



Résolution numérique de problèmes aux limites déterministes par des méthodes stochastiques

Jean-Paul Morillon

► To cite this version:

Jean-Paul Morillon. Résolution numérique de problèmes aux limites déterministes par des méthodes stochastiques. CANUM'95, May 1995, Besse, France. hal-00967610

HAL Id: hal-00967610

<https://hal.science/hal-00967610>

Submitted on 5 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Résolution numérique de problèmes aux limites déterministes par des méthodes stochastiques

J.-P. MORILLON

Institut de Biologie Théorique
Université d'Angers
10, rue André Bocquel
49100 Angers (France)

1. Introduction

La résolution numérique de problèmes aux limites peut être faite en mettant en œuvre des méthodes d'éléments finis ou de différences finies. Des méthodes de Monte-Carlo peuvent également être appliquées ; elles conduisent, après discrétisation des équations, à des traitements particuliers liés à la géométrie locale des domaines.

Pour éviter la gestion du maillage et la discrétisation des équations — et pour alléger la programmation — nous présentons, dans cette contribution, une autre voie en utilisant directement les représentations stochastiques. Celles-ci ont déjà été utilisées pour calculer la solution de problèmes aux limites linéaires avec condition de Dirichlet [6].

À notre connaissance, peu de résolutions conduisant à la solution de problèmes avec condition de Fourier (combinaison linéaire des conditions de Dirichlet et de Neumann) ou avec non-linéarité du second membre, ont été exposées. Dans ces conditions, des essais numériques se sont avérés nécessaires. Ce travail nous a conduit, dans un premier temps [4], à l'élaboration de la méthode pour des problèmes aux limites déterministes linéaires stationnaires avec des conditions de divers types. Dans un deuxième temps, des problèmes aux limites d'évolution, linéaires et non linéaires, ont été traités.

La motivation essentielle a été la recherche d'algorithmes conduisant à une programmation aisée avec peu d'instructions. Ceci peut induire des temps de calcul plus élevés, dépendant des moyens de calcul informatique. Les méthodes numériques qui en découlent ne nécessitent pas d'entrer en mémoire des maillages de discrétisation des domaines, ni de gérer les tableaux de numérotation qui les accompagnent.

2. Résolution de problèmes aux limites stationnaires

Considérons un ouvert borné G de $\mathbb{R}^d$. On note $x \in G$ la variable d'espace, n la normale unitaire intérieure définie sur la frontière ∂G . Pour le problème (3), on aura la partition $\partial G = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_F$ où les parties Γ_D , Γ_N et Γ_F correspondent aux conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann et de Fourier respectivement. Nous supposons que Γ_D est d'intérieur non vide.

À partir d'équations différentielles stochastiques (EDS) (voir pour ces dernières [2, 5] et les références associées), nous pouvons représenter par des intégrales stochastiques (en faisant intervenir la formule de Itô) les solutions des problèmes aux limites suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} a \Delta u + \lambda u = f(u) & (G) \\ u = g_1 & (\partial G) \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta u = f & (G) \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \mu u = g_3 & (\partial G) \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta u = f & (G) \\ u = g_1 & (\Gamma_D) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 & (\Gamma_N) \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \mu u = g_3 & (\Gamma_F) \end{cases}$$

où u est l'inconnue, fonction scalaire définie sur G , et les données sont la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times G$ (avec, éventuellement, f non linéaire en u), les fonctions g_i définies sur ∂G (dans le cas (3), sur une partie de ∂G), $a > 0$, $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ supposés constants.

Les approches des représentations stochastiques des solutions, par réalisations de processus solutions d'EDS, fournissent des algorithmes de calcul. Dans le cas non linéaire (1) avec $f \equiv f(u)$, un schéma itératif est appliqué en chaque point du domaine discrétisé.

Des simulations de marches aléatoires réfléchies donnent des résultats associés à des domaines en dimension $d \leq 2$ ($d \leq 3$ dans [4]). On montre notamment, à partir d'exemples, que le traitement des conditions aux limites peut se ramener à un comptage des nombres d'absorptions et de rebonds sur les frontières du domaine.

2.1. Représentations des solutions

Conditions de Dirichlet Considérons le problème (1) et introduisons le processus de Markov $X_t^x = x + \sqrt{a} W_t$, $t \geq 0$, où W_t est un processus de Wiener standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $\overline{G}$ le complémentaire de G dans $\mathbb{R}^d$. Le temps d'atteinte de $\overline{G}$ est défini par $\tau = \inf \{t > 0 \mid X_t^x \in \overline{G}\}$. La formule de Itô appliquée à $u(X_t^x) \exp(-\lambda t)$ conduit à la représentation de la solution de (1) sous la forme :

$$u(x) = E \left[\int_0^\tau f(X_t^x) \exp(-\lambda t) dt + g_1(X_\tau^x) \exp(-\lambda \tau) \right], \quad x \in G. \quad (4)$$

Lorsque f est non linéaire en u , nous utilisons la forme itérative :

$$u^m(x) = E \left[\int_0^\tau f(u^{m-1}(X_t^x)) \exp(-\lambda t) dt + g_1(X_\tau^x) \exp(-\lambda \tau) \right], \quad x \in G. \quad (5)$$

Conditions mixtes Considérons le problème (3) et introduisons le processus de Markov

$$X_t^x = x + W_t + \int_0^t \mathbb{1}_{\Gamma_N \cup \Gamma_F}(X_s^x) n(X_s^x) d\xi_s^x, \quad t \geq 0,$$

où $\mathbb{1}_{\Gamma_N \cup \Gamma_F}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\Gamma_N \cup \Gamma_F$ et où ξ_t^x est un processus croissant qui augmente seulement lorsque t atteint l'ensemble $\{s > 0 \mid X_s^x \in \overline{G} \setminus \Gamma_D\}$, tel que l'on ait : $\xi_0^x = 0$ et $\int_0^t \mathbb{1}_G(X_s^x) d\xi_s^x = 0$, $t \geq 0$.

On définit le temps d'atteinte de Γ_D par $\tau = \inf \{t > 0 \mid X_t^x \in \Gamma_D\}$.

La formule de Itô appliquée à $u(X_t^x) \exp\left(-\mu \int_0^t \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_s^x) d\xi_s^x\right)$ conduit à la représentation de la solution de (3) sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x) = & E \left[\int_0^\tau f(X_t^x) \exp\left(-\mu \int_0^t \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_s^x) d\xi_s^x\right) dt + g_1(X_\tau^x) \exp\left(-\mu \int_0^\tau \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_s^x) d\xi_s^x\right) \mathbb{1}_{\Gamma_D}(X_\tau^x) \right] \\ & - E \left[\int_0^\tau g_2(X_t^x) \exp\left(-\mu \int_0^t \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_s^x) d\xi_s^x\right) \mathbb{1}_{\Gamma_N}(X_t^x) d\xi_t^x \right] \\ & - E \left[\int_0^\tau g_3(X_t^x) \exp\left(-\mu \int_0^t \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_s^x) d\xi_s^x\right) \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_t^x) d\xi_t^x \right], \quad x \in G. \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 Algorithmes de résolution

Conditions de Dirichlet La solution du problème (1) est représentée par la moyenne d'une variable aléatoire Y fonction d'un processus de Wiener standard. La représentation (4) montre qu'il suffit de calculer N valeurs approchées Y_n de Y pour obtenir : $u(x) = \sum_{n=1}^N Y_n / N$. Chaque valeur Y_n est obtenue à partir d'une simulation d'un processus de Wiener. En dimension 1, nous utilisons l'algorithme du pas élémentaire :

Algorithme 1. `if random < 0.5 then X := X + H else X := X - H;`
 où la fonction `random` renvoie un nombre réel pseudo-aléatoire appartenant à $[0, 1[$.
 La variable `X` est l'abscisse du point courant, `H` le pas du déplacement.

Chaque simulation donne une réalisation X_k , $0 \leq k \leq M$, d'une marche aléatoire dans G telle que : $X_0 = x \in G, \dots, X_{M-1} \in G$ et $X_M \notin G$, dont la trajectoire est la courbe polygonale reliant les points X_k et X_{k+1} , $k = 0, \dots, M-1$, successivement.

Le processus aléatoire X_t^x est alors discrétisé selon la méthode d'Euler ; en particulier, si h est le pas d'une marche aléatoire simulée, alors on a les accroissements en pas et en temps suivants :

$$\delta X_t^x = |X_{k+1} - X_k| = h \quad \text{et} \quad \delta t = |t_{k+1} - t_k| = h^2/a.$$

À chaque marche aléatoire simulée X_k , on définit et on calcule l'encaissement Y_n :

$$Y_n = \delta t \sum_{k=1}^M f(X_k) \exp(-\delta t \lambda k) + g_1(X_M) \exp(-\delta t \lambda M) .$$

Puis on répète cette démarche N fois pour obtenir un échantillon de taille N pour la variable aléatoire Y et on en déduit $u(x)$.

Considérons un domaine G de $\mathbb{R}$ et un point XD donné dans G . Alors un algorithme possible du problème de Dirichlet linéaire (1) se présente sous la forme :

Algorithme 2.

```

YS:= 0.0; DIR:= 0.0; DELTA:= H * H * LAMBDA / A;
for i:=1 to N do begin
  X:= XD; YA:= 0.0; COUNT:= 0.0; EXPO:= 1.0;
  while INTER(X) = true do begin
    YA:= YA + F(X) * EXPO;
    X := X + PAS; { Pas aléatoire : PAS = H ou -H }
    COUNT := COUNT + 1.0; EXPO := exp( -DELTA * COUNT );
  end;
  DIR:= DIR + G1(X) * EXPO; YS := YS + YA;
end;
U:= ( H * H * YS / A + DIR ) / N;

```

Les variables DIR et YS permettent de stocker séparément les effets de la condition de Dirichlet et du second membre. Les variables DELTA, qui fixe le pas en temps, et COUNT, qui est un compteur de l'effet de LAMBDA, sont prises en compte par la variable intermédiaire EXPO. La procédure INTER est l'indicatrice de G. La variable U est finalement affectée de la moyenne des encaissements.

Un algorithme possible du problème de Dirichlet non linéaire (1) applique, à chaque itération, l'algorithme 2 en tout point de subdivision du domaine.

Conditions mixtes La solution u du problème (3) est représentée par la moyenne d'une variable aléatoire Y fonction d'une marche aléatoire réfléchie, puis absorbée. La représentation (6) est utilisée et $u(x)$ est calculée en faisant la moyenne arithmétique des réalisations de Y . Chaque valeur Y_n est obtenue à partir d'une simulation d'une marche aléatoire : chaque marche aléatoire simulée se comporte comme celle du cas Dirichlet à l'intérieur du domaine et se réfléchit sur la frontière en reprenant sa dernière position intérieure dès que le processus simulé est amené à sortir du domaine, ceci jusqu'à ce que la marche rencontre Γ_D .

En dimension deux, une réflexion sur une frontière se fait selon l'une des deux directions du repère, comme le montre l'algorithme de rebond 3.

Algorithme 3 (Algorithme de rebond). Procédure REBOND(X1,X2);

```
{(X1,X2) est le point atteint par la marche ; (D1,D2) est le déplacement }
if D1 <> 0 then X1 := X1 - D1; if D2 <> 0 then X2 := X2 - D2;
```

Les processus aléatoires X_t^x et ξ_t^x sont discrétisés selon la méthode d'Euler ; en particulier, si h est le pas d'une marche aléatoire réfléchie simulée, on pose :

$$\delta X_t^x = |X_{k+1} - X_k| = h, \quad \delta t = |t_{k+1} - t_k| = h^2/2 \quad \text{et} \quad \delta \xi_t^x = |\xi_{k+1} - \xi_k| = h.$$

Pour estimer $u(x)$, on simule N marches aléatoires réfléchies sur les bords Γ_N , Γ_F et absorbées par Γ_D . Le nombre de pas d'une telle marche aléatoire à NR rebonds est noté NP .

À chaque marche aléatoire simulée ($X_k; 0 \leq k \leq NP$), on calcule l'encaissement suivant :

$$\begin{aligned}
Y_n = & \delta t \sum_{k=1}^{NP} f(X_k) \exp\left(-h \mu \sum_{l=1}^k \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_l)\right) + g_1(X_{NP}) \exp\left(-h \mu \sum_{l=1}^{NP} \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_l)\right) \mathbb{1}_{\Gamma_D}(X_{NP}) \\
& - h \sum_{k=1}^{NP-1} g_2(X_k) \exp\left(-h \mu \sum_{l=1}^k \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_l)\right) \mathbb{1}_{\Gamma_N}(X_k) \\
& - h \sum_{k=1}^{NP-1} g_3(X_k) \exp\left(-h \mu \sum_{l=1}^k \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_l)\right) \mathbb{1}_{\Gamma_F}(X_k) .
\end{aligned}$$

On fait la moyenne arithmétique des N encaissements pour estimer $u(x)$.

Un algorithme possible du problème (3) avec conditions mixtes s'écrit alors avec la boucle intérieure suivante :

Algorithme 4 (Boucle du problème avec conditions mixtes).

```

while DEDANS do begin
  YA := YA + F(X) * exp( -MU*COUNT*H ); { Effet du second membre F }
  X  := X  + PAS; { Pas élémentaire aléatoire }
  INTER( X, DEDANS, IMMO_N, IMMO_F );
  if IMMO_N = true then begin
    REBOND(X); { Rebond instantané }
    YAN := YAN + G2(X) * exp(-MU*COUNT*H);
    { Effet de la condition de Neumann G2 }
    YA  := YA  + D * F(X) * exp(-MU*COUNT*H);
    { Effet du second membre F au bord }
  end;
  if IMMO_F = true then begin

```

```

        REBOND(X); COUNT := COUNT + 1.0; { Rebond avec compteur incrémenté }
        YAF := YAF + G3(X) * exp(-MU*COUNT*H);
        { Effet de la condition de Fourier G3 }
        YA := YA + D * F(X) * exp(-MU*COUNT*H);
    end;
end;
YS := YS + H * H * YA / D + G1(X) * exp( -MU * COUNT * H ) - H * YAN - H * YAF;

```

Le programme comprend les procédures “Pas élémentaire” 1 et “Rebond” 3 décrites précédemment et donnant PAS et REBOND(X) respectivement, et la procédure INTER modifiée de la façon suivante :

```

Procédure INTER( X, DEDANS, IMMO_N, IMMO_F );
    DEDANS := true; IMMO_N := false; IMMO_F := false;

    if (X ∈  $\Gamma_D$ ) then DEDANS := false;
    if (X ∈  $\Gamma_N$ ) then IMMO_N := true;
    if (X ∈  $\Gamma_F$ ) then IMMO_F := true;

```

2.3. Essais numériques

Conditions de Dirichlet

Considérons le problème (1) dans la couronne G définie par $G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 \right\}$ (cf. figure 1), avec les données suivantes :

Domaine d'intégration

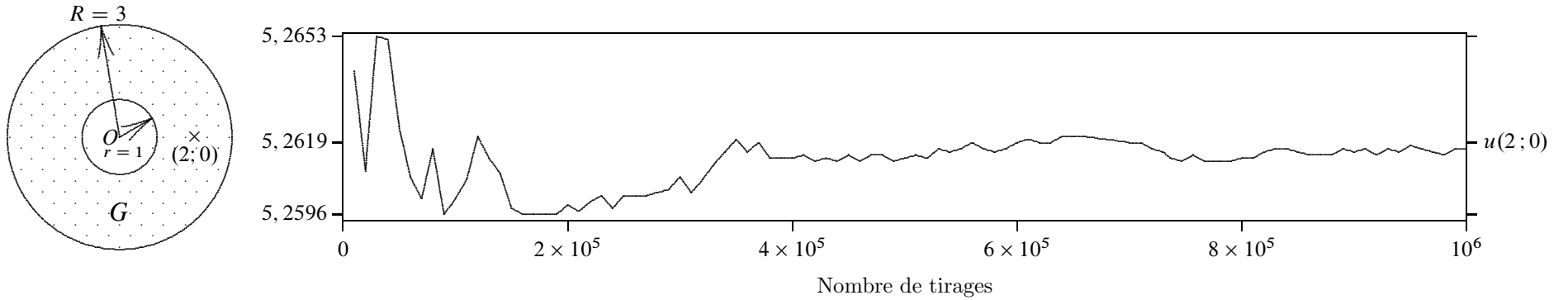


FIG. 1 – Problème de Dirichlet : Couronne circulaire G de frontière $C(O; r = 1) \cup C(O; R = 3)$ — Calcul de la solution en $(2; 0)$ — Courbe d'évolution de la solution calculée jusqu'à 10^6 tirages ; valeur théorique : $u(2; 0) = 5,2619$; pas de la marche simulée : $h = 10^{-3}$; écart-type obtenu : $\sigma = 1,9$

$$\lambda = 0, \quad f \equiv 0 \quad \text{dans } G, \quad g_1 \equiv 4 \quad \text{sur } C(0; 1), \quad g_1 \equiv 6 \quad \text{sur } C(0; 3). \quad (7)$$

Ce problème de Dirichlet admet pour solution exacte :

$$u(x, y) = 4 + 2 \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\ln 3}.$$

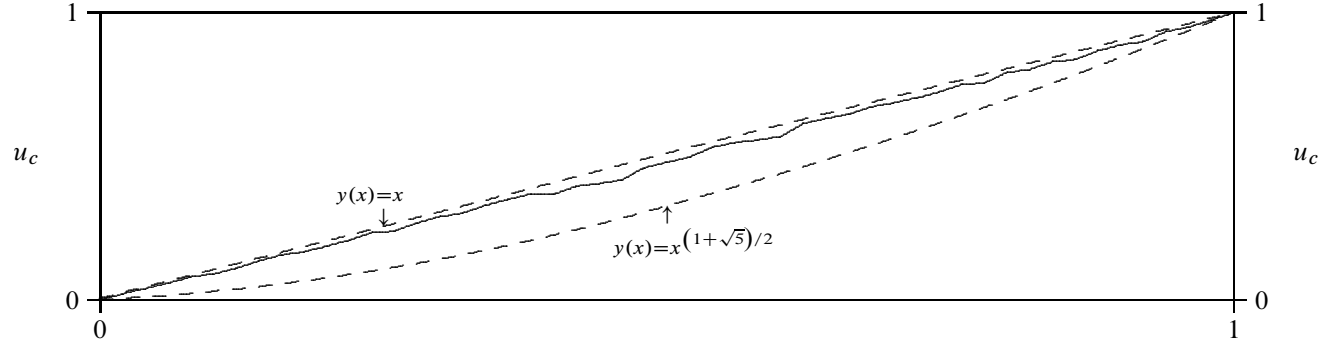


FIG. 2 – Représentation en trait continu de la solution calculée u_c sur $G =]0, 1[$ du problème de Dirichlet non linéaire : $u'' = u^3$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

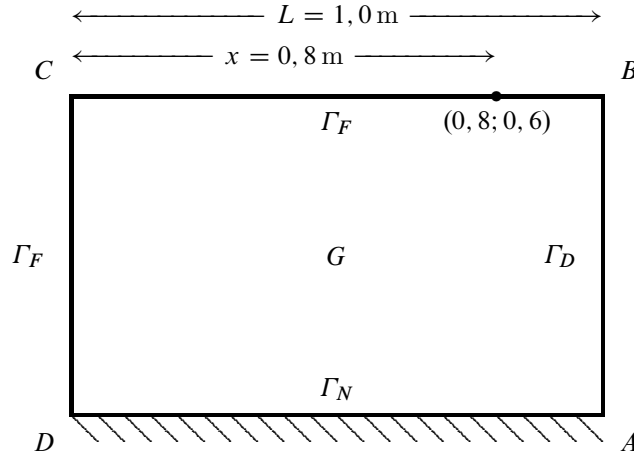
Considérons le problème (1), issu de [7], dans l'intervalle $G =]0, 1[$, avec les données suivantes :

$$a = 1, \lambda = 0, f(u) = -\frac{1}{2}u^3 \quad \text{dans } G, \quad g_1(0) = 0, \quad g_1(1) = 1.$$

Ce problème de Dirichlet admet une solution qui vérifie [7] :

$$x^{(1+\sqrt{5})/2} \leq u(x) \leq x.$$

Le nombre d'itérations MITER a été remplacé par le test d'arrêt : $x_i^{(1+\sqrt{5})/2} \leq u(x_i) \leq x_i$ est réalisé **et** $u(x_{i-1}) < u(x_i)$, pour tout $i = 1, \dots, MT$, c'est-à-dire que la solution calculée aux points du maillage est bien encadrée et est strictement croissante. Sur la figure 2, le test est satisfait à l'itération 39.



Calcul de la solution pour différents pas avec $NT = 10^5$			
Pas de la marche h	Nombre moyen de rebonds $\overline{NR}$	Valeur calculée u_c	Erreur relative* $ u_c - u /u$
0,1	7	34,145	0,866
0,05	14	25,333	0,384
0,025	30	19,370	0,058
0,005	135	18,485	0,010

* $u = 18,3$

FIG. 3 – Domaine rectangulaire $G =]0; 1[\times]0; 0,6[$ pour un problème avec conditions mixtes — Calcul de la solution en $(0,8;0,6)$

Conditions mixtes de Dirichlet, de Neumann et de Fourier

Considérons le problème (3) issu de [3], dans le rectangle $G =]0; 1[\times]0; 0,6[$ (cf. Figure 3), avec les données suivantes :

$$\begin{aligned}
 f &\equiv 0 \text{ dans } G, & g_1 &\equiv 100 \text{ sur } \Gamma_D = \{(x, y) \in \partial G \mid x = 1\}, & g_2 &\equiv 0 \text{ sur } \Gamma_N = \{(x, y) \mid x = 0\}, \\
 g_3 &\equiv 0 \text{ sur } \Gamma_F, & \mu &= 750/52 \text{ sur } \Gamma_F = \partial G \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N).
 \end{aligned}$$

Ce problème avec conditions mixtes admet une solution dont la valeur en $(0,8;0,6)$ est connue [3] :

$$u(0,8;0,6) = 18,3.$$

La résolution de problèmes stationnaires peut s'étendre à celle de problèmes d'évolution de type parabolique.

3. Résolution de problèmes aux limites d'évolution de type parabolique

Considérons un ouvert borné G de $\mathbb{R}^d$ et un intervalle $I =]0, T[$ avec $0 < T < +\infty$. Notons $t \in I$ la variable de temps. On introduit la partition $\partial G = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ où les parties Γ_D , Γ_N correspondent aux conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement ; Γ_D est supposé d'intérieur non vide et est égal à ∂G en (11).

Considérons les problèmes aux limites d'évolution :

$$(10) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \frac{1}{2} a \Delta u &= f \quad (G \times I) \\ u &= g_1 \quad (\Gamma_D \times I) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad (\Gamma_N \times I) \\ u &= u_0 \quad (G \times \{0\}) \end{array} \right. \quad (11) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \frac{1}{2} a \Delta u &= f(u) \quad (G \times I) \\ u &= g_1 \quad (\partial G \times I) \\ u &= u_0 \quad (G \times \{0\}) \end{array} \right.$$

où u est l'inconnue, fonction scalaire définie sur $G \times I$, et les données sont la constante $a > 0$, le second membre f défini sur $G \times I$ en (10) et sur $\mathbb{R} \times G \times I$ en (11) (f est non linéaire en u), les fonctions g_1 , respectivement g_2 , définies sur $\Gamma_D \times I$, resp. $\Gamma_N \times I$, et u_0 définie sur G .

Les solutions sont représentées par des intégrales stochastiques associées à des EDS. Le problème parabolique peut être considéré comme un problème elliptique dégénéré en temps (pour cette notion, voir [1]).

Pour une équation linéaire, l'algorithme de calcul ne fixe aucun maillage dans l'espace, ni une discrétisation en temps. La solution en un point (x, t) peut être calculée indépendamment des autres points.

Lorsque le second membre de (11) est non linéaire, on effectue une semi-discrétisation en temps et, à chaque pas en temps, on résout un problème stationnaire linéaire (1).

3.1. Représentations des solutions

(i) Considérons le problème (10) et introduisons le processus de Markov :

$X_t^{x,t} = x + \sqrt{a} W_t + \int_0^t \mathbb{1}_{\Gamma_N}(X_s^{x,t}) n(X_s^{x,t}) d\xi_s^{x,t}$, $t \geq 0$, où W_t est un processus de Wiener standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que l'on ait : $X_0^{x,t} = x$, $\mathbb{1}_{\Gamma_N}$ est la fonction indicatrice de Γ_N et $\xi_t^{x,t}$ est un processus croissant qui augmente seulement lorsque t atteint l'ensemble $\{s > 0 \mid X_s^{x,t} \in \Gamma_N\}$.

Soit $x \in G$ et $t \in I$. Le temps d'atteinte τ de Γ_D est défini par : $\tau = \inf\{s > 0 \mid X_s^{x,t} \in \Gamma_D\}$ et le temps d'atteinte τ_0 de la réunion $(\Gamma_D \times I) \cup (G \times \{0\})$ par : $\tau_0 = \min\{\tau, t\}$. L'application de la formule de Itô à $u(X_s^{x,t}, t-s)$ conduit à la représentation de la solution de (10) sous la forme : $u(x, t) = E[Y]$ avec la variable aléatoire Y :

$$Y = \int_0^{\tau_0} f(X_s^{x,t}, t-s) ds + \chi_{\{\tau_0 < t\}} g_1(X_{\tau}^{x,t}, t-\tau) + \chi_{\{\tau_0 = t\}} u_0(X_t^{x,t}) - \int_0^{\tau_0} g_2(X_s^{x,t}, t-s) \mathbb{1}_{\Gamma_N}(X_s^{x,t}) d\xi_s^{x,t} \quad (10)$$

où $\chi_{\{\tau_0 < t\}}$, respectivement $\chi_{\{\tau_0 = t\}}$, est l'indicatrice de l'événement $\{\tau_0 < t\}$, resp. $\{\tau_0 = t\}$.

(ii) Considérons le problème parabolique non linéaire (11) et effectuons une semi-discrétisation en temps.

Soit k le pas de discrétisation en temps (t est fixé dans I et on pose : $t = k \times IT$). Considérons le schéma explicite suivant, de type différences finies en temps :

$$\frac{u(x, (j+1)k) - u(x, jk)}{k} - \frac{1}{2}a \Delta u(x, (j+1)k) = f(u(x, jk), x, jk). \quad (11)$$

Soit j fixé, $0 \leq j < IT$. On introduit les notations suivantes :

$$v(x) = u(x, (j+1)k), \quad F(x) = k f(u(x, jk), x, jk) + u(x, jk), \quad x \in G, \quad G_1(x) = g_1(x, (j+1)k), \quad x \in \partial G. \quad (12)$$

À chaque pas en temps, on résout un problème de Dirichlet stationnaire de type (1) :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a k \Delta v + v = F & \text{dans } G, \\ v = G_1 & \text{sur } \partial G. \end{cases} \quad (13)$$

À l'aide de la représentation stochastique (4), on calcule v , puis on passe à l'instant suivant $j + 1$. On réitère cette opération IT fois jusqu'à ce que le temps $t = k \times IT$ soit atteint.

3.2 Algorithme de résolution

La solution u du problème (10) est représentée par la moyenne d'une variable aléatoire Y fonction d'une marche aléatoire réfléchie, puis absorbée. La représentation (10) est utilisée, et la solution $u(x, t)$ est calculée en faisant la moyenne arithmétique des réalisations de Y . Chaque valeur Y_n est obtenue à partir d'une simulation d'une marche aléatoire, réfléchie sur $\Gamma_N \times I$ et absorbée par $\Gamma_D \times I$ ou par $G \times \{0\}$ de la façon ci-après.

Considérons (10) comme un problème elliptique dégénéré (voir pour cette notion, par exemple, [1]). Pour un domaine $G =]0, L[$ avec condition de Dirichlet en 0 et condition de Neumann en L , prenons un couple de réels strictement positifs (h, k) et posons :

$$\delta = \left(\frac{1}{k} + \frac{a}{h^2} \right)^{-1}, \quad PT = \frac{\delta}{k} \quad \text{et} \quad PS = \frac{\delta a}{2h^2}. \quad (14)$$

Une marche aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ est alors simulée selon le procédé suivant :

- soit $(e_i)_{i=1,2}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$; notons D un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
 $\text{Prob}(D = \pm h e_1) = PS$ et $\text{Prob}(D = -k e_2) = PT$;
- par tirages successifs et indépendants, considérons une suite de valeurs de D : $D_1, D_2, \dots, D_i, \dots$ et notons $D_i^{(1)}$ et $D_i^{(2)}$ les coordonnées de D_i dans $(e_i)_{i=1,2}$;
- par récurrence, définissons une suite de couples : $(X_0, t_0), (X_1, t_1), \dots, (X_i, t_i), \dots, (X_N, t_N)$, en posant :
 1. $(X_0, t_0) = (x, t)$ point origine de la marche aléatoire simulée ;
 2. $(X_{i+1}, t_{i+1}) = (X_i, t_i) + D_{i+1}$ si $0 < X_i + D_{i+1}^{(1)} < L$ et $t_i + D_{i+1}^{(2)} > 0$;

3. $(X_{i+1}, t_{i+1}) = (X_i, t_i)$ si $X_i + D_{i+1}^{(1)} \geq L$ (rebond instantané en L) ;
4. $(X_N, t_N) = (0, t_{N-1})$ si $X_{N-1} + D_N^{(1)} \leq 0$ (absorption au point 0) ;
5. $(X_N, t_N) = (X_{N-1}, 0)$ si $t_{N-1} + D_N^{(2)} \leq 0$ (absorption à l'instant $t = 0$) .

Chaque simulation donne une réalisation (X_i, t_i) , $0 \leq i \leq N$, d'une marche aléatoire dans $G \times I$, réfléchie en $\{L\} \times I$ et telle que l'on ait : $(X_0, t_0) = (x, t) \in G \times I, \dots, (X_{N-1}, t_{N-1}) \in G \times I, (X_N, t_N) \notin G \times I$, dont la trajectoire est la courbe polygonale reliant les points (X_i, t_i) et (X_{i+1}, t_{i+1}) , $i = 0, \dots, N-1$, successivement.

Les processus aléatoires $X_t^{x,t}$ et $\xi_t^{x,t}$ sont discrétisés et le pas en temps est toujours négatif : $\delta t = t_{i+1} - t_i = -k$.

L'encaissement Y_n est calculé par la formule :

$$\begin{aligned}
Y_n = & \delta \sum_{i=0}^N f(X_i, t - ik) + \chi_{\{t > Nk\}} g_1(X_N, t - Nk) \mathbb{1}_{\Gamma_D}(X_N) \\
& + \chi_{\{t \leq Nk\}} u_0(X_N) - h \sum_{i=1}^{N-1} g_2(X_i, t - ik) \mathbb{1}_{\Gamma_N}(X_i)
\end{aligned}$$

où N est défini par : $N = \max \{ i \geq 1 \mid (X_{i-1}, t_{i-1}) \in G \times I \}$.

Puis, on répète cette démarche NT fois pour obtenir un échantillon de taille NT pour la variable aléatoire Y et on en déduit $u(x, t)$ par calcul de la moyenne arithmétique des NT encaissements.

Considérons un point (XD, TD) dans $G \times I$. Alors un algorithme possible du problème (10) se présente sous la forme :

Algorithme 5 (Boucle du problème parabolique linéaire).

```

DELTA:= 1/( A/(H*H) + 1/K ); P1:= DELTA*A/(2*H*H); P2:= 2*P1; YS:= 0.0;
for I:= 1 to NT do begin
  X:= XD; T:= TD; YA:= 0.0; YAN:= 0.0;
  while (INTER(X)=true) and (T>0.0) do begin
    YA:= YA + F(X,T); U := random;
    if U<P1 then          DX:= -H; DT:= 0.0
      else if U<P2 then DX:=  H; DT:= 0.0
      else DX:= 0.0; DT:= -K;
    X:= X + DX; T:= T + DT; { Pas aléatoire }
    if X>=L then begin { Rebond }
      X := X - DX; YAN := YAN + G2(X,T); YA := YA + F(X,T);
    end;
  end;
  YS:= YS + DELTA * YA - H * YAN;
  if INTER(X)=false then YS:= YS + G1(X,T) else YS:= YS + U0(X);
end;
U:= YS / NT ;

```

La fonction INTER prend la valeur vraie lorsque le point X est dans G et fausse sinon. La fonction F définit l'effet du second membre en chaque point de la marche dans $G \times I$, $G2$ définit l'effet d'un rebond sur $\Gamma_N \times I$, $G1$ définit l'effet d'absorption par $\Gamma_D \times I$ et $U0$ l'effet de la condition initiale sur $G \times \{0\}$. Les variables préalablement déclarées DX et DT sont les accroissements en espace et en temps. $P1$, respectivement $P2$, déduit de la variable intermédiaire $DELTA$, est la probabilité d'un déplacement dans le sens négatif, resp. positif, de l'axe réel. Les pas en espace et en temps sont $\pm H$ et $-K$.

TAB. 1 – Problème parabolique linéaire

Point initial (x, t)	Pas d'une marche h	Pas en temps k	Valeur calculée u_c	Valeur exacte u	Erreur relative $ (u_c - u)/u $
Coefficient de diffusion : $a = 0,002$					
$(0,01 ; 0,1)$	0,001	0,005	0,999 894	0,999 850	4×10^{-5}
$(0,5 ; 1)$	0,05	0,1	0,876 588	0,876 705	$1,3 \times 10^{-4}$
$(0,99 ; 100)$	0,1	1	0,498 931	0,496 475	$4,9 \times 10^{-3}$
Coefficient de diffusion : $a = 0,0002$					
$(0,01 ; 0,1)$	0,001	0,005	0,999 983	0,999 940	$4,3 \times 10^{-5}$
$(0,5 ; 1)$	0,01	0,1	0,877 483	0,877 495	$1,4 \times 10^{-5}$
$(0,99 ; 100)$	0,1	1	0,543 760	0,543 230	$9,8 \times 10^{-4}$

3.3. Essais numériques

(i) Considérons le problème (10) dans l'intervalle $G =]0, L[$ avec les données suivantes : $L = 1$, $\Gamma_D = \{0\}$, $\Gamma_N = \{L\}$ et $f \equiv 0$ dans $G \times I$, $g_1(x, t) = \exp(-a t/2)$ sur $\{0\} \times I$, $g_2(x, t) = -\exp(-a t/2) \sin x$ sur $\{L\} \times I$, $u_0(x) = \cos x$ dans G .

Ce problème admet pour solution exacte : $u(x, t) = \exp(-a t/2) \cos x$. À l'aide de l'algorithme 5, les résultats du tableau 1 ont été obtenus avec $NT = 10^4$ tirages.

(ii) Considérons le problème non linéaire (11) dans l'intervalle $G =]0, L[$ avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} f(u, x, t) &= \frac{1}{2} a \exp \left(\frac{u}{1+x+t} - 1 \right) + \frac{u}{1+x+t} - 1 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times G \times I, \\ g_1(x, t) &= (1+x+t) \left(1 - \ln(1+x+t) \right) \quad \text{sur } \partial G \times I, \\ u_0(x) &= (1+x) \left(1 - \ln(1+x) \right) \quad \text{dans } G. \end{aligned}$$

Ce problème parabolique avec second membre non linéaire et condition de Dirichlet admet pour solution exacte :

$$u(x, t) = (1+x+t) \left(1 - \ln(1+x+t) \right).$$

Les résultats représentés sur la figure 4 ont été obtenus avec les données suivantes :

Longueur de l'intervalle :	$L = 1$	Nombre de points de maillage :	$\text{MAX1} = 51$
Pas d'une marche :	$h = 2 \times 10^{-2}$	Coefficient de diffusion :	$a = 1$
Nombre de tirages :	$NT = 10^3$	Valeur initiale :	$u = u_0$
Pas en temps :	$k = 10^{-1}$	Nombre de pas en temps :	$\text{IT} = 10$

(15)

L'erreur absolue maximale vaut : $2,145 \times 10^{-2}$ atteinte au point 0,48. Notons qu'à l'instant $t = 1$, $u(x, 1)$ s'annule en $x = e - 2 \simeq 0,72$.

Cette méthode est basée sur des représentations stochastiques qui donnent directement des algorithmes aisément programmables. La simplicité de la méthode présentée résulte, en particulier, de la simulation des marches aléatoires réfléchies directement à partir d'épreuves répétées de type Bernoulli.

Calcul de la solution u à l'instant $t = 1$ s

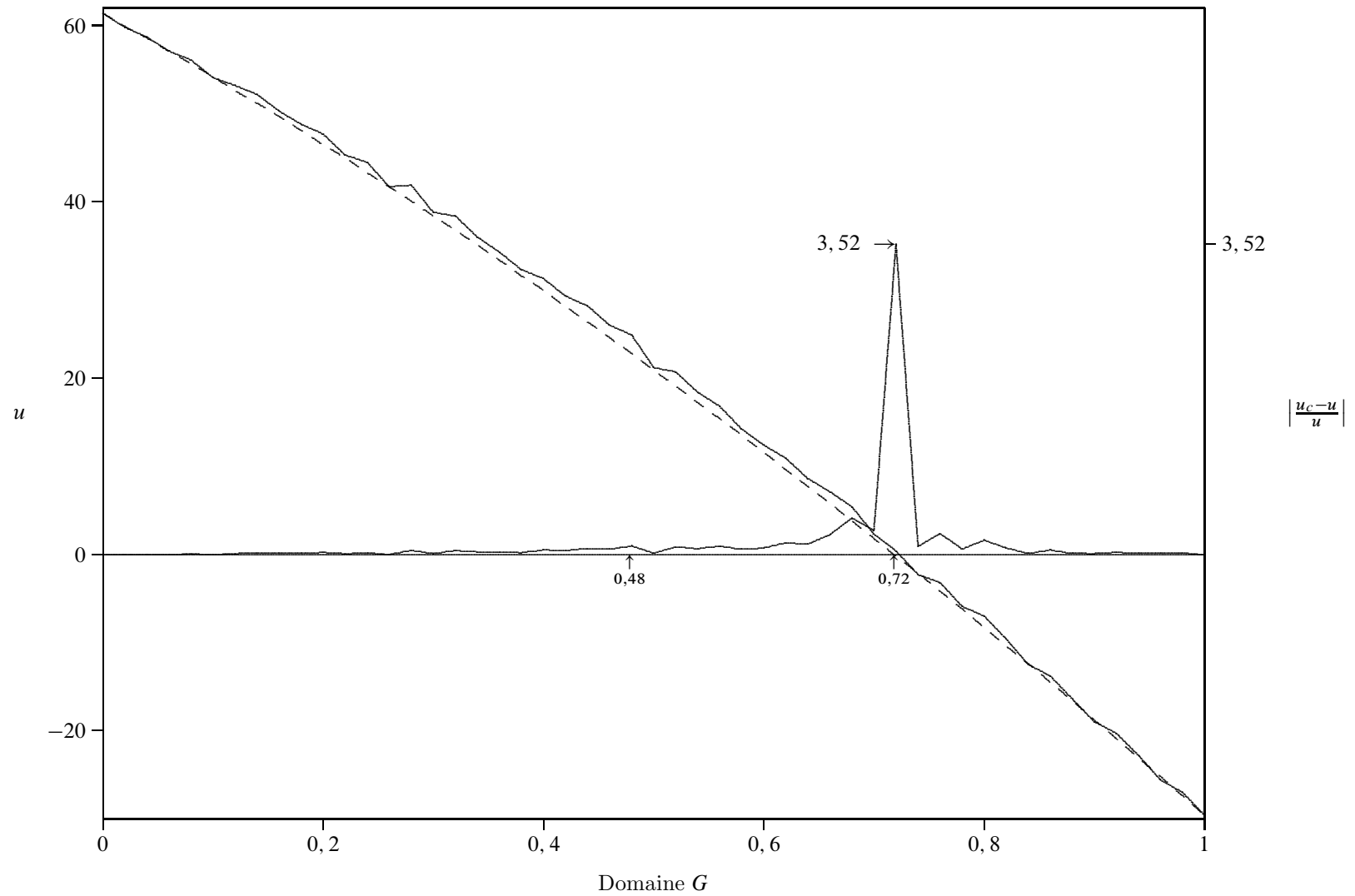


FIG. 4 – Comparaison de la solution donnée explicitement avec celle calculée selon une méthode stochastique, solutions représentées respectivement en trait interrompu et en trait continu — Représentation de l'erreur relative en trait continu avec un maximum 3,52 en $x = 0,72$

Bibliographie

- [1] M. Cessenat, R. Dautray, G. Ledanois, P.-L. Lions, É. Pardoux et R. Sentis, *Méthodes probabilistes pour les équations de la physique*, Eyrolles, Paris, 1989.
- [2] P.-L. Lions et A.-S. Sznitman, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math. XXXVII (1984), 511–537.
- [3] B. Muller, D. Steer et M. Vidrascu, *MODULEF : Quelques exemples de tests de thermique*, Fiches techniques “Éléments finis” 87, INRIA, Rocquencourt, 1988.
- [4] J.-P. Morillon, *Numerical solutions of linear mixed boundary value problems using stochastic representations*, soumis à International Journal for Numerical Methods in Engineering (1995).
- [5] É. Pardoux et D. Talay, *Discretization and simulation of stochastic differential equations*, Acta Applicandae Mathematicae **3** (1985), 23–47.
- [6] J. E. Souza de Cursi, *Numerical methods for linear boundary value problems based on Feynman-Kac representations*, Mathematics and Computers in Simulation **36** (1994), 1–16.
- [7] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, Academic Press, Boston, Seconde édition, 1992.