HAL open science

Modèles temporels d'amortissement en vibroacoustique appliqués à des matériaux viscoélastiques

Augustin Parret-Fréaud, Benjamin Cotté, Antoine Chaigne

To cite this version:

Augustin Parret-Fréaud, Benjamin Cotté, Antoine Chaigne. Modèles temporels d'amortissement en vibroacoustique appliqués à des matériaux viscoélastiques. 21ème congrès français de mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. pp.N/A. hal-00966624

HAL Id: hal-00966624

https://hal.science/hal-00966624v1

Submitted on 26 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèles temporels d'amortissement en vibroacoustique appliqués à des matériaux viscoélastiques

Augustin Parret-Fréaud, Benjamin Cotté et Antoine Chaigne [a]

a. *ENSTA ParisTech — Unité de Mécanique*
828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France
augustin.parret-freaud@ensta-paristech.fr — http://ume.ensta-paristech.fr

Résumé :

Ce travail porte sur le développement de modèles temporels d'amortissement bien posés et capables de représenter le comportement d'une large gamme de matériaux viscoélastiques (bois, polymères, composites...). La particularité de notre approche consiste à représenter l'amortissement fréquentiel comme un filtre numérique. Il est alors possible d'en effectuer la synthèse à partir de données fréquentielles, puis de le transcrire dans le domaine temporel en garantissant ses propriétés de stabilité et de causalité grâce à la vaste littérature disponible au sein de la communauté du traitement du signal. Les principaux aspects de la méthode sont présentés et illustrés sur un exemple simple.

Abstract :

This work deals with the development of time domain damping models able to describe the behaviour of a wide range of viscoelastic materials (wood, polymers, composites...). The particular feature of our approach is to represent the damping in the frequency domain as a numerical filter. This enables to synthesize it from frequency-domain data, and then to transcribe it in the time domain while guaranteeing its stability and causality properties thanks to the wide literature available among the signal processing community. The main aspects of the method are presented and illustrated on a simple example.

Mots clefs : amortissement vibratoire ; viscoélasticité linéaire ; filtrage numérique.

1 Introduction

La simulation de la réponse vibratoire et acoustique de structures soumises à des excitations impulsionnelles nécessite une prise en compte précise des phénomènes d'amortissement structurel, dont les conséquences sont multiples, par exemple en terme de rayonnement acoustique ou de directivité. De plus, ce phénomène apparaît également avoir une influence notable vis à vis de la perception acoustique des phénomènes vibratoires : sa modélisation fine devient alors très importante dans de nombreux domaines (acoustique des transports, des salles, acoustique musicale) et lors d'applications en synthèse sonore [1, 2].

Historiquement, de tels modèles ont souvent été obtenus dans le domaine fréquentiel, à partir des données de modules d'élasticité complexes $E^\star(f)$ ou bien de facteurs de pertes $\eta(f)$ [1] obtenus à l'aide de *viscoanalyseurs*, par exemple. Si de tels modèles conviennent pour une large gamme de simulations, le formalisme temporel apparaît plus intéressant dans le cas de structures excitées de manière impulsionnelle de par sa prise en compte naturelle des aspects transitoires. Se pose alors la question de la formulation de modèles temporels d'amortissement à caractéristiques fréquentielles données et satisfaisant aux propriétés de stabilité, causalité et d'adéquation au second principe de la thermodynamique. Des formulations temporelles plus ou moins simples sont couramment utilisées pour approcher

1. $\eta(f) = \mathcal{I}m(E^\star(f))/\,\mathcal{R}e(E^\star(f))$

certaines caractéristiques d'amortissement [3–5]. D'autres, reposant sur le concept de dérivation fractionnaire (voir par exemple [6]), paraissent particulièrement bien adaptées lorsqu'il s'agit de représenter des phénomènes d'amortissement à faible variation fréquentielle, mais leur traitement numérique est parfois délicat.

Plus récemment, la question du développement de modèles temporels bien posés dans le cadre des comportements de type viscoélastique a été abordée par Collet et coll. [7] à l'aide d'une analyse des propriétés mathématiques du module d'élasticité complexe dans l'espace fréquentiel. Le travail exposé ici se place dans une problématique similaire, et s'intéresse à une nouvelle approche permettant la réalisation de modèles temporels d'amortissement à même de prendre en compte des réponses à caractéristiques fréquentielles variées, et donc adaptés à une large gamme de matériaux (bois, polymères, matériaux composites...). La particularité de celle-ci repose sur la représentation des variations fréquentielles d'amortissement à l'aide d'un filtre numérique qui garantit les propriétés de causalité et de stabilité lors de sa transposition dans le domaine temporel. L'approche est illustrée sur un problème modèle simple présenté en partie 2. La modélisation du comportement est ensuite détaillée en partie 3, suivie du schéma de résolution numérique associé en partie 4 pour lequel une condition de stabilité est obtenue à l'aide de méthodes énergétiques. Le tout est enfin illustré par quelques résultats numériques en partie 5 sur un exemple relatif aux vibrations longitudinales d'une poutre en nylon.

2 Équations de base

Considérons le problème mécanique unidimensionnel constitué par les vibrations longitudinales d'une structure de type poutre (de longueur L et de masse volumique ρ) encastré à son extrémité gauche et libre à son extrémité droite. On présente dans un premier temps la formulation continue de ce problème en présence d'un comportement viscoélastique linéaire, puis sa discrétisation spatiale.

Sous l'hypothèse des petites perturbations, en notant $u(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$, $\sigma(x,t)$ les déplacement, déformation et contrainte à l'abscisse x et au temps t, $\mathcal{E}$ la loi de comportement liant σ à ε et $f(x,t)$ une répartition volumique d'efforts imposée, les équations du problème s'écrivent :

$$\sigma(x,t) = \mathcal{E}\left(\varepsilon(x,t)\right) = \mathcal{E}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right), \tag{1a}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} + f(x,t), \tag{1b}$$

munies des conditions aux limites $u(0,t) = 0$ et $\sigma(L,t) = 0$.

On se place par la suite dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. Dans le domaine temporel, la relation de comportement s'écrit alors dans sa forme générale à l'aide d'une représentation intégrale du type :

$$\sigma(x,t) = \mathcal{E}\left(\varepsilon(x,\tau), \tau \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon(x,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau, \tag{2}$$

où G est une fonction de relaxation décrivant l'effet mémoire du matériau.

En pratique, une formulation différentielle généralisée est souvent préférée à l'expression précédente, notamment lorsqu'il s'agit de simuler numériquement la réponse de ce type de problèmes. Un exemple couramment rencontré de telle formulation est donné par le modèle de Zener, qui relie les contraintes et déformations à leurs dérivées premières. On pourra se reporter aux travaux de Becache et coll. [8] pour une étude de ses propriétés mathématiques, notamment en terme de décroissance énergétique.

3 Modélisation du comportement par filtre numérique

A ce stade, aucun modèle n'a encore été retenu pour la loi de comportement $\mathcal{E}$: au lieu de discrétiser un modèle temporel continu, nous choisissons de représenter directement celle-ci dans l'espace des temps discrets à l'aide d'un filtre numérique $\mathcal{H}$. On commence par introduire une discrétisation temporelle

de pas Δt (de fréquence d'échantillonnage $f_s = 1/\Delta t$) et on notera par la suite $\sigma^n(x) = \sigma(x, t^n)$ et $\varepsilon^n(x) = \varepsilon(x, t^n)$ les champs des valeurs de σ et ε à l'instant $t^n = n\Delta t$.

Dans le domaine temporel, le filtre $\mathcal{H}$ s'écrit de manière générale comme une équation de récurrence entre les valeurs successives de σ et de ε de la forme :

$$\sigma^{n+1}(x) = \mathcal{H}\left(\sigma^n(x), \ldots, \sigma^{n+1-N_a}(x), \varepsilon^{n+1}(x), \ldots, \varepsilon^{n+1-N_b}(x)\right) \tag{3}$$

$$= H_0\left(\varepsilon^{n+1}(x) + \sum_{l=1}^{N_b} b_l \varepsilon^{n+1-l}(x)\right) - \sum_{m=1}^{N_a} a_m \sigma^{n+1-m}(x). \tag{4}$$

Par la suite, la synthèse de $\mathcal{H}$ et l'étude de ses propriétés s'effectue à partir de sa fonction de transfert H dans le domaine fréquentiel (plan des z). Celle-ci est obtenue par transformée en z [2], (équivalent discret de la transformée de Laplace pour les systèmes à temps continus) de l'équation (3) :

$$H(z) = H_0\left[\frac{1 + \sum_{l=1}^{N_b} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{m=1}^{N_a} a_m z^{-m}}\right] = H_0\left[\frac{\prod_{l=1}^{N_b}\left(1 - q_l z^{-l}\right)}{\prod_{m=1}^{N_a}\left(1 - p_m z^{-l}\right)}\right], \tag{5}$$

où $(p_m)_{1\leq m\leq N_a}$ désignent les pôles, et $(q_l)_{1\leq l\leq N_b}$ les zéros du filtre $\mathcal{H}$. Cette dernière représentation permet d'imposer les propriétés de causalité et de stabilité de la réponse temporelle du filtre $\mathcal{H}$ à travers la condition nécessaire et suffisante sur les pôles de sa fonction de transfert [9] :

$$|p_m| \leq 1, \ \forall 1 \leq m \leq N_a. \tag{6}$$

En pratique, de nombreuses méthodes permettent la synthèse de $H(z)$ à partir d'un gabarit de filtre souhaité. Celle utilisée ici [9] consiste à déterminer les coefficients a_m et b_l par minimisation en norme 2 de l'écart entre $H(\exp j\omega)$ et une réponse souhaitée, donnée en terme de module d'élasticité complexe $E^\star(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$. Les conditions de stabilité et de causalité sont alors assurées par l'ajout de contraintes supplémentaires sur les coefficients au sein du processus d'optimisation.

4 Schéma de discrétisation

4.1 Discrétisation temporelle

Considérons à nouveau la discrétisation temporelle introduite précédemment lors de la modélisation de $\mathcal{E}$ en temps discret, notons $u^n(x) = u(x, t^n)$ et $f^n(x) = f(x, t^n)$ les champs des valeurs de u et f à t^n. En reprenant la représentation temporelle discrète par filtre numérique de la loi de comportement, donnée par l'équation (3), et en approchant l'équation d'équilibre (1b) par un schéma de type saute mouton d'ordre 2 en temps, le problème complètement discrétisé en temps s'écrit :

$$\sigma^{n+1}(x) = -H_0\left(\frac{du^{n+1}(x)}{dx} + \sum_{l=1}^{N_b} b_l \frac{du^{n+1-l}(x)}{dx}\right) - \sum_{m=1}^{N_a} a_m \sigma^{n+1-m}(x), \tag{7a}$$

$$\rho\frac{u^{n+1}(x) - 2u^n(x) + u^{n-1}(x)}{\Delta t^2} = \frac{d\sigma^n(x)}{dx} + f^n(x). \tag{7b}$$

4.2 Discrétisation spatiale

On discrétise à présent l'intervalle $[0, L]$ en N_h+1 points x_j $(0 \leq j \leq N_h)$ à l'aide d'un maillage régulier de pas $h = L/N_h$, de sorte que $x_j = jh$. On approche alors (7b) aux points x_j et (7a) aux points $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ à l'aide d'un schéma centré en espace. Pour ce faire, on note $\boldsymbol{\sigma}_h^n = \left(\sigma^n(x_{j+1/2})\right)_j$, $\boldsymbol{\varepsilon}_h^n = \left(\varepsilon^n(x_{j+1/2})\right)_j$, $\mathbf{u}_h^n = \left(u^n(x_j)\right)_j$ et $\mathbf{f}_h^n = \left(f^n(x_j)\right)_j$ les champs discrets des valeurs approchées de

2. Pour une suite numérique v causale de la forme $(v^n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, la transformée en z de v est définie par $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v^n z^{-n}$.

σ^n, ε^n, u^n et f^n sur le maillage considéré, et on introduit, à des fins de condensation des notations, les opérateurs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}^\star$:

$$\mathbf{B}\,\boldsymbol{\sigma}_h^n = h^{-1}\left(\sigma_{h,j+1/2}^n - \sigma_{h,j-1/2}^n\right)_j, \qquad \mathbf{B}^\star\,\mathbf{u}_h^n = -h^{-1}\left(u_{h,j+1}^n - u_{h,j}^n\right)_j = -\boldsymbol{\varepsilon}_h^n.$$

En considérant la masse volumique et la loi de comportement homogènes, la discrétisation complète du problème (1) s'écrit dans le cas général sous la forme d'un schéma aux différences finies explicite :

$$\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1} = -H_0\,\mathbf{B}^\star\left(\mathbf{u}_h^{n+1} + \sum_{l=1}^{N_b} b_l\mathbf{u}_h^{n+1-l}\right) - \sum_{m=1}^{N_a} a_m\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1-m}, \tag{8a}$$

$$\rho\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\sigma}_h^n + \mathbf{f}_h^n. \tag{8b}$$

4.3 Stabilité par méthodes énergétiques

Dans la suite du document, on se restreindra à la synthèse d'un filtre à 1 pôle et 1 zero ($N_a = N_b = 1$). Dans ce cas précis, en s'inspirant des travaux de Bécache et coll. [10], il est possible d'effectuer une analyse énergétique du schéma discret (8), ce qui permet d'en déduire la condition de stabilité de type CFL suivante liant h et Δt :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{lim}} = h\sqrt{\frac{\rho(1-a_1)}{H_0(1-b_1)}} \qquad \text{ou} \qquad f_s \geq f_{s,\text{lim}} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{H_0(1-b_1)}{\rho(1-a_1)}} \tag{9}$$

A ce stade, notons qu'il est indispensable de choisir une fréquence d'échantillonnage f_s identique lors de la synthèse du filtre et de la résolution numérique, ce qui nécessite la vérification de la condition (9) dès l'étape de synthèse de $\mathcal{H}$, étant donné que ses coefficients peuvent varier avec f_s. D'autre part, afin de limiter d'éventuels effets liés à la dispersion numérique, il est souhaitable de choisir une fréquence f_s proche de $f_{s,\text{lim}}$ [2]. Ces deux contraintes peuvent être traitées dans le processus de minimisation associé à la synthèse du filtre.

5 Application aux vibrations longitudinales d'une poutre encastrée-libre

A titre d'illustration numérique, nous reprenons le problème modèle unidimensionnel introduit en partie 2 en considérant une poutre en nylon de longueur $L = 1\,\text{m}$, de section $S = 4\,\text{cm}^2$ et de masse volumique $\rho = 1149\,\text{kg.m}^{-3}$, excité en son extrémité droite par un impact de durée $t_{\text{imp}} = 0.3\,\text{ms}$ et d'intensité maximale $F_{\text{imp}} = 1\,\text{kN}$, modélisé par :

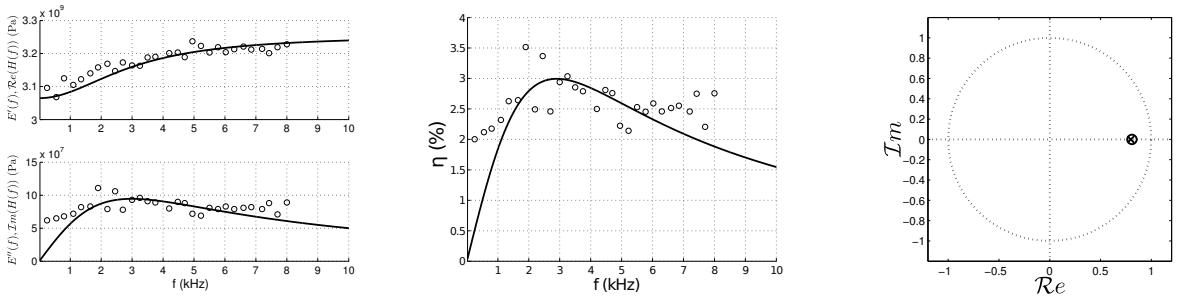
$$f(x,t) = -\tfrac{F_{\text{imp}}}{2S}\left(1 + \cos\left(\tfrac{\pi(2t - t_{\text{imp}})}{t_{\text{imp}}}\right)\right)\delta(x-L) \quad \text{pour} \quad t < t_{\text{imp}}. \tag{10}$$

Afin d'obtenir une précision acceptable lors du calcul, il est nécessaire d'avoir une résolution spatiale de 10 points par longueur d'onde *a minima*. On fixe par la suite la valeur du pas d'espace à $h = 2\,\text{cm}$: la longueur d'onde minimale représentable est alors de $\lambda_{min} = 20\,\text{cm}$. En fixant la valeur indicative de E à 3,26 GPa, soit une célérité $c = \sqrt{E/\rho} = 1684\,\text{m/s}$, on obtient la fréquence maximale f_{max} pour laquelle la résolution spatiale souhaitée est encore valide, soit $f_{max} = c/\lambda_{min} = 8,42\,\text{kHz}$.

5.1 Synthèse du filtre

On synthétise à présent le filtre $\mathcal{H}$ (avec $N_a = N_b = 1$) à partir de valeurs de module d'élasticité complexes $E^\star(f) = E'(f) + iE''(f)$ relatives à une poutre en nylon, obtenues expérimentalement par Collet et coll. [7]. Cette étape de synthèse nécessite désormais de fixer la fréquence d'échantillonnage f_s qui sera conservée lors de la simulation numérique, comme discuté en section 4.3. En théorie (cf. sec. 4.3), ce choix, devant également satisfaire la condition de stabilité $f_s \leq f_{s,\text{lim}}$ (9), ne peut être effectué

a priori puisque $f_{s,\text{lim}}$ dépend des données du filtre synthétisé et donc de f_s. Cependant, sur le type de filtre considéré, on constate numériquement une faible variation de la valeur $f_{s,\text{lim}}$ pour des valeurs de f_s supérieures à $f_{s,\text{lim}}$. On retient en pratique une valeur $f_s = 84,5\,\text{kHz}$, légèrement supérieure à la fréquence limite correspondante $f_{s,\text{lim}} = 84,1\,\text{kHz}$ du schéma de résolution, ce qui permet par ailleurs de minimiser la dispersion de ce dernier [2], comme on le verra dans la partie 5.2. Par la suite, les coefficients du filtre sont déterminés numériquement à partir de la famille de valeurs discrètes $(E^\star(f_k))_k$ et à l'aide de la fonction `invfreqz` [9] disponible dans *Matlab/Octave*, soit : $H_0 = 3,24.10^9$, $a_1 = -7,99.10^{-1}$ et $b_1 = -8,10.10^{-1}$.



(a) Réponse complexe $(E', \mathcal{R}e(H))$ et $(E'', \mathcal{I}m(H))$ en fonction de f.

(b) Facteur de pertes η en fonction de f.

(c) Pôle (∘) et zéro (×) de H.

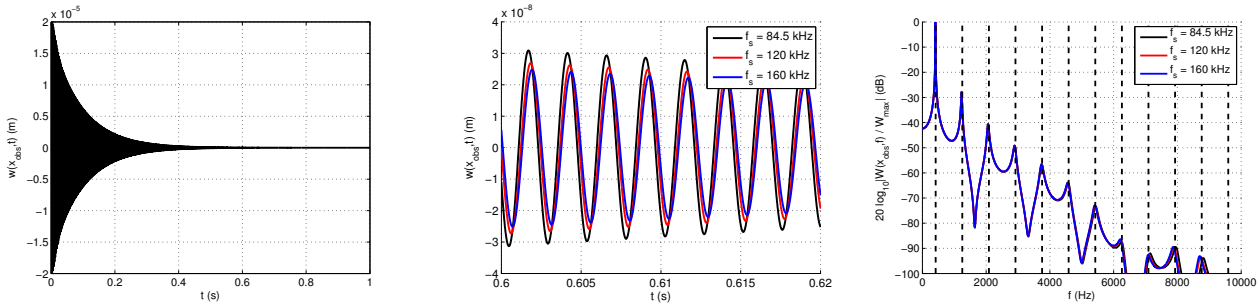
FIGURE 1 – Caractéristiques du filtre $\mathcal{H}$ synthétisé. Les valeurs expérimentales tirées de [7] sont représentées par (∘) tandis que la réponse de $\mathcal{H}$ est figurée en traits pleins (—).

La figure 1 illustre les caractéristiques fréquentielles du filtre ainsi synthétisé, en termes de réponse fréquentielle complexe (fig. 1(a)), de facteur de perte η (fig. 1(b)) et de position des pole et zéro (fig. 1(c)). On constate que ce filtre, de forme pourtant très simple, approche assez bien les données expérimentales, notamment en ce qui concerne le module de stockage $E'(f)$ et le facteur de pertes $\eta(f)$. Cependant, l'écart entre les valeurs expérimentales et synthétisées du facteur de pertes, notables en dessous de 1 kHz et au dessus de 7 kHz, suggère l'amélioration de la fonctionnelle de minimisation et/ou l'emploi de filtres d'ordre supérieur.

5.2 Simulation de la réponse de la poutre

On applique à présent le filtre ainsi synthétisé à la simulation numérique du problème modèle (1) sous la sollicitation (10). La figure 2(a) représente la réponse de la poutre au point $x = L/2$ sur une durée de 1 s. Afin d'étudier également l'influence du choix de f_s sur la simulation, on effectue également deux synthèses de $\mathcal{H}$ suivies des simulations correspondantes pour des valeurs de f_s de 120 et 160 kHz. Pour ces deux nouvelles valeurs, on précise avant toute chose que la réponse des filtres synthétisés est identique à celle obtenue à 84,5 kHz, sur la bande de fréquences [0,10] kHz.

Les réponses temporelles au point $x = L/2$ pour les trois valeurs de f_s sont représentées figure 2(b) pour $0,60 \leq t \leq 0,62\,\text{s}$. La figure 2(c) représente les spectres (de puissance) associés, calculés pour $0 \leq t \leq 1\,\text{s}$ avec une résolution fréquentielle de 1 Hz, sur lesquels sont superposées en pointillés les valeurs des fréquences propres théoriques correspondantes calculées pour $E = 3,26\,\text{GPa}$. L'observation des trois spectres montre une très bonne concordance entre eux et avec les fréquences propres théoriques, à l'exception des hautes fréquences pour lesquelles on observe une légère diminution des fréquences propres numériques avec l'accroissement de f_s, ce qui est conforme aux effets habituellement observés du fait de la dispersion numérique du schéma de résolution [2]. Cela est confirmé par l'observation des réponses temporelles pour $0,60 \leq t \leq 0,62\,\text{s}$ qui font apparaître de légers phénomènes de dispersion et de dissipation d'ordre numérique. Enfin, le tableau 1 regroupe, pour les trois valeurs de f_s, les valeurs correspondantes de $f_{s,\text{lim}}$ ainsi que celles de quelques fréquences propres simulées $f_{\text{sim},i}$ pour les modes $i = 1, 2, 5, 11$. Les fréquences théoriques $f_{\text{th},i}$ de ces mêmes modes, obtenues pour $E = 3,26\,\text{GPa}$, y sont également données à titre indicatif. Son observation confirme la plus forte dispersion numérique aux hautes fréquences.



(a) Réponse temporelle de $u(t, L/2)$ pour $t \leq 1$ s ($f_s = 84,5$ kHz)

(b) Réponse temporelle de $u(t, L/2)$ pour $0,60 \leq t \leq 0,62$ s

(c) Spectre de puissance de $u(L/2, t)$

FIGURE 2 – Caractéristiques de la réponse de la poutre

	f_s (Hz)	84 500	120 000	160 000
	$f_{s,\text{lim}}$ (Hz)	84 143	84 137	84 133
i	$f_{\text{th},i}$ (Hz)		$f_{\text{sim},i}$ (Hz)	
1	421	409	408	408
2	1 263	1 230	1 229	1 229
5	3 790	3 747	3 741	3 738
11	8 843	8 814	8 732	8 698

TABLE 1 – Comparaison des fréquences propres numériques $f_{\text{sim},i}$ en fonction de f_s

6 Conclusions

Ce travail présente une approche de modélisation temporelle d'amortissement à l'aide d'un filtre numérique, développée sur un problème unidimensionnel. Un schéma de résolution explicite a également été proposé, dont le critère de stabilité a été obtenu par des méthodes énergétiques. On constate que malgré la grande simplicité du filtre synthétisé (1 pôle et 1 zéro), celui-ci propose une représentation convenable des données fréquentielles approchées. La suite de ce travail portera notamment sur la synthèse de filtres d'ordre plus élevés, le traitement de problèmes de poutres en flexion ainsi que l'extension de la procédure à des problèmes en dimension 2.

Références

[1] S. CRANDALL. « The role of damping in vibration theory ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 11.1 (1970), p. 3. DOI : 10.1016/S0022-460X(70)80105-5.

[2] S. BILBAO. *Numerical Sound Synthesis*. 1re éd. Wiley, 2009. ISBN : 9780470510469.

[3] G. A. LESIEUTRE. « Frequency-Independent Modal Damping for Flexural Structures via a Viscous "Geometric" Damping Model ». Dans : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 33.6 (2010), p. 1931. DOI : 10.2514/1.49864.

[4] V. DOUTAUT, D. MATIGNON et A. CHAIGNE. « Numerical simulations of xylophones. II. Time-domain modeling of the resonator and of the radiated sound pressure ». Dans : *The Journal of the Acoustical Society of America* 104.3 (1998), p. 1633. DOI : 10.1121/1.424376.

[5] C. LAMBOURG, A. CHAIGNE et D. MATIGNON. « Time-domain simulation of damped impacted plates. II. Numerical model and results ». Dans : *The Journal of the Acoustical Society of America* 109.4 (2001), p. 1433–1447. DOI : 10.1121/1.135420.

[6] A. C. GALUCIO, J.-F. DEÜ et R. OHAYON. « Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators ». Dans : *Computational Mechanics* 33.4 (2004), p. 282. DOI : 10.1007/s00466-003-0529-x.

[7] P. COLLET, G. GARY et B. LUNDBERG. « Noise-corrected Estimation of Complex Modulus in Accord With Causality and Thermodynamics : Application to an Impact test ». Dans : *Journal of Applied Mechanics* (2012). DOI : 10.1115/1.4007081.

[8] E. BÉCACHE, A. EZZANI et P. JOLY. *Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires – I. Analyse mathématique*. Rap. tech. INRIA, 2003.

[9] J. O. SMITH. *Introduction to Digital Filters with Audio Applications*. Music signal processing series. W3K Publishing, 2007. ISBN : 9780974560717.

[10] E. BÉCACHE, A. EZZANI et P. JOLY. *Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires – II. Analyse numérique*. Rap. tech. INRIA, 2004.