7**  $T$  est dit composable à droite quand  $\forall (X, Y) \in S_2 : X \circ Y \in S_2$

- soit  $R \subseteq E^2$ . L'ensemble des  $(x, y) \in E^2$  tels que  $E^2 \setminus \text{sym}(R) = (y, x) \notin R$  est noté  $R^-$
- $T$  sera dite déterminée quand  $\forall R \in P(E^2) : [R \in S_1 \text{ ou } E^2 \setminus R \in S_2]$
- $T$  est dite symétrique à gauche quand  $\forall X \in P(E^2)$  si  $R \in S_1$  alors  $\text{sym}(R) \in S_2$

Reprenons la preuve:

- Par conséquent, si  $T$  est composable à droite et si  $D \notin S_2$  alors il existe AU PLUS un  $i \in F$  tel que  $A(i) \in S_2$ .
- Soit  $X \subseteq F$ . Notons  $AA(X)$  l'ensemble des couples  $(x, y) \in E^2$  tels que  $h(y) > h(x)$  ou  $h(y) = h(x) \in X$ .
- Supposons que  $AA(X) \in S_2$  et  $AA(Y) \in S_2$ . Le même raisonnement qu'en (1) donne que si  $T$  est composable à droite alors  $AA(X \cap Y) \in S_2$ .
- Notons  $L$  l'ensemble des  $X \in P(F)$  tels que  $AA(X) \in S_2$ . Alors (4) montre que si  $T$  est composable à gauche alors  $L$  est filtrant.
- Supposons que  $AA(X) \notin S_2$ . Si  $T$  est déterminée alors  $E^2 - (AA(X)) \in S_1$ . Et donc si  $T$  est symétrique à gauche,  $AA(X)^- \in S_2$ .
- Soit donc  $(x, y) \in AA(X)^-$ . Alors  $h(y) \geq h(x)$  et  $\text{non}(h(x) = h(y)) \in X$ . Et donc  $h(y) > h(x)$  ou  $h(x) = h(y) \in F - X$
- Conclusion: si  $AA(X) \notin S_2$  alors  $AA(F - X) \in S_2$
- On a donc obtenu que si  $T$  est symétrique à gauche, déterminée et composable à droite alors  $L$  est un ultrafiltre (éventuellement dégénéré, ie éventuellement  $L = P(F)$  )
- Supposons maintenant que  $\emptyset \notin L$  et que tout ultrafiltre sur  $L$  soit principal. Alors il existe un et un seul  $v \in F$  tel que  $AA(\{v\}) \in S_2$

## 1.4 Une remarque

**Théorème 8** *L'axiome de détermination entraîne (avec ZF) que tout ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$  est principal*

## 1.5 Théorèmes de la cible (target)

Dans cette section nous étudions en détails ce qui se passe dans la situation très précise des jeux à information parfaite de longueur quelconque tels qu'ils sont classiquement définis. Nous appuyons surtout sur le cas de la longueur  $\omega$ . Les théorèmes qui suivent seront sensibles aux axiomes. Le cadre dans lequel ils seront le plus impressionnants est  $ZF + AD$ , mais certains cadres classiques, même dans  $ZFC$ , gardent une saveur non négligeable. Le contexte est introduit d'une manière formelle par une série de définitions.

## 1.6 Le cas des jeux de longueur $\omega$

Soit  $E$  un ensemble. Soit  $(A, \leq)$  (que l'on note aussi  $A$  quand aucune ambiguïté n'est introduite) un ensemble totalement ordonné. Soit  $B$  une partie de  $A$ .

**Définition 9** *On appelle score (sur  $(E, A)$ ) une application de  $E^{\mathbb{N}}$  dans  $A$ ;*

Soit  $\phi$  un score. Dans cette section, on note  $G(A, B, \phi)$  le jeu suivant:

- Alice et Bob s'affrontent en jouant successivement des éléments de  $E$ , construisant ainsi une suite  $[a_1, b_1, a_2, b_2, \dots]$ . C'est toujours Alice qui joue son  $a_i$  avant que Bob ne joue son  $b_i$
- Si  $\phi(a) > \phi(b)$  alors Alice est déclarée gagnante. Si  $\phi(b) > \phi(a)$  alors Bob est déclaré gagnant. Si  $v := \phi(a) = \phi(b)$  alors Alice est déclarée gagnante quand  $v \notin B$  et sinon c'est Bob qui est déclaré gagnant

Soit  $n$  un entier. Le jeu suivant  $H(A, \phi, n)$  est très légèrement différent.

- Alice et Bob s'affrontent en jouant successivement des éléments de  $E$ , construisant ainsi une suite  $[a_1, b_1, a_2, b_2, \dots]$ . C'est toujours Alice qui joue son  $a_i$  avant que Bob ne joue son  $b_i$ , **à l'exception d'UNE SEULE FOIS**, à l'étape  $n$ , où Alice attend que Bob ait joué son  $b_n$  AVANT de jouer son  $a_n$ . Autrement dit, on assiste dans l'ordre à:  $a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, b_n, a_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \dots$ , avec les conventions d'usage quand  $n = 0$ .
- Si  $\phi(a) > \phi(b)$  alors Alice est déclarée gagnante. Sinon, c'est Bob qui est déclaré gagnant

L'énoncé suivant est le premier des *Target theorems*:

**Théorème 10** *Supposons  $AD(E)$ . Soit  $\phi$  un score. L'ensemble des  $B \subseteq A$  tels que Bob a une stratégie infailible pour gagner  $G(A, B, \phi)$  est un ultrafiltre stable par intersections dénombrables, éventuellement impropre  $W$  (ie  $W = P(A)$ ). Si  $E$  est fini,  $A$  dénombrable et  $\leq$  est bien fondé alors  $W$  est forcément principal et contient un unique  $\{z\}$  qui sera appelé le target de  $\phi$ .*

On peut aller plus loin:

**Théorème 11** *Supposons  $AD(E)$ . Si  $W \neq P(A)$  alors  $\forall X \in W$  Alice a une stratégie infailible pour gagner au jeu  $G(A, A \setminus X, \phi)$ . Si  $W = P(A)$  alors il existe un unique entier  $p$  tel que Alice a une stratégie au jeu  $H(A, \phi, p)$ . Dans ce cas, nous appellerons l'entier  $p$  un breakpoint de  $\phi$ .*

La règle spéciale qui autorise une seule fois Alice à jouer son coup après celui de Bob peut être rendue encore un peu moins défavorable pour Bob: Soit  $n$  un entier. Le jeu  $K(A, \phi, n)$  se déroule comme suit:

- Alice et Bob s'affrontent en jouant successivement des éléments de  $E$ . C'est toujours Alice qui joue son  $a_i$  avant que Bob ne joue son  $b_i$ , **à l'exception d'UNE SEULE FOIS**, à l'étape  $n$ . A cette étape, la négociation du couple  $(a_n, b_n)$  est précisée ci-dessous, mais nous assistons donc à la partie:  $[a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, ($  négociation aboutissant à  $(a_n, b_n)), a_{n+1}, b_{n+1}, \dots]$
- Etape  $n$ : Alice choisit une relation de Tukey de la forme  $(E, E, R)$  avec le devoir qu'il existe un cardinal régulier  $\kappa$  vérifiant  $(E, E, R) \leq_{Tukey} D_\kappa$ . C'est ensuite **Bob** qui choisit le couple  $(a_n, b_n)$  mais il a le devoir de le choisir tel que  $(a_n, b_n) \in R$ .
- Si  $\phi(a) > \phi(b)$  alors Alice est déclarée gagnante. Sinon, c'est Bob qui est déclaré gagnant

En fait, ces phénomènes sont robustes.

**Définition 12** *On dit qu'un joueur gagne faiblement un jeu quand l'autre n'a pas de stratégie infailible pour l'emporter*

On a le théorème suivant, sans aucune hypothèse de détermination:

**Théorème 13** *Si  $\leq$  est un bon ordre alors si  $E$  est fini ou s'il n'existe pas d'entier  $p$  tel que Alice gagne faiblement  $K(A, \phi, p)$  alors l'ensemble des parties  $X$  de  $A$  telles que Bob a une stratégie infaillible au jeu  $G(A, X, \phi)$  est un filtre propre (Bob n'a pas de stratégie au jeu  $G(A, \emptyset, \phi)$ ) stable par intersections dénombrables.*

Le théorème suivant donne cependant un filigrane explicatif qui permet de presque deviner les démonstrations. Pour cela on a besoin d'une notion plus générale de jeu de longueur  $\mu$  où  $\mu$  est un ordinal. Soit  $E$  un ensemble. On note  $M$  l'ensemble  $E^\mu$ . Soit  $\phi$  une application de  $M$  dans un ordre total  $(A, \leq)$ ,  $X$  une partie de  $A$  et  $C$  une partie de  $\mu$ . On note  $L(A, C, X, \phi)$  le jeu suivant:

- Soit  $i \in \mu$  une "étape". Si  $i \in C$  alors Alice joue  $a_i$  (en connaissance des  $a|_i, b|_i$ ) puis Bob répond par son coup  $b_i$  (en connaissance de  $a|_i, b|_i, a_i$ ). Si  $i \notin C$  alors Bob joue  $b_i$  (en connaissance des  $a|_i, b|_i$ ) puis Alice répond par son coup  $a_i$  (en connaissance de  $a|_i, b|_i, b_i$ ).
- Si  $\phi(a) > \phi(b)$  alors Alice gagne. Si  $\phi(b) > \phi(a)$  alors Bob gagne. Si  $v := \phi(a) = \phi(b)$  alors Alice gagne si et seulement si  $v \in X$

On dit qu'un joueur gagne fortement un jeu quand il a une stratégie infaillible pour gagner. Quand son adversaire n'a pas de stratégie infaillible pour gagner, on dit qu'il gagne faiblement. On suppose que l'ordre de  $A$  est un bon ordre:

**Théorème 14** • *Alice ne gagne jamais faiblement  $L(A, \emptyset, \emptyset, \phi)$*

- *Si Bob gagne fortement  $L(A, \mu, A, \phi)$  alors l'ensemble des  $X$  tels que Bob gagne fortement  $L(A, \mu \setminus X, A, \phi)$  est un filtre propre stable par intersections dénombrables*
- *Si Bob ne gagne pas fortement  $L(A, \mu, A, \phi)$  alors l'ensemble des parties  $X$  de  $A$  telles que Bob gagne fortement  $L(A, \mu, A \setminus X, \phi)$  est un filtre propre stable par intersections dénombrables*

Dans le cas où on a  $AD(E)$  et  $\mu = \omega$  on retrouve tous les théorèmes précédents.

### 1.6.1 Exemple naturel

Dans le contexte précédent, on a un jeu très naturel dans le cas où  $A = \mu = \omega_1$  et  $E = \mathbb{N}$ , en posant  $\phi(x) :=$  le premier  $i \in \mu$  tel que  $\exists j < i : x(j) = x(i)$ . Dans ce cas, on a:

**Théorème 15** *Bob gagne fortement  $L(A, \mu, A, \phi)$  et l'ensemble des  $X$  tel que Bob gagne fortement  $L(A, \mu \setminus X, A, \phi)$  est le filtre composé des clubs de  $\omega_1$  (ensembles non bornés et stables par sup d'ordinaux dénombrables)*

Finalement les arguments précédents inspirent une petite conclusion philosophique:

## 1.7 Pas de notion de stratégies à la fois symétriques, déterminées, "éternelle"

Soit  $E$  un ensemble et  $S$  une partie de  $P(E^2)$ . On dira alors que  $S$  est une notion de stratégie sur  $E$ . On note  $X^*$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $(y, x) \in X$  et  $X \circ Y$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels qu'il existe  $z : (x, z) \in X$  et  $(z, y) \in Y$

**Définition 16**  $S$  est dite *correcte* quand  $\forall X, Y$  des parties de  $E^2$ , si  $X \in S$  et  $X \subseteq Y$  alors  $Y \in S$   
 $S$  est dite *déterminée* quand pour toute partie  $A$  de  $E^2$ , il existe  $X \in S$  tel que  $X \subseteq A$  ou  $X^* \subseteq E^2 - A$ .  
 $S$  est dite *symétrique* quand  $\forall X \in S : X^* \in S$   
 $S$  est dite *compactante* quand  $\forall n \mapsto X_n, n \in \mathbb{N}$ , il existe une suite  $u \in E^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} : (u_{n+1}, u_n) \in X_n$   
 $S$  est dite *stable* quand elle stable par  $\circ$   
 $S$  est dite *à points fixes* quand  $\forall X \in S \exists x \in E : (x, x) \in X$

Soit  $\phi$  une application de  $E$  dans un ensemble totalement ordonné  $L$ . Soit  $S$  une notion de stratégie sur  $E$  qui soit à la fois correcte, déterminée, à points fixes et stable. On note  $W$  l'ensemble des parties  $A$  de  $L$  telles que  $t(A) := \{(x, y) \in E^2 \mid \phi(x) < \phi(y) \text{ ou } \phi(x) = \phi(y) \in A\} \in S$

**Théorème 17**  $W$  est un ultrafiltre sur  $L$ . Si  $L$  est un bon ordre et  $S$  est compactante alors  $W$  est un ultrafiltre stable par intersections dénombrables sur  $L$  et donc si  $L$  est assez petit alors  $W$  est un ultrafiltre principal sur  $L$ .

## 1.8 Preuve du théorème

Soient  $A, B$  dans  $W$ . Soit  $(x, y) \in t(A) \circ t(B)$ . Alors il existe  $z$  tel que  $(x, z) \in t(B)$  et  $(z, y) \in t(A)$ . Il s'ensuit que  $\phi(x) \leq \phi(z) \leq \phi(y)$ . Supposons que  $v := \phi(x) = \phi(y)$ . Alors  $v = \phi(z)$  et donc  $v \in A \cap B$ . Conclusion:  $A \cap B \in W$

Si  $A \notin W$  alors  $t(A) \notin S$ . Il existe donc un élément  $X \in S$  tel que pour tout  $(y, x)$  dans  $X : \phi(x) \geq \phi(y)$  et  $\text{non}(\phi(x) = \phi(y) \in A)$ . Par conséquent, si  $(y, x) \in X$  alors  $\phi(y) < \phi(x)$  ou  $\phi(y) = \phi(x) \in L \setminus A$ . C'est exactement dire que  $t(L \setminus A) \in S$  car  $S$  est correcte. Il s'ensuit que  $L \setminus A \in W$ .

Si  $A \in W$ , comme  $S$  est à points fixes, il existe  $x \in E$  tel que  $(x, x) \in t(A)$ . Il s'ensuit que  $\phi(x) \in A$  et que  $A \neq \emptyset$ .

Supposons  $S$  compactante et  $L$  bien ordonné. Soit  $z$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que chaque singleton ait une image réciproque infinie par  $z$ . Supposons qu'une suite de  $A_n \in W$ . On sait, vu que chaque  $t(A_{z(n)}) \in S$  qui est compactante, qu'il existe une suite  $u$  d'éléments de  $E$  telle que pour tout entier  $n : \phi(u_n) > \phi(u_{n+1})$  ou  $\phi(u_n) = \phi(u_{n+1}) \in A_{z(n)}$ . Comme  $L$  est bien ordonné, il existe un entier  $k$ , un élément  $m \in L$  tel que  $\forall n \geq k : \phi(u_n) = m$ . Soit alors  $p$  un entier quelconque: il existe un entier  $q \geq k$  tel que  $z(q) = p$  et donc  $m \in A_p$ . Cela montre que  $\bigcap_n A_n$  est non vide.



## Chapter 2

# Réflexion platonicienne autour de la notion de jeu, sur quelques exemples

Dans cette section *pot pourri*, nous passons en revue quelques raisonnements divers. Le premier montre que sous certaines conditions, on peut remplacer  $f(x)$  par  $f$ .

### 2.0.1 Exemple1

Notons  $E_X$  l'énoncé *Toute famille indicée par  $X$  d'ensembles non vides a une fonction choix*. L'exemple suivant, qui paraît déconnecté du reste est juste là pour montrer comme les coups de joueurs peuvent être des stratégies elle-mêmes.

**Théorème 18**  $E_{\omega_1}$  implique l'existence d'une injection de  $\omega_1$  dans  $K := 2^{\mathbb{N}}$

Quand on le regarde ainsi l'énoncé n'est pas totalement évident pour la seule raison qu'il faut construire AVANT la bonne famille  $\mathfrak{B} \mapsto X_i, i \in \omega_1$  et seulement ensuite en déduire l'injection cherchée.

Pour  $i \in \omega_1$ , on note  $A_i :=$  l'ensemble des injections de  $i$  dans  $K$  et  $T_i$  l'ensemble des applications  $f$  de  $A_i$  dans  $K$  vérifiant  $f(u) \notin \text{Image}(u)$  où  $\text{Image}(u) := \{y \mid \exists j \in i : u(j) = y\}$ .

Soit  $H$  telle que  $\forall i \in \omega_1 : H(i) \in T_i$

On laisse en exercice que  $\forall i \in \omega_1 : T_i \neq \emptyset$ . Soit alors  $v$  l'unique application de  $\omega_1$  dans  $K$  vérifiant  $\forall i : v(i) = H(i)(v|_i)$ . Alors  $v$  est injective.

### Remarque

Le théorème précédent ne dit pas si oui ou non,  $P := (\forall a \in \text{Ordinaux} E_a)$  implique l'existence d'un ordinal  $\kappa$  et d'une bijection entre  $K$  et  $\kappa$ . L'axiome  $P$  est étudié et sa place entre  $AC(\omega)$  et  $AC$  est connue. Voire (???)

### 2.0.2 Exemple2

**Théorème 19** Il existe un jeu de longueur  $\omega$  qui n'est pas déterminé

On note toujours  $K := 2^{\mathbb{N}}$ . On note  $Z$  l'ensemble des parties dénombrables de  $K$ .

Voici la description du jeu, que dans la suite on notera *Jeunondet1*:

*Alice commence par jouer à son choix, ou bien un couple  $(0, D)$  où  $D$  est une partie dénombrable de  $K$ , ou bien un couple  $(1, f)$  où  $f$  est une application de  $Z$  dans  $K$ . Dans l'option où Alice a joué  $(1, f)$ , Bob répond par un élément  $D \in Z$ . Si  $f(D) \in D$  alors Alice est déclarée perdante. Sinon, la partie continue et Alice joue un entier  $n$ . Bob répond par  $i \in 2$ . Puis Alice et Bob jouent alternativement des éléments  $D_1, \dots, D_n, \dots$  de  $Z$ . On note  $R$  la réunion des  $D_n, n \in \mathbb{N}$ . Si  $f(R)(n) = i$  alors Bob est déclaré gagnant. Sinon il est déclaré perdant. Dans l'option où Alice a joué  $(0, D)$  Bob doit répondre par  $x \in K$ . Si  $x \in D$  alors Alice est déclarée gagnante, sinon c'est Bob le gagnant*

L'avantage de ce jeu est qu'il ne nécessite pas de faire des choix.

**Théorème 20** *Le jeu précédent n'est pas déterminé*

Supposons que  $\tau$  soit une stratégie pour Bob. Alice regarde la fonction  $f := D \mapsto$  la réponse fournie par  $\tau$  face au coup  $(0, D)$ . Elle note ça dans un coin de sa tête. Elle joue contre  $\tau$  le premier coup  $(1, f)$ . Si Bob répond par une  $X \in Z$  telle que  $f(X) \in X$  alors Alice sait qu'en jouant  $(0, X)$  elle va battre Bob. Supposons donc que Bob réponde  $X$  tel que  $f(X) \notin X$ .

Alice imagine  $\mathbb{N}$  tables de jeux  $T_n$  sur lesquelles elle va affronter Bob. Sur chaque table  $T_n$ , après avoir commencé par  $[(1, f); X]$ , elle joue  $n$ . Sur chacune de ces tables  $T_n$  Bob répond par un élément  $v(n)$ , fournissant ainsi un  $v \in K$ . Alice joue ensuite sur chaque table de manière que les réunions  $R_n$  obtenues soient toutes égales (ie il existe  $D \in Z \forall n \in T_n : D = R_n$ ) et de plus vérifie  $v \in D$ . Ensuite Alice regarde  $f(D)$ . Si  $f(D) \in D$ , elle sait qu'elle gagne la partie  $[(0, D); y]$  jouée contre  $\tau$  puisque  $y = f(D)$ . Sinon, il existe une entier  $p$  (prendre le plus petit d'entre eux) vérifiant  $f(D)(p) \neq v(p)$  (car  $v \in D$ ). Cela permet à Alice de gagner la partie sur la table  $T_p$ . Conclusion: contre n'importe quelle stratégie  $\tau$ , Alice a une partie qu'on obtient de manière constructive en fonction de  $\tau$  qui permet de battre  $\tau$ .

Si maintenant on analyse  $\sigma$  une stratégie pour Alice (c'est le seul "choix" de l'argument), on peut supposer que  $\sigma$  dit à Alice de jouer une certaine  $(1, f)$ . En effet, sinon, elle dirait à Alice de jouer un couple  $(0, D)$  et ce serait risqué (il existerait pour Bob de quoi répondre pour gagner dès le coup suivant). Voici comment battre  $\sigma$ . Bob joue  $\emptyset$ . Evidemment, la partie continue et Alice joue un entier  $n$ . Bob imagine alors affronter  $\sigma$  sur deux tables  $T_0, T_1$  de la manière suivante: sur  $T_i$  il joue  $i$ , puis s'arrange ensuite, lors des parties dénombrables jouées, pour obtenir qu'à la fin les deux réunions  $D := R_0, R_1$  soient égales (ie  $D = R_1$  aussi). Si  $f(D) \in D$  alors Bob sait qu'il lui suffisait de répondre de façon à obtenir  $[(1, f); D]$  dès le départ face à  $\sigma$  et gagner. Sinon, pour  $i := f(D)(n)$  Bob a battu la stratégie  $\sigma$  sur la table  $T_i$ .

### 2.0.3 Exemple3

Soit  $\kappa$  un ordinal et  $s$  une surjection de  $K := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  sur  $\kappa$ .

**Théorème 21** (*Axiome de détermination supposé*) *Il existe une surjection de  $K$  sur  $\mathbb{N}^{\kappa}$*

On va construire par récurrence ordinale une surjection de  $K$  sur  $\mathbb{N}^{\mu}$  pour tout ordinal  $\mu \leq \kappa$ . La démonstration est très courte car utilise un résultat qui sera démontré au chapitre sur les target phénomènes.

On suppose que  $\forall i \in \mu : f(i)$  est une surjection de  $K$  sur  $\mathbb{N}^i$  et on définit  $f(\mu)$ . Soit  $A$  un élément de  $\mathbb{N}^{\mu}$

Si  $\tau + 1 = \mu$  n'est pas un ordinal limite, on surjecte canoniquement  $K \rightarrow (K \times \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N}^{\tau+1}) \equiv ((\mathbb{N}^{\tau}) \times \mathbb{N})$  pour obtenir  $f(\mu)$ .

On suppose maintenant que  $\mu$  est un ordinal limite.

Etant donné un couple  $(x, y)$  d'éléments de  $K$  on note  $\phi_A(x, y) := (-1)$  quand  $s(y) \notin \mu$  ou  $f(s(y)) \neq A \cap s(y)$ . Dans tous les autres cas,  $\phi_A(x, y) = (s(y), A(\mu))$ . On ordonne  $\{-1\} \cup (\mu \times \mathbb{N})$  par l'ordre lexicographique, en décrétant que  $(1)$  est strictement inférieur à tous les autres. On note  $z(-1) := -1$  et  $z(\alpha, n) := n$ .

On note  $G(A, n)$  le jeu suivant: *Alice et Bob jouent alternativement des couples d'éléments de  $\mathbb{N}^2$ , construisant chacun un couple  $(x, y)$  pour Alice et  $u, v$  pour Bob d'éléments de  $K$ . Alice est déclarée gagnante si  $\phi_A(x, y) > \phi_A(u, v)$  ou  $(\phi_A(x, y) = \phi_A(u, v) \text{ et } z(x, y) = n)$ .*

**Théorème 22** *Il existe un entier  $n$  tel que Alice a une stratégie gagnante au jeu  $G(A, n)$*

Ayant admis ce théorème (démontré au chapitre target), on n'a plus qu'à remarquer que si  $A \neq B$  et  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  alors il n'existe aucune stratégie pour Alice qui soit à la fois gagnante au jeu  $G(A, n)$  et au jeu  $G(B, n)$ . Il s'ensuit que l'ensemble des couples  $((\sigma, n), X)$  tels que  $X$  est une partie de  $\mu$  et  $\sigma$  est une stratégie gagnante pour Alice au jeu  $G(X, n)$  est une surjection de  $K \times \mathbb{N}(\leq_{\text{cardinal}} K)$  sur  $\mathbb{N}^{\mu}$

## 2.1 Limites à la détermination

On a montré précédemment que  $ZF$  démontre qu'il existe un jeu non déterminé de longueur  $\omega$

On peut cependant restreindre la question (pour les jeux de longueurs  $\omega$  à des jeux particuliers). Voici une classification des questions possibles:

- On ne s'occupe que des jeux de longueur finie ou dénombrables, mais on ne pose aucune restriction par ailleurs
- On s'occupe des jeux de longueur quelconque, mais on restreint l'ensemble des coups jouables à chaque étape
- On s'occupe des jeux de longueur quelconque, mais on restreint la classe des arbitrages, ie on ne s'intéresse pas à **tous les jeux**, mais seulement certains

- On s'occupe des jeux de longueur quelconque, mais on n'arbitre plus vraiment de la manière habituelle

## 2.2 Les jeux de type courses

Ils ont déjà été abordés dans le chapitre target. Ce sont les jeux de la forme Alice joue  $x$  et Bob joue  $y$ , en les contruisant progressivement. Alice gagne quand  $\phi(x) \geq \psi(y)$ , le couple  $(\phi, \psi)$  devient ainsi un paramètre. On les appellera  $Courses(\phi, \psi)$

**Question 23** *Est-il compatible avec ZF que tous les jeux de longueur  $\omega$  sur un ensemble  $E$  quelconque qui soient des jeux de course sont déterminés? L'énoncé qui l'affirme sera noté  $detcourse$*

Il y a au moins une chose qui est simple est qu'on peut dire (et rappeler):

**Théorème 24** *(ZF)  $detcourse$  entraîne qu'il existe une injection de  $\omega_1$  dans  $\mathbb{R}$ . AD entraîne qu'il n'en existe pas. Par conséquent, AD et  $detcourse$  sont incompatibles*

## 2.3 L'approche *point fixe* des jeux quelconques

Lorsqu'on est face à une opération match, il y a deux façons de se poser les questions de détermination:

- (game-détermination) pour tout  $A$ ,  $\exists x((\forall y : match(x, y) \in A)$  ou  $(\forall y : match(y, x) \notin A)$ )
- (superdétermination) pour toutes applications  $f, g$  il existe  $a, b$  tels que :  $match(a, f(a)) = match(g(b), b)$ . Le jeu correspondant est  $A :=$  l'ensemble des  $m$  tels qu'il existe  $b$  vérifiant  $match(g(x), x) = m$ .

La deuxième propriété ressemble à une propriété de point fixe, et comme on l'a vu précédemment, en présence de l'axiome du choix entraîne la première (et fournit en fait **la bonne notion de détermination** quand on généralise le nombre de joueurs à plus de deux)

Cependant, en l'absence de l'axiome du choix, la question mérite d'être posée, car l'exemple précédent de jeu non déterminé de longueur  $\omega$  qu'on a fourni en travaillant uniquement dans ZF **n'était pas un contre-exemple** à la superdétermination.

**Théorème 25** *ZF entraîne l'existence d'un jeu à information de longueur  $\omega$  qui n'est pas superdéterminé*

Ce théorème certes officiellement facile à prouver est l'occasion de revisiter de manière inattendue les questionnements mathématiques récurrents sur la constructivité.

On modifie le jeu *Jeunondet1* qu'on a utilisé pour prouver l'existence d'un jeu non déterminé de manière très légère. Dans la situation où Alice a joué un ensemble dénombrable  $X$  et que Bob a répondu  $t \in X$ , Alice a le droit, avant qu'on continue de *se moquer* de Bob en jouant un élément  $y$ .

Face à ce  $y$  on regarde si  $y \in X$ . Si oui, on continue la partie comme dans *Jeunondet1*. Sinon Alice a gagné. Par ailleurs dans les options où les deux joueurs s'affrontent en jouant alternativement une suite de parties dénombrables, on modifie la règle du jeu légèrement en leur demandant de jouer des suites d'éléments de  $K$ .



Mais à la fin on regarde la réunion des images de ces suites et on conserve l'arbitrage de *Jeunondet1* à la fin.

Il faut noter que la procédure qui nous a donné une preuve que ni Alice ni Bob n'ont de stratégie infaillible donne maintenant deux applications définies de manière explicite  $f, g$  telles que  $\forall x, y : \text{match}(x, f(x)) \neq \text{match}(g(y), y)$ . En effet, Alice **peut** réussir sa moquerie de Bob sans avoir à faire de choix.

En l'absence d'axiome du choix la question suivante semble marquante:

**Question 26** *A-t-on  $ZF + \text{tout jeu de longueur fini est superdéterminé}$  entraîne l'axiome du choix*

**Question 27** *On munit  $E^{\mathbb{N}}$  de la topologie produit de la discrète et on considère l'opération match canonique attachée. On suppose que pour toutes applications continues  $f, g$  (en munissant les ensembles de stratégies de la topologie naturelle) il existe des stratégies  $u, v$  vérifiant  $\text{match}(u, f(u)) = \text{match}(g(v), v) = \text{match}(u, v)$ . Alors a-t-on forcément l'axiome du choix?*

Nous digressons le temps d'un chapitre pour signaler d'autres sources qui font émerger les ultrafiltres.

# Chapter 3

## Emergence des ultrafiltres

### 3.1 Introduction

Nous passons en revue différentes origines des ultrafiltres qui nous ont intéressés. Le but de ce court chapitre n'est pas de parler de leur utilité et leurs applications à la topologie, le forcing et l'analyse non standard. Mais de résumer trois sources qui les émerger

### 3.2 Depuis le target

On rappelle une des trois démonstrations du Target théorème en en extrayant la substance essentielle. On ne revient donc pas sur les protocoles précis de jeux, mais sur le principe actif. Soit  $E$  un ensemble muni d'un ordre total. Soit  $X$  une partie de  $E$ . On suppose qu'il existe en arrière-plan un protocole de jeu "Alice-Bob", où Alice est propriétaire de l'abscisse  $x$  du couple  $(x, y)$  et Bob de son ordonnée  $y$ . Soit  $A$  une partie de  $E$ . Notons  $x <_A y$  la propriété  $x < y$  ou  $x = y \in A$ . Dans tous les protocoles de jeux déterminés on aura alors que l'ensemble des parties  $A$  de  $E$  telle que Bob gagne au jeu où il doit viser  $x <_A y$  est un ultrafiltre (éventuellement dégénéré quand Bob gagne au jeu  $x < y$ )

Ceci est dû à deux faits simples:

**Lemme 28** • si  $\forall x \in E : x <_A f(x)$  et  $x <_B g(x)$  alors  $\forall x \in E : x <_{A \cap B} f \circ g(x)$

• si non( $x <_A y$ ) alors  $y <_{E \setminus A} x$

preuve laissée au lecteur

Cet argument, allié à AD, ou à des axiomes de détermination a permis de généraliser le Target théorème à des **ordre totaux**

### 3.3 Depuis les jeux

On décrit un jeu classique  $G_X$ : Alice et Bob s'affrontent au jeu suivant: Alice joue un ordinal  $x_1 \in \kappa$  puis Bob réplique par un ordinal  $x_2 \in \kappa$  puis Alice joue  $x_3 \in \kappa$ , et ainsi de suite. On suppose que  $\kappa$  est un ordinal limite et  $\text{cofinalité}(\kappa) > \omega$ . Alice gagne la partie quand  $\sup(n \mapsto x_n) \in X$ . Alors l'ensemble des  $X \subseteq \kappa$  tels que Alice a une stratégie gagnante à  $G_X$  est un filtre ( $\kappa$ -additif (malgré le caractère quelconque de  $\kappa$ ) et normal). Si tous les jeux de ce type sont déterminés alors c'est un ultrafiltre.

On décrit un autre jeu, un peu moins présent dans la littérature. Soient  $a, b$  deux cardinaux infinis tels que  $a > b$ . On s'intéresse aux jeux séquentiels à information parfaite de longueur  $a$ . Soit  $X \subseteq a$ .

Description de  $G_X$ : à chaque étape  $i \in a$ , si  $i \in X$  alors Bob joue  $y_i$ , puis Alice joue  $x_i$ . Si  $i \notin X$  alors Alice joue d'abord  $x_i$  avant que Bob joue  $y_i$ . Les joueurs ont le devoir que  $x_i, y_i$  soient dans  $b$ . On note  $x^*$  le premier  $i \in a$  tel qu'il existe  $j \in a$  tel que  $x_i = x_j$ . On définit de même  $y^*$ . Alice gagne quand  $x^* > y^*$ .

On a que l'ensemble des  $X \subseteq a$  tels que Alice a une stratégie gagnante au jeu  $G_X$  est un filtre  $a$ -additif et normal. Si tous les jeux sont déterminés c'est donc un ultrafiltre.

Attention: les jeux de ce type **ne sont quasiment jamais déterminés** et l'hypothèse de détermination est en générale fausse. Nous signalons ce phénomène pour des raisons de vocation. L'argument est effectif. La symétrie faisant que la position de Alice dans  $G_X$  est celle de Bob dans  $G_{a \setminus X}$

### 3.4 Depuis les grands cardinaux

Il s'agit du lemme bien connu suivant: face à  $j : V \rightarrow M$  tout élément  $x \in j(a)$  de  $M$  induit l'ultrafiltre sur  $a$  suivant:  $\{X \subseteq a \mid x \in j(X)\}$ .

### 3.5 Depuis les probabilités intuitives

Attention, aucune probabilité n'est supposée ici sigma-additive. Soit  $E$  un ensemble et  $p$  une probabilité qui mesure suffisamment de parties de  $E^{IN}$ . On suppose  $E$  muni d'un bon ordre. On suppose  $p$  invariante par suffisamment d'opérations intuitives. On a alors forcément que l'ensemble des  $X \subseteq E$  tels que  $p(\{u \in E^{IN} \mid \min(u) \in X\}) = 1$  est un ultrafiltre.

Bien entendu, cet argument est largement dépassé par les arguments qui ont conduit au paradoxe de Banach-Tarski qui prouvent entre autres qu'il n'existe pas de mesure invariante par l'action naturelle de  $S(IN)$  sur  $E^{IN}$ .

Mais l'argument ci-dessus est un peu plus simple et ne requiert pas que  $p$  mesure toutes les parties de  $E^{IN}$ , ni même qu'elle soit à valeurs dans  $[0; 1]$ .

Il conduit à un paradoxe quand  $E$  est un paradoxe, à cause du fait que sous les mêmes hypothèses:

$$p(\{u \in E^{IN} \mid \min(\{u(2n) \mid n \in IN\}) = \min(\{u(2n+1) \mid n \in IN\})\}) = 1$$

et donc

$$p(\{u \mid u \text{ non injective}\}) = 1$$

### 3.6 Un ordre total

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble totalement ordonné, sans maximum et tel que toute partie de  $E$  est majorée ou de complémentaire majorée. Nous dirons que  $E$  est un ordre lisse.

**Définition 29** Les segments finaux de  $E$  engendrent un **ultrafiltre** sur  $E$  qui sera noté  $W_{final}(E, \leq)$

#### 3.6.1 Ultrafiltre sigma-additif

**Théorème 30**  $W_{final}$  est stable par intersections dénombrables.

**Preuve:** soit  $S_1, \dots, S_n, \dots$  des segments finaux, emboîtés. On peut supposer qu'ils forment une suite strictement décroissante pour l'inclusion. Supposons l'intersection des  $S_n$  vide. Alors pour chaque  $x \in E$ , il existe un premier entier  $n(x)$  tel que  $x \notin S_{n(x)}$ . Soit  $a \in E$  tel que  $\forall x \geq a : n(x)$  est pair. Soit  $b > a$ .

Posons  $n := n(b)$  qui est donc pair. Soit  $p + 1$  un entier quelconque impair  $> n$  et  $c \in S_p \setminus S_{p+1}$ . On a donc que  $n(c)$  est impair et donc  $c < a$ . Il s'ensuit que  $a \in S_p$ .

On raisonnerait de même avec "impair".

Ainsi  $a \in \bigcap_i S_i$ .

### 3.6.2 L'ultrafiltre précédent est presque totalement additif

**Théorème 31** *Soit  $(E, \leq)$  un ordre lisse. Alors son ultrafiltre final  $W$  a la propriété suivante: pour toute application  $f$  de  $E$  dans  $\kappa$ , il existe un ordinal  $a \in \kappa$  tel que  $\{x \in E \mid f(x) = a\} \in W$*

**Preuve:** Soit  $\sigma$  une application de  $E$  dans un ordinal  $k$ . On peut supposer, pour la suite, qu'elle est surjective, quitte à remplacer chaque ordinal de  $Im(\sigma)$  par son rang dans  $Im(\sigma)$ .

Supposons que chaque ordinal ait une image réciproque par  $\sigma$  qui soit bornée dans  $E$ . A chaque  $x \in E$  associons  $a(x)$  le plus petit ordinal tel qu'il existe  $y > x$  vérifiant  $\sigma(y) = a(x)$ . La fonction  $a$  est croissante de  $E$  dans  $k$  et elle tend vers l'infini.

Prenons son image  $\subseteq k$  de sorte qu'on peut supposer que  $a$  est une surjection de  $E$  sur un ordinal limite  $t$  qui est croissante. Un ordinal sera dit pair s'il est limite ou s'il est de la forme  $x + p$  où  $p$  est un entier pair et  $x$  un ordinal limite.

Soit  $v \in E$  tel que pour tout  $x \geq v : a(x)$  est pair. Soit  $b > a(v)$  un ordinal impair et  $x \in E$  tel que  $a(x) = b$ . Alors  $x < v$  ce qui est une contradiction. On raisonnerait de même avec "impair".

Il s'ensuit que l'un des éléments de  $k$  a une image réciproque non bornée. Il existe donc un ordinal  $a$  et un  $v \in E$  tel que  $\forall x > v : \sigma(x) = a$

**Un exemple connue, sous AD, de tel ultrafiltre est celui défini comme étant le filtre des ensembles de comesure de Lebesgues nulle quotienté par la relation d'équivalence  $x \sim y \in$  l'ensemble des rationnels. Il n'est pas totalement ordonnable**



# Chapter 4

## Récapitulation des théorèmes

### 4.0.3 Application aux théorèmes de la cible

Dans cette sous-section, on décrit le lien entre la propriété d'éternité et les jeux mis en oeuvre dans les phénomènes de Target's dont on rappelle les énoncés, les preuves pouvant être consultées sur HAL. A la fin de cette sous-section, on mentionne à quel point (c'est beaucoup plus visible et important dans les preuves elles-mêmes que dans les énoncés) le fait de remplacer la prise du complémentaire par le dual au sens de Tukey a enrichi l'émergence des cibles concernées (Insoupçonnables quand on regarde  $E^2 \setminus A$  au lieu de  $E \setminus \{(x, y) \in E^2 \mid (y, x) \notin A\}$ ).

Deux joueurs, Léa et Bob s'affrontent dans divers jeux à information parfaite de longueur  $\omega$ , que nous abrégeons de la manière suivante, où  $E$  désigne un ensemble quelconque,  $F$  aussi et où  $\leq$  est un ordre total sur  $F$  et  $\phi, \psi$  sont des applications de  $E$  dans  $F$ .

**Le jeu  $G(E, F, \leq, n, \phi, \psi)$**

Léa joue  $x_0 \in E$ , puis Bob joue  $y_0 \in E$ , puis Léa joue  $x_1$  puis Bob joue  $y_1$ , etc. A chaque étape Léa joue  $x_i$  avant que Bob joue  $y_i$  à l'exception de l'étape  $n$ . A l'étape  $n$ , Léa joue une relation  $R$  incluse dans  $E^2$  telle que  $(E, E, R)$  n'est pas un représentant de degré de Tukey éternel. Bob choisit alors un couple  $(x_n, y_n) \in E^2 \setminus R$ . C'est ainsi qu'à l'étape  $n$ , les deux joueurs construisent leur couple  $(x_n, y_n)$ .

**Le jeu  $H(E, F, \leq, \phi, \psi, A)$**

Léa joue  $x_0 \in E$ , puis Bob joue  $y_0 \in E$ , puis Léa joue  $x_1$  puis Bob joue  $y_1$ , etc. A chaque étape Léa joue  $x_i$  avant que Bob joue  $y_i$ .

**Condition de gain**

Dans le jeu  $G(E, F, \leq, n, \phi, \psi, A)$ , Léa est déclarée gagnante quand  $\phi(x) > \psi(y)$ . Dans le jeu  $H(E, F, \leq, \phi, \psi, A)$ , Léa est déclarée gagnante quand  $\phi(x) > \psi(y)$  ou  $\phi(x) = \psi(y) \in A$ .

### 4.0.4 Théorèmes de la cible avec option d'obligation d'éternité lors d'un coup

**Théorème 32** *On suppose que  $\leq$  est un bon ordre sur  $F$  et que les jeux mis en oeuvre sont tous déterminés. Soit  $T$  un ensemble non vide inclus dans  $F^{E^{\mathbb{N}}}$ . Il existe  $\phi \in T$  tel que:*

*ou bien, il existe un unique entier  $n$  tel que pour tout  $\psi \in T$ : Léa a une stratégie infaillible à  $G(E, F, \leq, n, \phi, \psi)$*

*ou bien, pour tout  $\psi \in T$ : l'ensemble des parties  $A$  de  $F$  telles que Léa a une stratégie infaillible pour gagner  $H(E, F, \leq, \phi, \psi, A)$  est un ultrafiltre sur  $F$  stable par intersections dénombrables. En particulier, si  $F$  est dénombrable alors cet ultrafiltre est principal et l'élément, unique, de  $F$  qui est concerné s'appelle le target de  $T$ .*

*Les deux conclusions s'excluent l'une l'autre. Dans le cas particulier où  $E$  est muni d'une topologie (on met sur  $E^{\mathbb{N}}$  la topologie produit) qui le rend quasi-compact et où  $T = \{\phi\}$  avec  $\phi$  continue  $E^{\mathbb{N}}$  dans  $F$ , si la première alternative n'est pas satisfaite alors il existe  $x \in E^{\mathbb{N}}$  tel que pour tout  $y \in E^{\mathbb{N}}$  :  $\phi(x) \geq \phi(y)$*

Le deuxième théorème de la cible affirme les mêmes conclusions, mais la seule hypothèse faite sur l'ordre est qu'il est un ordre total (il n'est plus supposé qu'il est un bon ordre).

**Théorème 33** *On suppose que  $\leq$  est un bon total sur  $F$  et que les jeux mis en oeuvre sont tous déterminés. Soit  $\phi$  un élément de  $F^{E^{\mathbb{N}}}$ .*

*ou bien, il existe un unique entier  $n$  tel que Léa a une stratégie infaillible à  $G(E, F, \leq, n, \phi, \phi)$*

*ou bien, l'ensemble des parties  $A$  de  $F$  telles que Léa a une stratégie infaillible pour gagner  $H(E, F, \leq \phi, \phi, A)$  est un ultrafiltre sur  $F$  stable par intersections dénombrables. En particulier, si  $F$  est dénombrable ou égal à  $\mathbb{R}$  alors cet ultrafiltre est principal et l'élément, unique, de  $F$ , qui est concerné s'appelle le target de  $\phi$ .*

*Les deux conclusions s'excluent l'une l'autre.*

Le troisième théorème de la cible est une version min-max qui généralise la notion de détermination (on y retrouve la propriété générale de détermination en se plaçant dans l'ensemble totalement ordonné canonique à deux éléments). La description des jeux y est un peu différente.

**Le jeu  $GG(E, F, \leq, n, \phi)$**

Léa joue  $x_0$ . Bob joue  $y_0$ . Puis Léa joue  $y'_0$ , puis Bob joue  $x'_0$ . Léa joue  $x_1$ . Bob joue  $y_1$ . Puis Léa joue  $y'_1$ , puis Bob joue  $x'_1$ . Et ainsi de suite. A l'étape exceptionnelle  $n$ , Léa joue une relation  $R$  incluse dans  $E^2$  **telles que  $(E, E, R)$  n'est pas un représentant de degré de Tukey éternel**. Bob choisit alors un couple  $(x_n, y_n) \in E^2 \setminus R$ . Puis Léa joue  $y'_n$ , puis Bob joue  $x'_n$ . Les deux joueurs construisent ainsi chacun un élément de  $(E^{\mathbb{N}})^2$ .

**Le jeu  $HH(E, F, \leq, \phi)$**

Léa joue  $x_0$ . Bob joue  $y_0$ . Puis Léa joue  $y'_0$ , puis Bob joue  $x'_0$ . Léa joue  $x_1$ . Bob joue  $y_1$ . Puis Léa joue  $y'_1$ , puis Bob joue  $x'_1$ . Et ainsi de suite. Il n'y a pas d'étape exceptionnelle. Les deux joueurs construisent ainsi chacun un élément de  $(E^{\mathbb{N}})^2$ .

**Condition de gain**

Dans le jeu  $G(E, F, \leq, n, \phi, \psi, A)$ , Léa est déclarée gagnante quand  $\phi(x, x') > \psi(y, y')$ . Dans le jeu  $H(E, F, \leq \phi, \psi, A)$ , Léa est déclarée gagnante quand  $\phi(x, x') > \psi(y, y')$  ou  $\phi(x, x') = \psi(y, y') \in A$ .

#### 4.0.5 Théorèmes min-max de la cible

**Théorème 34** *On suppose que  $\leq$  est un bon ordre sur  $F$  et que les jeux mis en oeuvre sont tous déterminés. Soit  $T$  un ensemble non vide inclus dans  $F^{(E^{\mathbb{N}})^2}$ . Il existe  $\phi \in T$  tel que:*

*ou bien, il existe un unique entier  $n$  tel que pour tout  $\psi \in T$ : Léa a une stratégie infaillible à  $GG(E, F, \leq, n, \phi, \psi)$*

*ou bien, pour tout  $\psi \in T$ : l'ensemble des parties  $A$  de  $F$  telles que Léa a une stratégie infaillible pour gagner  $HH(E, F, \leq \phi, \psi, A)$  est un ultrafiltre sur  $F$  stable par intersections dénombrables. En particulier, si  $F$  est dénombrable alors cet ultrafiltre est principal et l'élément, unique, de  $F$  qui est concerné s'appelle le target de  $T$ .*

*Les deux conclusions s'excluent l'une l'autre.*

Le deuxième théorème de la cible affirme les mêmes conclusions, mais la seule hypothèse faite sur l'ordre est qu'il est un ordre total (il n'est plus supposé qu'il est un bon ordre).

**Théorème 35** *On suppose que  $\leq$  est un bon total sur  $F$  et que les jeux mis en oeuvre sont tous déterminés. Soit  $\phi$  un élément de  $F^{(E^{\mathbb{N}})^2}$ .*

*ou bien, il existe un unique entier  $n$  tel que Léa a une stratégie infaillible à  $G(E, F, \leq, n, \phi, \phi)$*

*ou bien, l'ensemble des parties  $A$  de  $F$  telles que Léa a une stratégie infaillible pour gagner  $H(E, F, \leq \phi, \phi, A)$  est un ultrafiltre sur  $F$  stable par intersections dénombrables. En particulier, si  $F$  est dénombrable ou égal à  $\mathbb{R}$  alors cet ultrafiltre est principal et l'élément, unique, de  $F$ , qui est concerné s'appelle le target de  $\phi$ .*

*Les deux conclusions s'excluent l'une l'autre.*

### 4.0.6 Remarques

La détermination de suffisamment de jeux limitent donc, entre autre, fortement les ordres totaux sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ . L'émergence de filtres (qui deviennent des ultrafiltres " $\llcorner$ proportionnellement" $\ggcorner$  à la détermination des jeux mis en oeuvre) est due au phénomène abstrait algébrique suivant:

**Théorème 36** *Soit  $S$  une partie de  $P(E^2)$  telle que pour tout  $A \subseteq E^2 : A \in S$  ou  $\{(x, y) \in E^2 \mid (y, x) \notin A\} \in S$ . On suppose de plus que pour tout  $F, G$  dans  $S : F \circ G \in S$  (autrement dit  $S$  est stable par composition). Soit  $\leq$  un ordre total sur  $E$ . Alors l'ensemble des parties  $X$  de  $E$  tel que  $\{(x, y \mid x < y \text{ ou } x = y \in X)\} \in S$  engendre un ultrafiltre sur  $E$  (éventuellement égal à  $P(P(E))$ ). Cet ultrafiltre est stable par intersections dénombrables dès que l'ordre est un bon ordre.*

On note qu'on a " $\llcorner$ retourné" $\ggcorner$  la négation, ie la condition sur  $S$  n'est pas " $\llcorner A \in S$  ou  $\text{non}(A) \in S$ " $\ggcorner$  mais  $A \in S$  ou  $\text{DualTukey}(A) \in S$

## 4.1 Quand le retournement est inoffensif

Il existe au moins une situation célèbre où la " $\llcorner$ bonne fondation" $\ggcorner$  dans un sens implique **la bonne fondation dans l'autre sens**. Quand les propriétés structurelles étudiées provoquent cet effondrement de la distinction on peut s'estimer très loin de ordinaux (ils sont l'archétype d'exemple où on peut aller aussi haut qu'on veut dans un sens alors qu'on ne peut descendre qu'un nombre fini de fois dans l'autre sens)

Cette *situation célèbre* est le théorème suivant: *tout anneau commutatif unitaire qui est artinien est aussi noethérien.*

Que se passe-t-il? Pourquoi la structure annelée, ajoutée à la commutativité effacent-elles les émergences précédentes? Pourquoi est-elle asymétrique (certains anneaux noethériens ne sont pas artiniens)? Nous avons souhaité répondre un peu plus en termes de fondement à cette question. En fait, elle est essentiellement symétrique et l'effacement est bien total, dès lors qu'on s'autorise la souplesse de " $\llcorner$ à quelques cardinaux près" $\ggcorner$ .

Pour formaliser, nous noterons *indice d'artinianité* (resp *noethérianité*) de l'anneau  $A$  le plus petit ordinal  $\kappa$  tel qu'il n'existe pas d'application strictement croissante de  $(\kappa, \in)$  dans  $(\text{Ideaux}(A), \supset)$  (resp  $(\kappa, \in)$  dans  $(\text{Ideaux}(A), \subset)$ ). Le théorème suivant<sup>1</sup> montre que la structure annelée + la commutativité<sup>2</sup> écrase la distinction entre la " $\llcorner$ tendance à la bonne fondation" $\ggcorner$  de  $\leq$  et celle de  $\geq$  pour des ordres " $\llcorner$ fondamentaux" $\ggcorner$  (ie d'un type dont on pourrait éventuellement espérer qu'ils implémentent le temps dans des progrès futurs de la correspondance de Curry-Howard

**Théorème 37** *(ZFC + CM) Pour tout cardinal  $a$  il existe un cardinal  $b$  tel que pour tout anneau  $A$  si l'un de ses indices d'artinianité ou de noethérianité est  $\leq a$  alors son autre indice est  $\leq b$ .*

<sup>1</sup>Nous en avons mis une preuve sur HAL, car elle est un peu longue pour figurer dans le présent texte

<sup>2</sup>La commutativité est nécessaire, nous avons signalé des exemples canoniques sur HAL quand elle n'est pas supposée!!