



**HAL**  
open science

# Propagation d'ondes élastiques dans un guide hélicoïdal par la méthode SAFE

Ahmed Frikha, Fabien Treyssede

► **To cite this version:**

Ahmed Frikha, Fabien Treyssede. Propagation d'ondes élastiques dans un guide hélicoïdal par la méthode SAFE. COTUME 2008, Mar 2008, Tunisie. 2 p. hal-00969183

**HAL Id: hal-00969183**

**<https://hal.science/hal-00969183>**

Submitted on 2 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Propagation d'ondes élastiques dans un guide hélicoïdal par la méthode SAFE

A. FRIKHA et F. TREYSEDE

LCPC, Division Métrologie et Instrumentation, Route de Pornic - BP 4129, 44341 Bouguenais, France

[ahmed.frikha@lcpc.fr](mailto:ahmed.frikha@lcpc.fr)

**Résumé :** Le but de cet article est d'étudier la propagation des ondes élastiques dans un guide d'ondes hélicoïdal. Dans le contexte du contrôle non destructif, cette étude est motivée par la nécessité de l'inspection des structures hélicoïdales telles que les câbles ou les ressorts. La méthode numérique choisie est basée sur une technique d'éléments finis semi-analytique. La méthode proposée repose sur un système de coordonnées curvilignes non-orthogonal qui est invariant par translation le long de l'axe de l'hélice, de sorte qu'une transformée de Fourier est effectuée explicitement et le problème est réduit à deux dimensions.

**Mots clefs :** Propagation, guide d'onde, hélicoïdal, semi-analytique, éléments finis.

## 1. Introduction

Le contrôle non destructif par ondes élastiques guidées a attiré beaucoup l'attention. Dans les guides d'ondes cylindriques, la propagation des ondes élastiques a été largement étudiée depuis les travaux de Pochhammer en 1876. Par exemple, nous pouvons citer le document de Zemanek [1], qui fut l'un des premiers auteurs à avoir présenté une analyse complète comprenant des essais expérimentaux. Cependant, la même attention n'a pas été portée aux guides d'ondes hélicoïdaux, bien que leur étude soit potentiellement intéressante pour l'inspection des structures hélicoïdales, tels que des câbles ou des ressorts.

La méthode d'éléments finis semi-analytique (SAFE) est une première approche qui a été utilisée pour étudier la propagation d'ondes dans les guides droits de section arbitraire (voir par exemple [2]). Cette méthode consiste à considérer une dépendance exponentielle de la forme  $e^{i(kz-\omega t)}$  (où  $k$  est le nombre d'onde,  $z$  est l'axe du guide d'onde, et  $\omega$  est la fréquence). Une deuxième approche est basée sur la théorie de la propagation des ondes dans les structures périodiques appliquant le principe de Floquet (voir Treysede [3]).

Dans ce papier, une méthode SAFE est présentée pour calculer les modes de propagation d'un guide d'ondes hélicoïdal ayant une section arbitraire (pas forcément circulaire). Le lecteur peut être renvoyé à [4] pour une introduction fondamentale aux systèmes de coordonnées curvilignes.

## 2. Formulation E.F. pour un guide hélicoïdal

### 2.1. Système de coordonnées curvilignes

L'hélice de l'axe de la courbe peut être décrite par le vecteur position suivant :

$$\mathbf{R}(s) = R \cos\left(\frac{2\pi}{l}s\right) \mathbf{e}_x + R \sin\left(\frac{2\pi}{l}s\right) \mathbf{e}_y + \frac{L}{l} s \mathbf{e}_z \quad (1)$$

Où  $l = \sqrt{L^2 + 4\pi^2 R^2}$ .  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  désigne la base orthogonale cartésienne.  $R$  et  $L$  sont respectivement le rayon de l'axe dans le plan cartésien  $(X, Y)$  et la longueur d'une spire de l'hélice le long de l'axe  $Z$  (voir Fig. 1). On considère que le paramètre  $s$  qui correspond à la longueur de l'arc varie entre  $0$  et  $l$ .

Les formules de Serret-Frenet, donne une base orthonormale  $(\mathbf{N}, \mathbf{B}, \mathbf{T})$  associée à l'hélice. On définit ensuite une base covariante non orthogonale notée  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  associée à l'hélicoïde.

On montre que le tenseur métrique covariant ne dépend pas de  $s$ . En supposant que la section du guide ainsi que les propriétés du matériau ne varient pas le long de  $s$ , on peut conclure que le guide hélicoïdal possède une invariance par translation selon  $s$  dans ce système de coordonnées curvilignes.

### 2.2. Formulation variationnelle

On travaille dans le cadre de l'élasticité linéaire, des petites déformations et petits déplacements et on suppose une dépendance harmonique  $e^{-i\omega t}$  en temps. La formulation variationnelle 3D régissant la dynamique est donnée par:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV \quad (2)$$

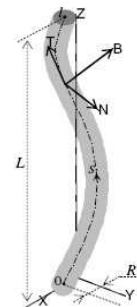


Fig.1 Une spire d'un guide d'ondes hélicoïdale de section circulaire dans sa base locale  $(\mathbf{N}, \mathbf{B}, \mathbf{T})$ .

Les relations contraintes-déformations et déformations-déplacements sont définis dans une base curviligne par:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) - \Gamma_{ij}^k u_k \quad (3)$$

où les indices de bas (resp. haut) dénotent les composantes covariantes (resp. contravariantes) par rapport à la base contravariante  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$  (resp. covariante  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ ).

La notation  $(\cdot)_{,i}$  ( $i=1,2,3$ ) est utilisée pour la dérivation respectivement selon  $x$ ,  $y$  et  $s$ .

Les composantes de la matrice  $C$  peuvent être exprimées dans la base covariante et pour un matériau isotrope comme suit :

$$C^{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} g^{ij} g^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (4)$$

$E$  est le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de poisson.

### 2.3. Méthode SAFE

Puisque le système possède une invariance par translation selon  $s$ , une transformée de Fourier dans la direction  $s$  peut être effectuée. Ainsi, l'exponentielle  $e^{iks}$  peut être séparée de toutes les composantes, et  $\partial/\partial s$  est remplacé par  $ik$ , où  $k$  est le nombre d'onde axial (le long de l'axe de l'hélice). Le vecteur déplacement peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) e^{i(ks - \omega t)} \quad (5)$$

En utilisant des décompositions appropriées, la formulation variationnelle semi-analytique discrétisée peut se mettre sous cette forme ( voir [5]):

$$\{ \mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} + ik(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2 \mathbf{K}_3 \} \mathbf{U} = 0 \quad (6)$$

## 3. Analyse de la dispersion dans un guide d'ondes hélicoïdal

Sans perte de généralité de la méthode proposée, le matériau est supposé isotrope avec un coefficient de Poisson de 0.3 (caractéristique des propriétés de l'acier) avec une dissipation matérielle.

Les modes qui se propagent à l'intérieur d'un brin simple constituant un câble 6+1 typique sont étudiés. L'hélice est de rayon  $R=2a$  avec un angle de  $7,5^\circ$

D'un point de vue physique, une particularité intéressante peut être observée en comparant le cas cylindrique et hélicoïdal. Les nombre d'onde de compression  $L(0,1)$  et de torsion sont pratiquement inchangées par la géométrie hélicoïdale (à condition que la longueur d'arc selon l'hélice soit considérée) ( voir fig.2). Ce n'est pas le cas pour les modes de flexion, qui se produisent selon des racines distinctes plutôt que doubles en raison de la perte de symétrie de la géométrie hélicoïdale.

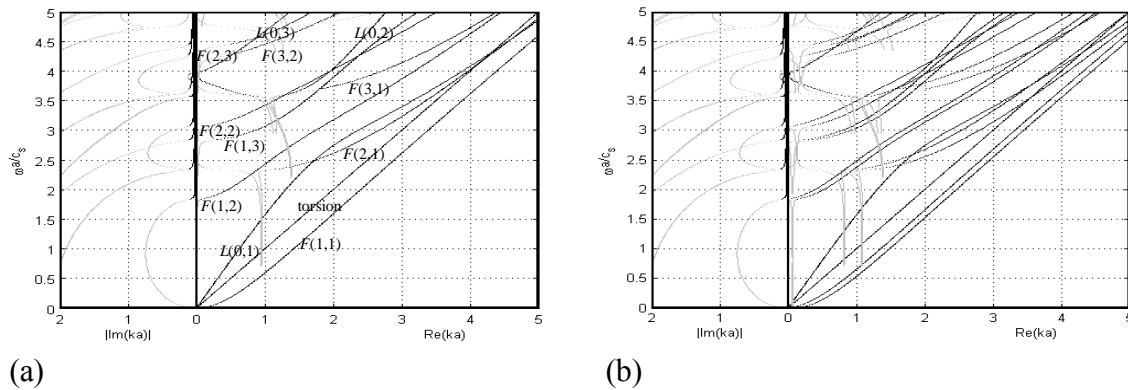


Fig.2 Courbes de dispersion pour  $\Omega = \frac{\omega a}{c_s}$  allant de 0 à 5. Gauche: géométrie cylindrique, droite: géométrie hélicoïdale  $\phi = 7.5^\circ$ . Lignes noires: les modes quasi propagatifs, les lignes grises: les modes non propagatifs.

## 4. Références

- 1 J. Zemanek, "An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder", Journal of the Acoustical Society of America, 51, 1972, 265–283.
- 2 L. Gavric, "Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique", Journal of Sound and Vibration, 185, 1995, 531–543.
- 3 F. Treyssède, "Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides", Journal of the Acoustical Society of America, 121, 06, 2007, 3398–3408.
- 4 D. Chapelle K.J. Bathe, The finite element analysis of shells-fundamentals, Springer, 7 – 25.
- 5 F. Treyssède, "Elastic waves in helical waveguides", journal of wave motion, accepted for publication.