HAL
open science

DE NOUVEAUX INDICATEURS DE CAPABILITE BASES SUR LE BON FONCTIONNEMENT DES PRODUITS

Maurice Pillet, Emmanuel Duclos, Alain Courtois

To cite this version:

Maurice Pillet, Emmanuel Duclos, Alain Courtois. DE NOUVEAUX INDICATEURS DE CAPABILITE BASES SUR LE BON FONCTIONNEMENT DES PRODUITS. Qualita 97, 1997, Angers, France. 12 p. hal-00974315

HAL Id: hal-00974315

https://hal.science/hal-00974315

Submitted on 6 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DE NOUVEAUX INDICATEURS DE CAPABILITE BASES SUR LE BON FONCTIONNEMENT DES PRODUITS

Maurice Pillet[1] - Emmanuel Duclos[2] - Alain Courtois[3]

RESUME

L'objet de cette communication est de montrer les limites des indicateurs classiques de capabilité et de proposer une extension de l'indicateur Cpm aux cas de figure unilatéraux.

INTRODUCTION

Les indicateurs de capabilité sont aujourd'hui incontournables dans les relations clients/fournisseurs. Plusieurs indicateurs ont été proposés pour différents cas de figure et l'Afnor a proposé une normalisation de ces indicateurs.

Les indicateurs les plus répandus sont les indicateurs Cp, Cpk qui associent à un indicateur un pourcentage de produits hors tolérance dans le cas d'une loi normale. Le but de la présentation est de montrer que le principe même de baser l'indicateur sur la proportion de produits hors tolérance n'est pas forcément la bonne solution. Les indicateurs qui en découlent ne correspondent pas aux besoins réels des industriels dans le cas de produits assemblés.

En effet, la fonction achetée par le client final n'est pas définie par le pourcentage hors tolérance, ni par la normalité de la répartition de chaque pièce élémentaire entrant dans l'assemblage. La qualité de la fonction achetée dépend d'une fonction résultante de plusieurs caractéristiques comme un jeu ou une fonction électronique.

C'est sur la fonction vendue qu'il faut se focaliser et non sur les pièces élémentaires. L'objectif final d'un bon indicateur de capabilité doit être la satisfaction du client au moindre coût et doit traduire le bon fonctionnement du produit acheté.

1. LIMITE DES INDICATEURS Cp, Cpk

1.1. Cas bilatéral

Largement répandu dans le milieu industriel, disponible sur tous les logiciels spécialisés en MSP, le Cpk a aujourd'hui obtenu ses lettres de noblesse. Pourtant, bien qu'il représente un progrès considérable en matière de qualité par rapport aux méthodes traditionnelles, nous pensons qu'il ne correspond pas toujours à la notion de qualité vue par le client. Pour bien exposer ce point de vue, il faut repartir du besoin du client et de la conception des produits.

Prenons le cas d'une tolérance bilatérale entrant dans un ensemble mécanique défini par la figure 1.

[1] LLP - CESALP - Université de Savoie - BP 240 - 74942 Annecy Le Vieux Cedex - Pillet@Univ-Savoie.fr
[2] LLP - CESALP Duclos@Univ-Savoie.fr
[3] LLP - CESALP Courtois@Univ-Savoie.fr

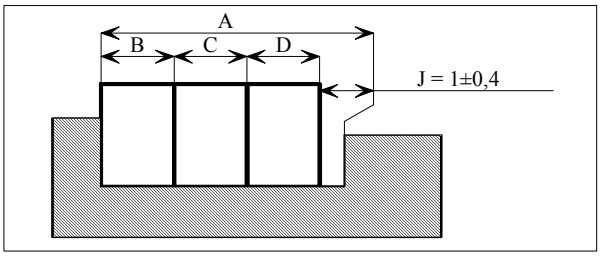

Figure 1 - Ensemble servant d'exemple

Le besoin du client peut se résumer en un produit qui marche bien, longtemps, et qui ne coûte pas cher. L'acheteur est intéressé par le fonctionnement du mécanisme, pas par la cote particulière de la pièce A, B, C ou D. Or le fonctionnement de ce mécanisme sera garanti par le jeu si bien appelé "fonctionnel". Pour obtenir une tolérance sur le jeu, le concepteur doit répartir l'intervalle de tolérance du jeu sur les pièces selon deux possibilités :

- se placer au pire des cas soit $IT_{Jeu} = \Sigma\ IT_{Pièces}$;
- se placer dans le cas d'une cotation statistique en faisant l'hypothèse du centrage et de l'indépendance des pièces soit $V_{Jeu} = \Sigma\ V_{pièces}$;

Dans le cas d'une répartition équilibrée des tolérances, on trouve :

- pour la répartition au pire des cas : tolérance sur une pièce = 0,01 ;
- pour la répartition statistique : tolérance sur une pièce = 0,02.

Le cas statistique est évidemment plus intéressant d'un point de vue coût de fabrication. On a tout intérêt à choisir cette solution, à la condition que la production soit capable de respecter les hypothèses de répartition qui ont été prises. Considérons maintenant les cas d'une production telle que :

- #1 les pièces B, C et D sont fabriquées avec Cp = 3 et Cpk = 1,33. Le décentrage est toujours côté maxi. Les pièces sont jugées acceptables.
- #2 la pièce A est fabriquée avec Cp=1,33 et Cpk = 1,33 soit une production correcte et centrée. Le nombre de ppm hors tolérance est deux fois supérieur au cas #1.

On a donc la répartition illustrée sur la figure 2.

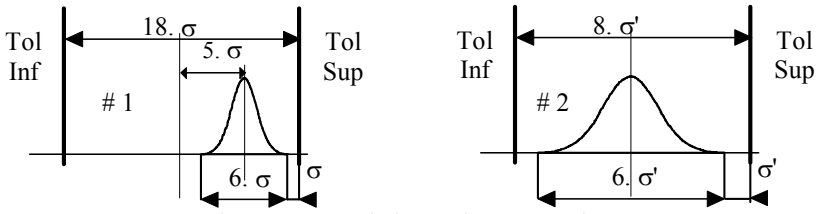

Figure 2 - Deux cas de répartition de la production sur les pièces B, C et D

La production est satisfaite, les critères de capabilité sont respectés dans les deux cas. Mais comment se situera le jeu fonctionnel ? L'intervalle de tolérance sur le jeu calculé en cotation statistique est le double de l'intervalle de tolérance sur une pièce.

- Dans le cas #1, (figure 3) le jeu ne sera pas conforme, à cause du décentrage, on aura 6,68% de jeu hors intervalle de tolérance, le client ne sera pas satisfait.
- Dans le cas #2, le client sera parfaitement satisfait, le jeu sera conforme à la spécification. Le nombre de ppm hors tolérance sera 1000 fois plus faible que le cas #1.

La conclusion trop rapide que l'on tire est qu'il faut resserrer l'intervalle de tolérance sur les pièces élémentaires pour éviter le cas #1. Nous pensons au contraire que c'est le critère d'acceptation des pièces qui est à revoir. On a trop basé l'acceptation des pièces sur le pourcentage de pièces hors tolérances, on en est même venu à se casser la tête sur la "pièce par million" hors tolérances. Et si, tout simplement, on s'intéressait davantage au 999 999 pièces qui sont dans la tolérance plutôt que de la pièce qui est hors tolérance.

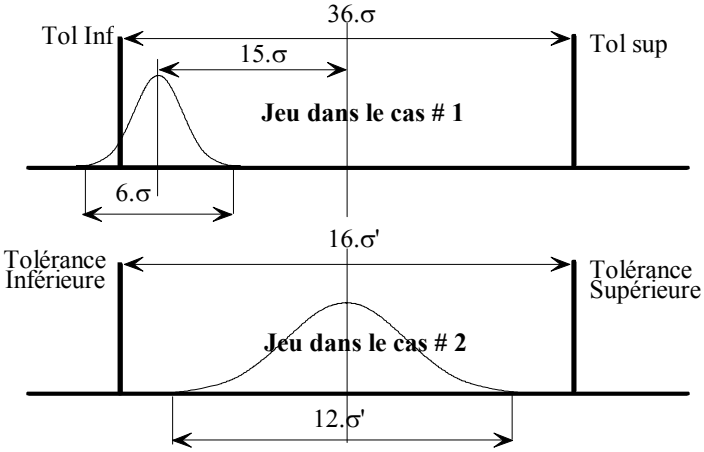

Figure 3 - Répartition finale du jeu

1.2. Cas bilatéral

Dans le cas bilatéral, on retrouve le même problème d'inadaptation des calculs classiques des indicateurs de capabilité pour évaluer la qualité d'une production. Ainsi, dans le cas de la figure 4, il est facile de vérifier que les calculs classiques de capabilité donnent avantage au cas de la figure #1, alors que le bon sens (et la satisfaction du client) préfère largement le cas #2.

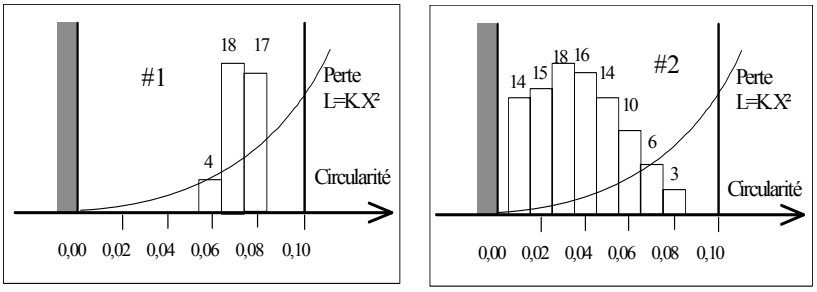

Figure 4 - Exemple # 1 et # 2

 # 1 - loi normale : $\overline{X} = 0{,}0733$ $\sigma = 0{,}00662$ $\text{Cpk} = \dfrac{0{,}1 - 0{,}0733}{3\text{x}0{,}00662} = \mathbf{1{,}34}$

 # 2 - loi normale sous jacente : $\overline{X} = 0{,}0366$ $\sigma = 0{,}0202$ $\text{Cpk} = \dfrac{0{,}1 - 0{,}0366}{3\text{x}0{,}0202} = \mathbf{1{,}05}$

Dans le cas bilatéral comme dans le cas unilatéral, le Cpk est fondé sur la minimisation du pourcentage de pièces hors tolérance. La recherche de la cible n'est pas considérée dans le

Cpk. Dans de nombreux cas, notamment lors de caractéristiques entrant dans une chaîne fonctionnelle, il est préférable de considérer la répartition de l'ensemble des pièces plutôt que le pourcentage de pièces hors tolérance pour évaluer un niveau de qualité. Il faut donc trouver un autre indicateur plus pertinent.

2. L'INDICATEUR Cpm

Un autre indicateur proposé par L. Chan en 1988 commence à être largement utilisé dans les entreprises : l'indicateur Cpm. Cpm tient compte à la fois de la dispersion et du centrage. Son objectif est de donner une image du procédé globale par un seul indicateur. L'indicateur Cpm est basé sur la fonction perte de Taguchi qui s'écrit L = K (X - cible)².

Dans le cas d'un échantillon de moyenne $\overline{X}$ et d'écart type σ la perte moyenne par pièce est : $L = K(\sigma^2 + (\overline{X} - \text{Cible})^2)$.

Le nouvel indicateur Cpm reflète la perte (au sens de Taguchi) due à un déréglage. Cpm est défini par :

$$Cpm = \frac{IT}{6.\sqrt{\sigma^2 + \left(\overline{X} - Cible\right)^2}} = \frac{Cp}{\sqrt{1 + 9(Cp - Cpk)^2}}$$

La fonction perte intervient au dénominateur. On note que l'indicateur Cpm est égal à Cp lorsque le procédé est parfaitement centré.

L'utilisation du Cpm évite les risques de productions trop décentrées qui entraînent les problèmes que nous avons évoqués en 1. En effet on calcule dans le cas # 1 de la figure 2, Cpm = 0,58, alors que dans le cas #2, Cpm = 1,33. Le Cpm montre clairement que le cas #2 donnera une meilleure satisfaction client que le cas #1.

3. CAS DES TOLERANCES UNILATERALES

3.1. Définitions

La fonction perte dans le cas des tolérances unilatérales est définie par L = K.X² (figure 6).

On a vu précédemment qu'un Cpm constant correspondait à une perte moyenne constante pour les populations concernées. Nous proposons de généraliser ce concept au cas unilatéral.

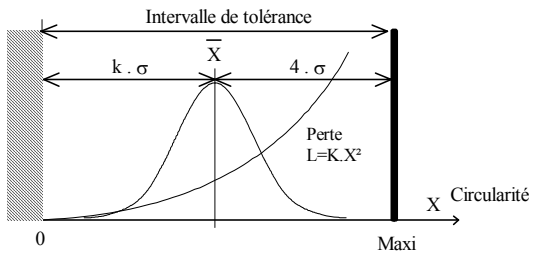

Figure 5 - Fonction perte dans le cas unilatéral

Définissons une situation de référence (Figure 6) telle que :

- la moyenne soit située à k.σ de 0 ;
- la moyenne soit située à 4.σ de la limite supérieure ;
- Cpm = 1,33.

L'intervalle de tolérance représente alors (4 + k).σ. La perte moyenne par pièce ($\overline{L}$) pour une production d'écart-type σ (**non nécessairement normale**) est donnée par la relation suivante :

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\sum K(X_i)^2 = \frac{K}{n}\sum (X_i - \overline{X} + \overline{X})^2 = \frac{K}{n}\sum (X_i - \overline{X})^2 + \underbrace{(\overline{X})^2 + 2(X_i - \overline{X})(\overline{X})}_{=0}$$

$$\overline{L} = K\left[\sum \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n} + (\overline{X})^2\right] \qquad \text{D'où } \boxed{\overline{L} = K.\left[\sigma^2 + (\overline{X})^2\right]}$$

Pour la situation de référence (Figure 7) :

la perte moyenne générée par la situation de référence est égale à : $\boxed{\overline{L} = K.\left[\sigma^2 + (k.\sigma)^2\right]}$

$$Cpm = \frac{IT}{A\sqrt{\sigma^2 + \overline{X}^2}} = \frac{(4+k).\sigma}{A\sqrt{\sigma^2 + (k.\sigma)^2}} = 1{,}33 \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{(4+k)}{1{,}33\sqrt{1+k^2}}$$

- k doit être déterminé par un accord entre le client et le fournisseur en fonction du niveau de qualité souhaité.
- A est une constante calculée à partir de k. Nous recommandons l'emploi de k = 4.

k	3	4	5
A	1,66	1,46	1,33

Prenons le cas particulier où k = 4 (la moyenne de la répartition de la situation de référence est située à 4.σ de 0), on a A =1,46. Le Cpm est alors défini comme étant :

$$\boxed{Cpm = \frac{IT}{1{,}46\sqrt{\sigma^2 + \overline{X}^2}}}$$

Cpm peut être calculé par cette formule quelle que soit le type de répartition. Il est inversement proportionnel à la perte moyenne par pièce.

3.2. Exemples de calcul de Cpm et comparaison avec le Cpk

Pour illustrer la différence entre le Cpk et le Cpm dans le cas unilatéral, nous allons nous appuyer sur les deux exemples de la figure 2. Nous avions trouvé :

 # 1 - loi normale sous jacente : $\overline{X} = 0{,}0366$ $\quad \sigma = 0{,}0202 \quad$ Cpk = $\frac{0{,}1 - 0{,}0366}{3\text{x}0{,}0202} = \mathbf{1{,}05}$

 # 2 - loi normale : $\overline{X} = 0{,}0733$ $\quad \sigma = 0{,}00662 \quad$ Cpk = $\frac{0{,}1 - 0{,}0733}{3\text{x}0{,}00662} = \mathbf{1{,}34}$

Calcul du Cpm

Le calcul du Cpm est beaucoup plus simple que le calcul du Cpk, en effet, il ne tient pas compte du type de répartition des pièces. On calcule l'écart-type estimé et la moyenne de la répartition à partir de l'histogramme.

Exemple #1 $S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}} = 0{,}01927$ et $\overline{X} = 0{,}03729$

$$\text{Cpm} = \frac{\text{IT}}{1{,}46\sqrt{\sigma^2 + \overline{X}^2}} = \frac{0{,}1}{1{,}46\sqrt{0{,}01927^2 + 0{,}03729^2}} = \mathbf{1{,}63}$$

Exemple # 2 $S = 0{,}00662$ $\overline{X} = 0{,}0733$

La normalité de cette répartition n'est pas très bonne, mais cela n'a pas d'importance pour le calcul du Cpm.

$$Cpm = \frac{0{,}1}{1{,}46\sqrt{0{,}0733^2 + 0{,}00662^2}} = \mathbf{0{,}93}$$

On le voit, dans le cas de figure #1, le Cpm donne une capabilité plus importante que le CAP ou le Cpk car la densité de probabilité est près de l'optimal (ici zéro). L'interprétation de ce Cpm est simple : la répartition du cas #1 donnera une perte plus faible que la répartition de référence (figure 8.15). Cela signifie que le fonctionnement des produits assemblés à partir de ces pièces sera de meilleure qualité. Le Cpk et le CAP sont fondés sur des concepts très différents du Cpm. En effet, ceux-ci s'appuient sur un critère quantitatif de pièces hors tolérance, alors que le Cpm est basé sur le fonctionnement optimal des produits. Mais ce qui doit intéresser l'industriel, c'est justement le bon fonctionnement des produits plus que les ppm en dehors de la tolérance !

Dans le cas #2, le Cpm donne une capabilité plus faible que le CAP ou le Cpk. Ceci est dû au fait que l'ensemble des valeurs est proche de la limite supérieure. Toutes les pièces ayant une circularité limite, le Cpm traduit que le fonctionnement des produits avec ce type de répartition sera moins bon qu'avec la répartition de référence (Figure 8.15).

Enfin, pour comparer la différence entre le CAP et le Cpm, nous allons comparer les résultats donnés avec deux situations théoriques différentes (Figure 10).

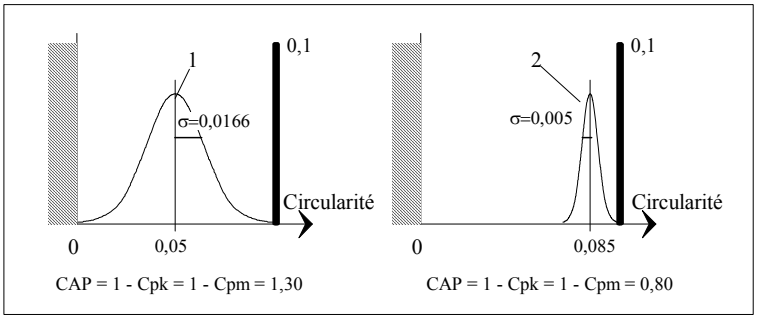

Figure 6 - Comparaison sur deux cas théoriques où Cpk est proche de 1

Dans ces deux cas, le calcul du CAP et du Cpk donnerait 1,00. On considère donc ces deux situations comme identiques. Pourtant, il est évident que d'un point de vue fonctionnel, les

deux populations sont totalement différentes. Même si le pourcentage de défauts dans les deux cas est identique, il est évident que la population 1 donne globalement de bien meilleurs résultats.

Calcul de Cpm Cas 1 Cas 2

$$\text{Cpm} = \frac{0{,}1}{1{,}46\sqrt{0{,}0166^2 + 0{,}05^2}} = 1{,}30 \qquad \text{Cpm} = \frac{0{,}1}{1{,}46\sqrt{0{,}005^2 + 0{,}085^2}} = 0{,}80$$

On constate que le Cpm tel que nous l'avons décrit dans cet article, est bien plus lié à la qualité réelle d'une production que tout autre indicateur connu. Surtout que dans ce cas, la valeur cible est parfaitement identifiée ($X_0 = 0$), ce qui n'est pas toujours le cas dans les situations bilatérales.

3.3. Cas des tolérances unilatérales inférieures avec une limite physique

C'est le cas par exemple des rendements pour lesquels on ne peut avoir un rendement supérieur à 100%. Dans ce cas également, nous proposons de calculer un Cpm fondé sur le même principe que dans le cas unilatéral supérieur limité en zéro.

Nous définissons une situation de référence avec une fonction perte qui entraîne un Cpm égal à 1,33. Les répartitions seront comparées à cette situation de référence pour calculer le Cpm.

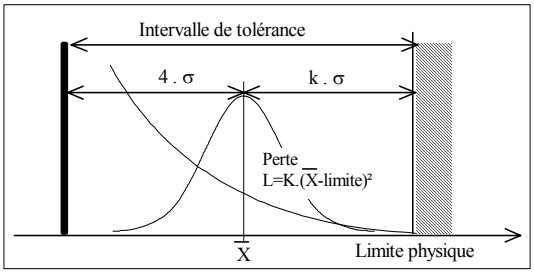

Figure 7 - Cas unilatéral supérieur avec limite physique

Les mêmes calculs que dans le cas unilimite supérieur donnent comme Cpm :

$$Cpm = \frac{Tolerance}{A\sqrt{(\overline{X} - \text{lim}ite)^2 + S^2}}$$

Avec A qui dépend de k, position de la courbe de référence. Avec k = 4, on a comme dans le cas unilatéral supérieur A = 1,46

3.4. Cas des tolérances unilatérales inférieures sans limite physique

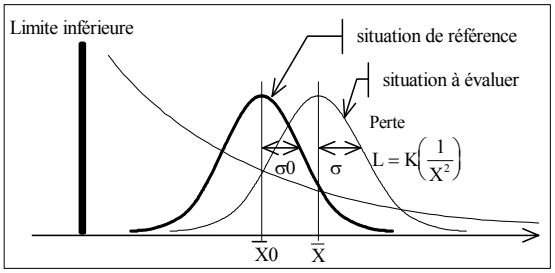

Figure 8 - Cas des tolérances unilatérales inférieures sans limites maxi

C'est le cas notamment des duretés, des résistances à la rupture. On peut alors calculer un Cpm à partir d'une situation de référence.

Prenons le cas où on a obtenu sur une présérie un échantillon considéré comme la limite minimale acceptable. L'échantillon est caractérisé par sa moyenne et son écart-type ($\bar{x}0$ et S0).

On montre assez facilement que la perte moyenne par pièce dans le cas d'un échantillon peut être approximée par la formule : $\frac{K}{n}\sum\frac{1}{X^2} \approx \frac{K}{\overline{X}^2}\left(1+3\left(\frac{S}{\overline{X}}\right)^2\right)$

Par analogie avec les cas précédents, on définit Cpm par : $Cpm = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{\overline{X}^2}\left(1+3\left(\frac{S}{\overline{X}}\right)^2\right)}}$

A est calculé de telle sorte que la situation de référence donne un Cpm de 1,33. On a donc :

$$1{,}33 = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{\overline{X}0^2}\left(1+3\left(\frac{S0}{\overline{X}0}\right)^2\right)}} \quad \text{soit} \quad A = 1{,}33.\sqrt{\frac{1}{\overline{X}0^2}\left(1+3\left(\frac{S0}{\overline{X}0}\right)^2\right)}$$

CONCLUSION

Nous avons présenté dans cette conférence les limites des indicateurs classiques de capabilité tels que le Cp et le Cpk. En fondant notre raisonnement sur le Cpm proposé par Chan dans le cas bilatéral, nous avons proposé une extension du Cpm aux différents cas unilatéraux.

Les indicateurs proposés ont l'avantage de mieux traduire la qualité de la fonction du produit final, que la qualité intrinsèque des caractéristiques élémentaires des pièces. De plus, ces indicateurs ne supposent pas la normalité ni aucune répartition des caractéristiques. Ils sont donc plus généraux que les indicateurs habituellement utilisés.

Bibliographie

- *Chan L. K., Cheng S. W., Spiring F. A. A new measure of Process Capability : Cpm - Journal of Quality Technology, Vol 20.*
- *Youn-Min Chou, D.B. Owen, S.A. Borrego « Lower Confidence Limits on process Capability Indices » Journal of Quality Technologie, Vol 22, N° 3, July 1990*
- *Emmanuel Duclos - Maurice Pillet - Alain Courtois - Optimisation de la maîtrise statistique des procédés par une méthode de filtrage d'ordre - Revue de statistique appliquée -*
- Boyles R.A. - Exploratory Capability analysis - Journal of Quality Technologie, 28(1):91-98 - Janvier 1996
- *Maurice Pillet - Sylvain Rochon - Emmanuel Duclos- SPC - Generalization of capability index Cpm - Case of unilateral tolerances - Quality Engineering - accepté, à paraître 1997*
- *Persijn M. - Van Nuland Yves - Relation between measurement system capability and process capability - - Quality Engineering 1996*
- *Maurice PILLET - Optimisation de la taille des échantillons dans le cas des systèmes multigénérateurs - Contrôle industriel et Qualité - à paraître 1996*
- *Maurice Pillet - SPC Cpm dans la cas des tolérances unilatérales - Contrôle industriel et* Qualité -n°197 - Février 1996
- *Maurice Pillet "Appliquer la maitrise Statistique des procédés (MSP/SPC)"- Ed d'organisation 97*
- *Genichi Taguchi System of experimental Design Vol I & II - Kraus - 1987*
- *Genichi Taguchi - Elsayed A. Elsayed - Thomas Hsiang Quality engineering in production systems Mc Graw-Hill – 1989 -Quality Engineering 9(1), 95-98 (1996-97)*