HAL
open science

Calcul du chemin géodésique linéaire sur des maillages triangulaires

Remi Synave, Stefka Gueorguieva, Pascal Desbarats

To cite this version:

Remi Synave, Stefka Gueorguieva, Pascal Desbarats. Calcul du chemin géodésique linéaire sur des maillages triangulaires. Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique, 2011, 5 (1), pp.1-15. hal-00967317

HAL Id: hal-00967317

https://hal.science/hal-00967317v1

Submitted on 28 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Revue Électronique Francophone d'Informatique Graphique, Volume 1, Numéro 1, pp. 1–15, 2007

Calcul de chemin géodésique linéaire sur des maillages triangulaires

Rémi Synave, Stefka Gueorguieva et Pascal Desbarats

{synave,stefka,desbarats}@labri.fr
LaBRI - Université de Bordeaux 1

Résumé
Une méthode de calcul d'un chemin géodésique linéaire reliant une paire de sommets appartenant à une surface polyédrique triangulée, avec ou sans bords, est proposée. La méthode construit un chemin géodésique contraint sur un plan de découpe pour satisfaire les conditions de linéarité. La méthode est intégrée dans une chaîne numérique complète d'acquisition au scanner laser, de reconstruction, de modélisation, et d'impression 3D. Une application de la méthode pour la simulation des mesures morphométriques est présentée.

Mots clé : acquisition au scanner laser, chemin géodésique, subdivision, anthropologie numérique, morphométrie

1. Introduction

La recherche de chemin géodésique est un domaine étudié depuis de nombreuses années. Parmi les applications rattachées à notre étude on pourra citer la définition et l'estimation des métriques sur des courbes et surfaces discrètes [KK95, MM97, KS98, LMS97, JC98, KS01, NK02, GKK02, MVC05, WDB*08, PBCG09], le calcul de géodésiques, la paramétrisation et le re-maillages des surfaces [Set96, SSG03, PC06, SSK*05, LHL06, DRaMBK09, SJC09, TWZZ07, XW09] ou encore l'imagerie médicale [CK97, WPS03, Coh05]. Nous nous intéressons plus particulièrement à une application issue de l'anthropologie numérique [CCD*07] qui consiste à calculer les distances géodésiques entre des points caractéristiques situés sur des sommets de maillages représentant des reconstructions numériques de collections ostéologiques. Dans ce cadre précis, il s'agit de trouver la courbe discrète reliant des sommets caractéristiques et de calculer sa longueur afin de simuler les mesures morphométriques effectuées sur les modèles physiques. Par la suite, nous parlerons de **chemin géodésique discret** ou **chemin géodésique** reliant les **sommets caractéristiques**.
Dans le contexte de ce travail, nous effectuons des acquisitions d'objets réels et produisons des maillages que nous appelons **modèles numériques**. Ces modèles numériques ont une précision définie par la résolution de l'acquisition. Dans la mesure où ces maillages sont des représentations discrètes des objets réels, le chemin géodésique est une approximation du plus court chemin entre les points caractéristiques sur le modèle physique (voir figure 1). Notre objectif est de trouver une solution optimale, non seulement au sens usuel, c'est à dire un chemin de plus courte longueur, mais aussi de construire un chemin qui remplit des conditions de linéarité en minimisant la courbure géodésique discrète introduite par Polthier [PS06].

(a) (b)

Figure 1: *Mesure morphométrique à l'aide d'un ruban millimétré - (a) Mesure "crâne_M27" entre les points caractéristiques bregma et lambda - (b) Mesure "crâne_M28(b)" entre l'inion et l'opisthion.*

© REFIG 2010, Revue Électronique Francophone d'Informatique Graphique.
Publiée par l'Association Française d'Informatique Graphique

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode de calcul de chemin géodésique linéaire reliant un sommet source à un sommet destination sur une surface triangulée. Notre méthode est fondée sur la définition d'un plan de découpe passant par les sommets source et destination, et suivant la courbure de la surface le long d'une bande comprenant des chemins les plus courts. Ce plan de découpe est utilisé pour subdiviser la surface initiale de manière à produire un chemin géodésique linéaire le long de l'intersection.
La méthode élaborée généralise les résultats de [PS06, LHL06].
A la différence du chemin linéaire de Polthier qui solutionne le problème discret de la valeur initiale[1], nous nous intéressons au problème avec des conditions aux limites (points de départ et point d'arrivée).
A l'instar de [LHL06], un plan de découpe contraint la construction du chemin linéaire. Le calcul du plan de découpe selon Lee et al. dépend uniquement de la frontière de la surface polyédrique sous-jacente et est restreint aux surfaces $2D$ variété avec bords. Nous proposons une nouvelle construction du plan de découpe qui dépend de la courbure de la surface localement dans une région comprenant les sommets caractéristiques et des chemins les plus courts les reliant. Notre plan de découpe est défini pour des surfaces avec ou sans bords. De plus, la subdivision de la surface initiale par le plan de découpe et le traçage du chemin géodésique le long de la surface subdivisée permet de construire un chemin linéaire passant par des points d'inflexion.
La méthode proposée est validée d'une part en utilisant le critère métrique en comparant les longueurs des chemins géodésiques sur des exemples synthétiques où ces longueurs peuvent être calculées de manière analytique. D'autre part, la validité est étudiée en fonction de la courbure et des caractéristiques topologiques (surfaces $2D$ variété avec ou sans bords) de la surface triangulée sous-jacente.
Dans un premier temps, nous faisons un survol des méthodes de calcul du chemin géodésique qui nous ont inspirées. Dans un second temps, nous détaillons notre méthode en proposant plusieurs cas d'études en fonction de types de surfaces triangulées. Nous donnons ensuite les résultats de la réalisation et de l'application de notre méthode dans une chaîne complète[2] de l'acquisition au scanner laser à l'impression $3D$ en passant par la reconstruction et la modélisation [SDG08, Syn09].

[1] Soit une surface polyédrique S, un sommet p, $p \in S$, et un vecteur v tangent de S dans p, $v \in T_pS$. Le problème discret de la valeur initiale consiste à trouver un chemin géodésique γ sur S tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(0)' = v$ qui relie p à la frontière de S. [PS06]
[2] La bibliothèque qui supporte l'ensemble des fonctionnalités est téléchargeable à l'adresse http ://liba2ri.free.fr sous licence GNU GPL.

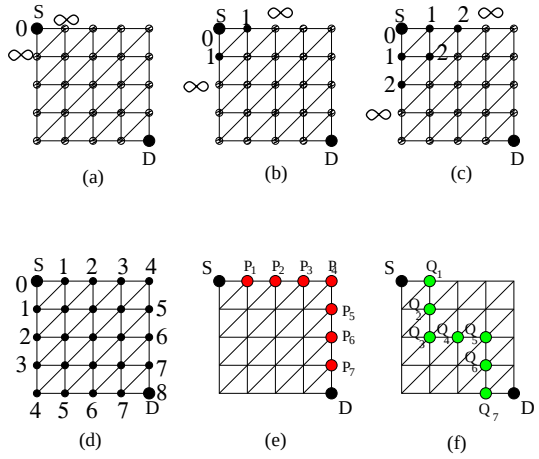


Figure 2: *Calcul du plus court chemin d'après [Dij71] - (a) Maillage initial - (b,c,d) Itérations de l'algorithme - (e,f) Différents plus courts chemins calculés avec l'algorithme de Dijkstra.*

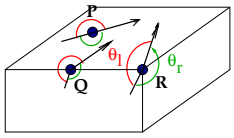


Figure 3: *Définition de la courbure discrète d'un chemin géodésique dans un point P sur une face, dans un point Q sur une arête et dans un sommet R.*

2. État de l'art

De manière traditionnelle [Mou85, MMP87, Tho97, Mit98], les méthodes de calcul du chemin géodésique sont classés en deux catégories, selon si on calcule la distance entre un sommet source et l'ensemble des autres sommets ou la distance entre une paire de sommets fixés que l'on appellera **sommet source** et **sommet destination**, et qu'on dénotera respectivement S et D.

La méthode la plus connue est sans doute l'algorithme de Dijkstra [Dij71] qui permet de manière exhaustive de trouver le chemin le plus court entre un sommet source et tous les autres sommets du maillage. Une illustration est donnée sur la figure 2. Au départ, la distance entre le sommet source et tous les autres sommets est initialisée à une valeur extrême ∞. A chaque itération de l'algorithme, les distances aux sommets voisins sont mises à jour si de nouveaux plus courts chemins sont trouvés. Pour chaque sommet on sauvegarde la distance du chemin le reliant à la source et son prédécesseur dans ce chemin. Ainsi, à partir d'un sommet donné, en remontant tous ses prédécesseurs on peut tracer le chemin de plus courte longueur le reliant au sommet source. Les avantages principaux de cet algorithme sont sa simplicité et sa

© REFIG 2010.

généricité. Par contre, la complexité dans le cas général de polyèdre non-convexe est exponentielle [SS84, CR87]. De plus, si le chemin obtenu est optimisé par rapport à sa longueur, la linéarité de celui-ci n'est pas assurée. Une illustration est donnée sur la figure 2(e,f). Deux chemins les plus courts reliant S et D, $\{P_i\}_{i=0}^{8}$ et $\{Q_i\}_{i=0}^{8}$, $P_0 = Q_0 = S$ et $P_8 = Q_8 = D$ sont représentés. Pour évaluer leur linéarité nous utilisons la courbure discrète géodésique κ_g introduite par Polthier [PS06] définie par (1) et illustrée sur la figure 3.

$$\kappa_g(P) = \frac{2\pi}{\theta_l + \theta_r}\left(\frac{\theta_l + \theta_r}{2} - \theta_r\right) \qquad (1)$$

Les angles θ_l et θ_r dénotent les sommes des angles voisins au sommet P situés respectivement à gauche et à droite du chemin d'après son orientation de S vers D. Pour un chemin linéaire $\theta_l = \theta_r$ et $\kappa_g(P) = 0$ pour tout sommet P appartenant au chemin.
Ainsi, pour le chemin $\{P_i\}_{i=0}^{8}$, sur la figure 2(e), $\kappa_g(P_i) = 0, i = 1\ldots7, i \neq 4$, et $\kappa_g(P_4) = \pi$. Pour le chemin $\{Q_i\}_{i=0}^{8}$, sur la figure 2(f), $\kappa_g(Q_i) = \pi, i = 1,5$, $\kappa_g(Q_i) = 0, i = 2,4,6$, et $\kappa_g(Q_i) = -\pi, i = 3,7$.

L'algorithme de Dijkstra a été repris dans de nombreuses études. Parmi les plus connues sont la méthode continue de Dijkstra (MMP) [Mou85, MMP87, Tho97, Kap99, SSK*05, Sch07] et la "Fast Marching Method" (FMM) [KK94, Set96, KS98, SSG03]. Ces méthodes sont aussi utilisées pour le calcul d'une approximation du chemin géodésique. Des études comparatives [DRaMBK09] donnent un avantage à la méthode FMM à cause du phénomène de conversion du système métrique ("metrication error"). Les longueurs des chemins calculées au moyen de l'algorithme de Dijkstra ne sont pas isométriques sur différentes triangulations du même échantillonnage de points.

Une autre approche (CH) [CH96, KO00, PC06, XW09] est basée sur le calcul d'un dépliement sur un plan [SS84] de l'ensemble de faces intersectées par un plus court chemin. Ce dépliement transforme un chemin géodésique en segment de ligne droite et permet de construire de manière incrémentale une arborescence dont les feuilles correspondent aux plus courts chemins reliant la racine au reste des sommets. Une illustration est donnée sur la figure 4 pour le calcul du plus court chemin entre S et D. Les faces $\{f_i\}_{i=1}^{3}$ sont traversées par un plus court chemin reliant S et D. Sur le dépliement de $\{f_i\}_{i=1}^{3}$ de la figure 4(a), le plus court chemin est un segment de droite, ainsi la suite d'arêtes $\{e_i\}_{i=0}^{3}$, $e_i = f_i \cap f_{i+1}, i = 1,2$, forme une "séquence du plus court chemin". Certaines séquences ne sont pas "séquences du plus court chemin" comme celles montrées sur la figure 4(b,c). L'algorithme CH permet d'éliminer ces séquences de la recherche et réduire la complexité à $O(n^2)$, n étant le nombre de sommets de la surface.

Pour certaines applications le problème du plus court chemin nécessite des algorithmes performants pour le calcul des solutions approximatives [KK94, HS95, HPSV96,

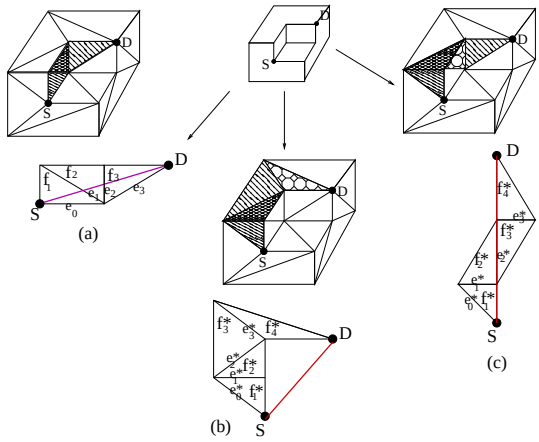


Figure 4: *Dépliement de surface et calcul de "séquence du plus court chemin".*

AHPSV97, VA97, LMS97, KS98, AMS00, KS01, BCD*02, NK02, MVC05, SSK*05, TWZZ07]. Parmi ces solutions deux approches émergent. La première se fonde sur une optimisation itérative d'une approximation initiale du plus court chemin [LMS97, MM97, KS01, MVC05] suivant un raffinement sélectif de la surface sous-jacente. La qualité de l'approximation dépend de manière significative de l'initialisation et peut provoquer, soit une convergence vers un extremum local, soit demander un nombre important d'itérations. La deuxième [KS98, NK02, SSK*05, TWZZ07], se base sur le calcul d'une fonction de distance géodésique qui permet de simuler la propagation d'un front à partir du sommet source S. Ensuite, par rétro-propagation à partir du sommet destination D on évalue le chemin le plus court le reliant à S. Pour ce faire on utilise l'algorithme FMM pour résoudre l'équation eikonale.

$$|\nabla T(P)|F = 1 \qquad (2)$$

où T est la fonction de distance définie pour tout sommet P de la surface, $T(S) = 0$, et F est la vitesse de propagation du front. Il faut remarquer que l'évaluation de (2) sur des maillages irréguliers comme par exemple ceux comprenant des triangles obtus, nécessite une étude de cas [FH05, TWZZ07, WDB*08] qui le sensibilise à la qualité de la triangulation de la surface sous-jacente.

Dans notre domaine applicatif, une contrainte principale est de ne prendre en compte que les données réellement acquises. Tous les "défauts" du modèle numérique comme des trous ou des aspérités dans la surface reconstruite qui peuvent faire dévier un chemin géodésique ne doivent pas être comblés ou lissés. Ainsi par exemple, on ne peut pas rechercher et mesurer un chemin linéaire entre deux sommets caractéristiques si ce chemin est dévié par un bord de la surface ou si des variations de la courbure de la surface ne permettent pas la simulation d'une mesure physique. Pour

© REFIG 2010.

étudier ces problèmes nous avons utilisé l'approche différentielle discrète [PP93, PS99, MMSB02, PS06, Gar04], en particulier la notion de courbure de Gauss d'une surface polyédrique. À tout sommet P appartenant à S, une surface polyédrique $2D$ variété, on associe une normale $n(P)$, $n(P) \in S^2$, qui est l'enveloppe convexe des vecteurs normaux des faces voisines comme illustré sur la figure 5. La courbure de Gauss

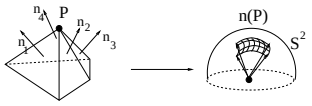


Figure 5: *Courbure de Gauss, $K(P)$ en un sommet d'une surface polyédrique.*

peut être calculée d'après des caractéristiques métriques de S. Ainsi pour une surface polyédrique $2D$ variété, la courbure de Gauss, $K(P)$, dans un sommet P est définie comme l'excès angulaire :

$$K(P) = 2\pi - \theta(P) = 2\pi - \sum_{i=1}^{m} \theta_i(P) \qquad (3)$$

Selon la courbure discrète, les sommets sont classés en trois groupes : les sommets sphériques P_s, $K(P_s) > 0$, les sommets euclidiens P_e, $K(P_e) = 0$, et les sommets hyperboliques P_h, $K(P_h) < 0$. Une illustration est donnée sur la figure 6. Par exemple, le sommet F, du cube sur la

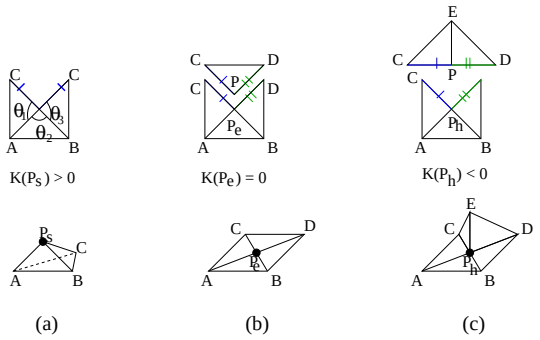


Figure 6: *Classification des sommets d'une surface polyédrique en fonction de leur excès angulaire - (a) Sommet sphérique P_s - (b) Sommet euclidien P_e - (c) Sommet hyperbolique P_h.*

figure 7, est un sommet sphérique avec une courbure de Gauss $K(F) = \pi/2$.

Le chemin géodésique discret diffère de manière significative d'une géodésique sur une surface continue. Ainsi un chemin discret passant par un sommet sphérique ne peut pas être localement le plus court. Sur l'exemple de la figure 7, le chemin géodésique discret reliant les sommets B et H en passant par le sommet sphérique F de la figure 7(a) n'est pas localement le plus court comme illustré sur la figure 7(b). Polthier [PS06] introduit le chemin géodésique

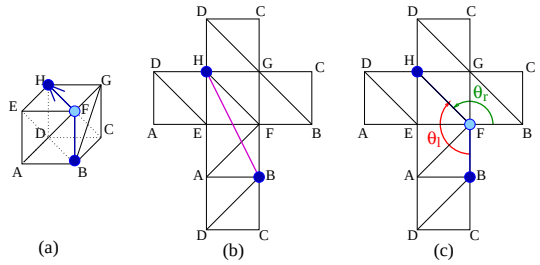


Figure 7: *Chemin géodésique discret - (a) Chemin le plus court - (b) Chemin localement le plus court - (c) Chemin géodésique de Polthier*

.

discret comme une courbe discrète telle qu'en tout point P de cette courbe, la courbure géodésique discrète $\kappa_g(P)$ définie par (1) soit nulle, $\kappa_g(P) = 0$. L'illustration est donnée sur la figure 7(c). Cette définition permet une solution unique au problème discret de la valeur initiale et la simulation de la propagation d'un front évolutif [PS99] sur une surface polyédrique. Nous utilisons le chemin géodésique linéaire comme support des mesures entre sommets caractéristiques. Si le point de départ est le sommet source, la direction définie par la courbure géodésique rend certains sommets inaccessibles par un chemin linéaire. Sur la figure 8 sont donnés des exemples de chemins linéaires au départ du sommet A et de direction $\overrightarrow{AP}$. Sur la figure 8(c) le chemin linéaire doit couper l'arête ED, les sommets A et D sont reliés par le chemin $\{A, P, D\}$ qui n'est pas linéaire. Pour palier à ce pro-

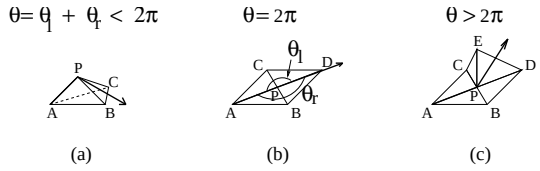


Figure 8: *Chemin de Polthier entrant dans un sommet - (a) Sphérique - (b) Euclidien - (c) Hyperbolique.*

blème, [LHL06] propose un raffinement de la surface polyédrique sous-jacente par un plan de découpe passant par les sommets source et destination. Pour calculer la normale du plan de découpe, Lee et al. utilise des faces virtuelles composées par le sommet source et des paires de sommets voisins appartenant au bord de la surface. Après la découpe, un chemin linéaire est tracé le long de l'intersection du plan de découpe et de la surface polyédrique. Une illustration est donnée sur la figure 9. Le problème de cette construction est l'orientation du plan de découpe qui selon le positionnement du sommet source par rapport au bord peut être très éloigné du plus court chemin pour simuler une mesure physique.

© REFIG 2010.

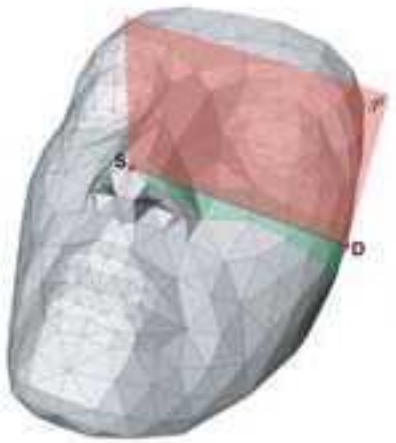


Figure 9: *Chemin linéaire par plan de découpe. Figure tirée de [LHL06].*

De plus, cette orientation n'est pas définie pour des surfaces fermées sans bords ou des surfaces à bords multiples. Nous proposons une nouvelle méthode de calcul du plan de découpe fondée sur l'évaluation de la courbure de la surface localement dans une région longeant le chemin géodésique discret. Notre approche est applicable sur des surfaces triangulées avec ou sans bords.

3. Calcul du chemin géodésique linéaire

L'algorithme de calcul du chemin géodésique linéaire proposé est composé par trois étapes comprenant la densification du maillage initial, la construction du plan de découpe et la subdivision du maillage par le plan de découpe, et finalement le traçage du chemin géodésique linéaire. Dans la suite nous détaillons chacune de ces étapes.

3.1. Densification du maillage

Le raffinement du maillage est commun à toutes les méthodes approximatives. L'introduction des points de Steiner [MM97, LMS97, KS01] sur les arêtes, par exemple, permet de re-échantillonner le continuum d'orientations autour d'un sommet de l'intervalle complet $[0, 2\pi]$. Pour ce faire nous considérons les méthodes de subdivisions les plus utilisées pour le raffinement des maillages [ZSS96, ZDL*00, DKL*05]. Inversement au raffinement par l'introduction des points de Steiner ou des paramètres, comme leur nombre et positionnement par arête sont difficiles à évaluer et souvent sont des valeurs expérimentales, les propriétés des surfaces de subdivision sont reconnues. Nous étudions le voisinage de chaque sommet avant et après la subdivision en fonction de la discrétisation de l'angle total autour d'un sommet et des longueurs des arêtes adjacentes. Les grilles sont régulières et correspondent au maillages produits par l'acquisition. Pour la subdivision "$1-6$" par exemple, la première ligne de la figure 10 montre la subdivision d'un triangle. La deuxième ligne illustre la transformation des distances entre sommets voisins. La figure 11 montre l'ensemble des voisinages selon les différentes méthodes de subdivision après raffinement. Nous recherchons la subdivision pour qui l'ensemble des sommets voisins à un sommet donné après la subdivision soient accessibles avec la même probabilité. Pour ce faire, après la subdivision, l'échantillonnage des angles autour d'un sommet doit être régulier et les sommets voisins équidistants. Le calcul de l'écart type des angles entre deux arêtes voisines et des longueurs des arêtes pour les subdivisions les plus utilisées montre que la subdivision "$1-6$" optimise ces deux paramètres.

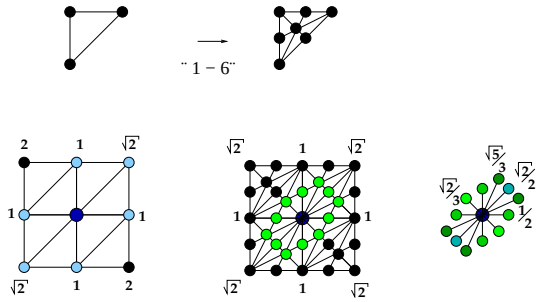


Figure 10: *Subdivision "$1-6$".*

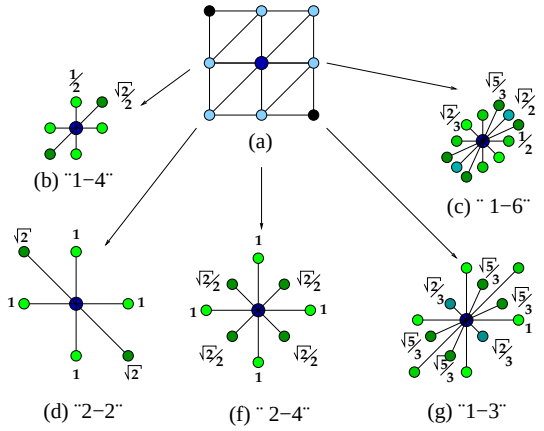


Figure 11: *Voisinages des sommets dans les maillages subdivisés : (a) Initial (b) Subdivision "$1-4$" (Loop [Loo87]) (c) Subdivision "$1-6$" (d) Subdivision "$2-2$" ("Edge-Flip") (e) Subdivision "$2-4$" (f) Subdivision "$1-3$" (Kobbelt [Kob00]).*

Ainsi, la première étape de notre algorithme est la densification du maillage par une subdivision "$1-6$" qui découpe chaque triangle en six parties par rapport aux trois médianes.

© REFIG 2010.

De cette manière aucune direction n'est privilégiée. Un sommet est relié avec le milieu de l'arête opposée.

3.2. Calcul du plan de découpe

Contraindre le chemin sur un plan, passant par le sommet source et destination, solutionne plusieurs problèmes de part sa construction : la linéarité, l'orientation dans des sommets sphériques ou hyperboliques, l'unicité et le reliement des sommets source et destination par ce chemin.

Ce qui reste à définir est l'orientation du chemin de manière à être le plus proche possible du plus court chemin exact en suivant la courbure de la surface dans la bande de triangles le long de ce chemin exact et par analogie à la mesure physique prise au ruban millimétré.

3.2.1. Recensement de sommets de plus courts chemins

Cette étape est basée sur deux observations décisives pour notre application :

- le chemin le plus court n'est pas unique, différentes suites d'arêtes peuvent donner la longueur optimale,
- suivant l'algorithme amployé, le chemin le plus court n'est pas symétrique par rapport aux sommets source et destination. Par exemple, en utilisant un algorithme tel que A^* [GH05], les chemins de S à D, et de D à S peuvent être composées de différentes suites d'arêtes. Or, quand on effectue des mesures physiques, aussi bien la distance que le "plongement" du ruban millimétré entre des points caractéristiques sur la surface de l'objet, sont identiques.

Pour cette raison, dans un premier temps nous procédons à un recensement de sommets appartenant à des chemins les plus courts entre S et D puis D et S.

Pour rechercher le plus court chemin nous reprenons l'algorithme A^* [GH05]. Soit l'exemple de la figure 12(a) où on cherche à construire le plus court chemin allant de S à D. Comme illustré sur la figure 12, à la première itération il y a deux candidats possibles, P_1 et P_1^*. Les chemins $c_1^1 = (S, P_1)$ et $c_2^1 = (S, P_1^*)$ sont équivalents (même longueur, même courbure). A la deuxième itération, il y a trois sommets candidats pour la prolongation du chemin le plus court retenu à la première itération, Q_2, P_2 et Q_2^*. Les chemins obtenus, $c_1^2 = (S, P_1, Q_2)$, $c_2^2 = (S, P_1, P_2)$, $c_3^2 = (S, P_1^*, P_2)$ et $c_4^2 = (S, P_1^*, Q_2^*)$ ont la même longueur. Les chemins c_1^2 et c_4^2 bien que linéaires, "éloignent" du sommet destination D par rapport aux chemins c_2^2 et c_3^2. Si on étudie les distances des extrémités des chemins au sommet D on a :

$$d_1 = \|P_1 D\| = \|P_1^* D\| \tag{4}$$

$$d^* = \|Q_2 D\| = \|Q_2^* D\| \tag{5}$$

$$d_2 = \|P_2 D\| \tag{6}$$

$$d_1 < d^* < d_2 \tag{7}$$

Nous proposons de choisir le chemin le plus court qui à chaque itération nous rapproche le plus au sommet destination. S'il existent plusieurs sommets qui sont à la même distance du sommet destination, le choix se porte sur l'un d'eux sans préférence. Les sommets source de choix multiples sont maintenus dans une liste de manière à être aussi pris en compte à l'étape de calcul du plan de découpe. Nous appelons cette méthode "Approche avant". Sur l'exemple, l'ensemble de sommets traités par l' "Approche avant" est donné sur la figure 12(c). Par symétrie, la méthode "Approche arrière", produit un plus court chemin de D à S en cherchant à chaque itération le sommet qui nous rapproche le plus au sommet S.

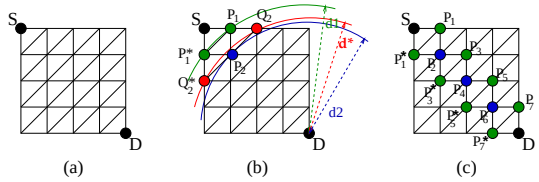


Figure 12: *Le plus court chemin - (a) Maillage initial - (b) "Approche-avant" - (c) Ensemble de sommets couverts par différents chemins "Approche-avant".*

3.2.2. Calcul du plan de découpe

A cette étape de l'algorithme on construit le plan de découpe (voir figure 13) passant par les sommets source et destination, S et D, et de normale calculée comme une somme pondérée des normales $n(P)$, pour l'ensemble des sommets P recensés à l'étape précédente.

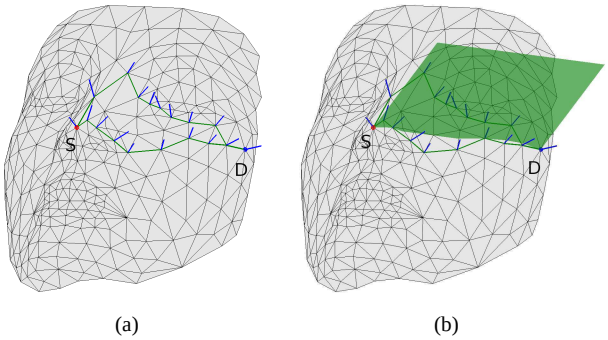


Figure 13: *Illustration du calcul du plan de découpe sur le modèle utilisé dans [LHL06] - (a) Résultat des méthodes "Approche avant" et "Approche arrière" et calcul des normales - (b) Calcul du plan de découpe.*

3.2.3. Subdivision par le plan découpe

L'intersection du maillage avec le plan de découpe produit un chemin linéaire qui "traverse" les triangles du maillage. Deux cas de découpe sont possibles :

© REFIG 2010.

– l'ajout d'un sommet sur une des arêtes du triangle dans le cas où l'un des sommets du triangle se trouve sur le plan et le plan coupe l'arête opposée (voir figure 14(a)),
– l'ajout d'un sommet sur deux arêtes du triangle dans le cas où le plan et le triangle s'intersectent. (voir figure 14(b))

La subdivision des triangles par le plan de découpe entraîne un ajout d'arêtes à l'intersection du plan et du maillage créant ainsi un chemin linéaire allant du sommet source S au sommet destination D.

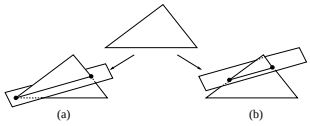


Figure 14: *Découpe d'un triangle - (a) Un sommet appartient au plan de découpe - (b) Aucun sommet n'appartient au plan de découpe.*

3.3. Calcul du chemin géodésique linéaire contraint sur le plan de découpe

À partir du sommet source S on trace le chemin géodésique linéaire dans le maillage subdivisé par le plan de découpe en itérant les pas suivants à commencer par le sommet source S.

1. Pour un sommet P trouver l'arête e_P voisine à P et sur le plan de découpe.
2. Vérifier si c'est la fin de chemin selon si la deuxième extrémité de e_P est le sommet destination D. Si le test est positif alors arrêt du traçage, le chemin géodésique linéaire est achevé. Sinon, réinitialiser le sommet P à la deuxième extrémité de e_P et aller au pas précédent.

4. Expérimentations

4.1. Plan d'expérimentation

La validation du calcul du chemin géodésique linéaire est effectuée sur un ensemble de maillages triangulaires qui regroupe deux types de modèles : des modèles synthétiques et des modèles d'objets acquis et reconstruits avec la chaîne *A2RI*. Les modèles synthétiques sont issus soit de discrétisations des surfaces quadratiques telles que la sphère, le cylindre et le cône, soit des modèles appartenant aux dépôts[3] qui sont utilisés comme des exemples témoins. Les maillages produits par *A2RI* comprennent des objets de formes géométriques variées ainsi que les spécimens des collections ostéologiques représentatifs pour cette étude.
Les extrémités des chemins géodésiques sont pointées soit de manière interactive, avec la précision d'un voisinage de profondeur choisie, soit dans des points, des sommets caractéristiques prédéfinis.
Enfin, le calcul du chemin est évalué suivant deux aspects. Le premier aspect concerne la correspondance entre le chemin géodésique calculé et le chemin réel en termes de longueur et de linéarité. Le deuxième aspect est lié à la performance en termes d'efficacité du parcours des graphes sous-jacents et du temps de calcul de la méthode implémentée au sein d'*A2RI*.

4.1.1. Modèles numériques

L'ensemble des modèles numériques utilisés est donné dans les tables 1 et 4, et illustrés sur la Fig. 18.

Chaque ligne de la table 1 comprend le descriptif du nombre total des sommets (#S) , des arêtes (#A) et des deux points extrêmes de la boîte englobante d'un modèle.
Les quatre premières lignes correspondent aux modèles synthétiques obtenus à partir d'échantillonnages des surfaces paramétriques, appelés primitives. Les primitives utilisées sont :
– Un cube de coté 1 et centré sur le point $(0.5; 0.5; 0.5)$.
– Une sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1.
– Un cylindre obtenu par la translation d'un cercle situé dans le plan $y = 0$, centré en $(0,0,0)$, et de rayon 1, extrudé le long du vecteur $(0,4,0)$. Le cercle et le vecteur sont discrétisés par des suites de points équidistants en respectivement 15 anneaux et 30 segments.
– Un cône dont la base est un cercle dans le plan $y = 0$, centré en $(0,0,0)$, et de rayon 2. Le sommet du cône est défini en $(0,5,0)$. Le cercle et la hauteur sont discrétisés en respectivement 30 anneaux et 15 segments.

Les modèles synthétiques, maillages tests utilisés dans des études similaires, sont listés dans les lignes $5,6,7$ et 8 de la table 1, et correspondent respectivement aux modèles de "la figurine Nefertiti" et du modèle représentant une carrosserie de la voiture "Beetle"[4], du "Bunny"[5] et de l'"Egg-box".
En dernier, sur les lignes, $9,10,11$ et 12, les modèles numériques reconstruits avec la chaîne *A2RI* à partir des acquisitions d'objets sont évalués.

La table 1 contient également des modèles synthétiques volumineux[6] et cible l'illustration de l'efficacité du calcul défini par [GH05]. Pour chaque modèle on retrouve le nombre total de sommets #S, d'arêtes #A, la longueur d'un chemin géodésique aux extrémités choisies aléatoirement, l'évaluation de sa linéarité en termes de la moyenne de la courbure géodésique discrète $\kappa_g()$ tout au long du chemin, l'efficacité de calcul et le temps d'exécution.

[3] Stanford University Computer Graphics Laboratory, http ://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/

[4] Graph theory toolbox : http ://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/5355

[5] Stanford University Computer Graphics Laboratory, http ://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/

[6] Aim-at-shape : http ://shapes.aimatshape.net/

© REFIG 2010.

Modèles	#S	#A	Points extrêmes
Cube	8	18	(0.00, 0.00, 0.00) - (1.00, 1.00, 1.00)
Sphère	642	1920	(-1.00, -1.00, -1.00) - (1.00, 1.00, 1.00)
Cylindre	482	1440	(-1.00, 0.00, -1.00) - (1.00, 4.00, 1.00)
Cône	452	1350	(-2.00, 0.00, -2.00) - (2.00, 5.00, 2.00)
Nefertiti	299	860	(-1.92, -2.49, -1.85) - (1.98, 2.37, 0.53)
Beetle	988	2760	(-0.20, -0.17, -0.50) - (0.20, 0.17, 0.50)
Bunny	35286	105852	(-0.09, 0.03, -0.06) - (0.06, 0.19, 0.06)
Egg-box	18625	55488	(-5.00, -5.00, -2.18) - (5.00, 5.00, 2.18)
Vase	5736	16869	(-31.56, -88.70, -596.43) - (20.80, 32.18, -565.06)
Tête_poly	16873	49814	(-77.55, -138.54, 4.46) - (87.23, 115.61, 145.31)
Crâne	46793	139170	(-55.47, -93.82, -805.33) - (91.15, 58.86, -600.94)
Talus	6116	18342	(-24.32, -2.70, -29.36) - (28.19, 40.64, 22.52)
Éléphant	78792	235948	(-11.33, -14.88, -23.49) - (11.34, 14.87, 23.16)
Vase-lion	200002	600000	(-0.30, -0.50, -0.37) - (0.30, 0.50, 0.37)
Julius	387900	1162063	(-79.81, -143.77, -1323.65) - (123.16, 137.58, -1079.75)
Raptor	1000080	3000000	(-0.60, -0.43, -0.17) - (0.99, 0.34, 0.16)

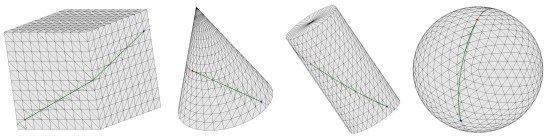
Table 1: *Modèles numériques de test évalués en termes de nombre total de sommets (#S), d'arêtes (#A) et des points extrêmes des boîtes englobantes.*

4.1.2. Implémentation logicielle

L'ensemble des méthodes proposées sont réalisées comme une partie intégrante d'une chaîne complète *A2RI* d'acquisition, de reconstruction, de modélisation et d'impression 3*D* [SDG08, Syn09]. Les algorithmes sont implémentés en langage C et tournent sur une plate-forme de type PC Intel E8400@3GHz et muni de 4Go de RAM.

Pour les modèles reconstruits à partir d'acquisitions au scanner laser, les protocoles d'acquisition sont explicités dans [Syn09].

4.2. Résultats

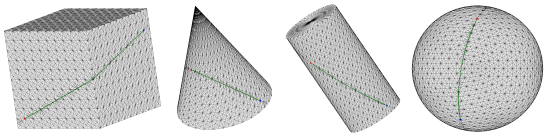


(a) (b) (c) (d)

Figure 15: *Chemins linéaires sur des primitives synthétiques.*

4.2.1. Évaluation de la longueur du chemin géodésique

Dans la mesure où le chemin géodésique est utilisé dans l'analyse morphométrique des reconstructions numériques des spécimens ostéologiques, la précision du calcul de la longueur du chemin est un facteur majeur de l'estimation.



(a) (b) (c) (d)

Figure 16: *Chemins linéaires sur des primitives raffinées.*

Pour évaluer cette précision les longueurs des chemins géodésiques construits sont comparées aux valeurs estimées de manière analytique. Les résultats sont résumés dans la table 2. Soit le cube sur les Fig. 15(a) et Fig. 16(a), l'évaluation du chemin linéaire construit reliant les deux sommets extrêmes est donnée dans la première ligne de la table 2. La valeur calculée analytiquement est égale à $\sqrt{5} \approx 2,236067977$ et son estimation est calculée à partir du dépliement du cube sur un plan. On peut constater que l'erreur de mesure est de l'ordre de 10^{-2}. Pour l'exemple de la sphère, Fig. 15(d) et Fig. 16(d), la valeur analytique est égale à $\frac{\pi}{2} \approx 1.57079633$ et l'erreur est de l'ordre de 10^{-2}. Pour le cylindre, Fig. 15(c) et Fig. 16(c), l'estimation analytique est de 2.709084105 et l'erreur est de l'ordre de 10^{-3}. Et finalement, pour le cône, Fig. 15(b) et Fig. 16(b), la valeur estimée est de 4.035347 et l'erreur est de l'ordre de 10^{-2}.
Il faut remarquer aussi que le chemin construit est stable par rapport au raffinement de la surface sous-jacente. Ainsi, des subdivisions consécutives n'améliorent pas la précision de manière significative.

© REFIG 2010.

Modèles	Nombre de subdivisions	#S	#A	Longueur mm	Linéarité Moy de κ_g	Efficacité %	Temps sec
Cube	0	8	18	2.280776	0.199261	18.1818	0.000091
	1	38	108	2.236068	0.000000	4.8387	0.000381
	2	218	648	2.255943	-0.133126	2.6667	0.001754
Sphère	0	642	1920	1.567306	-0.001679	15.8621	0.011958
	1	3842	11520	1.567252	-0.001222	5.9896	0.025296
	2	23042	69120	1.567202	0.000882	2.2908	0.136340
Cylindre	0	482	1440	2.708775	0.000000	15.9341	0.006294
	1	2882	8640	2.708775	0.000000	5.8704	0.029836
	2	17282	51840	2.708775	0.000000	2.2835	0.116424
Cône	0	452	1350	4.043486	0.008890	16.0870	0.005484
	1	2702	8100	4.044524	0.009493	5.9105	0.017199
	2	16202	48600	4.045431	0.009984	2.2236	0.098157

Table 2: *Évaluation du calcul du chemin géodésique sur des primitives.*

L'estimation de la longueur du chemin géodésique est faite aussi pour des surfaces reconstruites à partir des acquisitions laser. Pour certains spécimens, dû à l'endommagement de la surface ostéologique sous-jacente, les surfaces reconstruites représentent des $2D$ variétés avec bords correspondant aux trous et aspérités de l'os. Dans ce cas, la construction du chemin linéaire est effective à l'exception d'un croisement de bords liés aux parties endommagées. En pratique, une mesure physique ne peut "enjamber" le vide, cette mesure ne peut pas être validée et par conséquent elle n'est pas prise. Une étude de la précision des mesures euclidiennes et géodésiques sur des modèles numériques par rapport aux mesures manuelles sur des collections ostéologiques peut être trouvée dans [DGS*09].

4.2.2. Évaluation de la linéarité du chemin géodésique

La linéarité du chemin géodésique est estimée avec la courbure discrète géodésique κ_g définie par l'équation (1). Sur l'ensemble des exemples les moyennes et les écart types de κ_g sont calculés. On remarque que les chemins construits sont linéaires avec une courbure en dessous de 10^{-2}. De même, on note que la linéarité est stable par rapport au raffinement de la surface.

L'algorithme élaboré permet de tracer un chemin géodésique passant par des points d'inflexion avec une inversion de la courbure tout en préservant son orientation initiale. Une illustration est donnée sur la Fig. 17.

4.2.3. Évaluation de l'efficacité du calcul du chemin géodésique

Pour estimer la performance de l'algorithme on utilise la mesure d'efficacité définie par [GH05] comme le nombre de sommets appartenant au chemin géodésique divisé par le nombre de sommets parcourus. L'efficacité est donnée en pourcentage. Un algorithme optimal qui parcourt seulement les sommets du chemin géodésique a une efficacité de 100%. Cette mesure est indépendante des performances du matériel. L'étude de [GH05] contient une analyse comparative des performances de plusieurs algorithmes de recherche du chemin le plus court reliant une paire de sommets dans un graphe orienté valué. Ainsi, pour des exemples tests de graphes aléatoires R_{ij} avec $65536 \times 4^{i-1}$ sommets, $4 \times 65536 \times 4^{i-1}$ arêtes et poids $\in \{1, ..., 10 \times 100^{j-1}\}$, l'efficacité de algorithme de Dijkstra est estimée dans l'intervalle $[0.001, 0.040]$ allant en décroissant avec l'augmentation du nombre de sommets. Certaines optimisations, basées sur l'algorithme A^*, arrivent à une efficacité de $26,47\%$.
D'après nos expérimentations, la meilleure performance de l'algorithme proposé est de l'ordre de 18%. Par contre, cette performance est maintenue pour des modèles de taille volumineuse. L'efficacité décroît si on procède à un raffinement des maillages. Cela ne représente pas une contrainte forte étant donné que les raffinements des maillages n'améliorent pas de manière perceptible ni l'erreur de mesure de la longueur du chemin construit, ni sa linéarité.

Le temps de calcul pour l'ensemble des expérimentations est donné à titre indicatif dans la dernière colonne des tables 2, 3 et 4. Il dépend de l'implémentation et de la puissance du matériel et est lié à l'efficacité de l'algorithme. Cependant, il permet d'avoir une meilleure compréhension de l'algorithme proposé et de sa mise en oeuvre en pratique.

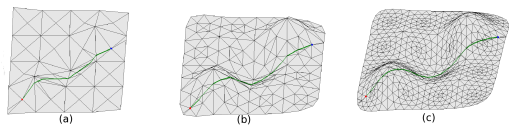


Figure 17: *Chemins linéaires - (a) Maillage initial - (b) Maillage raffiné par une itération de subdivision "Loop" - (c) Maillage raffiné par deux itérations de subdivision "Loop".*

© REFIG 2010.

Modèles	Nombre de subdivisions	#S	#A	Longueur mm	Linéarité Moy de κ_g	Efficacité %	Temps sec
Nefertiti	0	299	860	2.481550	0.016063	17.7570	0.005189
	1	1721	5092	2.486600	0.014423	6.5972	0.011202
	2	10185	30416	2.485606	0.014720	2.5956	0.060145
Beetle	0	988	2760	0.284965	-0.002014	17.0732	0.010866
	1	5511	16098	0.284991	-0.002769	6.2315	0.036858
	2	32187	95664	0.284965	-0.002006	2.4194	0.205769
Bunny	0	35286	105852	0.098276	0.001823	17.5050	0.540905
	1	211706	635112	0.098267	0.001511	6.0543	2.207849
	2	1270226	3810672	0.098277	0.001823	2.3083	12.834398
Egg-box	0	18625	55488	10.355857	0.007844	15.5348	0.254311
	1	110977	332160	10.312085	-0.007646	5.3291	1.025179
	2	664321	1991424	11.164980	-0.003301	1.4361	6.358321
Vase	0	5736	16869	112.326856	0.001405	16.5902	0.070672
	1	33739	100542	112.714656	-0.000695	5.7961	0.062704
	2	201085	601908	112.486405	-0.000383	2.1964	0.483403
Tête_poly	0	16873	49814	194.022956	0.006935	16.0911	0.228808
	1	99631	297292	194.024739	0.007971	5.4872	0.923973
	2	594587	1780568	194.025073	0.007832	2.0686	5.767739
Crâne	0	46793	139170	193.361360	0.000246	17.9216	0.729475
	1	278311	832428	193.366257	0.000250	6.1407	2.799531
	2	1664827	4989384	193.373475	0.000180	2.3309	16.867488
Talus	0	6116	18342	38.220142	-0.000699	17.1289	0.091880
	1	36686	110052	38.220636	-0.000721	6.3482	0.361276
	2	220106	660312	38.222849	-0.000827	2.4613	2.038420

Table 3: *Évaluation du calcul du chemin géodésique sur des modèles synthétiques et reconstruits.*

Modèles	#S	#A	Longueur mm	Linéarité Moy de κ_g	Efficacité %	Temps sec
Éléphant	78792	235948	25.883488	-0.003215	14.3979	1.278154
Vase-lion	200002	600000	0.510132	-0.000450	16.6533	3.598896
Julius	387900	1162063	100.079243	-0.001315	17.1828	7.318379
Raptor	1000080	3000000	0.239176	-0.001346	17.4877	19.717612

Table 4: *Évaluation du calcul du chemin géodésique sur des modèles synthétiques volumineux.*

5. Conclusion et développements futurs

Une nouvelle méthode de calcul d'un chemin géodésique linéaire reliant une paire de sommets d'une surface triangulée, $2D$ variété avec ou sans bords, est proposée. Cette méthode est intégrée dans une chaîne numérique complète $A2RI$ de l'acquisition au laser scanner à l'impression $3D$, et expérimentée pour l'évaluation morphométrique de reconstructions numériques des collections muséographiques. Cela implique un contrôle de la précision de mesure de la longueur et de la courbure discrète du chemin construit afin de pouvoir simuler les mesures manuelles effectuées par les anthropologues sur les spécimens originaux.

Pour tester la précision du calcul et valider la méthode, des modèles synthétiques et des modèles d'objets acquis sont testés. La précision de l'estimation de la longueur du chemin géodésique linéaire est d'ordre de 5×10^{-2}mm sur l'ensemble des modèles synthétiques et en comparaison avec les valeurs analytiques exactes. Pour les modèles d'objets acquis, l'estimation est en comparaison avec des mesures manuelles avec une grande variabilité inter-observateur. Ainsi, sur une étude morphométrique de la collection de tali de l'ostéothèque de Pessac, la variabilité inter-observateur des mesures manuelles est de l'ordre de $3mm$. L'évaluation des chemins géodésiques correspondants aux caractéristiques de formes étudiées sur les tali pour l'intégralité des mesures numériques est en dessous de ce seuil.

Ce type d'évaluation de la précision est peu connu et

© REFIG 2010.

étudié pour des reconstructions à partir des acquisitions au scanner laser, inversement à celles du scanner CT. Cependant, une majorité des applications qui supportent des modèles numériques issus d'acquisition au scanner laser et en particulier l'anthropologie numérique nécessitent la maîtrise de la précision et la conformité des modèles et mesures numériques aux objets et mesures physiques. Un prolongement imminent de notre étude est le développement des méthodes pour d'appareillement de caractéristiques de la forme géométrique selon des contraintes métriques basées sur l'évaluation de chemins géodésiques linéaires. À terme, une évaluation précise des caractéristiques surfaciques et volumiques pourrait déboucher sur de nouveaux outils d'investigation des séries archéologiques pour une meilleure préservation de l'héritage culturel.

Remerciements :
Nous tenons tout particulièrement à remercier Mlle Hélène Coqueugniot pour l'accès à la collection privée des crânes juvéniles de la faculté de médecine à Strasbourg, et Mme Christine Couture pour l'accès à la collection de tali de l'ostéothèque de Pessac.

Références

[AHPSV97] AGARWAL P., HAR-PELED S., SHARIR M., VARADARAJAN K. : Approximating shortest paths on a convex polytope in three dimensions. *Journal of the ACM. Vol. 44*, Num. 4 (1997), 567–584.

[AMS00] ALEKSANDROV L., MAHESHWARI A., SACK J. : Approximation algorithms for geometric shortest path problems. In *STOC* (2000), pp. 286–295.

[BBD*07] BRONSTEIN A., BRONSTEIN M., DEVIR Y., KIMMEL R., WEBER O. : Parallel algorithms for approximation of distance maps on parametric surfaces, 2007.

[BCD*02] BAREQUET G., CHEN D., DAESCU O., GOODRICH M., SNOEYINK J. : Efficiently approximating polygonal paths in three and higher dimensions. *Algorithmica. Vol. 33*, Num. 2 (2002), 150–167.

[BE97] BERN M., EPPSTEIN D. : Approximation algorithms for geometric problems. *8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1997), 296–345.

[BJ86] BESL P., JAIN R. : Invariant surface characteristics for 3d object recognition in range images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Vol. 33*, Num. 1 (1986), 33–80.

[BNK02] BORODIN P., NOVOTNI M., KLEIN R. : Progressive gap closing for mesh repairing. In *Advances in Modelling, Animation and Rendering*, Vince J., Earnshaw R., (Eds.). Springer Verlag, July 2002, pp. 201–213.

[CCD*07] COQUEUGNIOT H., COUTURE C., DUTAILLY B., GUEORGUIEVA S. ., DESBARATS P., SYNAVE R. : Range image processing for paleoanthropology heritage preservation. In *The second Internation Workshop on Digital Media and its Applicat ion in Museum and Heritage* (Chongqing, China., 2007).

[CDS01] CHEN D., DAS G., SMID M. : Lower bounds for computing geometric spanners and approximate shortest paths. *Discrete Applied Mathematics. Vol. 110*, Num. 2-3 (2001), 151–167.

[CH96] CHEN J., HAN Y. : Shortest paths on a polyhedron ; part i : computing shortest paths, 1996.

[CK97] COHEN L., KIMMEL R. : Global minimum for active contour models : A minimal path approach. *Int. J. Comput. Vision. Vol. 24*, Num. 1 (1997), 57–78.

[Coh05] COHEN L. : Minimal paths and fast marching methods for image analysis, 2005.

[CR87] CANNY J., REIF J. : New lower bound techniques for robot motion planning problems. In *FOCS* (1987), pp. 49–60.

[dBKvdSV97] DE BERG M., KATZ M., VAN DER STAPPEN A. F., VLEUGELS J. : Realistic input models for geometric algorithms. In *SCG '97 : Proceedings of the thirteenth annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 1997), ACM, pp. 294–303.

[DCDS97] DUCHAMP T., CERTAIN A., DEROSE A., STUETZLE W. : Hierarchical computation of pl harmonic embeddings. preprint, July 1997.

[DGS*09] DESBARATS P., GUEORGUIEVA S., SYNAVE R., COQUEUGNIOT H., DUTAILLY B. : *Strasbourg Juvenile Collection : Computer Assisted Anthropology for the Anterior Fontanelle Reconstruction and Size Evaluation*. Rr-1454-09, 21p, LaBRI, UMR 5800, Université Bordeaux 1, 2009.

[Dij71] DIJKSTRA E. W. : Ewd316 : A short introduction to the art of programming, August 1971. T. H. Eindhoven, The Netherlands.

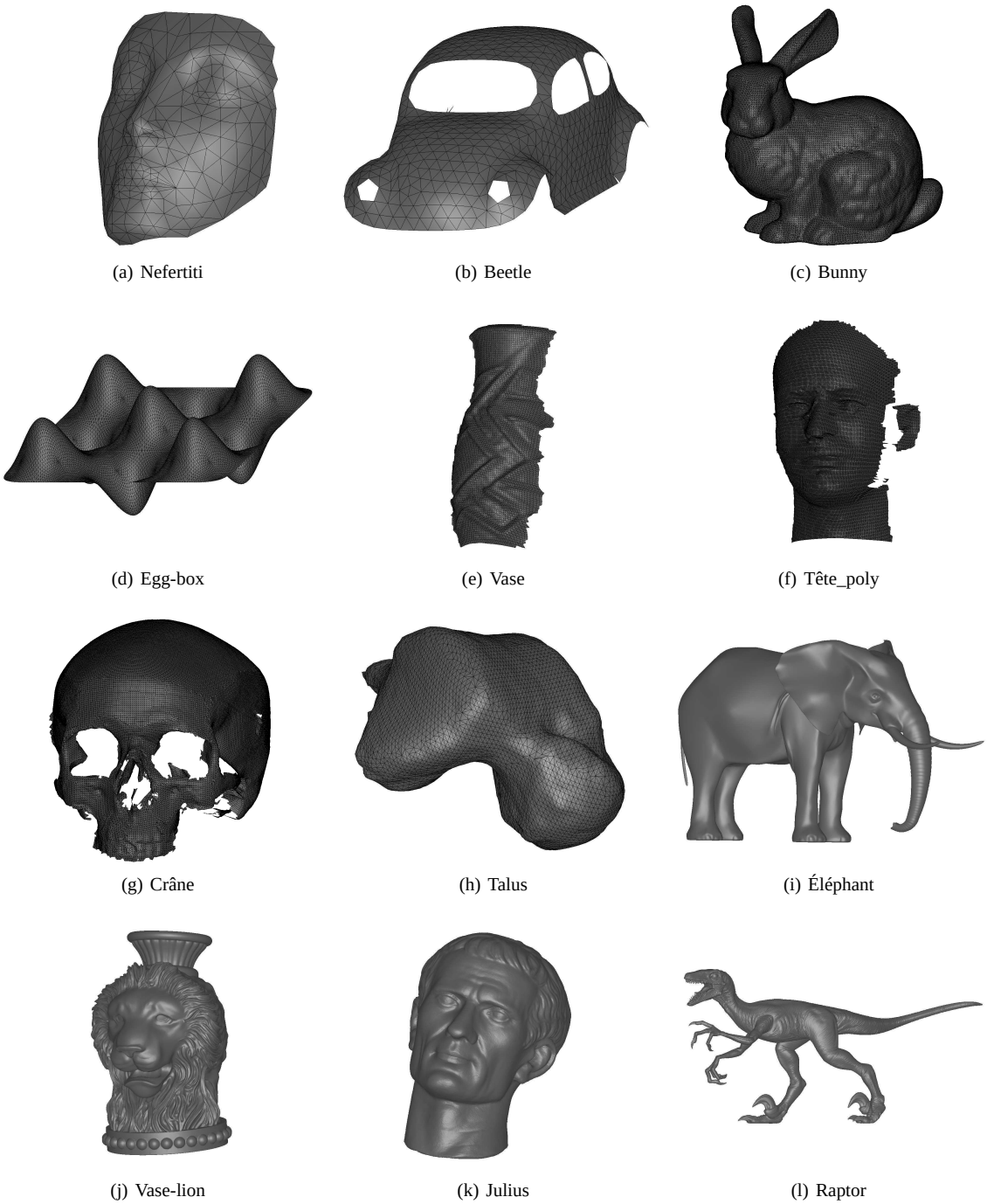
[DKL*05] DYN N., KOBBELT L., LEVIN D., REIF U., SABIN M., SCHRODER P. : Subdivision schemes in geometric modelling : Theory and applications. In *European Mathematical Society Summer School* (2005).

[DMSB99] DESBRUN M., MEYER M., SCHRÖDER P., BARR A. : Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *SIGGRAPH* (1999), pp. 317–324.

[DRaMBK09] DEVIR Y., ROSMAN G., AMD M.M. BRONSTEIN A. B., KIMMEL R. : Shape reconstruction with intrinsic priors, 2009.

[FB81] FISCHLER M., BOLLES R. : Random sample consensus : a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Commun. ACM. Vol. 24*, Num. 6 (1981), 381–395.

© REFIG 2010.



(a) Nefertiti (b) Beetle (c) Bunny

(d) Egg-box (e) Vase (f) Tête_poly

(g) Crâne (h) Talus (i) Éléphant

(j) Vase-lion (k) Julius (l) Raptor

Figure 18: *Ensemble des modèles illustrés.*

[FH05] FARAG A., HASSOUNA M. : Theoretical foundations of tracking monotonically advancing fronts using fast marching level set method. Tech. Report, Computer Vision and Image Processing Lab., Depart. of Electrical and Computer Engineering, University of Louisville, 2005.

[Gar04] GARLAND M. : Notes on differential geometry. Notes, 2004.

© REFIG 2010.

[GH89] GUIBAS L., HERSHBERGER J. : Optimal shortest path queries in a simple polygon. *J. Comput. Syst. Sci.. Vol. 39*, Num. 2 (1989), 126–152.

[GH05] GOLDBERG A. V., HARRELSON C. : Computing the shortest path : A search meets graph theory. In *SODA '05 : Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (Philadelphia, PA, USA, 2005), Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 156–165.

[GKK02] GROSSMANN R., KIRYATI N., KIMMEL R. : Computational surface flattening : A voxel-based approach. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.. Vol. 24*, Num. 4 (2002), 433–441.

[Ham92] HAMANN B. : Curvature approximation for triangulated surfaces. In *Geometric Modelling* (1992), pp. 139–153.

[HPSV96] HAR-PELED S., SHARIR M., VARADARAJAN K. R. : Approximating shortest paths on a convex polytope in three dimensions. In *Symposium on Computational Geometry* (1996), pp. 329–338.

[HPW05] HILDEBRANDT K., POLTHIER K., WARDETZKY M. : On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. ZIB Preprint ZR-05-24, 2005.

[HPW06] HILDEBRANT K., POLTHIER K., WARDETZKY M. : On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. *Geometriae Dedicata. Vol. 123* (December 2006), 89–112(24).

[HS95] HERSHBERGER, SURI : Practical methods for approximating shortest paths on a convex polytope in R^3. In *SODA : ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (A Conference on Theoretical and Experimental Analysis of Discrete Algorithms)* (1995).

[HS99] HERSHBERGER J., SURI S. : An optimal algorithm for Euclidean shortest paths in the plane. *SIAM Journal on Computing. Vol. 28*, Num. 6 (1999), 2215–2256.

[JC98] JOHNSON D. E., COHEN E. : A framework for efficient minimum distance computations. In *ICRA* (1998), pp. 3678–3684.

[JK98] JONAS A., KIRYATI N. : Length estimation in 3-d using cube quantization. *J. Math. Imaging Vis.. Vol. 8*, Num. 3 (1998), 215–238.

[KAB95] KIMMEL R., AMIR A., BRUCKSTEIN A. : Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 17*, Num. 6 (June 1995), 635–640.

[Kap99] KAPOOR S. : Efficient computation of geodesic shortest paths. In *STOC '99 : Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing* (New York, NY, USA, 1999), ACM, pp. 770–779.

[KK94] KIMMEL R., KIRYATI N. : Finding shortest paths on surfaces by fast global approximation and precise local refinement, 1994.

[KK95] KIRYATI N., KÜBLER O. : Chain code probabilities and optimal length estimators for digitized three-dimensional curves. *Pattern Recognition. Vol. 28*, Num. 3 (1995), 361–372.

[KO00] KANEVA B., O'ROURKE J. : An implementation of chen & han's shortest paths algorithm. In *CCCG* (2000).

[KO08] KANAI T., OHTAKE Y. : Discrete shortest paths on smooth surface representations. In *Shape Modeling International* (2008), pp. 283–284.

[Kob00] KOBBELT L. : Sqrt3 subdivision. In *Proceedings of SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series* (2000).

[KS98] KIMMEL R., SETHIAN J. : Computing geodesic paths on manifolds, 1998.

[KS01] KANAI T., SUZUKI H. : Approximate shortest path on a polyhedral surface and its applications. *Computer-Aided Design. Vol. 33*, Num. 11 (2001), 801–811.

[LHL06] LEE S., HAN J., LEE H. : Straightest paths on meshes by cutting planes. In *4th International Conference on Geometric modeling and processing* (2006), pp. 609–615.

[LKMD01] LEE H., KIM L., MEYER M., DESBRUN M. : Meshes on fire. In *Eurographics, Computer Animation and Simulation* (2001).

[LMS97] LANTHIER M., MAHESHWARI A., SACK J. : Approximating weighted shortest paths on polyhedral surfaces. In *Symposium on Computational Geometry* (1997), pp. 274–283.

[Loo87] LOOP C. : *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. Master's thesis, University of Utah, 1987.

[LSC06] LI S., SUN G., CHEN G. : Improved algorithm for finding next-to-shortest paths. *Inf. Process. Lett.. Vol. 99*, Num. 5 (2006), 192–194.

[LTD05] LEE H., TONG Y., DESBRUN M. : Geodesics-based one-to-one parameterization of 3d triangle meshes. *IEEE MultiMedia. Vol. 12*, Num. 1 (2005), 27–33.

[Mit98] MITCHELL J. : Geometric shortest paths and network optimization, 1998.

[MM97] MATA C., MITCHELL J. : A new algorithm for computing shortest paths in weighted planar subdivisions (extended abstract). In *Symposium on Computational Geometry* (1997), pp. 264–273.

[MMP87] MITCHELL J., MOUNT D., PAPADIMITRIOU C. : The discrete geodesic problem. *SIAM J. Comput.. Vol. 16*, Num. 4 (1987), 647–668.

© REFIG 2010.

[MMSB02] M.MEYER, M.DESBRUN, SCHRÖDER P., BARR A. : Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *VisMath* (2002).

[Mou85] MOUNT D. : On finding shorthest paths on convex polyhedra, 1985.

[Mou04] MOUNT D. : Geometric intersections, 2004.

[Mou05] MOUNT D. : Computational geometry : Proximity and location, 2005.

[MVC05] MARTINEZ D., VELHO L., CARVALHO P. : Computing geodesics on triangular meshes. *Computers&Graphics. Vol. 29*, Num. 5 (2005), 667–675.

[NK01] NOVOTNI M., KLEIN R. : A geometric approach to 3D object comparison. In *Shape Modeling and Applications* (2001), pp. 167–175.

[NK02] NOVOTNI M., KLEIN R. : Computing geodesic paths on triangular meshes. In *WSCG* (2002), pp. 341–348.

[O'R99] O'ROURKE J. : Computational geometry column 35. *International Journal of Computational Geometry and Applications. Vol. 9*, Num. 4/5 (1999), 513–.

[PBCG09] POTAMIAS M., BONCHI F., CASTILLO C., GIONIS A. : Fast shortest path distance estimation in large networks. In *18th ACM Conference on Information and Knowledge Management* (2009), pp. 867–876.

[PC06] PEYRÉ G., COHEN L. : Geodesic remeshing using front propagation. *Int. J. Comput. Vision. Vol. 69*, Num. 1 (2006), 145–156.

[PP93] PINKALL U., POLTHIER K. : Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experiment. Math.. Vol. 2*, Num. 1 (1993), 15–36.

[PP03] POLTHIER K., PREUS E. : Identifying vector field singularities using a discrete hodge decomposition. In *Visualization and Mathematics III* (2003), pp. 113–134.

[PS99] POLTHIER K., SCHMIES M. : Geodesic flow on polyhedral surfaces. In *IEEE Symp. on Sci. Visualization* (1999).

[PS06] POLTHIER K., SCHMIES M. : Straightest geodesics on polyhedral surfaces. In *SIGGRAPH '06 : ACM SIGGRAPH 2006 Courses* (New York, NY, USA, 2006), ACM, pp. 30–38.

[Sch07] SCHREIBER Y. : Shortest paths on realistic polyhedra. In *SCG '07 : Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2007), ACM, pp. 74–83.

[SDG08] SYNAVE R., DESBARATS P., GUEORGUIEVA S. : Toolkit for registration and evaluation for 3d laser scanner acquisition. In *WSCG'2008* (Plzen : University of West Behemia, February 2008), pp. 199–204.

[Set96] SETHIAN J. : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. In *Proc. Nat. Acad. Sci.* (1996), vol. 93(4), pp. 1591–1595.

[SGD08] SYNAVE R., GUEORGUIEVA S., DESBARATS P. : Constraint shortest path computation on polyhedral surfaces. In *ICVGIP'08, Proc. of the 6th Indian Conference on Computer Vision, Graphics and Image Processing* (2008).

[SJC09] SEONG J., JEONG W., COHEN E. : Curvature-based anisotropic geodesic distance computation for parametric and implicit surfaces. *Visual Computer. Vol. 25*, Num. 8 (2009), 743–755.

[SS84] SHARIR M., SCHORR A. : On shortest paths in polyhedral spaces. In *STOC '84 : Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing* (New York, NY, USA, 1984), ACM, pp. 144–153.

[SS06] SCHREIBER Y., SHARIR M. : An optimal-time algorithm for shortest paths on a convex polytope in three dimensions. In *SCG '06 : Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2006), ACM, pp. 30–39.

[SSG03] SIFRI O., SHEFFER A., GOTSMAN C. : Geodesic-based surface remeshing. In *IMR* (2003), pp. 189–199.

[SSK*05] SURAZHSKY V., SURAZHSKY T., KIRSANOV D., GORTLER S., HOPPE H. : Fast exact and approximate geodesics on meshes. *ACM Trans. Graph.. Vol. 24*, Num. 3 (2005), 553–560.

[SW04] SHIH F., WU Y.-T. : Three-dimensional euclidean distance transformation and its application to shortest path planning. *Pattern Recognition. Vol. 37*, Num. 1 (2004), 79–92.

[Syn09] SYNAVE R. : *Reconstruction de solides à partir d'acquisitions surfaciques*. PhD thesis, Université Bordeaux1, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex, Décembre 2009.

[Tho97] THORUP M. : Undirected single source shortest path in linear time. In *FOCS* (1997), pp. 12–21.

[TWZZ07] TANG J., WU G., ZHANG F., ZHANG M. : Fast approximation geodesic paths on triangle mesh. *International Journal of Automation and Computing. Vol. 4*, Num. 1 (2007), 8–13.

[VA97] VARADARAJAN K., AGARWAL P. : Approximating shortest paths on an nonconvex polyhedron. In *FOCS* (1997), pp. 182–191.

[WDB*08] WEBER O., DEVIR Y. S., BRONSTEIN A. M., BRONSTEIN M. M., KIMMEL R. : Parallel algorithms for approximation of distance maps on parametric surfaces. *ACM Trans. Graph.. Vol. 27*, Num. 4 (2008), 1–16.

[WKL03] WINDREICH G., KIRYATI N., LOHMANN G. : Voxel-based surface area estimation : from theory to practice. *Pattern Recognition. Vol. 36*, Num. 11 (2003), 2531–2541.

© REFIG 2010.

[WPS00] WANG Y., PETERSON B., STAIB L. : Shape-based 3D surface correspondence using geodesics and local geometry. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (2000), pp. 2644–2651.

[WPS03] WANG Y., PETERSON B., STAIB L. : 3d brain surface matching based on geodesics and local geometry. *Computer Vision and Image Understanding. Vol. 89*, Num. 2-3 (2003), 252–271.

[WS87] WOLFSON E., SCHWARTZ E. : Computing minimal distances on arbitrary polyhedral surfaces, 1987.

[XW09] XIN S.-Q., WANG G.-J. : Improving chen and han's algorithm on the discrete geodesic problem. *ACM Trans. Graph.. Vol. 28*, Num. 4 (2009).

[ZDL*00] ZORIN D., DEROSE T., LEVIN A., SCHRÖDER P., KOBBELT L., SWELDENS W. : Subdivision for modeling and animation. In *SIGGRAPH Course Notes* (2000), pp. 1–116.

[ZSS96] ZORIN D., SCHRÖDER P., SWELDENS W. : Interpolation subdivision for meshes with arbitrary topology. In *SIGGRAPH* (1996), pp. 189–192.

© REFIG 2010.