



**HAL**  
open science

## Exploration des graphes dynamiques

### T-intervalle-connexes

Ahmed Mouhamadou Wade

► **To cite this version:**

Ahmed Mouhamadou Wade. Exploration des graphes dynamiques T-intervalle-connexes. CNRIA 2013 - 5ème Colloque National sur la Recherche en Informatique et ses Applications, May 2013, Zinguichor, Sénégal. pp.78-85. hal-00965933

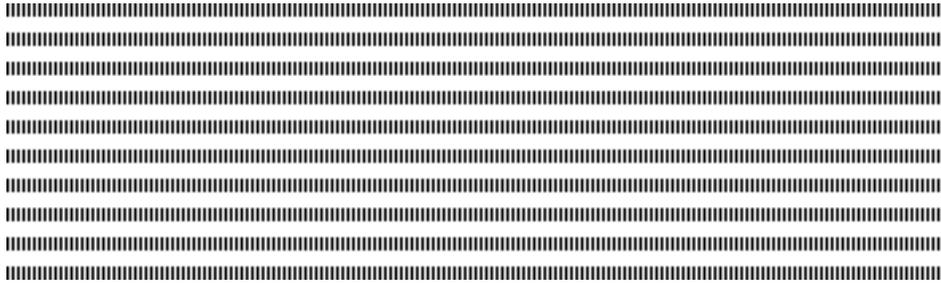
**HAL Id: hal-00965933**

**<https://hal.science/hal-00965933>**

Submitted on 24 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Exploration des graphes dynamiques T-intervalle-connexes <sup>1</sup>

Ahmed Mouhamadou Wade

LaBRI  
Université de Bordeaux  
France  
wade@labri.fr



**RÉSUMÉ.** Dans cet article, nous étudions le problème d'exploration, par une entité mobile (agent), des graphes dynamiques T-intervalle-connexes qui ont comme graphe sous-jacent un anneau de taille  $n$ . Un graphe dynamique est T-intervalle-connexé ( $T \geq 1$ ) si pour chaque fenêtre de  $T$  unités de temps, il existe un sous-graphe couvrant connexe stable. Cette propriété de stabilité de graphes dynamiques a été introduite par Kuhn, Lynch et Oshman [9] (STOC 2010). Nous montrons que la complexité au pire cas est de  $2n - T - \Theta(1)$  unités de temps si l'agent connaît la dynamique du graphe, et  $\frac{n}{\max\{1, T-1\}}(\delta - 1) + n \pm \Theta(\delta)$  unités de temps sinon, où  $\delta$  est le temps maximum entre deux apparitions successives d'une arête.

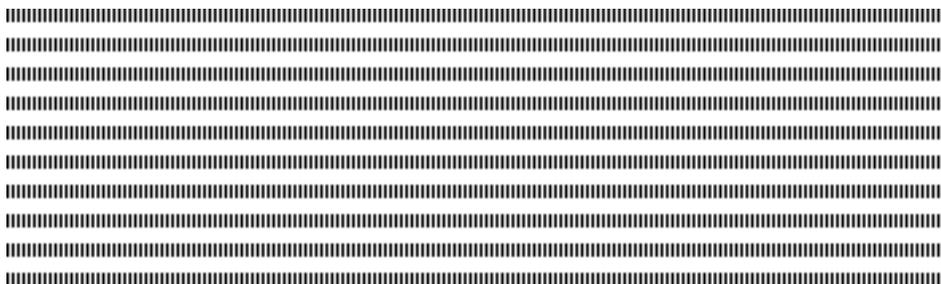
**ABSTRACT.** We study the problem of exploration by a mobile entity (agent) of a class of dynamic networks, namely T-interval-connected dynamic graphs. In this paper we consider dynamic graphs such that the underlying graph is a ring of size  $n$ . A dynamic graph is T-interval-connected ( $T \geq 1$ ) if for every consecutive  $T$  rounds, there exists a stable connected spanning subgraph. This stability property of dynamic graphs was introduced by Kuhn, Lynch and Oshman [9] (STOC 2010). We show that the worst case complexity is  $2n - T - \Theta(1)$  time units if the agent knows the dynamic of the graph, and  $\frac{n}{\max\{1, T-1\}}(\delta - 1) + n \pm \Theta(\delta)$  time units if the agent does not know the dynamic of the graph, where  $\delta$  is the maximum time between two successive appearances of an edge.

**MOTS-CLÉS :** Exploration, Graphes dynamiques, Agent mobile, T-intervalle-connexité

**KEYWORDS :** Exploration, Dynamic graphs, Mobile agent, T-interval-connected



Actes du 5e Colloque National sur la Recherche en Informatique et ses Applications (CNRIA) –  
Ziguinchor, Sénégal Avril 2013



1. Ce travail a été réalisé avec le soutien du projet ANR DISPLEXITY et du projet INRIA CEPAGE.

---

## 1. Introduction

Le problème de l'exploration de graphes consiste, pour une entité mobile (aussi appelée agent), à explorer tous les sommets (ou toutes les arêtes) d'un graphe a priori inconnu. Ce problème étant l'un des plus classiques dans le cadre du calcul par agent mobile, il a reçu beaucoup d'intérêt jusqu'ici. La complexité en temps, en espace, ou l'impact d'une connaissance a priori ont été largement étudiés au cours des quarante dernières années (voir par exemple, [3, 10, 11]). Cependant, la grande majorité de ces travaux concerne les graphes statiques, tandis que les nouvelles générations d'environnements inter-connectés tendent à être extrêmement dynamiques. Dans cet article, nous étudions le problème de l'exploration de graphes dans un modèle de réseaux dynamiques, à savoir le modèle des graphes dynamiques  $T$ -intervalle-connexes ( $T \geq 1$ ) (voir la section 3 pour les définitions). Le lecteur intéressé trouvera dans [1] un récapitulatif très complet des différents modèles de graphes dynamiques existants.

Un graphe dynamique est  $T$ -intervalle-connexe ( $T \geq 1$ ) si pour chaque fenêtre de  $T$  unités de temps, il existe un sous-graphe couvrant connexe stable. Cette propriété de stabilité de graphes dynamiques a été introduite par Kuhn, Lynch et Oshman [9] (STOC 2010). Elle permet d'accélérer le temps de calcul de certaines fonctions calculables en distribuée.

Dans cet article, nous étudions la complexité en temps de l'exploration des graphes dynamiques  $T$ -intervalle-connexes qui ont comme graphe sous-jacent un anneau de taille  $n$ . Nous allons considérer le cas où l'agent connaît la dynamique du graphe avant d'entamer l'exploration, c'est à dire qu'il connaît les temps d'apparitions et de disparitions des arêtes du graphe sous-jacent, et le cas où l'agent ne connaît pas la dynamique du graphe. Dans ce dernier cas, nous allons supposer que le graphe dynamique est  $\delta$ -récurrent. En effet, sans hypothèse supplémentaire, l'exploration des graphes dynamiques  $T$ -intervalle-connexes est impossible [9]. Un graphe dynamique est  $\delta$ -récurrent si chaque arête du graphe sous-jacent apparaît au moins une fois toutes les  $\delta$  unités de temps.

Nous allons montrer que, si l'agent connaît la dynamique du graphe,  $2n - T - \Theta(1)$  unités de temps sont nécessaires et suffisantes pour explorer les graphes dynamiques  $T$ -intervalle-connexes qui ont comme graphe sous-jacent un anneau de taille  $n$ . Si l'agent ne connaît pas la dynamique des graphes, nous supposons que les graphes dynamiques sont  $\delta$ -récurrents et nous montrons que le temps d'exploration dans le pire cas est  $\frac{n}{\max\{1, T-1\}}(\delta - 1) + n \pm \Theta(\delta)$  unités de temps.

---

## 2. Etat de l'art

Ces dernières années, un travail de recherche important a été fait dans les graphes dynamiques, notamment dans l'exploration et la cartographie de ces environnements très dynamiques par des agents mobiles. Motivés par l'exploration robotisée du Web, Cooper et Frieze [2] ont étudié en 2003 la question du temps de couverture minimal d'un graphe qui évolue au cours du temps. Ils ont considéré un modèle particulier de graphes du web et montrent que si après chaque nombre constant de pas de la marche un nouveau sommet apparaît et est raccordé au graphe, une marche aléatoire probabiliste sur le graphe manque de visiter une fraction constante de sommets. Izumi et al [8] étudient le problème de rendez-vous dans un graphe dynamique modélisé par un graphe évolutif. Pour tout

graphe  $G$ , un graphe évolutif de  $G$  est une séquence de sous-graphes de  $G$  [4]. Flocchini et al. [5] introduisent un modèle de graphe très dynamique "subway model". Puis ils étudient le modèle avec des trous noirs. Pour cela, ils considèrent qu'il existe des agents mobiles au nombre de  $k$  qui se déplacent avec des transporteurs pour faire la carte du graphe. Casteigts et al. [1] intègrent dans un cadre unifié une vaste collection de concepts, de formalismes et de résultats obtenus dans la littérature des graphes variables dans le temps. Flocchini et al. [6] considèrent une famille de graphes variables, les graphes périodiquement variables, et montrent que la connaissance d'une borne supérieure sur la plus grande période ou du nombre  $n$  de sommets du graphe est nécessaire pour qu'un agent puisse explorer le graphe. Ilcinkas et Wade [7] considèrent cette même famille de graphes variables et montrent l'importance d'attendre aux sommets pour l'exploration de cette famille de graphes dynamiques. En 2010 Kuhn et al. [9] étudient les calculs distribués dans les graphes dynamiques. Pour cela, ils introduisent une propriété de stabilité de graphes dynamiques nommée T-intervalle-connexité. Puis ils montrent que si le graphe dynamique est 1-intervalle connexe, les sommets peuvent calculer toute fonction calculable en  $O(n^2)$  rondes et que ce temps de calcul peut être accéléré par un facteur  $T$  si le graphe dynamique est T-intervalle-connexe.

---

### 3. Définitions et modèles

Dans cette section, nous allons donner le modèle de graphe dynamique que nous étudions, qui est le même que dans [9], et quelques définitions sur le modèle.

**Définition 1** (*Grappe dynamique*) Nous considérons les réseaux dynamiques modélisés par le graphe dynamique  $G = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble de  $n$  sommets statiques, et  $E : \mathbb{N} \rightarrow \{\{u, v\} | u, v \in V\}$  est une fonction qui associe au nombre entier  $r \in \mathbb{N}$  un ensemble d'arêtes non orientées  $E(r)$ .

**Définition 2** (*Grappe sous-jacent*) Le graphe  $U(G) = (V, \bigcup_{r=0}^{\infty} E(r))$  est dit graphe sous-jacent du graphe dynamique. Il représente le graphe dynamique avec toutes les arêtes ayant existé, à un moment ou à un autre.

Nous considérons les graphes dynamiques  $G(V, E)$  tel que  $U(G)$  est un anneau de taille  $n$  noté  $A_n$ . Pour tout  $i$  et  $j$ , une arête entre  $s_i$  et  $s_{i+1}$  appartenant à l'anneau sera noté par  $\{s_i, s_{i+1}\}$  et un chemin de  $s_i$  à  $s_j$  sera noté par  $(s_i, s_{i+1}, \dots, s_j)$ . Les indices sont pris modulo  $n$ .

**Définition 3** (*Grappe dynamique T-intervalle-connexe*) Nous disons qu'un graphe dynamique est T-intervalle-connexe pour  $T \geq 1$ , si pour tout  $r \in \mathbb{N}$  le graphe statique  $G_{r,T} := (V, \bigcap_{i=r}^{r+T-1} E(i))$  est connexe.

**Définition 4** (*Grappe dynamique  $\delta$ -récurrent*) Un graphe dynamique est  $\delta$ -récurrent si toute arête du graphe sous-jacent apparaît au moins une fois toutes les  $\delta$  unités de temps.

Une entité externe, appelée *agent*, opère sur ces graphes dynamiques. Il peut traverser, en une unité de temps, au plus une arête. Nous disons que l'agent explore le graphe dynamique si et seulement si il peut visiter l'ensemble des sommets en un temps fini et se mettre dans un état terminal. Cet état terminal exprime le fait que l'agent détecte que l'exploration est terminée.

## 4. Bornes inférieures

Dans cette section, nous allons donner des bornes sur le temps nécessaire pour explorer un graphe dynamique T-intervalle-connexe qui a comme graphe sous-jacent  $A_n$ . Pour cela nous allons supposer en premier lieu que l'agent connaît la dynamique du graphe et nous allons finir par le cas où l'agent ne connaît pas la dynamique du graphe.

### 4.1. Le cas où l'agent connaît la dynamique du graphe

Nous supposons que l'agent connaît les temps d'apparitions et de disparitions des arêtes du graphe sous-jacent.

**Théorème 1** *Pour tout  $n \geq 3$  et  $T \geq 1$ , il existe un graphe dynamique  $G_{n,T}$  T-intervalle-connexe qui a comme graphe sous-jacent  $A_n$  tel que tout agent doit faire au moins  $2n - T - 2$  unités de temps pour l'explorer.*

**Preuve** Soit  $n \geq 3$  et  $T \geq 2$ . Sans perte de généralité, supposons que l'agent est sur  $s_0$  au temps  $t = 0$ . On construit  $G_{n,T}$  de la manière suivante. L'arête  $\{s_0, s_1\}$  respectivement  $\{s_{T-1}, s_T\}$  est déconnectée aux temps  $t \in [0, n - 2T + 1[$  respectivement  $t \in [n - T, 2n[$ . Toutes les autres arêtes de l'anneau sont toujours présentes.  $G_{n,T}$  est T-intervalle-connexe. Pour explorer le graphe dynamique, tout agent (algorithme) doit visiter l'ensemble des sommets de  $A_n$  notamment les sommets  $s_{T-1}$  et  $s_T$ .

- Si  $T \geq n - 1$  alors  $2n - T - 2 \leq n - 1$  donc le résultat est trivial. Car pour explorer un anneau de taille  $n$  tout agent doit faire au moins  $n - 1$  unités de temps.

- Si  $1 < T < n - 1$

- supposons que l'agent visite  $s_{T-1}$  avant  $s_T$ . Pour visiter  $s_{T-1}$  sans passer par le sommet  $s_T$ , l'agent doit forcément passer par l'arête  $\{s_0, s_1\}$ . Par construction, l'arête  $\{s_0, s_1\}$  n'est présente qu'après  $n - 2T + 1$  unités de temps et que le chemin  $(s_0, s_1, \dots, s_{T-1})$  est de longueur  $T - 1$ . Donc l'agent va payer au moins  $n - T$  unités de temps pour visiter  $s_{T-1}$  pour la première fois sans passer par le sommet  $s_T$ . Comme l'arête  $\{s_{T-1}, s_T\}$  est absente pour les temps  $t \in [n - T, 2n[$ , pour visiter le sommet  $s_T$  après avoir visité  $s_{T-1}$ , l'agent a besoin au moins de  $2n - T - 1$  unités de temps.

- supposons que l'agent visite  $s_T$  avant  $s_{T-1}$ . Pour visiter  $s_T$  sans passer par le sommet  $s_{T-1}$ , l'agent doit forcément passer par le chemin  $(s_T, s_{T+1}, \dots, s_0)$ . Ce chemin est de longueur  $n - T$ . Donc l'agent doit payer au moins  $n - T$  unités de temps pour visiter le sommet  $s_T$  pour la première fois sans passer par le sommet  $s_{T-1}$ . Comme l'arête  $\{s_{T-1}, s_T\}$  est absente pour les temps  $t \in [n - T, 2n[$ , pour visiter le sommet  $s_{T-1}$  après avoir visité  $s_T$ , l'agent a besoin au moins de  $2n - T - 1$  unités de temps.

- Si  $T = 1$  en construisant  $G_{n,T}$  de la manière suivante, l'arête  $\{s_0, s_1\}$  respectivement  $\{s_1, s_2\}$  est déconnectée aux temps  $t \in [0, n - 3[$  respectivement  $t \in [n - 2, 2n[$ , et en raisonnant de la même façon que le cas précédant, nous pouvons prouver que la complexité est de  $2n - 3$  unités de temps.

□

### 4.2. Le cas où l'agent ne connaît pas la dynamique du graphe

Ici nous supposons que l'agent ne connaît pas les temps d'apparitions et de disparitions des arêtes du graphe sous-jacent.

**Théorème 2** Pour tout  $n \geq 3$ ,  $T \geq 1$ , et  $\delta \geq 1$ , il existe un graphe dynamique  $G_{n,T,\delta}$   $T$ -intervalle-connexe et  $\delta$ -récurrent de taille  $n$  qui a comme graphe sous-jacent l'anneau  $A_n$  tel que tout agent doit faire au moins  $\lfloor \frac{n-1}{\max\{1,T-1\}} \rfloor (\delta - 1) + n - 1$  unités de temps pour l'explorer.

Ce résultat reste vrai même si l'agent connaît  $n$  et  $\delta$ .

**Preuve** Soit  $n \geq 3$ ,  $T \geq 1$  et  $\delta \geq 1$ . L'adversaire construit le graphe dynamique  $G_{n,T,\delta}$  comme suit.

- 1) L'adversaire met le temps d'exploration de l'agent à zéro.
  - 2) Si l'agent arrive sur un sommet en faisant  $T$  unités de temps, l'adversaire déconnecte l'arête sortante.
  - 3) Si l'agent décide d'aller au sommet précédant, l'adversaire remet l'arête et la retire si l'agent revient sur le même sommet avant  $T + \delta$  unités de temps.
  - 4) Si l'agent décide de rester sur le sommet, l'adversaire remet l'arête au bout de  $\delta$  unités de temps à partir du moment où l'arête a été déconnectée. Puis il recommence à 1).
- On peut bien voir qu'avec cette construction  $G_{n,T,\delta}$  est  $T$ -intervalle-connexe et  $\delta$ -récurrent. A chaque fois que l'agent visite  $\max\{1, T - 1\}$  nouveaux sommets, l'adversaire l'oblige à attendre  $(\delta-1)$ -unités de temps avant de pouvoir visiter un nouveau sommet. Comme le graphe dynamique a  $n$  sommets, alors l'agent va payer au moins  $\lfloor \frac{n-1}{\max\{1,T-1\}} \rfloor (\delta - 1)$  unités de temps d'attente et  $n - 1$  unités de temps d'exploration. Donc l'agent va payer au moins  $\lfloor \frac{n-1}{\max\{1,T-1\}} \rfloor (\delta - 1) + n - 1$  unités de temps pour explorer le graphe.  $\square$

---

## 5. Bornes supérieures

Dans la première partie de l'article, nous avons fourni des bornes inférieures sur la complexité en temps de l'exploration des graphes dynamiques  $T$ -intervalle-connexes qui ont comme graphe sous-jacent l'anneau  $A_n$ . Nous allons maintenant prouver que tous ces résultats sont optimaux (ou asymptotiquement optimaux). Nos bornes supérieures, dans les deux cas étudiés, utilisent comme base le même algorithme décrit ci-dessous.

---

**Algorithme** EXPLORE-ANNEAU (*dir*)

```

A chaque unité de temps faire
  if l'arête en direction de dir est présente then
    la prendre
  else
    attendre
  end if

```

---

*dir* est la direction que va suivre l'agent exécutant l'algorithme depuis un sommet.

### 5.1. Le cas où l'agent connaît la dynamique du graphe

La connaissance de la dynamique du graphe est suffisante pour explorer tous les graphes dynamiques  $T$ -intervalle-connexes qui ont  $A_n$  comme graphe sous-jacent.

**Théorème 3** Pour tout  $n \geq 3$ ,  $1 \leq T \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  et  $G_{n,T}$  un graphe dynamique  $T$ -intervalle-connexe de taille  $n$  qui a comme graphe sous-jacent  $A_n$ . Il existe un agent (algorithme)  $A$  capable d'explorer  $G_{n,T}$  en au plus  $2n - T - 1$  unités de temps.

**Preuve** Soit  $n \geq 3$ ,  $1 \leq T \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  et  $G_{n,T}$  un graphe dynamique  $T$ -intervalle-connexe qui a comme graphe sous-jacent  $A_n$ . Sans perte de généralité, supposons que l'agent  $A$  est sur le sommet  $s_0$  au temps  $t = 0$ . Soit  $A_G$  un agent qui depuis le point de départ exécute EXPLORE-ANNEAU (*gauche*) et  $A_D$  un agent qui depuis le point de départ exécute EXPLORE-ANNEAU (*droite*). Supposons qu'il existe une arête où l'adversaire bloque  $A_G$  et  $A_D$  en même temps pendant un temps  $t' \geq 0$ , soit  $e$  cette arête. Soit  $u$  le sommet qui est à droite de  $e$  et  $v$  le sommet à gauche de  $e$ . Soit  $A_{G'}$  un agent qui depuis le point de départ exécute EXPLORE-ANNEAU (*gauche*) et visite le maximum de sommet vers la gauche avant d'exécuter EXPLORE-ANNEAU (*droite*) pour arriver au plus tard sur le sommet  $u$  avant que  $A_D$  traverse  $e$ . Soit  $A_{D'}$  un agent qui depuis le point de départ exécute EXPLORE-ANNEAU (*droite*) et visite le maximum de sommet vers la droite avant d'exécuter EXPLORE-ANNEAU (*gauche*) pour arriver au plus tard sur le sommet  $v$  avant que  $A_D$  traverse  $e$ . Soit  $A_{G''}$  un agent qui depuis le point de départ exécute EXPLORE-ANNEAU (*gauche*) et fait une unité de temps de plus que  $A_{G'}$  vers la gauche avant d'exécuter EXPLORE-ANNEAU (*droite*) et  $A_{D''}$  un agent qui depuis le point de départ exécute EXPLORE-ANNEAU (*droite*) et fait une unité de temps de plus que  $A_{D'}$  vers la gauche avant d'exécuter EXPLORE-ANNEAU (*gauche*). Comme le graphe est toujours connexe, alors  $A_{G'}$  ou  $A_{D'}$  réussira à explorer le graphe dynamique en un temps fini. Soit  $\mathcal{T}$  le temps d'exploration du plus rapide entre  $A_{G'}$  et  $A_{D'}$ .

1) Si aucune arête n'est supprimée entre le l'intervalle de temps  $[0, \mathcal{T}[$  alors  $e$  est quelconque et  $t' = 0$ . Donc  $A_G$  et  $A_D$  réussiront à explorer le graphe en  $n - 1$  unités de temps.

2) Si une arête est supprimée dans le graphe dans l'intervalle de temps  $[0, \mathcal{T}[$ , soit  $e'$  cette arête. Soit  $B$  un agent qui exécute l'algorithme 5 avec la direction du premier agent qui arrive sur  $e'$ . Supposons que  $B$  fait demi-tour une fois sur le sommet avant l'arête  $e'$ . Soit  $B$  n'est jamais bloqué après qu'il a fait demi-tour jusqu'au temps  $\mathcal{T}$  et qu'il explore tout le graphe en au plus  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  unités de temps. Soit il est bloqué après  $\mathcal{T}$  et donc  $\mathcal{T} \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ .

3) Si au moins deux arêtes sont supprimées dans le graphe dans l'intervalle de temps  $[0, \mathcal{T}[$ . Soit  $e$  l'arête bloquante de  $A_G$  et  $A_D$  et  $t_1$  le temps où le premier entre  $A_G$  et  $A_D$  arrive sur  $e$ . Soit  $d_j^I$  la distance parcourut par l'agent  $A_j$  et  $\alpha_j^I$  le nombre de fois qu'il est bloqué sur un sommet durant l'intervalle de temps  $I$ . Soit  $\alpha_{j,k}^I$  le nombre de fois où l'adversaire bloque  $A_j$  et  $A_k$  en même temps durant l'intervalle de temps  $I$ . Soit  $\beta^I$  le nombre de fois où toutes les arêtes du graphe sous-jacent sont présentes durant l'intervalle de temps  $I$ .

a) Si  $e$  est supprimée au moins de  $t_1$  à  $t_1 + n - 1$  alors  $\mathcal{T} \leq t_1 + n - 1$  (1).

$$\text{Soit } I_1 = [0, t_1[ \text{ on a. } t_1 = \begin{cases} d_G^{I_1} + \alpha_G^{I_1} & (2) \\ d_D^{I_1} + \alpha_D^{I_1} & (3) \end{cases}$$

$$\alpha_G^{I_1} + \alpha_D^{I_1} + \beta^{I_1} \leq t_1 \quad (4)$$

$$\text{Or on a } d_G^{I_1} + d_D^{I_1} \leq n - 1 \quad (5) \quad \text{et cas 3)} \rightarrow \beta^{I_1} \geq T - 1 \quad (6)$$

$$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6) \rightarrow \mathcal{T} \leq 2n - T - 1$$

b) Si  $e$  est supprimée pendant un temps  $< n - 1$ . Soit  $t_2$  le temps que met l'arête  $e$  après  $t_1$  pour réapparaître. Soit  $I_1 = [0, t_1]$ ,  $I_2 = [t_1, t_1 + t_2]$ ,  $I_{1,2} = [0, t_1 + t_2[$ ,  $I_3 = [t_1 + t_2, T[$  et  $I = [0, T[$ .

Sur  $I_1$  on a

$$t_1 \geq \alpha_{G''}^{I_1} + \alpha_{D''}^{I_1} - \alpha_{G'',D''}^{I_1} + \beta^{I_1} \quad (1)$$

$$t_1 \geq \alpha_G^{I_1} + \alpha_D^{I_1} + \alpha_{G',D'}^{I_1} + \beta^{I_1} \quad (2)$$

$$t_1 = \begin{cases} d_G^{I_1} + \alpha_G^{I_1} & (3) \\ d_D^{I_1} + \alpha_D^{I_1} & (4) \end{cases}$$

$$(1) + (2) + (3) + (4) \rightarrow \alpha_{D''}^{I_1} + \alpha_{G''}^{I_1} + 2\beta^{I_1} \leq d_G^{I_1} + d_D^{I_1} \quad (5)$$

Sur  $I_{1,2}$  on a

$$t_1 + t_2 = \begin{cases} d_{G''}^{I_{1,2}} + \alpha_{G''}^{I_{1,2}} & (6) \\ d_{D''}^{I_{1,2}} + \alpha_{D''}^{I_{1,2}} & (7) \end{cases}$$

$$\text{Remarquons que par définition, } d_{G''}^{I_{1,2}} \leq d_{G'}^{I_{1,2}} + 1 \quad (8) \quad \text{et } d_{D''}^{I_{1,2}} \leq d_{D'}^{I_{1,2}} + 1 \quad (9)$$

$$(6) + (7) + (8) + (9) \rightarrow 2(t_1 + t_2) \leq d_{G'}^{I_{1,2}} + d_{D'}^{I_{1,2}} + \alpha_{G'}^{I_{1,2}} + \alpha_{D'}^{I_{1,2}} + 2 \quad (10)$$

Remarquons que sur  $[t_1, t_1 + t_2[$ ,  $A_{G''}$  et  $A_{D''}$  ne sont pas bloqués car  $e$  est absente, donc

$$\alpha_{G''}^{I_{1,2}} = \alpha_{G'}^{I_{1,2}} \quad (11) \quad \text{et} \quad \alpha_{D''}^{I_{1,2}} = \alpha_{D'}^{I_{1,2}} \quad (12)$$

$$(5) + (10) + (11) + (12) \rightarrow 2(t_1 + t_2) + 2\beta^{I_1} \leq d_G^{I_1} + d_D^{I_1} + d_{G'}^{I_{1,2}} + d_{D'}^{I_{1,2}} + 2 \quad (13)$$

Sur  $I_3$  on a

$$\mathcal{T} - (t_1 + t_2) \geq \alpha_{G'}^{I_3} + \alpha_{D'}^{I_3} + \beta^{I_3} \quad (14)$$

$$\mathcal{T} - (t_1 + t_2) = \begin{cases} d_{G'}^{I_3} + \alpha_{G'}^{I_3} & (15) \\ d_{D'}^{I_3} + \alpha_{D'}^{I_3} & (16) \end{cases}$$

$$(14) + (15) + (16) \rightarrow \mathcal{T} - (t_1 + t_2) + \beta^{I_3} \leq d_{G'}^{I_3} + d_{D'}^{I_3} \quad (17)$$

$$(17) + \frac{1}{2}(13) \rightarrow \mathcal{T} + \beta^{I_1} + \beta^{I_3} \leq \frac{1}{2}(d_G^{I_1} + d_D^{I_1} + d_{G'}^{I_{1,2}} + d_{D'}^{I_{1,2}}) + d_{G'}^{I_3} + d_{D'}^{I_3} + 1 \quad (18)$$

Notons que  $\beta^{I_1} + \beta^{I_3} = \beta^I$

$$d_{D'}^{I_{1,2}} = 2x + d_G^{I_1} \quad (19), \text{ avec } x \text{ la distance parcourue par } A_{D'} \text{ avant de faire demi-tour}$$

$$d_{G'}^{I_{1,2}} = 2y + d_D^{I_1} \quad (20), \text{ avec } y \text{ la distance parcourue par } A_{G'} \text{ avant de faire demi-tour}$$

$$d_{D'}^{I_3} = d_D^{I_1} - x \quad (21) \quad d_{G'}^{I_3} = d_G^{I_1} - x \quad (22)$$

$$d_G^{I_1} + d_D^{I_1} \leq n - 1 \quad (23) \quad \text{et cas 3)} \rightarrow \beta^I \geq T - 1 \quad (24)$$

$$(18) + (19) + (20) + (21) + (22) + (23) + (24) \rightarrow \mathcal{T} \leq 2n - T - 1$$

□

## 5.2. Le cas où l'agent ne connaît pas la dynamique du graphe

Dans cette section nous allons donner une borne supérieure sur le temps d'exploration des graphes dynamiques T-intervalle-connexes  $\delta$ -récurrents qui ont comme graphe sous-jacent  $A_n$ . Pour cela, nous allons supposer que l'agent connaît le graphe sous-jacent mais ne connaît pas la dynamique du graphe.

**Théorème 4** *L'algorithme EXPLORE-ANNEAU permet d'explorer tous les graphes dynamiques T-intervalle-connexes  $\delta$ -récurrents qui ont  $A_n$  comme graphe sous-jacent en au plus  $\lceil \frac{n-1}{\max\{1, T-1\}} \rceil (\delta - 1) + n - 1$  unités de temps.*

**Preuve** Comme le graphe dynamique est T-intervalle-connexe donc tout agent exécutant l'algorithme 5 ne peut être bloqué qu'au plus une fois toutes les  $\max\{1, T - 1\}$  unités de temps. Le graphe dynamique est aussi  $\delta$ -récurrent donc chaque arête du graphe sous-jacent va apparaître au moins une fois toutes les  $\delta$  unités de temps. Ce qui veut dire que tout agent exécutant l'algorithme 5 peut être appelé à attendre pendant  $\delta - 1$  unités de temps sur un sommet qu'au plus une fois toutes les  $\max\{1, T - 1\}$  unités de temps.

Comme le graphe dynamique est de  $n$  sommets, un agent exécutant l'algorithme 5 va payer au plus  $\lceil \frac{n-1}{\max\{1, T-1\}} \rceil (\delta - 1)$  unités de temps d'attente et  $n - 1$  unités de temps d'exploration. Donc l'agent va payer au plus  $\lceil \frac{n-1}{\max\{1, T-1\}} \rceil (\delta - 1) + n - 1$  unités de temps pour explorer le graphe.  $\square$

---

## 6. Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le problème d'exploration des graphes dynamiques T-intervalle-connexes qui ont comme graphe sous-jacent un anneau de taille  $n$ , en considérant le cas où l'agent connaît la dynamique du graphe et le cas où il ne le connaît pas.

La suite de ces travaux serait de continuer l'étude des graphes dynamiques T-intervalle-connexes en étendant les graphes sous-jacents considérés à une famille plus large que la famille des anneaux.

---

## 7. Bibliographie

- [1] A. CASTEIGTS, P. FLOCCINI, W. QUATTROCIOCCI, N. SANTORO, « Time-varying graphs and dynamic networks », *CoRR*, n° 1012.0009, 2010.
- [2] C. COOPER, A. M. FRIEZE, « Crawling on simple models of web graphs », *Internet Mathematics*, vol. 1(1), 2003.
- [3] A. DESSMARK, A. PELC, « Optimal graph exploration without good maps », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 326(1-3), p. 343–362, 2004.
- [4] A. Ferreira. Building a Reference Combinatorial Model for Dynamic Networks :Initial Results in Evolving Graphs. INRIA, RR-5041 (2003)
- [5] P. Flocchini, M. Kellett, P. C. Mason, and N. Santoro. Searching for black holes in subways. *Theory of Computing Systems*, 50(1), pages 158–184, 2012.
- [6] P. FLOCCINI, B. MANS, N. SANTORO, « Exploration of periodically varying graphs », *20th Intl Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC)*, vol. LNCS 5878, p. 534–543, 2009.
- [7] D. ILCINKAS, A.M. WADE, « On the Power of Waiting When Exploring Public Transportation Systems », *16th International Conference On Principles Of Distributed Systems (OPODIS)*, vol. LNCS 7109, p. 451–464, 2011.
- [8] T. Izumi, Y. Yamauchi, and S. Kamei. Brief Announcement : Mobile Agent Rendezvous on Edge Evolving Rings. In *14th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems (SSS)*, LNCS 7596, pages 92–94, 2012.
- [9] F. KUHN, N.A. LYNCH, R. OSHMAN, « Distributed computation in dynamic networks », *STOC*, vol. STOC, p. 513–522, 2010.
- [10] P. PANAITIE, A. PELC, « Exploring Unknown Undirected Graphs », *J. Algorithms*, vol. 33(2), p. 281–295, 1999.
- [11] O. REINGOLD, « Undirected st-connectivity in log-space », *37th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, p. 376–385, 2005.
- [12] C. E. SHANNON, « Presentation of a maze-solving machine », *8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found. (Cybernetics)*, p. 173-180, 1951.