HAL
open science

Stabilisation de la formule des traces tordue IV: transfert spectral archimédien

Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Stabilisation de la formule des traces tordue IV: transfert spectral archimédien. 2014. hal-00956365

HAL Id: hal-00956365
https://hal.science/hal-00956365v1

Preprint submitted on 6 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation de la formule des traces tordue IV : transfert spectral archimédien

J.-L. Waldspurger

6 mars 2014

Introduction

Comme la référence [I], dont nous reprenons les notations, cet article contient des résultats préparatoires à la stabilisation de la formule des traces tordue. Il concerne exclusivement les groupes réels. La première section énonce un théorème de Paley-Wiener pour les fonctions C^∞ à support compact. Ce théorème est dû à Renard mais on en modifie quelque peu la formulation pour y faire apparaître les représentations elliptiques qui, depuis le travail qu'Arthur leur a consacré, sont devenus les blocs de base de ce type d'analyse harmonique. Dans les sections 2 et 3, on prouve les analogues dans le cas tordu, et sur le corps de base $\mathbb{R}$, des résultats contenus dans l'article [A] d'Arthur. A savoir les deux résultats suivants, exprimés ici de façon lapidaire. On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, où G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $\tilde{G}$ est un espace tordu sur G et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}))$ Supposons d'abord G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a} = 1$. Alors une combinaison linéaire finie de caractères de représentations elliptiques de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est stable sur les éléments réguliers elliptiques est stable partout. Dans le cas général, soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique elliptique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Considérons une combinaison linéaire finie Σ de caractères de représentations elliptiques de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ et une combinaison linéaire finie Π de caractères de ω-représentations elliptiques de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Supposons que Σ est stable et que la restriction de Π aux éléments réguliers elliptiques de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est égale à la même restriction du transfert de Σ. Alors Π est le transfert de Σ. On a négligé ici comme dans la suite de cette introduction le fait qu'en général, il faut remplacer $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ par un espace auxiliaire $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$. Une première conséquence de ces résultats est une version "stable" du théorème de Paley-Wiener (théorème 2.3(ii)). Une deuxième est la définition du transfert spectral (corollaire 3.3). Une troisième conséquence est l'existence du transfert géométrique K-fini : si $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est K-finie, il existe une fonction $f' \in C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R}))$ qui est K'-finie et qui est un transfert de f, cf. corollaire 3.4. Tout cela est certainement conséquence des résultats beaucoup plus fins obtenus par Mezo dans son article récent [M]. Nos preuves sont très différentes. Elles s'appuient sur le théorème de Renard repris dans la première section, sur le résultat de Shelstad affirmant l'existence du transfert entre fonctions C^∞ à support compact et sur le résultat suivant : une combinaison linéaire finie de caractères de représentations tempérées de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est supertempérée si et seulement si toutes les représentations qui interviennent sont elliptiques. Dans le cas non tordu, ce résultat est dû à Harish-Chandra. Il vaut aussi d'après Herb sur un corps de base non-archimédien. Il a été récemment généralisé au cas tordu par Moeglin dans [Moe], que le corps de base soit réel ou non-archimédien.

1 Le théorème de Paley-Wiener pour les fonctions C^∞ à support compact

1.1 La situation

Dans cet article, le corps de base est $\mathbb{R}$. On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, où G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $\tilde{G}$ est un espace tordu sur G et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_\mathbb{R}; Z(\hat{G}))$, cf. [I] 1.1 et 1.5. Le terme $\mathbf{a}$ détermine un caractère ω de $G(\mathbb{R})$. On suppose

- $\tilde{G}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$;
- l'automorphisme θ de $Z(G)$ est d'ordre fini.

On fixe un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0$ de $\tilde{G}$ et un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{R})$. On suppose que les algèbres de Lie $\mathfrak{k}$ de K et $\mathfrak{a}_{M_0}$ de A_{M_0} sont orthogonales pour la forme de Killing. Introduisons <u>la</u> paire de Borel (B^*, T^*) de G. On pose $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = X_*(T^*) \otimes \mathbb{R}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$. Soit $\tilde{S}$ un sous-tore tordu maximal de G défini sur $\mathbb{R}$. Le groupe $\Gamma_\mathbb{R} \simeq \{\pm 1\}$ agit sur $X_*(S)$ et sur $X_{*,\mathbb{Q}}(S) = X_*(S) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. De cette action se déduit une décomposition

$$X_{*,\mathbb{Q}}(S) = X_{*,\mathbb{Q}}(S)^+ \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(S)^-$$

où $\Gamma_\mathbb{R}$ agit trivialement sur le premier sous-espace et par le caractère non trivial sur le second. On en déduit une décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}(\mathbb{R}) = (X_*(S) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C})^{\Gamma_\mathbb{R}}$ en somme directe

$$\mathfrak{s}(\mathbb{R}) = X_{*,\mathbb{Q}}(S)^+ \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \oplus X_{*,\mathbb{Q}}(S)^- \otimes_\mathbb{Q} i\mathbb{R}.$$

Modulo le choix d'un groupe de Borel contenant S et stable par $\tilde{S}$, on peut identifier $\mathfrak{s}$ à $\mathfrak{h}$. Le premier facteur ci-dessus s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ et le second s'identifie à un sous-espace de $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Si on prend pour $\tilde{S}$ un sous-tore tordu maximal de $\tilde{M}_0$, le premier facteur n'est autre que $\mathfrak{a}_{\tilde{M}_0}(\mathbb{R})$, qui s'identifie ainsi à un sous-espace de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

Le groupe $\Gamma_\mathbb{R}$ agit sur T^* donc aussi sur $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. On fixe sur $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive invariante par l'action du groupe de Weyl de G relatif à T^*, par celle de $\Gamma_\mathbb{R}$ et par l'automorphisme θ de T^*. Par dualité, on en déduit une telle forme sur le dual $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. Il se déduit aussi de θ un automorphisme dual de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ que l'on note encore θ. Remarquons que $\mathfrak{a}_{M_0}(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathcal{A}_{M_0}$. Pour tout Levi M de G contenant M_0, $\mathcal{A}_M$ est un sous-espace de $\mathcal{A}_{M_0}$ et on munit cet espace de la restriction de la forme quadratique. Plus généralement, pour tout Levi M, on peut choisir $g \in G(\mathbb{R})$ tel que $g^{-1}Mg$ contienne M_0 et on munit $\mathcal{A}_M$ de la forme quadratique sur $\mathcal{A}_{g^{-1}Mg}$ transportée par l'isomorphisme ad_g. Cela ne dépend pas du choix de g. On munit tout sous-espace de $\mathcal{A}_M$ de la mesure de Haar associée à la restriction à ce sous-espace de cette forme quadratique.

On étend toutes ces formes quadratiques en des formes hermitiennes sur les complexifiés de nos espaces. Pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, on note $V_\mathbb{C} = V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ son complexifié. On fait une exception pour l'espace $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ dont on note simplement $\mathfrak{h}$ le complexifié.

On note $\mathfrak{A}_G$, resp. $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, la composante neutre pour la topologie réelle de $A_G(\mathbb{R})$, resp. $A_{\tilde{G}}(\mathbb{R})$. On sait que la restriction à $\mathfrak{A}_G$ de l'application $H_G : G(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_G$ est un isomorphisme. On munit $\mathfrak{A}_G$, resp $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, de la mesure de Haar déduite par cet isomorphisme de celle fixée sur $\mathcal{A}_G$, resp. $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$.

L'homomorphisme $H_{\tilde{G}} : G(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ est le composé de H_G et de la projection $\mathcal{A}_G \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ sur les invariants par θ. On fixe arbitrairement une application encore notée

$H_{\tilde{G}} : \tilde{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ telle que $H_{\tilde{G}}(g\gamma) = H_{\tilde{G}}(g) + H_{\tilde{G}}(\gamma)$ pour tous $g \in G(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{G}(\mathbb{R})^1$ l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ tels que $H_{\tilde{G}}(\gamma) = 0$. On a des isomorphismes inverses l'un de l'autre

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{A}_{\tilde{G}} \times \tilde{G}(\mathbb{R})^1 \\ \gamma & \mapsto & (H_{\tilde{G}}(\gamma), exp(-H_{\tilde{G}}(\gamma))\gamma) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\tilde{G}} \times \tilde{G}(\mathbb{R})^1 & \to & \tilde{G}(\mathbb{R}) \\ (H, \gamma^1) & \mapsto & e^H \gamma^1 \end{array}$$

Posons $W(\tilde{M}_0) = Norm_{G(\mathbb{R})}(\tilde{M}_0)/M_0(\mathbb{R})$. On a

(1) il existe une unique application $H_{\tilde{M}_0} : \tilde{M}_0(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ telle que

(i) $H_{\tilde{M}_0}(m\gamma) = H_{\tilde{M}_0}(m) + H_{\tilde{M}_0}(\gamma)$ pour tous $m \in M_0(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \tilde{M}_0(\mathbb{R})$;

(ii) $H_{\tilde{M}_0}(ad_n(\gamma)) = w(H_{\tilde{M}_0}(\gamma))$, pour tous $\gamma \in \tilde{M}_0(\mathbb{R})$, $n \in Norm_{G(\mathbb{R})}(\tilde{M}_0)$, où w est l'image de n dans $W(\tilde{M}_0)$;

(iii) la composée de $H_{\tilde{M}_0}$ et de la projection $\mathcal{A}_{\tilde{M}_0} \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ est la restriction de $H_{\tilde{G}}$ à $\tilde{M}_0(\mathbb{R})$.

Preuve. Fixons $\gamma_0 \in \tilde{M}_0(\mathbb{R})$. La fonction $H'_{\tilde{M}_0}$ définie par $H'_{\tilde{M}_0}(m\gamma_0) = H_{\tilde{M}_0}(m) + H_{\tilde{G}}(\gamma_0)$ pour tout $m \in M_0(\mathbb{R})$ vérifie (i) et (iii). Posons

$$H_{\tilde{M}_0}(\gamma) = |W(\tilde{M}_0)|^{-1} \sum_{w \in W(\tilde{M}_0)} w^{-1} H'_{\tilde{M}_0}(ad_{n_w}(\gamma)),$$

où n_w est un relèvement de w dans $Norm_{G(\mathbb{R})}(\tilde{M}_0)$. Cette fonction répond à la question. Si $H''_{\tilde{M}_0}$ vérifie les mêmes conditions, la condition (i) entraîne qu'il existe $H \in \mathcal{A}_{\tilde{M}_0}$ tel que $H''_{\tilde{M}_0}(\gamma) = H + H_{\tilde{M}_0}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \tilde{M}_0(\mathbb{R})$. La condition (ii) entraîne que H est invariant par $W(\tilde{M}_0)$, donc appartient à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. La condition (iii) entraîne alors que $H = 0$. $\square$

On définit $H_{\tilde{M}_0}$ par la condition (1). Plus généralement, pour tout $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on définit $H_{\tilde{M}} : \tilde{M}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ comme l'unique application telle que

- $H_{\tilde{M}}(m\gamma) = H_{\tilde{M}}(m) + H_{\tilde{M}}(\gamma)$ pour tous $m \in M(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$;
- la restriction de $H_{\tilde{M}}$ à $\tilde{M}_0(\mathbb{R})$ est la composée de $H_{\tilde{M}_0}$ et de la projection $\mathcal{A}_{\tilde{M}_0} \to \mathcal{A}_{\tilde{M}}$.

La théorie est vide si ω n'est pas trivial sur $Z(G)^\theta(\mathbb{R})$. Nous ne supposons toutefois pas que ω est trivial sur ce groupe car l'inconvénient de cette hypothèse est qu'elle ne se conserve pas si l'on remplace $\tilde{G}$ par un espace de Levi $\tilde{M}$. Par contre, nous supposerons que ω est trivial sur la composante neutre de $Z(G)^\theta(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle. Cette hypothèse se conserve si l'on remplace $\tilde{G}$ par un espace de Levi $\tilde{M}$.

1.2 Rappels sur les ω-représentations

Rappelons qu'une ω-représentation (admissible) de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est un couple $(\pi, \tilde{\pi})$, où π est une représentation admissible de $G(\mathbb{R})$ dans un espace complexe V et $\tilde{\pi}$ est une application de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ dans le groupe des automorphismes de V qui vérifie la condition $\tilde{\pi}(g\gamma g') = \pi(g)\tilde{\pi}(\gamma)\pi(g')\omega(g')$ pour tous $g, g' \in G(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. On supposera toujours π de longueur finie. En pratique, on notera simplement $\tilde{\pi}$ la ω-représentation, la représentation π de $G(\mathbb{R})$ étant sous-entendue.

A une telle ω-représentation est associé son caractère, qui est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, que l'on note

$$\mathbf{f} \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, \mathbf{f}).$$

Précisément, pour une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et une mesure de Haar dg sur $G(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\tilde{\pi}(f \otimes dg) = \int_{\tilde{G}(\mathbb{R})} \tilde{\pi}(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma$ (la mesure $d\gamma$ étant naturellement associée à dg) ; alors

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f \otimes dg) = trace(\tilde{\pi}(f \otimes dg)).$$

Cette distribution est continue quand on munit $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ de sa topologie usuelle. Elle se factorise en une forme linéaire continue sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Ici, $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ désigne l'espace des ω-intégrales orbitales sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Il est muni d'après Bouaziz d'une topologie (cf. [I] 5.2) pour laquelle l'application naturelle $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ est continue et ouverte ([R] théorème 9.4). On note $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ l'espace engendré par les distributions $I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, .)$, quand $\tilde{\pi}$ décrit les ω-représentations de longueur finie, tensorisé par $Mes(G(\mathbb{R}))$. Ainsi, ces distributions appartiennent à $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*$. On note $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ le sous-espace de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ qui, après tensorisation par $Mes(G(\mathbb{R}))^*$, est engendré par les caractères de représentations tempérées.

Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ et pour une ω-représentation $(\pi, \tilde{\pi})$, on définit $(\pi_\lambda, \tilde{\pi}_\lambda)$ par $\pi_\lambda(g) = e^{<\lambda, H_{\tilde{G}}(g)>}\pi(g)$ et $\tilde{\pi}_\lambda(\gamma) = e^{<\lambda, H_{\tilde{G}}(\gamma)>}\tilde{\pi}(\gamma)$. L'action ainsi obtenue de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ sur l'ensemble des ω-représentations (à isomorphisme près) est libre.

Notons $\mathfrak{Z}(G)$ le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{R})$. On considère qu'il agit sur les espaces de fonctions sur $G(\mathbb{R})$ via l'action par translations à gauche de $G(\mathbb{R})$, et qu'il agit sur les espaces de distributions par dualité, c'est-à-dire par la formule $(ZD)(f) = D(Zf)$ pour une distribution D, une fonction f et un élément $Z \in \mathfrak{Z}(G)$. Comme on sait, $\mathfrak{Z}(G)$ est isomorphe à $Sym(\mathfrak{h})^W$, ou encore à l'algèbre des polynômes invariants par W sur $\mathfrak{h}^*$. Notons $\mathfrak{h}_Z$ la partie centrale de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $\mathfrak{h}_Z = X_*(Z(G)^0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On a dualement un sous-espace $\mathfrak{h}_Z^* \subset \mathfrak{h}^*$. Au caractère ω est associé un caractère infinitésimal de $\mathfrak{Z}(G)$, qui est l'évaluation en un point $\mu(\omega) \in \mathfrak{h}_Z^*$. L'hypothèse que ω est trivial sur la composante neutre de $Z(G;\mathbb{R})^\theta$ pour la topologie réelle implique que $\mu(\omega)$ appartient au sous-espace $(1-\theta)(\mathfrak{h}_Z^*)$. Il existe un unique point $\tilde{\mu}(\omega)$ dans ce sous-espace tel que $\mu(\omega) = (\theta^{-1} - 1)(\tilde{\mu}(\omega))$. Considérons l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$. Il est invariant par l'action de W^θ. Notons $Pol(\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*})$ l'algèbre des polynômes sur cet espace affine. Par restriction, tout élément de $\mathfrak{Z}(G)$ définit un élément de $Pol(\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*})^{W^\theta}$. On a

(1) l'application $\mathfrak{Z}(G) \to Pol(\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*})^{W^\theta}$ est un homomorphisme d'algèbres surjectif.

Preuve. Parce que $\tilde{\mu}(\omega)$ est central, il existe un unique automorphisme ι' de $\mathfrak{Z}(G)$ qui, à un élément $X \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{Z}(G)$, associe l'élément $X + < X, \tilde{\mu}(\omega) >$. Pour des éléments $Z \in \mathfrak{Z}(G)$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^{\theta,*}$, évaluer Z en $\tilde{\mu} + \lambda$ revient à évaluer $\iota'(Z)$ en λ. Cela ramène l'assertion au cas où $\tilde{\mu}(\omega) = 0$. C'est alors le théorème 5 de [DM]. $\square$

Soit $(\pi, \tilde{\pi})$ une ω-représentation, supposons π irréductible. A π est associé son caractère infinitésimal, qui est paramétré par une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W. On note $\mu(\pi)$ ou $\mu(\tilde{\pi})$ cette orbite. Parce que π se prolonge en une ω-représentation, on a l'égalité $\mu(\pi) + \mu(\omega) = \theta^{-1}(\mu(\pi))$. L'ensemble $\mu(\pi) - \tilde{\mu}(\omega)$ est alors une W-orbite qui est invariante par θ. On vérifie que l'intersection d'une telle orbite avec $\mathfrak{h}^{\theta,*}$ est non vide et est une seule orbite sous l'action de W^θ. Autrement dit, l'ensemble

$$(\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}) \cap \mu(\tilde{\pi}).$$

est une unique orbite sous l'action de W^θ dans l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$.

Si $(\pi, \tilde{\pi})$ est une ω-représentation de longueur finie et si toutes les composantes irréductibles de π ont un même paramètre μ, on pose $\mu(\tilde{\pi}) = \mu$. Plus généralement, on

dira qu'un élément de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ est de paramètre μ si, modulo le choix d'une mesure de Haar, c'est une combinaison linéaire de caractères de représentations irréductibles $\tilde{\pi}$ dont le paramètre est μ. On note $D_{spec,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ le sous-espace des éléments de paramètre μ.

On a défini en [W] 6.2 l'ensemble $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$. Il est formé de triplets $\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})$, où M est un Levi de G contenant M_0, σ est une représentation irréductible de la série discrète de $M(\mathbb{R})$ et $\tilde{\boldsymbol{r}}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$ défini en [W] 2.8. Ces éléments sont soumis à des conditions telles qu'à $\boldsymbol{\tau}$ est associée une représentation "elliptique" $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Deux triplets peuvent être conjugués par $G(\mathbb{R})$ et donnent dans ce cas la même représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. D'autre part, le groupe $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{R}^{\tilde{G}}(\sigma)$, donc sur $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ par $z(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})=(M,\sigma,z\tilde{\boldsymbol{r}})$. On a $\tilde{\pi}_{z\boldsymbol{\tau}}=z\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ (on rappelle que, dans notre situation tordue, les "représentations" peuvent être multipliées par un nombre complexe). Pour un couple (M,σ) comme ci-dessus et pour $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, on définit la représentation σ_λ. La restriction à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ de cette action de $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ s'étend en une action $\boldsymbol{\tau}\mapsto\boldsymbol{\tau}_\lambda$ de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ sur $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$. On a $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_\lambda}=(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_\lambda$.

Pour M et σ comme ci-dessus, σ possède un caractère central χ_σ et un caractère central infinitésimal qui est paramétré par une orbite $\mu(\sigma)$ du groupe de Weyl W^M dans $\mathfrak{h}^*$, plus précisément dans $\mathfrak{h}^{M,*}_{\mathbb{R}}\oplus i\mathfrak{a}^*_M(\mathbb{R})$. Pour $\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$, on note $\mu(\boldsymbol{\tau})$ la W-orbite engendrée par $\mu(\sigma)$. On note $\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$ le sous-ensemble des $\boldsymbol{\tau}=(M,\sigma,\tilde{\boldsymbol{r}})\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ tels que χ_σ soit trivial sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Tout élément de $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ s'écrit de façon unique $\boldsymbol{\tau}_\lambda$ pour un couple $(\boldsymbol{\tau},\lambda)\in\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)\times i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$. On note $D_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, resp. $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, le sous-espace de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les caractères des représentations $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$, resp. $\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$. Pour toute W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, on définit les espaces $D_{ell,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, resp. $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, en se limitant aux $\boldsymbol{\tau}$ tels que $\mu(\boldsymbol{\tau})=\mu$. On a $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)=D_{ell,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ si la projection de μ dans $\mathfrak{a}^*_{\tilde{G}}(\mathbb{C})$ est nulle. Sinon, $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)=0$.

On note $D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ le sous-espace de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les caractères de représentations $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_\lambda$ pour $\boldsymbol{\tau}\in\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G},\omega)$ et $\lambda\in\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$. On a l'égalité

$$(2)\qquad D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)=\Big(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}Ind_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega))\Big)^{W(\tilde{M}_0)}.$$

1.3 Espaces de Paley-Wiener

On considère les données suivantes :

- E est un ensemble ;
- D est un entier positif ou nul ;
- $d:E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction ;
- pour tout $e\in E$, V_e est un espace vectoriel réel de dimension inférieure ou égale à D muni d'une forme quadratique définie positive.

L'espace dual V_e^* est donc lui-aussi muni d'une telle forme. On prolonge ces formes en des formes hermitiennes sur $V_{e,\mathbb{C}}$ et $V^*_{e,\mathbb{C}}$.

Pour tout réel $r>0$, notons PW^r l'espace des familles $\mathbf{f}=(f_e)_{e\in E}$, où, pour tout $e\in E$, f_e est une fonction entière sur $V^*_{e,\mathbb{C}}$, qui vérifient la condition

(1) pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $C_N>0$ tel que, pour tout $e\in E$ et tout $\lambda\in V^*_{e,\mathbb{C}}$, on ait l'inégalité

$$|f_e(\lambda)|\leq C_N(1+d(e)+|\lambda|)^{-N}e^{r|Re(\lambda)|}.$$

On munit cet espace de la famille de semi-normes

$$\mathcal{N}_N^r(\mathbf{f}) = sup_{e\in E,\lambda\in V_{e,\mathbb{C}}^*}(1+d(e)+|\lambda|)^N e^{-r|Re(\lambda)|}|f_e(\lambda)|$$

pour $N \in \mathbb{N}$. C'est un espace de Fréchet. Pour $r < r'$, l'injection $PW^r \to PW^{r'}$ est continue et on note PW la limite inductive des PW^r, muni de la topologie limite inductive.

Pour tout réel $r > 0$, notons $\underline{PW}^r$ l'espace des familles $\mathbf{f} = (f_e)_{e\in E}$, où, pour tout $e \in E$, f_e est une fonction entière sur $V_{e,\mathbb{C}}^*$, qui vérifient les conditions

(2) pour tout N et tout $e \in E$, il existe $C_N(e) > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in V_{e,\mathbb{C}}^*$, on ait l'inégalité

$$|f_e(\lambda)| \leq C_N(e)(1+|\lambda|)^{-N}e^{r|Re(\lambda)|};$$

(3) pour tout N, il existe $\underline{C}_N > 0$ tel que, pour tout $e \in E$ et tout $\lambda \in iV_e^*$, on ait l'inégalité

$$|f_e(\lambda)| \leq \underline{C}_N(1+d(e)+|\lambda|)^{-N}.$$

On munit $\underline{PW}^r$ de la famille de semi-normes

$$\underline{\mathcal{N}}_N(\mathbf{f}) = sup_{e\in E,\lambda\in iV_e^*}(1+d(e)+|\lambda|)^N|f_e(\lambda)|$$

pour $N \in \mathbb{N}$. De nouveau, on note $\underline{PW}$ la limite inductive des $\underline{PW}^r$ munie de la topologie limite inductive.

Il est clair que, pour tout r, PW^r est inclus dans $\underline{PW}^r$ et que cette injection est continue. D'où une injection continue $PW \subset \underline{PW}$.

Lemme. *Cette application est bijective et c'est un homéomorphisme.*

Remarque. Ce lemme est élémentaire. On n'en donne une preuve que pour la commodité du rédacteur.

Preuve. On peut décomposer E en union finie disjointe de sous-ensembles sur lesquels la fonction $e \mapsto dim(V_e)$ est constante. On voit qu'il suffit de démontrer le lemme analogue obtenu en remplaçant E par un tel sous-ensemble. En oubliant cela, on peut supposer que l'espace V_e, muni de sa forme quadratique, est constant et on l'identifie à un espace fixe V. Pour simplifier, on identifie V à son dual V^* à l'aide de la forme quadratique. On considère donc que f_e est définie sur $V_\mathbb{C}$ pour tout e.

Fixons $\epsilon > 0$. On va montrer que, pour tout $r > 0$, $\underline{PW}^r$ est inclus dans $PW^{r+\epsilon}$ et que cette injection est continue. Pour cela, fixons $r > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. On va prouver plus précisément qu'il existe $c > 0$ (dépendant de N, r et ϵ) tel que, pour tout $\mathbf{f} \in \underline{PW}^r$, on a l'inégalité

$$(4) \qquad \mathcal{N}_N^{r+\epsilon}(\mathbf{f}) \leq c\underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f}).$$

Soit $\mathbf{f} = (f_e)_{e\in E} \in \underline{PW}^r$. Pour tout $e \in E$, on définit une fonction φ_e sur V par

$$(5) \qquad \varphi_e(x) = \int_{iV} f_e(\lambda)e^{-2\pi(x,\lambda)}\,d\lambda.$$

La condition (2) entraîne que la fonction φ_e est C^∞ et, par un procédé usuel de déplacement de contour, que cette fonction est à support dans l'ensemble des $x \in V$ tels que $|x| \leq r/2\pi$. Par inversion de Fourier, on a

$$(6) \qquad f_e(\lambda) = \int_V \varphi_e(x)e^{2\pi(x,\lambda)}\,dx$$

pour $\lambda \in iV$ et cette égalité persiste pour tout $\lambda \in V_{\mathbb{C}}$ par continuation holomorphe. On veut majorer l'expression

$$(1 + d(e) + |\lambda|)^N e^{-(r+\epsilon)|Re(\lambda)|} |f_e(\lambda)|$$

pour tout $e \in E$ et tout $\lambda \in V_{\mathbb{C}}$. On a tout d'abord

$$(1 + d(e) + |\lambda|)^N \leq (1 + d(e))^N (1 + |\lambda|)^N$$

car $1 + x + y \leq (1 + x)(1 + y)$ pour tous $x, y \geq 0$. On a

$$(1 + |\lambda|)^N \leq 2^N (1 + |\lambda|^2)^N = 2^N (1 + |Im(\lambda)|^2 + |Re(\lambda)|^2)^N$$

car $1 + x \leq 2(1 + x^2)$ pour tout $x \geq 0$. Introduisons des coordonnées sur V relatives à une base orthogonale. On a

$$1 + |Im(\lambda)|^2 + |Re(\lambda)|^2 = 1 + \sum_{j=1,\ldots,D} (Im(\lambda_j)^2 + Re(\lambda_j)^2) = 1 + \sum_{j=1,\ldots,D} (-\lambda_j^2 + 2\lambda_j Re(\lambda_j)).$$

Ainsi $(1 + |Im(\lambda)|^2 + |Re(\lambda)|^2)^N$ s'exprime comme combinaison linéaire finie de produits de monômes de degré au plus $2N$ en les λ_j et de monômes de degré au plus N en les $Re(\lambda_j)$. On peut aussi bien fixer deux tels monômes $P(\lambda)$ et $Q(Re(\lambda))$ et majorer

$$(1 + d(e))^N |P(\lambda)||Q(Re(\lambda))| e^{-(r+\epsilon)|Re(\lambda)|} |f_e(\lambda)|.$$

Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$|Q(Re(\lambda))| \leq c_1 (1 + |Re(\lambda)|)^N$$

et $(1 + x)^N e^{-\epsilon x} \leq c_2$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi l'expression précédente est majorée par le produit d'une constante et de

$$(7) \qquad (1 + d(e))^N |P(\lambda)| e^{-r|Re(\lambda)|} |f_e(\lambda)|.$$

Par les règles usuelles de dérivation, on déduit de (6) l'existence d'un opérateur différentiel à coefficients constants ∂_P sur V, d'ordre au plus $2N$, tel que

$$(8) \qquad P(\lambda) f_e(\lambda) = \int_V \partial_P \varphi_e(x) e^{2\pi(x,\lambda)}\, dx.$$

Par les mêmes règles de dérivation, appliquées cette fois à l'expression (5), on a

$$(9) \qquad \partial_P \varphi_e(x) = \int_{iV} P(\lambda) f_e(\lambda) e^{-2\pi(x,\lambda)}\, d\lambda.$$

Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

$$|P(\lambda)| \leq c_3 (1 + |\lambda|)^{2N}.$$

Alors, pour $\lambda \in iV$,

$$|P(\lambda) f_e(\lambda)| \leq c_3 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f}) (1 + |\lambda|)^{2N} (1 + d(e) + |\lambda|)^{-4N-4D}.$$

On utilise que $(1+x+y) \geq (1+x)^{1/2}(1+y)^{1/2}$ pour tous $x, y \geq 0$ et on obtient

$$|P(\lambda)f_e(\lambda)| \leq c_3 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4}(\mathbf{f})(1+|\lambda|)^{-2D}(1+d(e))^{-2N-2D}.$$

La fonction $\lambda \mapsto (1+|\lambda|)^{-2D}$ est intégrable sur iV. Grâce à (9), on en déduit l'existence de $c_4 > 0$ tel que

$$\partial_P \varphi_e(x) \leq c_4 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})(1+d(e))^{-2N-2D}$$

pour tout $x \in V$. Grâce à (8) et à la propriété du support de φ_e, on obtient une constante $c_5 > 0$ telle que

$$|P(\lambda)f_e(\lambda)| \leq c_5 \underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})(1+d(e))^{-2N-2D} e^{r|Re(\lambda)|}$$

pour tout $\lambda \in V_{\mathbb{C}}$. Alors, l'expression (7) est bornée par le produit d'une constante et de $\underline{\mathcal{N}}_{4N+4D}(\mathbf{f})$. Cela prouve la majoration (4) et le lemme. $\square$

Ce lemme étant démontré, on n'aura plus besoin de distinguer PW de $\underline{PW}$ et on ne conservera que la notation PW.

1.4 Enoncé du théorème

On définit une fonction $d : \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $d(\boldsymbol{\tau}) = |\mu(\boldsymbol{\tau})|$, où l'on désigne ainsi la norme pour la forme hermitienne fixée sur $\mathfrak{h}$ d'un élément quelconque de $\mu(\boldsymbol{\tau})$. On définit l'espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ comme celui des fonctions $\varphi : \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega) \to \mathbb{C}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) si deux éléments $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\tau}'$ de $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ sont conjugués par $G(\mathbb{R})$, alors $\varphi(\boldsymbol{\tau}) = \varphi(\boldsymbol{\tau}')$;

(2) pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$ et $z \in \mathbb{U}$, on a $\varphi(z\boldsymbol{\tau}) = z\varphi(\boldsymbol{\tau})$;

(3) pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{G}, \omega)$, la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\boldsymbol{\tau}_\lambda)$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ s'étend en une fonction entière $\varphi_{\boldsymbol{\tau}}$ sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$;

(4) fixons un ensemble de représentants $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ de représentants des classes d'équivalence dans $\mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ pour l'équivalence engendrée par la conjugaison par $G(\mathbb{R})$ et par l'action de $\mathbb{U}$; alors la famille $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)}$ appartient à l'espace de Paley-Wiener défini en 1.3 relatif à l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}, \omega)$ muni de la fonction d.

Le groupe $W(\tilde{M}_0)$ agit naturellement dans

$$\oplus_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L}, \omega).$$

On note $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$ le sous-espace des invariants.

Remarque. On peut se limiter aux $\tilde{L}$ tels que la restriction de ω à $Z(L; \mathbb{R})^{\theta}$ est triviale. Pour les autres, les espaces correspondants sont nuls pour la simple raison que les ensembles $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{L}, \omega)$ sont vides : il n'y a pas de ω-représentations de $\tilde{L}(\mathbb{R})$.

Soit $\mathbf{f} \in C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$. Pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell}(\tilde{L}, \omega)$, posons $\varphi_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau}) = I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}) = trace(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}))$. On peut aussi dire que $\varphi_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau}) = I^{\tilde{G}}(Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}), \mathbf{f}) = trace(Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{Q}}(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})(\mathbf{f}))$, où $\tilde{Q}$ est un espace parabolique quelconque de composante de Levi $\tilde{L}$. On a ainsi défini une application linéaire qui, à $\mathbf{f} \in C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, associe une famille de fonctions sur $\sqcup_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)} \mathcal{E}_{ell}(\tilde{L}, \omega)$. Elle se quotiente en une application linéaire sur $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$.

Théorème. *Cette application est un homéomorphisme de* $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)\otimes Mes(G(\mathbb{R}))$ *sur* $PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)$.

Ce théorème est prouvé par Renard ([R] théorème 17.5). La formulation de Renard étant largement différente de la nôtre, nous montrerons dans les deux paragraphes suivants pourquoi l'énoncé de Renard implique l'énoncé ci-dessus.

Rappelons pour mémoire le résultat de Delorme et Mezo. On note $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ l'espace des éléments de $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui sont K-finis à droite et à gauche. On note $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ son image dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Notons $PW_{ell}(\tilde{G},\omega)$ le sous-espace des familles $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)}\in PW_{ell}^{\infty}(\tilde{G},\omega)$ telles que $\varphi_{\boldsymbol{\tau}}=0$ pour presque tout $\boldsymbol{\tau}$. En supprimant les exposants $^{\infty}$, on définit comme ci-dessus l'espace $PW(\tilde{G},\omega)$, qui est un sous-espace de $PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)$. Alors l'application du théorème se restreint en un isomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ sur $PW(\tilde{G},\omega)$.

1.5 La transition entre le théorème de Renard et le théorème 1.4

On suppose $\omega=1$. On oublie les questions de mesures en fixant des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Considérons un sous-ensemble Ω de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est réunion de composantes connexes pour la topologie réelle et qui est engendré par conjugaison sous $G(\mathbb{R})$ par une seule telle composante. Il peut n'exister aucun sous-tore tordu maximal elliptique $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ tel que $\tilde{T}(\mathbb{R})\cap\Omega$ soit non vide. Supposons qu'il en existe un. Alors il n'en existe qu'un, à conjugaison près par $G(\mathbb{R})$ ([R] lemme 12.12). Fixons un tel tore tordu $\tilde{T}$. Notons $\mathfrak{t}^{\theta,\tilde{G}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\tilde{G}}$ dans $\mathfrak{t}^{\theta}$. Renard introduit un certain sous-ensemble de $i\mathfrak{t}^{\theta,\tilde{G}}(\mathbb{R})$, notons-le $H^*(\Omega)$.

Remarque. Plus précisément, Renard introduit un tel sous-ensemble sur lequel agit un certain groupe de Weyl. Les constructions de Renard pour deux éléments conjugués par ce groupe sont essentiellement les mêmes. Aussi, nous prendrons pour $H^*(\Omega)$ un ensemble de représentants des orbites dans l'ensemble de Renard pour l'action de ce groupe.

Pour $h^*\in H^*(\Omega)$, il définit une distribution Θ_{Ω,h^*} sur Ω qui vérifie de nombreuses propriétés. C'est une distribution propre pour l'action de $\mathfrak{Z}(G)$, donc il lui est associée une W-orbite $\mu(h^*)$ dans $\mathfrak{h}^*$. D'après [R] paragraphe 18, c'est la restriction à Ω d'un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On peut donc tensoriser la distribution Θ_{Ω,h^*} par un élément $\lambda\in\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$: on note $\Theta_{\Omega,h^*,\lambda}$ la distribution obtenue. Notons $E_{ell}^{\tilde{G}}$ l'ensemble des paires (Ω,h^*), où Ω parcourt les sous-ensembles de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions ci-dessus et h^* parcourt $H^*(\Omega)$. Remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini de Ω puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes pour la topologie réelle. On définit une fonction d sur $E_{ell}^{\tilde{G}}$: pour $(\Omega,h^*)\in E_{ell}^{\tilde{G}}$, $d(\Omega,h^*)=|\mu(h^*)|$. On introduit l'espace de Paley-Wiener associé à cet ensemble $E_{ell}^{\tilde{G}}$ et à cette fonction d. Notons-le $PW'_{ell}(\tilde{G})$. De nouveau, le groupe $W(\tilde{M}_0)$ agit naturellement sur

$$\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}PW'_{ell}(\tilde{L}).$$

On note $PW'(\tilde{G})$ le sous-espace des invariants. On pose $E=\cup_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)}E_{ell}^{\tilde{L}}$.

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{L}}$, on définit une fonction φ_{Ω,h^*} sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ par $\varphi_{\Omega,h^*}(\lambda) = \Theta_{\Omega,h^*,\lambda}(f_{\tilde{L}})$. Renard démontre que l'application qui, à f, associe la famille de fonctions $(\varphi_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E}$ se quotiente en un homéomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW'(\tilde{G})$.

D'après [BT] corollaire 14.5, le groupe Π des composantes connexes de $G(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle est un groupe abélien fini, en fait une puissance de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est muni d'un automorphisme θ, égal à l'automorphisme déduit de ad_γ pour n'importe quel $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$. Notons Ω_G la réunion des composantes appartenant au sous-groupe $(1-\theta)(\Pi)$. Alors tout ensemble Ω intervenant ci-dessus est une unique classe modulo Ω_G, à droite ou à gauche. Notons Ξ le groupe des caractères de $G(\mathbb{R})$ triviaux sur Ω_G. Pour Ω intervenant ci-dessus et pour $\xi \in \Xi$, notons $\tilde{\xi}_\Omega$ l'unique fonction sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\xi}_\Omega(g\gamma) = \xi(g)$ pour tous $g \in G(\mathbb{R})$ et $\gamma \in \Omega$. La fonction caractéristique de Ω est égale à

$$|\Xi|^{-1} \sum_{\xi\in\Xi} \tilde{\xi}_\Omega.$$

Soit $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$. Comme on l'a dit, la distribution Θ_{Ω,h^*} est la restriction à Ω d'un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, que l'on peut écrire $\sum_{i\in I} c_i\tilde{\pi}_i$, où I est un ensemble fini d'indices et, pour tout $i \in I$, c_i est un coefficient complexe et $\tilde{\pi}_i$ est une représentation irréductible et tempérée. On a alors l'égalité

$$\Theta_{\Omega,h^*} = |\Xi|^{-1} \sum_{\xi\in\Xi} \sum_{i\in I} c_i \tilde{\xi}_\Omega \tilde{\pi}_i,$$

où le produit $\tilde{\xi}_\Omega\tilde{\pi}_i$ se définit de façon évidente. Il est clair que $\tilde{\xi}_\Omega\tilde{\pi}_i$ est encore une représentation tempérée et irréductible. Cela nous débarrasse du passage par la restriction à Ω : la distribution Θ_{Ω,h^*} s'identifie à un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On la note désormais $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, f)$ pour un certain élément $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Soit $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$ et soit comme ci-dessus $\tilde{T}$ un tore tordu maximal elliptique tel que $\tilde{T}(\mathbb{R})$ coupe Ω. Alors Renard calcule le caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ sur $\tilde{T}(\mathbb{R})$ ([R] 15.17). Fixons $\gamma \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \Omega$. Tout élément de cette intersection est conjugué à un élément de $exp(\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}))\gamma$. En un point $exp(X)\gamma$, avec $X \in \mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R})$, c'est le produit d'un module explicite avec une combinaison linéaire finie explicite de $e^{<w(h^*),X>}$, pour certains $w \in W$. Il en résulte d'abord que

(1) $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ admet un caractère central pour l'action de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et que celui-ci est trivial.

Rappelons que l'on peut définir le produit scalaire elliptique $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)_{ell}$ de deux représentations $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ se tranformant trivialement sous l'action de $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$, cf. [W] 7.3. Montrons que

(2) pour deux éléments distincts (Ω_1, h_1^*) et $(\Omega_2, h_2^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, on a l'égalité $(\tilde{\pi}_{\Omega_1,h_1^*}, \tilde{\pi}_{\Omega_2,h_2^*})_{ell} = 0$;

(3) quand (Ω, h^*) parcourt $E^{\tilde{G}}_{ell}$, les produits $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles strictement positives.

Preuve de (2). Si Ω_1 est distinct de Ω_2, les caractères sont de supports disjoints. Si $\Omega_1 = \Omega_2$, le produit elliptique est, à une constante près, l'intégrale sur un unique $\tilde{T}(\mathbb{R})/(1-\theta)(T(\mathbb{R}))$ du produit d'un certain module, du caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega_2,h_2^*}$ et du conjugué du caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega_1,h_1^*}$. D'après le résultat évoqué ci-dessus, c'est une combinaison linéaire finie d'intégrales sur $exp(\mathfrak{t}^\theta(\mathbb{R}))$ de fonctions du type $exp(X) \mapsto e^{<w_2(h_2^*)-w_1(h_1^*),X>}$. L'intégrale d'une telle fonction n'est non nulle que si $w_2(h_2^*) = w_1(h_1^*)$. Une telle égalité (où ne peuvent intervenir que certains éléments du groupe de Weyl) entraîne que $h_1^* = h_2^*$ (pour h_1^* et h_2^* dans notre ensemble $H^*(\Omega_1)$, cf. remarque ci-dessus).

Preuve de (3). Le même raisonnement montre que, si le caractère de $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ en un point $exp(X)\gamma$ s'écrit comme produit d'un module explicite et de $\sum_w c_w e^{<w(h^*),X>}$, alors

$$(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*}) = m \sum_w |c_w|^2,$$

où m est une constante ne dépendant que des mesures. Or les constantes c_w intervenant en [R] 15.17 sont de modules 1. La somme ci-dessus est donc m fois le nombre d'éléments de l'ensemble de sommation. Ce dernier étant un sous-ensemble de W, l'assertion s'ensuit.

Renard démontre une propriété supplémentaire de ses distributions. Le théorème [R] 15.18 signifie que

(4) pour tout $(\Omega, h^*) \in E_{ell}^{\tilde{G}}$, $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ est supertempérée.

On renvoie à [Moe] pour cette notion. Or, dans [Moe], Moeglin démontre qu'un élément de $D_{temp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui est supertempéré est combinaison linéaire de caractères de représentations elliptiques. En joignant ce dernier résultat à (1), on obtient que $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*} \in D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ pour tout $(\Omega, h^*) \in E_{ell}^{\tilde{G}}$.

Pour tout $(\Omega, h^*) \in E_{ell}^{\tilde{G}}$, on peut donc exprimer $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ comme combinaison linéaire des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ (rappelons que $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ est un ensemble de représentants fixé en 1.4). Plus précisément, pour toute W-orbite dans $\mathfrak{h}^*$, notons $E_{ell,\mu}^{\tilde{G}}$, resp. $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$, le sous-ensemble des $(\Omega, h^*) \in E_{ell}^{\tilde{G}}$, resp. des $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, tels que le caractère infinitésimal de $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$, resp. $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$, soit de paramètre μ. Comme on l'a dit, $E_{ell}^{\tilde{G}}$ est réunion des $E_{ell,\mu}^{\tilde{G}}$ et, de même, $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ est réunion des $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$. L'écriture d'un élément de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans la base $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ est compatible avec l'action de $\mathfrak{Z}(G)$. Donc, pour tout μ et tout $(\Omega, h^*) \in E_{ell,\mu}^{\tilde{G}}$, $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ est combinaison linéaire des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$. Notons que, d'après sa construction, l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$ est fini et son nombre d'éléments est borné indépendamment de μ. Montrons que

(5) la famille $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E_{ell}^{\tilde{G}}}$ est une base de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Il est clair par (2) et (3) qu'elle est libre. On peut fixer μ et prouver que l'espace engendré par $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E_{ell,\mu}^{\tilde{G}}}$ contient $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$. Notons $PW_{ell,\mu}^{\infty}(\tilde{G})$ le sous-espace de $PW_{ell}^{\infty}(\tilde{G})$ formé des familles $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$ telles que $\varphi_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ si $\mu(\boldsymbol{\tau}) \neq \mu$. Notons $PW'_{ell,\mu}(\tilde{G})$ le sous-espace de $PW'_{ell}(\tilde{G})$ formé des familles $(\varphi_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E_{ell}^{\tilde{G}}}$ telles que $\varphi_{\Omega,h^*} = 0$ si $(\Omega, h^*) \notin E_{ell,\mu}^{\tilde{G}}$. Il est clair que l'inclusion de l'espace engendré par les $\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}$ pour $(\Omega, h^*) \in E_{ell,\mu}^{\tilde{G}}$ dans celui engendré par les $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$ induit une projection $PW_{ell,\mu}^{\infty}(\tilde{G}) \to PW'_{ell,\mu}(\tilde{G})$. L'inclusion précédente est surjective si et seulement si cette projection est injective. Supposons que ce ne soit pas le cas. En utilisant le théorème de Paley-Wiener pour les fonctions K-finies ([DM] repris en [W] 6.2), on peut construire une fonction K-finie $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dont l'image dans $PW^{\infty}(\tilde{G})$ est non nulle mais appartient au noyau de la projection. La première propriété implique que l'image de f dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est non nulle. La seconde entraîne que son image dans $PW'(\tilde{G})$ est nulle. D'après le théorème de Renard, l'image de f dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est nulle. Cette contradiction prouve (5). $\square$.

On a donc deux matrices de changement de base $(a_{(\Omega,h^*),\boldsymbol{\tau}})_{(\Omega,h^*)\in E_{ell}^{\tilde{G}},\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$ et $(b_{\boldsymbol{\tau},(\Omega,h^*)})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G}),(\Omega,h^*)\in E_{ell}^{\tilde{G}}}$, inverses l'une de l'autre, qui font passer de la base $(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{(\Omega,h^*)\in E_{ell}^{\tilde{G}}}$ de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ à la base $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$. Comme on l'a dit ci-dessus, ces matrices induisent

pour tout μ un isomorphisme de $PW^{\infty}_{ell,\mu}(\tilde{G})$ sur $PW'_{ell,\mu}(\tilde{G})$. Pour prouver que ces isomorphismes se globalisent en un isomorphisme de $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$ sur $PW'_{ell}(\tilde{G})$, on voit qu'il suffit de prouver que les matrices de changement de base vérifient les deux propriétés suivantes :

(6) il existe un entier N tel que, pour tout $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$, l'ensemble des $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$ tels que $a_{(\Omega,h^*),\boldsymbol{\tau}} \neq 0$ a au plus N éléments et, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, l'ensemble des $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$ tels que $b_{\boldsymbol{\tau},(\Omega,h^*)} \neq 0$ a au plus N éléments ;

(7) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $(\Omega, h^*) \in E^{\tilde{G}}_{ell}$ et $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, on a $|a_{(\Omega,h^*),\boldsymbol{\tau}}| \leq C$ et $|b_{\boldsymbol{\tau},(\Omega,h^*)}| \leq C$.

Les matrices se décomposent en blocs selon les paramètres μ. L'assertion (6) résulte alors de ce que l'on a déjà dit : le nombre d'éléments de $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0,\mu}(\tilde{G})$ est borné indépendamment de μ. La base $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})}$ vérifie des propriétés analogues à (2) et (3), à savoir :

(8) pour deux éléments distincts $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, on a $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_1}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}_2})_{ell} = 0$;

(9) quand $\boldsymbol{\tau}$ parcourt $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G})$, les produits $(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles strictement positives.

Cela résulte de [W] théorème 7.3. Il résulte de (2) et (8) que les coefficients de nos matrices sont des rapports

$$\frac{(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{ell}}{(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}}$$

ou

$$\frac{(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})_{ell}}{(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})_{ell}}.$$

Ils sont bornés par

$$\frac{(\tilde{\pi}_{\Omega,h^*}, \tilde{\pi}_{\Omega,h^*})^{1/2}_{ell}}{(\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}, \tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}})^{1/2}_{ell}}$$

ou par l'inverse de ce rapport. Ces deux rapports sont bornés d'après (3) et (9).

En conclusion, le changement de base identifie $PW'_{ell}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$. Il en résulte une identification de $PW'(\tilde{G})$ avec $PW^{\infty}(\tilde{G})$. Il est clair que l'application du théorème 1.4 est la composée de l'application de Renard de $C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $PW'(\tilde{G})$ avec cet isomorphisme entre les deux espaces de Paley-Wiener. Le théorème 1.4 résulte ainsi de celui de Renard.

1.6 Extension au cas $\omega \neq 1$

La méthode est la même qu'en [W] 6.3. On suppose d'abord qu'il existe un caractère μ de $G(\mathbb{R})$ tel que $\omega = \mu \circ (1-\theta)$. Notons $\mathbf{1}$ le caractère trivial de $G(\mathbb{R})$. A toute ω-représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on associe la $\mathbf{1}$-représentation $\tilde{\pi}_1$ définie par $\tilde{\pi}_1(g\gamma_0) = \mu(g)\tilde{\pi}(g\gamma_0)$ pour tout $g \in G(\mathbb{R})$. C'est une bijection. Construisons un espace $\mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ comme on a construit $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$, en oubliant les conditions de convergence. La bijection précédente induit un isomorphisme de $\mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ sur $\mathcal{F}(\tilde{G}, \mathbf{1})$, qui se restreint en un homéomorphisme de $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega) \to PW^{\infty}(\tilde{G}, \mathbf{1})$. On définit d'autre part une application

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) & \to & C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ f & \mapsto & f_1 \end{array}$$

par $f_1(g\gamma_0) = \mu(g)^{-1} f(g\gamma_0)$. Notons $pw_{\tilde{G},\omega} : C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to \mathcal{F}(\tilde{G}, \omega)$ l'application du théorème 1.4 pour le caractère ω. Le théorème affirme que son image est $PW^{\infty}(\tilde{G}, \omega)$

et que $pw_{\tilde{G},\omega}$ se factorise en un homéomorphisme de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ sur cette image. On vérifie que $pw_{\tilde{G},\omega}$ est la composée de l'application précédente, de $pw_{\tilde{G},\mathbf{1}}$ et de l'isomorphisme inverse $\mathcal{F}(\tilde{G},\mathbf{1})\to\mathcal{F}(\tilde{G},\omega)$. Il est alors facile de déduire les propriétés requises de l'application $pw_{\tilde{G},\omega}$ de celles déjà connues de l'application $pw_{\tilde{G},\mathbf{1}}$.

Dans le cas général, on peut évidemment supposer ω trivial sur $Z(G)^\theta(\mathbb{R})$ (sinon le théorème affirme que $\{0\}$ est homéomorphe à $\{0\}$). On introduit un couple $(G',\tilde{G}')$ comme en [W] 2.4. On a une suite exacte

$$1\to C\to G'\xrightarrow{p}G\to 1$$

où C est un tore central. On a une application $\tilde{p}:\tilde{G}'\to\tilde{G}$ compatible avec p. L'application $G'(\mathbb{R})\to G(\mathbb{R})$ est surjective. Enfin, il existe un caractère μ' de $G'(\mathbb{R})$ tel que $\omega\circ p=\mu'\circ(1-\theta')$ (où θ' est l'analogue de θ pour $(G',\tilde{G}')$). Notons que θ' n'est pas trivial sur C en général. Une ω-représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ s'identifie à une $\omega\circ p$-représentation $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ telle que la représentation sous-jacente π' ait un caractère central trivial sur $C(\mathbb{R})$. Cette identification induit une application $\mathcal{F}(\tilde{G}',\omega\circ p)\to\mathcal{F}(\tilde{G},\omega)$. On voit que cette application se restreint en une application continue $PW^\infty(\tilde{G}',\omega\circ p)\to PW^\infty(\tilde{G},\omega)$. On peut construire une section de ces applications de la façon suivante. Fixons une fonction φ_C sur $\mathcal{A}^{\theta',*}_{C,\mathbb{C}}$ qui est de Paley-Wiener et telle que $\varphi_C(0)=1$. Soit $\boldsymbol{\varphi}$ un élément de $\mathcal{F}(\tilde{G},\omega)$. C'est donc une collection de fonctions $\varphi_{\tilde{L},\boldsymbol{\tau}}$, où $\tilde{L}$ parcourt $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\boldsymbol{\tau}$ parcourt $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$, cette collection étant soumise à une condition d'invariance par $W(\tilde{M}_0)$. Soit $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Soit $\tilde{L}'$ son image réciproque dans $\tilde{G}'$. On peut supposer que $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$ s'identifie à un sous-ensemble de $\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}',\omega\circ p)$. On peut identifier $\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'}$ à $\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}\oplus\mathcal{A}^{\theta',*}_C$. Pour $\boldsymbol{\tau}'\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L}',\omega\circ p)-\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$, on pose $\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}'}=0$. Pour $\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{L},\omega)$, on définit une fonction $\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}}$ sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L}',\mathbb{C}}$ par

$$\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}}(\lambda_C+\lambda_{\tilde{L}})=\varphi_C(\lambda_C)\varphi_{\tilde{L},\boldsymbol{\tau}}(\lambda_{\tilde{L}})$$

pour tous $\lambda_C\in\mathcal{A}^{\theta',*}_{C,\mathbb{C}}$ et $\lambda_{\tilde{L}}\in\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. La collection $\boldsymbol{\varphi}'$ de ces fonctions $\varphi'_{\tilde{L}',\boldsymbol{\tau}'}$ appartient à $\mathcal{F}(\tilde{G}',\omega\circ p)$. Il est clair que l'application $\boldsymbol{\varphi}\mapsto\boldsymbol{\varphi}'$ est une section de l'application $\mathcal{F}(\tilde{G}',\omega\circ p)\to\mathcal{F}(\tilde{G},\omega)$ ci-dessus et qu'elle envoie continuement $PW^\infty(\tilde{G},\omega)$ dans $PW^\infty(\tilde{G}',\omega\circ p)$. D'autre part, on définit une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R})) & \to & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ f' & \mapsto & f \end{array}$$

par

$$f(\gamma)=\int_{C(\mathbb{R})}f(c\gamma')\,dc,$$

où γ' est un relèvement quelconque de γ dans $\tilde{G}'(\mathbb{R})$. Cette application est continue et admet clairement une section continue.

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R})) & \overset{f'\mapsto f}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\ \downarrow pw_{\tilde{G}',\omega\circ p} & & \downarrow pw_{\tilde{G},\omega} \\ \mathcal{F}(\tilde{G}',\omega\circ p) & \to & \mathcal{F}(\tilde{G},\omega) \end{array}$$

On connaît déjà le théorème pour $(G', \tilde{G}')$ et pour le caractère $\omega \circ p$, puisque celui-ci est de la forme $\mu' \circ (1-\theta')$. Parce que l'application horizontale du haut est surjective, que l'application $pw_{\tilde{G}',\omega\circ p}$ a pour image $PW^\infty(\tilde{G}', \omega\circ p)$ et que l'application horizontale du bas envoie ce dernier espace sur $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$, on voit que $pw_{\tilde{G},\omega}$ envoie surjectivement $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$. Parce que l'application horizontale du haut admet une section continue, la continuité de l'application $pw_{\tilde{G},\omega} : C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ résulte de celle de l'application similaire $pw_{\tilde{G}',\omega\circ p}$ et de celle de l'application $PW^\infty(\tilde{G}', \omega \circ p) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$. Comme on l'a déjà dit, l'application $pw_{\tilde{G},\omega}$ se factorise par $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Parce que l'application $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ est ouverte, notre application continue $pw_{\tilde{G},\omega}$ se factorise en une application continue

$$(1) \qquad I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \to PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$$

qui est encore surjective. On sait par ailleurs qu'elle est injective ([W] théorème 5.5), donc bijective. Il reste à prouver que l'application réciproque est continue. On voit aisément que le diagramme ci-dessus se factorise en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
C_c^\infty(\tilde{G}'(\mathbb{R})) & \overset{f'\mapsto f}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
I(\tilde{G}'(\mathbb{R}), \omega \circ p) & \to & I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \\
\downarrow & & \downarrow \\
PW^\infty(\tilde{G}', \omega \circ p) & \to & PW^\infty(\tilde{G}, \omega)
\end{array}$$

L'application horizontale du milieu est continue car l'application du haut l'est, l'application verticale du haut à droite est continue et l'application verticale du haut à gauche est ouverte. L'application verticale du bas à gauche est un homéomorphisme. Puisque l'application horizontale du bas admet une section continue, il en est de même de l'application verticale du bas à droite. C'est-à-dire que l'inverse de l'application (1) est continue. Cela achève la preuve.

2 Stabilité

2.1 Quelques considérations formelles

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On doit fixer une application $H_{\tilde{G}'} : \tilde{G}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}'} = \mathcal{A}_{G'}$ comme en 1.1. Supposons que $\mathbf{G}'$ est elliptique. On a alors un isomorphisme $\xi : \mathcal{A}_{\tilde{G}} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ et

(1) il existe une unique application $H_{\tilde{G}'} : \tilde{G}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ telle que

(i) $H_{\tilde{G}'}(y\delta) = H_{G'}(y) + H_{\tilde{G}'}(\delta)$ pour tous $y \in G'(\mathbb{R})$ et $\delta \in \tilde{G}'(\mathbb{R})$;

(ii) on a $H_{\tilde{G}'}(\delta) = \xi(H_{\tilde{G}}(\gamma))$ pour tout couple $(\delta, \gamma) \in \tilde{G}'(\mathbb{R}) \times \tilde{G}(\mathbb{R})$ d'éléments semi-simples qui se correspondent.

Preuve. Fixons des éléments semi-simples $\delta^\natural \in \tilde{G}'(\mathbb{R})$ et $\gamma^\natural \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ qui se correspondent. On définit $H_{\tilde{G}'}$ comme l'unique application vérifiant (i) et telle que $H_{\tilde{G}'}(\delta^\natural) = \xi(H_{\tilde{G}}(\gamma^\natural))$. On doit montrer que cette application vérifie (ii). Fixons un diagramme $(\delta^\natural, B'^\natural, T'^\natural, B^\natural, T^\natural, \gamma^\natural)$. Notons $\xi^\natural : T^\natural \to T'^\natural$ l'homomorphisme qui s'en déduit. Complétons nos paires de Borel en des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}^\natural$ et $\mathcal{E}'^\natural$. Ecrivons $\gamma^\natural = t^\natural e^\natural$,

avec $t^\natural \in T^\natural$ et $e^\natural \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E}^\natural)$, notons $e'^\natural$ l'image naturelle de $e^\natural$ dans $Z(\tilde{G}', \mathcal{E}'^\natural)$, écrivons $\delta^\natural = t'^\natural e'^\natural$ avec $t'^\natural \in T'^\natural$. On a alors $\xi(t^\natural) = t'^\natural$. Considérons un autre diagramme quelconque $(\delta, B', T', B, T, \gamma)$. Fixons des éléments $x \in G$ et $y \in G'$ tels que $ad_x(B^\natural, T^\natural) = (B, T)$ et $ad_y(B'^\natural, T'^\natural) = (B', T')$. Posons $e = ad_x(e^\natural)$ et $e' = ad_y(e'^\natural)$. On écrit $\gamma = te$ et $\delta = t'e'$, avec $t \in T$ et $t' \in T'$. On a $\xi(t) = t'$, où $\xi : T \to T'$ est déduit du diagramme. On a $\gamma = ad_x(ue^\natural)$ et $\delta = ad_y(u'e'^\natural)$, où $u = ad_{x^{-1}}(t)$ et $u' = ad_{y^{-1}}(t')$. Puisque $ad_{y^{-1}} \circ \xi \circ ad_x = \xi^\natural$, on a $\xi^\natural(u) = u'$. Ecrivons $\gamma = g\gamma^\natural$ et $\delta = g'\delta^\natural$ avec $g \in G(\mathbb{R})$ et $g' \in G'(\mathbb{R})$. Pour prouver (ii), on doit prouver que $\xi(H_{\tilde{G}}(g)) = H_{\tilde{G}'}(g')$. Pour cela, il suffit de prouver que tout caractère $\chi' \in X^*(G')^{\Gamma_\mathbb{R}}$ prend la même valeur sur les deux termes. Rappelons que $X^*(G')^{\Gamma_\mathbb{R}} \simeq X^*(G)^{\Gamma_\mathbb{R}, \theta}$. Précisément, cet isomorphisme associe à $\chi' \in X^*(G')^{\Gamma_\mathbb{R}}$ l'unique élément $\chi \in X^*(G)^{\Gamma_\mathbb{R}, \hat{\theta}}$ tel que $\chi' \circ \xi^\natural = \chi$ sur $T^\natural$. Soit $\chi' \in X^*(G')^{\Gamma_\mathbb{R}}$ et χ l'élément associé. On calcule $g = xu\theta(x)^{-1}(t^\natural)^{-1}$ (où $\theta = ad_{e^\natural}$) et $g' = yu'y^{-1}(t'^\natural)^{-1}$. D'où

$$\chi'(H_{\tilde{G}'}(g')) = log(|\chi'(g')|_\mathbb{R}) = log(|\chi'(u'(t'^\natural)^{-1})|_\mathbb{R}),$$

$$\chi' \circ \xi(H_{\tilde{G}}(g)) = \chi(H_{\tilde{G}}(g)) = log(|\chi(u(t^\natural)^{-1})|_\mathbb{R}).$$

Puisque $\xi^\natural(u(t^\natural)^{-1}) = u'(t'^\natural)^{-1}$, ces deux expressions sont égales, ce qui prouve (1). $\square$

Dans le cas où $\mathbf{G}'$ est elliptique, on identifie $\mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ par ξ et on choisit pour $H_{\tilde{G}'}$ l'application définie par (1).

On a expliqué en [I] 2.5 comment définir des espaces $C_c^\infty(\mathbf{G}')$, $I(\mathbf{G}')$, $SI(\mathbf{G}')$. Cette construction s'adapte aux espaces de distributions définis en 1.2. Précisément, on a défini en [I] 2.1 et 2.5 la notion de données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, Δ_1. Il est facile de voir que l'on peut trouver de telles données telles que le caractère associé λ_1 soit unitaire. On supposera toujours qu'il en est ainsi. Considérons de telles données. Notons $D_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ le sous-espace de $D_{spec}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ engendré par les caractères de représentations $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$ de $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ (pour le caractère trivial de $G'_1(\mathbb{R})$) telles que le caractère central de π_1 coïncide avec λ_1 sur $C_1(\mathbb{R})$. Considérons une telle représentation $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$ et d'autres données auxiliaires G'_2,..., Δ_2. On définit une représentation $(\pi_2, \tilde{\pi}_2)$ de $\tilde{G}'_2(\mathbb{R})$, agissant dans le même espace que $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$, par les formules

$$\pi_2(x_2) = \lambda_{12}(x_1, x_2)^{-1}\pi_1(x_1), \ \tilde{\pi}_2(\delta_2) = \tilde{\lambda}_{12}(\delta_1, \delta_2)^{-1}\tilde{\pi}_1(\delta_1)$$

pour $x_2 \in G'_2(\mathbb{R})$ et $\delta_2 \in \tilde{G}'_2(\mathbb{R})$, où x_1 est un élément quelconque de $G'_1(\mathbb{R})$ qui a même projection que x_2 dans $G'(\mathbb{R})$, où δ_1 est un élément quelconque de $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ qui a même projection que δ_2 dans $\tilde{G}'(\mathbb{R})$ et où λ_{12} et $\tilde{\lambda}_{12}$ sont les fonctions définies en [I] 2.5. Alors le caractère central de π_2 coïncide avec λ_2 sur $C_2(\mathbb{R})$. L'application qui, au caractère de $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$, associe celui de $(\pi_2, \tilde{\pi}_2)$, se prolonge en un isomorphisme de $D_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ sur $D_{spec,\lambda_2}(\tilde{G}'_2(\mathbb{R}))$. En recollant par ces isomorphismes canoniques les espaces $D_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$ associés à toutes les données auxiliaires possibles, on obtient un espace que l'on notera $D_{spec}(\mathbf{G}')$. On définit de même le sous-espace $D_{temp}(\mathbf{G}')$. On vérifie que l'application ci-dessus qui, à $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$, associe celui de $(\pi_2, \tilde{\pi}_2)$, envoie une représentation elliptique sur une représentation elliptique. Il lui est associé une bijection de $\mathcal{E}_{ell,\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ sur $\mathcal{E}_{ell,\lambda_2}(\tilde{G}'_2)$, les indices λ_1 et λ_2 signifiant que l'on se restreint aux éléments dont le caractère central se restreint à $C_1(\mathbb{R})$, resp. $C_2(\mathbb{R})$, en le caractère λ_1, resp. λ_2. On en déduit comme ci-dessus par recollement un ensemble $\mathcal{E}_{ell}(\mathbf{G}')$ et un espace $D_{ell}(\mathbf{G}')$.

Remarque. Le corps de base est ici $\mathbb{R}$, mais les constructions ci-dessus valent aussi sur un corps de base local non-archimédien.

Considérons de nouveau des données auxiliaires G'_1, ..., Δ_1. Introduisons les espaces $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}'_1$ et $\mathfrak{h}_{C_1}$ analogues de $\mathfrak{h}$ pour les groupes G', G'_1 et C_1. On a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{h}'^* \to \mathfrak{h}_1'^* \to \mathfrak{h}_{C_1}^* \to 0$$

Au caractère λ_1 est associé un paramètre $\mu(\lambda_1) \in \mathfrak{h}_{C_1}^*$. Soit $(\pi_1, \tilde{\pi}_1)$ une représentation irréductible de $\tilde{G}'_1(\mathbb{R})$ dont le caractère central coïncide avec λ_1 sur $C_1(\mathbb{R})$. Alors son paramètre $\mu(\tilde{\pi}_1)$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{h}_{1,\lambda_1}'^*$ des éléments de $\mathfrak{h}_1'^*$ qui se projettent sur $\mu(\lambda_1)$. Cet ensemble est un espace affine sous $\mathfrak{h}'^*$. Quand on change de données auxiliaires, ces espaces affines se recollent. En effet, avec les notations ci-dessus, λ_{12} est un caractère du produit fibré de G'_1 et G'_2 au-dessus de G'. Il lui est associé un paramètre

$$\mu(\lambda_{12}) \in \mathfrak{h}_{12}'^* = (\mathfrak{h}_1'^* \times \mathfrak{h}_2'^*)/diag_-(\mathfrak{h}'^*)$$

(on note $diag_-$ le plongement antidiagonal). La projection de $\mu(\lambda_{12})$ dans $\mathfrak{h}_{C_1} \times \mathfrak{h}_{C_2}$ est $(\mu(\lambda_1), -\mu(\lambda_2))$. Soit alors $\mu_1 \in \mathfrak{h}_{1,\lambda_1}'^*$. Il existe un unique élément $\mu_2 \in \mathfrak{h}_{2,\lambda_2}'^*$ tel que $(\mu_1, -\mu_2)$ se projette sur $\mu(\lambda_{12})$ dans $\mathfrak{h}_{12}'^*$. Le recollement associe μ_2 à μ_1. Par recollement, on obtient un espace affine sous $\mathfrak{h}'^*$ que nous noterons $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$. On ne peut pas recoller les algèbres $\mathfrak{Z}(G'_1)$, mais on peut recoller leurs quotients $\mathfrak{Z}(G'_1)/I(\lambda_1)$, où $I(\lambda_1)$ est l'idéal bilatère engendré par les $X- < X, \mu(\lambda_1) >$ pour $X \in \mathfrak{h}_{C_1}$. On obtient une algèbre notée $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')$, qui s'identifie à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$ invariants par $W^{G'}$. Cette algèbre agit naturellement sur $C_c^\infty(\mathbf{G}')$.

On a défini en 1.2 l'espace affine $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$. Il s'identifie à $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$ par la construction suivante. Notons que $\mathfrak{h}'$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{h}^\theta$ (l'identification dépend de choix de paires de Borel mais changer ces choix ne modifie l'identification que par l'action d'un élément de W^θ, ce qui nous importe peu). Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. On a défini en [I] 2.8 un élément b que l'on peut considérer comme un élément de

$$(1) \qquad (\mathfrak{h}_1'^* \times \mathfrak{h}^*)/diag_-(\mathfrak{h}'^*).$$

On vérifie que sa projection dans $\mathfrak{h}_{C_1}^* \times (1-\theta)(\mathfrak{h}^*)$ n'est autre que $(-\mu(\lambda_1), \tilde{\mu}(\omega))$. Pour $\mu \in \tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$, il existe un unique $\mu_1 \in \mathfrak{h}_{1,\lambda_1}'^*$ tel que $(-\mu_1, \mu)$ se projette sur b dans l'espace (1). L'application $\mu \mapsto \mu_1$ fournit l'isomorphisme cherché. Modulo cet isomorphisme, on a un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G) & \to & \mathfrak{Z}(\mathbf{G}') \\ z & \mapsto & z^{\mathbf{G}'} \end{array}$$

Un élément z de $\mathfrak{Z}(G)$ définit par restriction un polynôme invariant par W^θ sur $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$, qui s'identifie à un polynôme $z^{\mathbf{G}'}$ invariant par $W^{G'} \subset W^\theta$ sur $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$. Le corollaire [I] 2.8 se reformule de la façon suivante.

Lemme. *Soient* $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))$, $\mathbf{f}' \in C_c^\infty(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(\mathbb{R}))$ *et* $z \in \mathfrak{Z}(G)$. *Supposons que* $\mathbf{f}'$ *soit un transfert de* $\mathbf{f}$. *Alors* $z^{\mathbf{G}'}\mathbf{f}'$ *est un transfert de* $z\mathbf{f}$.

Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1. On a introduit ci-dessus un élément b de l'espace (1). Son opposé $-b$ se projette sur un élément de $(\mathfrak{a}_{G'_1}^* \times \mathfrak{a}_{\tilde{G}}^*)/diag_-(\mathfrak{a}_{\tilde{G}}^*) \simeq \mathfrak{a}_{G'_1}^*$. Cet élément définit un caractère $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}$ de $\mathfrak{A}_{G'_1}$, qui a même restriction à $\mathfrak{A}_{C_1}$ que λ_1. Pour simplifier, fixons des mesures de Haar sur $G(\mathbb{R})$ et $G'_1(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ et $a_1 \in \mathfrak{A}_{G'_1}$ ayant même projection dans $\mathfrak{A}_{G'}$. Soient $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $f_1 \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}))$. Notons $f_1^{a_1}$, resp. f^a, les fonctions définies par $f_1^{a_1}(\delta_1) = f_1(a_1\delta_1)$, resp. $f^a(\gamma) = f(a\gamma)$. On a

(2) si f_1 est un transfert de f, alors $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}(a_1)f_1^{a_1}$ est un transfert de f^a.

Notons $\mathcal{E}_{ell,\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}},\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ le sous-ensemble des $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ tels que la restriction à $\mathfrak{A}_{G'_1}$ du caractère central de $\boldsymbol{\tau}$ soit égale à $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}$. On note de même $D_{ell,\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}},\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ le sous-espace de $D_{ell,\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$ engendré par les caractères des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}},\lambda_1}(\tilde{G}'_1)$. Quand on fait varier les données auxiliaires, on vérifie que ces objets se recollent en des objets que l'on note $\mathcal{E}_{ell,0}(\mathbf{G}')$ et $D_{ell,0}(\mathbf{G}')$. Il est utile de remarquer que l'on peut choisir des données auxiliaires de sorte que $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}$ soit trivial. En effet, via la projection naturelle $G'_1(\mathbb{R}) \to \mathfrak{A}_{G'_1}$, ce caractère s'étend en un caractère de $G'_1(\mathbb{R})$. Celui-ci détermine un cocycle $\zeta : W_{\mathbb{R}} \to Z(\hat{G}'_1)$. On définit un nouveau plongement $\hat{\xi}'_1 : \mathcal{G}' \to {}^LG'_1$ par $\hat{\xi}'_1(g,w) = \zeta(w)^{-1}\hat{\xi}_1(g,w)$ pour tout $(g,w) \in \mathcal{G}'$. On voit que, si l'on remplace $\hat{\xi}_1$ par ce nouveau plongement, $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}$ devient trivial.

2.2 Les espaces $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

Pour simplifier les notations, on fixe dorénavant des mesures de Haar sur tous les groupes rencontrés. Le théorème 1.4 entraîne que $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ est isomorphe à l'espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G},\omega)$. Rappelons que l'on note $C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ l'espace des éléments de $C^{\infty}_c(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui sont K-finis à droite et à gauche. Notons $C^{\infty}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ le sous-espace des fonctions cuspidales et $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ son image dans $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Le théorème de Delorme et Mezo (repris en [W] 6.2) entraîne que $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,K)$ s'identifie au sous-espace $PW_{ell}(\tilde{G},\omega)$ des familles $(\varphi_{\boldsymbol{\tau}})_{\boldsymbol{\tau}\in\underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)}$ telles que $\varphi_{\boldsymbol{\tau}} = 0$ pour presque tout $\boldsymbol{\tau} \in \underline{\mathcal{E}}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$.

On peut modifier les définitions des espaces de Paley-Wiener de la façon suivante. On a défini l'espace $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les caractères des représentations $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$. Il est muni du produit elliptique, qui est hermitien et défini positif. Pour une W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, on a défini le sous-espace $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ engendré par les caractères des $\tilde{\pi}_{\boldsymbol{\tau}}$ comme ci-dessus telles que $\mu(\boldsymbol{\tau}) = \mu$. Ce sont des espaces de dimension finie uniformément bornée. Considérons une base B de $D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$ qui est réunion de bases B_μ des sous-espaces $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, qui est orthogonale pour le produit hermitien et qui vérifie la condition

(1) quand $\tilde{\pi}$ décrit B, les produits $(\tilde{\pi},\tilde{\pi})_{ell}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

On construit un espace de Paley-Wiener comme en 1.3, associé à l'ensemble B muni de la fonction d qui vaut $|\mu|$ sur chaque B_μ, les espaces V étant tous égaux à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. La même preuve qu'en 1.5 montre que cet espace s'identifie à $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G},\omega)$. On peut donc considérer un élément de cet espace comme une collection de fonctions $(\varphi_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$.

Tout ceci s'adapte si l'on remplace les espaces de fonctions sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par des espaces de fonctions invariantes par $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$. Par exemple, l'espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ s'identifie à l'espace $PW^{\infty}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$ des familles $(f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B} \in \mathbb{C}^B$ tels que, pour tout entier N, il existe $C_N > 0$ de sorte que

$$|f_{\tilde{\pi}}| \leq C_N(1+|\mu(\tilde{\pi})|)^{-N}$$

pour tout $\tilde{\pi} \in B$. Le sous-espace $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega,K)$ s'identifie au sous-espace $PW_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$ des familles presque toutes nulles. Notons que $\mathfrak{Z}(G)$ agit naturellement sur ces espaces. En particulier, pour $(f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$ comme ci-dessus et pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$, on a

$$z(f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B} = (z(\mu(\tilde{\pi}))f_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}.$$

On voit que le sous-espace $PW_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$ coïncide avec celui des éléments $\mathfrak{Z}(G)$-finis de $PW^{\infty}_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$.

La formule des traces locale munit $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ d'un produit hermitien défini positif. Pour $f,f'\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$, on a simplement

$$(f,f')=\sum_{\tilde{T}}\int_{\tilde{T}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}(1-\theta)(T(\mathbb{R}))}\overline{I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)}I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f')\,d\gamma,$$

où l'on somme sur les classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ de tores tordus maximaux elliptiques et où les mesures sont convenablement normalisées. La théorie des pseudo-coefficients nous dit qu'il existe un isomorphisme antilinéaire

$$\begin{array}{ccc} D_{ell,0}(\tilde{G},\omega) & \to & I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega,K) \\ \tilde{\pi} & \mapsto & f[\tilde{\pi}] \end{array}$$

tel que, pour tout $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ et tout $\tilde{\pi}\in D_{ell,0}(\tilde{G},\omega)$, on ait l'égalité $I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},\omega,f)=(\bar{f}[\tilde{\pi}],f)$. C'est une isométrie en ce sens que $(\tilde{\pi}_1,\tilde{\pi}_2)_{ell}=(f[\tilde{\pi}_2],f[\tilde{\pi}_1])$.

Notons ι l'antiautomorphisme antilinéaire de l'algèbre enveloppante de $G(\mathbb{R})$ qui prolonge antilinéairement l'application $X\mapsto -X$ de l'algèbre de Lie. Il se restreint en un automorphisme antilinéaire de $\mathfrak{Z}(G)$. En considérant $\mathfrak{Z}(G)$ comme l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$ invariants par W, on a $(\iota(z))(\lambda)=\overline{z(-\bar{\lambda})}$ pour tout $z\in\mathfrak{Z}(G)$ et tout $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. L'isométrie ci-dessus vérifie la relation $f[z\tilde{\pi}]=\iota(z)(f[\tilde{\pi}])$. Pour toute W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, elle identifie $D_{ell,0,\mu}(\tilde{G},\omega)$ avec le sous-espace $I_{cusp,-\bar{\mu}}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ des éléments $f\in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},\omega)$ tels que $zf=z(-\bar{\mu})f$ pour tout $z\in\mathfrak{Z}(G)$.

On suppose pour la suite de la section que $(G,\tilde{G},\omega)$ est quasi-déployé et à torsion intérieure.

On note $I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ le noyau de l'application naturelle $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))\to SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On a introduit en [I] 4.14 le sous-espace $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ des éléments dont les intégrales orbitales sont constantes sur toute classe de conjugaison stable formée d'éléments elliptiques fortement réguliers. On a montré que, par l'application naturelle ci-dessus, il s'envoyait bijectivement sur $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Il en résulte que l'on a la décomposition

$$I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))=I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))\oplus I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

Il est clair que chacun des sous-espaces est invariant par l'action de $\mathfrak{Z}(G)$. Des définitions et propriétés analogues valent pour les fonctions invariantes par $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$: on a

$$I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}})=I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}})\oplus I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}).$$

Il résulte de la définition du produit hermitien ci-dessus que la décomposition est orthogonale. La projection sur chacun des sous-espaces d'un élément $\mathfrak{Z}(G)$-fini l'est aussi. On a donc une décomposition similaire

$$I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K)=I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K)\oplus I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K)$$

où les sous-espaces sont les intersections des précédents avec $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}},K)$. Via l'isomorphisme $\tilde{\pi}\mapsto f[\tilde{\pi}]$, on obtient une décomposition

$$D_{ell,0}(\tilde{G})=D^{st}_{ell,0}(\tilde{G})\oplus D^{inst}_{ell,0}(\tilde{G}).$$

Pour chaque W-orbite μ dans $\mathfrak{h}^*$, elle se raffine en une décomposition

$$D_{ell,0,\mu}(\tilde{G}) = D^{st}_{ell,0,\mu}(\tilde{G}) \oplus D^{inst}_{ell,0,\mu}(\tilde{G}).$$

Pour chaque μ, fixons des bases orthonormées B^{st}_μ et B^{inst}_μ de chacun des sous-espaces ci-dessus. Notons B^{st} la réunion des B^{st}_μ et B^{inst} celle des B^{inst}_μ. Notons enfin $B = B^{st} \cup B^{inst}$. Réalisons comme plus haut notre espace $PW^\infty_{ell}(\tilde{G})$ à l'aide de cette base B. Notons $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$, resp. $PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})$ le sous-espace des $(\varphi_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$ tels que $\varphi_{\tilde{\pi}} = 0$ si $\tilde{\pi} \in B^{inst}$, resp. $\tilde{\pi} \in B^{st}$. Rappelons enfin que les espaces $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sont munis de topologies ([I] 5.3, qui reprenait Bouaziz et Renard).

Lemme. *Via l'isomorphisme de $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^\infty_{ell}(\tilde{G})$, les espaces $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ s'identifient respectivement à $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})$. La projection de $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$ se quotiente en un homéomorphisme de $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ sur $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$.*

Preuve. Notons $pw : I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^\infty_{ell}(\tilde{G})$ notre isomorphisme. Soit $\tilde{\pi} \in B$, considérons un élément $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tel que $pw(f) = (\varphi_{\tilde{\pi}'})_{\tilde{\pi}'\in B}$ vérifie $\varphi_{\tilde{\pi}'} = 0$ pour $\tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}$. On va prouver que

(2) si $\tilde{\pi} \in B^{st}$, resp. $\tilde{\pi} \in B^{inst}$, alors $f \in I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, resp. $f \in I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Soit ϕ la fonction sur $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ (que l'on identifie à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ via l'exponentielle) dont la transformée de Fourier est la restriction de $\varphi_{\tilde{\pi}}$ à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$. Elle est C^∞ et à support compact. On définit une fonction f' sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par $f'(\gamma) = (\tilde{\pi},\tilde{\pi})^{-1}_{ell}\phi(H_{\tilde{G}}(\gamma))f[\tilde{\pi}](\gamma)$. C'est un élément de $C^\infty_c(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour tout $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ fortement régulier, on a l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, f') = (\tilde{\pi},\tilde{\pi})^{-1}_{ell}\phi(H_{\tilde{G}}(\gamma))I^{\tilde{G}}(\gamma, f[\tilde{\pi}]).$$

Il en résulte que ces intégrales orbitales sont nulles si γ n'est pas elliptique et qu'elles ont les mêmes propriétés de stabilité que celles de $f[\tilde{\pi}]$. Donc l'image de f' dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ appartient à $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ si $\tilde{\pi} \in B^{st}$, à $I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ si $\tilde{\pi} \in B^{inst}$.

Pour $\tilde{\pi}' \in B$ et $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, on a

$$\tilde{\pi}'_\lambda(f') = \int_{\tilde{G}(\mathbb{R})} \tilde{\pi}'_\lambda(\gamma)f'(\gamma)\,d\gamma$$

$$= (\tilde{\pi},\tilde{\pi})^{-1}_{ell}\int_{\tilde{G}(\mathbb{R})^1}\int_{\mathcal{A}_{\tilde{G}}} \tilde{\pi}'(\gamma^1)e^{<H,\lambda>}f[\tilde{\pi}](\gamma^1)\phi(H)\,dH\,d\gamma^1$$

$$= (\tilde{\pi},\tilde{\pi})^{-1}_{ell}\varphi_{\tilde{\pi}}(\lambda)\tilde{\pi}'(f[\tilde{\pi}]).$$

Il en résulte que

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}'_\lambda, f') = \begin{cases} 0, & \text{si } \tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}, \\ \varphi_{\tilde{\pi}}(\lambda), & \text{si } \tilde{\pi}' = \tilde{\pi}. \end{cases}$$

Autrement dit, l'image de f' dans $PW^\infty_{ell}(\tilde{G})$ coïncide avec celle de f. Donc f est l'image de f' dans $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. L'assertion (2) en résulte.

Soit maintenant $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ telle que $pw(f) \in PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$. Ecrivons B^{st} comme réunion croissante de sous-ensembles finis B_i, pour $i \in \mathbb{N}$. Ecrivons $pw(f) = (\varphi_{\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$. Pour tout i, soit $f_i \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ l'élément tel que, en posant $pw(f_i) = (\varphi_{i,\tilde{\pi}})_{\tilde{\pi}\in B}$, on ait $\varphi_{i,\tilde{\pi}} = \varphi_{\tilde{\pi}}$ si $\tilde{\pi} \in B_i$, $\varphi_{i,\tilde{\pi}} = 0$ sinon. D'après (2), f_i appartient à $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Parce que pw

est un homéomorphisme, f est la limite des f_i. Il est clair par définition que $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})$ est un sous-espace fermé. Il en résulte que $f \in I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Donc $pw^{-1}(PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})) \subset I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On prouve de même que $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})) \subset I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Puisque la somme de $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G})$ et de $PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{G})$ est l'espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{G})$ tout entier et que l'intersection de $I^{st}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $I^{inst}_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est clairement réduite à 0, les inclusions précédentes sont des égalités. Cela prouve les premières assertions du lemme. La dernière en résulte immédiatement. $\square$

2.3 Un théorème de Paley-Wiener décrivant l'espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

Considérons l'espace

$$\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L}).$$

Par les constructions du paragraphe précédent, on peut le décomposer en somme directe

$$\left(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{L})\right) \oplus \left(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty,inst}_{ell}(\tilde{L})\right).$$

Le groupe $W(\tilde{M}_0)$ agit sur l'espace total. On vérifie que cette action conserve les deux composantes ci-dessus. On peut donc définir $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ et $PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$ comme les sous-espaces des invariants par $W(\tilde{M}_0)$ dans chacune des composantes. Notons $\underline{pw}^{st}$ le composé de l'isomorphisme $pw : I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty}(\tilde{G})$ et de la projection sur $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$. Supposons prouvé que, pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_{\tilde{L}})$ soit stable. Alors $\underline{pw}^{st}$ se quotiente en un homomorphisme continu $pw^{st} : SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty,st}(\tilde{G})$. Remarquons que l'hypothèse que l'on vient de faire résulte de l'hypothèse plus simple que, pour tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ est stable. En effet, la tensorisation par un élément $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$ respecte la stabilité. Comme toujours, on suppose par récurrence que les propriétés vraies pour $\tilde{G}$ le sont aussi pour les groupes tordus plus petits, donc pour les espaces de Levi. Donc, pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f)$ sur $I(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ est stable. Mais l'induction conserve la stabilité. Donc la distribution $f \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f_{\tilde{L}})$ est stable.

Théorème. *(i) Pour tout $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ est stable.*

(ii) L'application linéaire $pw^{st} : SI(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ est un homéomorphisme.

Dans le paragraphe suivant, on ramènera le théorème à une autre assertion qui sera prouvée en 2.7.

2.4 Un résultat d'instabilité

Notons

$$sym^W : \oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L}) \to PW^{\infty}(\tilde{G})$$

l'application de symétrisation $sym^W(\varphi) = \sum_{w\in W(\tilde{M}_0)} w(\varphi)$. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On munit $D_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ d'une base $B(\tilde{L})$ ayant les mêmes propriétés que la base B de 2.2.

En particulier, $B(\tilde{L})$ est réunion de $B^{st}(\tilde{L})$ et $B^{inst}(\tilde{L})$. On réalise l'espace $PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L})$ en utilisant cette base $B(\tilde{L})$. Fixons $\tilde{\pi} \in B(\tilde{L})$. On note $PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L})$ le sous-espace des $(\varphi_{\tilde{\pi}'})_{\tilde{\pi}' \in B(\tilde{L})} \in PW^{\infty}_{ell}(\tilde{L})$ tels que $\varphi_{\tilde{\pi}'} = 0$ si $\tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}$. C'est un unique espace de fonctions de Paley-Wiener sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$.

Proposition. *Pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et tout $\tilde{\pi} \in B^{inst}(\tilde{L})$, l'espace $pw^{-1} \circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L}))$ est inclus dans $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.*

Montrons que cette proposition entraîne le théorème. Elle entraîne

(1) l'espace $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$ est inclus dans $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

En effet, le même raisonnement que dans la preuve du lemme 2.2 montre que tout élément $f \in pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$ est limite d'une suite d'éléments f_i qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de $pw^{-1} \circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L})$, pour des couples $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$ vérifiant les hypothèses de la proposition. Puisque $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est fermé, cette proposition entraîne qu'un tel f appartient à cet espace.

On a mieux :

(2) $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$ est égal à $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Preuve. Soit $f \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. On peut la décomposer en $f = f' + f''$, où $pw(f') \in PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ et $pw(f'') \in PW^{\infty,inst}(\tilde{G})$. L'assertion (1) entraîne que f'' appartient à $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, donc f' aussi. Il suffit de prouver que $f' = 0$. En oubliant cela, on considère $f \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tel que $pw(f) \in PW^{\infty,st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et on veut prouver que $f = 0$. Par récurrence, on peut admettre l'assertion (i) du théorème pour tout espace de Levi propre $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$. Soit $\tilde{L}$ un tel espace de Levi, soit $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et soit $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. Comme on l'a expliqué dans le paragraphe précédent, la distribution $f' \mapsto I^{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda, f'_{\tilde{L}})$ est stable. Elle annule donc f. Il en résulte que $pw(f)$ n'a de composantes non nulles que dans les $PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{G})$ pour $\tilde{\pi} \in B^{st}(\tilde{G})$. Autrement dit, $pw(f)$ appartient au sous-espace $PW^{\infty,st}_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. A fortiori, f est cuspidale. Mais alors, le lemme 2.2 entraîne que $f = 0$. $\square$

Soit $\tilde{\pi} \in D^{st}_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Par définition de l'application pw, la distribution $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, f)$ annule l'espace $pw^{-1}(PW^{\infty,inst}(\tilde{G}))$. D'après (2), elle annule $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, ce qui signifie qu'elle est stable. Cela prouve l'assertion (i) du théorème. L'assertion (2) entraîne aussi que l'application $\underline{pw}^{st}$ a pour noyau $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, donc que pw^{st} est injective. Elle est surjective puisque $\underline{pw}$ l'est. Enfin, pw^{st} admet une section continue, à savoir l'application composée

$$PW^{\infty,st}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to PW^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R})) \overset{pw^{-1}}{\to} I(\tilde{G}(\mathbb{R})) \to SI(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

Donc pw^{st} est un homéomorphisme. Cela prouve le théorème.

Commençons la preuve de la proposition. Si $\tilde{L} = \tilde{G}$, l'assertion résulte du lemme 2.2. On suppose donc $\tilde{L}$ propre et on raisonne par récurrence sur $a_{\tilde{L}} = dim(\mathcal{A}_{\tilde{L}})$ en supposant la proposition démontrée pour tout couple $(\tilde{L}', \tilde{\pi}')$ analogue à $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$ tel que $a_{\tilde{L}'} < a_{\tilde{L}}$. On note simplement $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions de Paley-Wiener sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et on identifie $PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L})$ à $\mathcal{F}$. Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, on pose $f_\varphi = pw^{-1} \circ sym^W(\varphi)$. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ un espace de Levi propre de $\tilde{G}$. En notant $pw^{\tilde{M}}$ l'analogue de pw pour l'espace $\tilde{M}$, le terme $pw^{\tilde{M}}(f_{\varphi,\tilde{M}})$ se déduit aisément de $pw(f_\varphi)$. On voit qu'il n'a de composantes non nulles que dans les sous-espaces $PW^{\infty,inst}_{ell,0}(\tilde{L}')$ pour des $\tilde{L}' \subset \tilde{M}$ conjugués à $\tilde{L}$. En appliquant le théorème par récurrence à $\tilde{M}$, on voit que $f_{\varphi,\tilde{M}}$ appartient à $I^{inst}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. Cela étant vrai pour tout $\tilde{M}$ propre, les intégrales orbitales stables de f_φ sont donc nulles sur tout élément fortement régulier non elliptique de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Donc l'image de f_φ dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ appartient

au sous-espace $SI_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. D'après le lemme 2.2, il existe un unique $f_\varphi^{st} \in I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui a même image que f_φ dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Il s'agit de prouver que f_φ^{st} est nul. Toujours d'après le lemme 2.2, on peut fixer $\tilde{\sigma}_0 \in B^{st}(\tilde{G})$, $\lambda_0 \in i\mathcal{A}_{\tilde{G}}^*$, poser $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma_{0,\lambda_0}}$ et prouver que $I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f_\varphi^{st}) = 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, posons $\ell(\varphi) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f_\varphi^{st})$. Etudions l'application linéaire ℓ sur $\mathcal{F}$. Rappelons que $\mathfrak{Z}(G)$ agit naturellement sur $\mathcal{F}$: pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$, on a $(z\varphi)(\lambda) = z(\mu(\tilde{\pi}) + \lambda)\varphi(\lambda)$. Parce que f_φ^{st} est uniquement déterminé, l'application $\varphi \mapsto f_\varphi^{st}$ est équivariante pour les actions de $\mathfrak{Z}(G)$. Pour $z \in \mathfrak{Z}(G)$, on a donc

$$\ell(z\varphi) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, z(f_\varphi^{st})) = I^{\tilde{G}}(z\tilde{\sigma}, f_\varphi^{st}) = z(\mu(\tilde{\sigma}))I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f_\varphi^{st}) = z(\mu(\tilde{\sigma}))\ell(\varphi).$$

Notons J l'idéal des éléments $z \in \mathfrak{Z}(G)$ tels que $z(\mu(\tilde{\sigma})) = 0$. Alors ℓ annule $J\mathcal{F}$. Les lemmes des deux paragraphes suivants nous permettrons de préciser cet ensemble $J\mathcal{F}$.

2.5 Un lemme sur les fonctions de Paley-Wiener

On conserve les notations précédentes. Rappelons que $\mu(\tilde{\pi})$ est une W^L-orbite dans $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ et que $\mu(\tilde{\sigma})$ est une W-orbite dans $\mathfrak{h}^*$. Si l'intersection $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*) \cap \mu(\tilde{\sigma})$ est non vide, on note $(\lambda_i)_{i=1,...,m}$ la famille finie d'éléments de $\mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$ tels que cette intersection soit la réunion des $\mu(\tilde{\pi}) + \lambda_i$ pour $i = 1, ..., m$.

Lemme. *(i) Si $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*) \cap \mu(\tilde{\sigma}) = \emptyset$, on a l'égalité $J\mathcal{F} = \mathcal{F}$.*

(ii) Si cette intersection est non vide, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $J\mathcal{F}$ contienne toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en chaque point λ_i pour $i = 1, ..., m$.

Preuve de (i). On va montrer qu'il existe $z \in J$ tel que sa restriction à $\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$ soit constante de valeur 1. L'assertion en résulte puisqu'alors $\varphi = z\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$. Notons Y la projection de $\mu(\tilde{\sigma})$ sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ L'hypothèse signifie que $\mu(\tilde{\pi}) \cap Y = \emptyset$. Pour tout $x \in \mu(\tilde{\pi})$, on peut alors trouver un polynôme q_x de degré 1 sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ tel que $q_x(x) = 0$ et $q_x(y) \neq 0$ pour tout $y \in Y$. Posons $q = \prod_{x \in \mu(\tilde{\pi})} q_x$. Considérons q comme un polynôme sur $\mathfrak{h}^*$ via la projection $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$. Définissons un polynôme z_0 par $z_0(\nu) = \prod_{w \in W} q(w\nu)$. Il est invariant par W donc appartient à $\mathfrak{Z}(G)$. Il s'annule sur $\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$ car le polynôme q lui-même s'annule sur cet ensemble. Pour $\nu \in \mu(\tilde{\sigma})$ et $w \in W$, $w\nu$ appartient aussi à $\mu(\tilde{\sigma})$ et se projette sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ en un point $y \in Y$. On a alors $q(w\nu) = q(y) \neq 0$. Donc $z_0(\nu) \neq 0$, ce que l'on peut noter $z_0(\mu(\tilde{\sigma})) \neq 0$ puisque z_0 est invariant par W. Posons $z = 1 - z_0(\mu(\tilde{\sigma}))^{-1} z_0$. Cet élément répond à la question.

Preuve de (ii). Notons $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$. On montre d'abord

(1) il existe un entier $N \geq 1$ tel que tout élément de $\mathcal{P}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$ appartient à $J\mathcal{P}$.

Rappelons que $\mathfrak{Z}(G)$ est le sous-espace des invariants par W dans $\mathcal{P}$. Comme on sait, on peut fixer un sous-ensemble $(h_w)_{w \in W}$ de $\mathcal{P}$ tel que tout élément $Q \in \mathcal{P}$ s'écrive de façon unique $Q = \sum_{w \in W} h_w Q_w$, avec $Q_w \in \mathfrak{Z}(G)$. On peut de plus fixer un élément non nul $D \in \mathcal{P}$ et une matrice $(D_{w,w'})_{w,w' \in W}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ de sorte que, pour tout $w \in W$ et tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on ait l'égalité

$$D(\lambda)Q_w(\lambda) = \sum_{w' \in W} D_{w,w'}(\lambda)Q(w'\lambda).$$

On renvoie pour cela à [BR] preuve de la proposition 3.3. Notons $N-1$ le maximum des ordres d'annulation de D aux différents points de $\mu(\tilde{\sigma})$. Il résulte de la formule ci-dessus que, si Q s'annule à l'ordre N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$, alors chaque Q_w s'annule sur $\mu(\tilde{\sigma})$. Puisque $Q_w \in \mathfrak{Z}(G)$, cela signifie que $Q_w \in J$. Mais alors $Q = \sum_{w\in W} h_w Q_w$ appartient à $J\mathcal{P}$. Cela prouve (1).

Notons $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions de Paley-Wiener sur $\mathfrak{h}^*$. Soit Y un ensemble fini d'éléments de $\mathfrak{h}^*$ et soit $\mathbf{n} = (n_y)_{y\in Y}$ une famille d'entiers naturels. Notons $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$, resp. $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$, l'espace des éléments de $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{P}$, qui s'annulent en tout point $y \in Y$ à l'ordre au moins n_y. On va montrer

(2) on a l'égalité $\mathcal{H}_{\mathbf{n}} = \mathcal{P}_{\mathbf{n}}\mathcal{H}$.

C'est trivial si tous les n_y sont nuls. Supposons qu'il existe un y pour lequel $n_y > 0$, fixons-en un que l'on note y_0. Notons $\mathbf{n}' = (n'_y)_{y\in Y}$, où $n'_y = n_y$ si $y \neq y_0$ et $n'_{y_0} = n_{y_0} - 1$. Notons $\mathcal{P}_{y_0}$ l'espace des polynômes qui s'annulent en y_0. L'assertion (2) résulte par récurrence de l'assertion

(3) on a l'égalité $\mathcal{H}_{\mathbf{n}} = \mathcal{P}_{y_0}\mathcal{H}_{\mathbf{n}'}$.

On ne perd rien à supposer $y_0 = 0$. On peut fixer un système de coordonnées sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ de sorte que les coordonnées $y_1, ..., y_n$ de y soient toutes non nulles pour $y \in Y$, $y \neq 0$. On écrit tout élément de $\mathfrak{h}^*$ sous la forme $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$. Fixons une fonction de Paley-Wiener h sur $\mathbb{C}$ telle que $h(0) = 1$ et h s'annule à l'ordre au moins n_y en tout y_i, pour $y \in Y - \{0\}$ et $i = 1, ..., n$. Soit $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbf{n}}$. Pour $i = 1, ..., n$, introduisons la fonction ϕ_i sur $\mathfrak{h}^*$ définie par

$$\phi_i(\nu) = \varphi(0, ..., 0, \nu_i, ..., \nu_n) \prod_{j=1,...,i-1} h(\nu_j).$$

Elle est de Paley-Wiener. Elle s'annule à l'ordre au moins n_0 en 0 car il en est ainsi du premier facteur. Le deuxième facteur s'annule à l'ordre au moins $(i-1)n_y$ en tout point $y \in Y - \{0\}$. Si $i \geq 2$, ϕ_i s'annule donc à l'ordre au moins n_y en un tel point. Si $i = 1$, on a simplement $\phi_1 = \varphi$ et cette propriété est encore vérifiée par hypothèse. Donc $\phi_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{n}}$. Par construction, pour $i = 1, ..., n-1$, la fonction $\phi_i - \phi_{i+1}$ s'annule sur l'hyperplan $\nu_i = 0$. En posant $\phi_{n+1} = 0$, il en est de même de la fonction $\phi_n - \phi_{n+1}$ car φ s'annule en 0. On sait qu'une fonction de Paley-Wiener qui s'annule sur un tel hyperplan $\nu_i = 0$ est divisible dans $\mathcal{H}$ par ν_i. Il existe donc pour tout $i = 1, ..., n$ un élément $\varphi_i \in \mathcal{H}$ tel que $\nu_i\varphi_i(\nu) = \phi_i(\nu) - \phi_{i+1}(\nu)$. Il est clair que φ_i appartient à $\mathcal{H}_{\mathbf{n}'}$. On a d'autre part l'égalité

$$\sum_{i=1,...,n} \nu_i\varphi_i(\nu) = \phi_1(\nu) - \phi_{n+1}(\nu) = \varphi(\nu),$$

ce qui réalise φ comme un élément de $\mathcal{P}_0\mathcal{H}_{\mathbf{n}'}$. Cela prouve (3) et (2).

En appliquant (2) à l'ensemble $Y = \mu(\tilde{\sigma})$ et à la famille $\mathbf{n} = (n_y)_{y\in Y}$ telle que n_y soit pour tout y un entier vérifiant la relation (1), on obtient

(4) il existe un entier N tel que toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $\mu(\tilde{\sigma})$ appartienne à $J\mathcal{H}$.

Fixons un tel entier N. Notons maintenant Y l'ensemble des projections dans $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ des éléments de $\mu(\tilde{\sigma})$. Il contient $\mu(\tilde{\pi})$ par hypothèse. Fixons une fonction de Paley-Wiener h sur $\mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ qui vaut 1 en tout point de $\mu(\tilde{\pi})$ et qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de $Y - \mu(\tilde{\pi})$. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$ s'annulant à l'ordre au moins N en tout λ_i, $i = 1, ..., m$. Définissons une fonction φ' sur $\mathfrak{h}^*$ par $\varphi'(\lambda^{\tilde{L}} + \lambda_{\tilde{L}}) = h(\lambda^{\tilde{L}})\varphi(\lambda_{\tilde{L}})$, pour $\lambda^{\tilde{L}} \in \mathfrak{h}^{\tilde{L},*}$ et $\lambda_{\tilde{L}} \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. C'est un élément de $\mathcal{H}$ qui s'annule à l'ordre au moins N en tout point de

$\mu(\tilde{\sigma})$. Appliquant (4), on peut l'écrire

$$\varphi' = \sum_{j=1,\dots,k} z_j \varphi'_j,$$

où les z_j appartiennent à J et les φ'_j appartiennent à $\mathcal{H}$. On fixe un élément $x_0 \in \mu(\tilde{\pi})$ et on définit pour tout j une fonction φ_j sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ par $\varphi_j(\lambda) = \varphi'_j(x_0+\lambda)$. C'est un élément de $\mathcal{F}$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$, on a l'égalité

$$\varphi(\lambda) = \varphi'(x_0+\lambda) = \sum_{j=1,\dots,k} z_j(\mu(\tilde{\pi})+\lambda)\varphi_j(\lambda).$$

Autrement dit, $\varphi = \sum_{j=1,\dots,k} z_j\varphi_j$ et φ appartient à $J\mathcal{F}$. Cela achève la preuve. $\square$

Puisque notre forme linéaire ℓ annule $J\mathcal{F}$, il s'ensuit du (i) du lemme que $\ell = 0$ si $(\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}) \cap \mu(\tilde{\sigma}) = \emptyset$. Puisqu'on veut justement prouver que ℓ est nulle, on a terminé dans ce cas. On suppose dans la suite que $(\mu(\tilde{\pi})+\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}) \cap \mu(\tilde{\sigma}) \neq \emptyset$. En conséquence du (ii) du lemme, on a

(5) pour $i = 1, ..., m$, il existe un opérateur différentiel D_i sur $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ tel que

$$\ell(\varphi) = \sum_{i=1,\dots,m} (D_i\varphi)(\lambda_i)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$.

2.6 Fonctions f_φ à support assez régulier

Soit $\varphi \in \mathcal{F}$. Introduisons la fonction ϕ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dont la transformée de Fourier est la restriction de φ à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$. On introduit la fonction $f^{\tilde{L}}_\varphi$ sur $\tilde{L}(\mathbb{R})$ définie par $f^{\tilde{L}}_\varphi(\gamma) = \phi(H_{\tilde{L}}(\gamma))f[\tilde{\pi}](\gamma)$ pour tout $\gamma \in \tilde{L}(\mathbb{R})$. On a vu dans la preuve du lemme 2.2 que cette fonction appartient à $C^\infty_{cusp}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ et que, en notant encore $f^{\tilde{L}}_\varphi$ son image dans $I(\tilde{L}(\mathbb{R}))$, $pw^{\tilde{L}}(f^{\tilde{L}}_\varphi)$ est l'élément de $PW^\infty_{ell}(\tilde{L})$ dont les composantes sont nulles pour $\tilde{\pi}' \in B(\tilde{L})-\{\tilde{\pi}\}$ et dont la composante sur $\tilde{\pi}$ est φ. Introduisons l'espace

$$(1) \qquad \oplus_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0);a_{\tilde{M}}=a_{\tilde{L}}} I_{cusp}(\tilde{M}(\mathbb{R})).$$

Le groupe $W(\tilde{M}_0)$ y agit naturellement et on a montré en [I] 4.2 que le sous-espace des invariants était le gradué $Gr^{a_{\tilde{L}}}I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ d'ordre $a_{\tilde{L}}$ d'une certaine filtration $(\mathcal{F}^nI(\tilde{G}(\mathbb{R})))_{n=a_{\tilde{M}_0},\dots,a_{\tilde{G}}}$ de $I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ (la notation $\mathcal{F}$ pour cette filtration n'a rien à voir avec notre espace de Paley-Wiener). On peut considérer $f^{\tilde{L}}_\varphi$ comme un élément de l'espace (1). Posons

$$f^{a_{\tilde{L}}}_\varphi = \sum_{w\in W(\tilde{M}_0)} w(f^{\tilde{L}}_\varphi).$$

On voit alors que f_φ est un élément du terme $\mathcal{F}^{a_{\tilde{L}}}I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ de notre filtration et que son image dans $Gr^{a_{\tilde{L}}}I(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ est $f^{a_{\tilde{L}}}_\varphi$. Donc, pour un espace de Levi $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ elliptique dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes

(2) si $a_{\tilde{M}} > a_{\tilde{L}}$ ou si $a_{\tilde{M}} = a_{\tilde{L}}$ et $\tilde{M}$ n'est pas conjugué à $\tilde{L}$, $I^{\tilde{G}}(\gamma, f_\varphi) = 0$;
(3) si $\tilde{M} = \tilde{L}$,

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, f_\varphi) = \sum_{w \in W(\tilde{L})} I^{\tilde{L}}(w(\gamma), f_\varphi^{\tilde{L}}) = \sum_{w \in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma)))I^{\tilde{L}}(w\gamma, f[\tilde{\pi}]),$$

où $W(\tilde{L}) = Norm_{\tilde{G}(\mathbb{R})}(\tilde{L})/L(\mathbb{R})$.

Supposons que

(4) le support de $f_\varphi^{\tilde{L}}$ soit formé d'éléments $\gamma \in \tilde{L}(\mathbb{R})$ qui sont $\tilde{G}$-équisinguliers, c'est-à-dire tels que $L_\gamma = G_\gamma$.

Dans ce cas, on peut trouver un voisinage compact U_1 dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$ de ce support et un voisinage compact U_2 de U_1 tels que tout élément de U_2 soit conjugué par $G(\mathbb{R})$ à un élément de $\tilde{L}(\mathbb{R})$. On peut trouver une fonction h sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est invariante par conjugaison par $G(\mathbb{R})$, qui vaut 1 sur U_1 et qui vaut 0 sur tout élément $\gamma \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ qui n'est pas conjugué à un élément de U_2. Posons $g_\varphi = hf_\varphi$. Cette fonction vérifie des propriétés analogues à (2) et (3). La propriété de h entraîne que l'on a aussi $I^{\tilde{G}}(\gamma, g_\varphi) = 0$ pour $\tilde{M}$ et γ comme plus haut, si $a_{\tilde{M}} < a_{\tilde{L}}$. En définitive, pour un espace de Levi $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et pour un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ elliptique dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes

(5) si $\tilde{M}$ n'est pas conjugué à $\tilde{L}$, $I^{\tilde{G}}(\gamma, g_\varphi) = 0$;
(6) si $\tilde{M} = \tilde{L}$,

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, g_\varphi) = \sum_{w \in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma)))I^{\tilde{L}}(w\gamma, f[\tilde{\pi}]).$$

De ces formules et de l'instabilité de $\tilde{\pi}$ résulte que $g_\varphi \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. De la comparaison de (2) et (3) d'une part, de (5) et (6) d'autre part, résulte que, pour tout $n \geq a_{\tilde{L}}$, les composantes dans

$$(7) \qquad (\oplus_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0); a_{\tilde{M}} = n} PW_{ell}^{\infty}(\tilde{M}))^{W(\tilde{M}_0)}$$

de $pw(g_\varphi)$ et de $pw(f_\varphi)$ sont égales. Elles sont donc nulles si $n > a_{\tilde{L}}$ et égales à $sym^W(\varphi)$ si $n = a_{\tilde{L}}$. Supposons $a_{\tilde{G}} < n < a_{\tilde{L}}$. On peut admettre le théorème 2.3 par récurrence pour les $\tilde{M}$ tels que $a_{\tilde{M}} = n$. C'est-à-dire que $\tilde{\pi}'$ est stable pour tout $\tilde{\pi}' \in B^{st}(\tilde{M})$. L'instabilité de g_φ implique alors que la composante de $pw(g_\varphi)$ dans l'espace (7) appartient au sous-espace

$$(\oplus_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0); a_{\tilde{M}} = n} PW_{ell}^{\infty, inst}(\tilde{M}))^{W(\tilde{M}_0)}.$$

On a posé une hypothèse de récurrence au début de la preuve de la proposition 2.4. Elle nous dit que l'image par pw^{-1} de l'espace ci-dessus est inclus dans $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})$. Reste le cas où $n = a_{\tilde{G}}$. L'espace (7) se réduit à $PW_{ell}^{\infty}(\tilde{G})$, que l'on peut décomposer en $PW_{ell}^{\infty,st}(\tilde{G}) \oplus PW_{ell}^{\infty,inst}(\tilde{G})$. On note $pw_{ell}^{st}(g_\varphi)$ et $pw_{ell}^{inst}(g_\varphi)$ les projections de $pw(g_\varphi)$ dans chacun de ces sous-espaces. Le lemme 2.2 nous dit que $pw_{ell}^{st}(g_\varphi)$ appartient à $I_{cusp}^{st}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ tandis que $pw_{ell}^{inst}(g_\varphi)$ appartient à $I_{cusp}^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})$. Posons $g_\varphi^{st} = pw^{-1}(pw_{ell}^{st}(g_\varphi))$. Cela prouve que

$$g_\varphi \in f_\varphi + g_\varphi^{st} + I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

Puisque g_φ appartient elle-même à $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on obtient

$$f_\varphi + g_\varphi^{st} \in I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R})).$$

En se rappelant la définition de f_φ^{st}, on obtient $f_\varphi^{st} = -g_\varphi^{st}$. Alors

$$\ell(\varphi) = I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, f_\varphi^{st}) = -I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, g_\varphi^{st}) = -I^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}, g_\varphi),$$

la dernière égalité résultant de la définition de g_φ^{st}. Comme on sait, le caractère de $\tilde{\sigma}$ est donné par une fonction localement intégrable $\Theta_{\tilde{\sigma}}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{T}$ un tore tordu maximal elliptique de $\tilde{L}$ (l'existence de $\tilde{\pi} \in D_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}))$ implique l'existence d'un tel tore). Parce que l'on est dans une situation à torsion intérieure, on sait qu'il n'y en a qu'un, à conjugaison près par $L(\mathbb{R})$ et on peut supposer que tout élément de $W(\tilde{L})$ conserve ce tore tordu. L'égalité précédente et les relations (5) et (6) entraînent l'égalité

$$\ell(\varphi) = -c \sum_{w \in W(\tilde{L})} \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \Theta_{\tilde{\sigma}}(\gamma) \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma))) I^{\tilde{L}}(w\gamma, f[\tilde{\pi}])\, d\gamma,$$

la constante $c > 0$ ne dépendant que des mesures. Puisque $\Theta_{\tilde{\sigma}}$ est invariant par $W(\tilde{M}_0)$, cette expression se simplifie d'ailleurs en

$$\ell(\varphi) = -c|W(\tilde{L})| \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})} D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \Theta_{\tilde{\sigma}}(\gamma) \phi(H_{\tilde{L}}(\gamma)) I^{\tilde{L}}(\gamma, f[\tilde{\pi}])\, d\gamma.$$

En se rappelant la décomposition $\tilde{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_{\tilde{L}} \times \tilde{L}(\mathbb{R})^1$ et en posant $\tilde{T}(\mathbb{R})^1 = \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{L}(\mathbb{R})^1$, on obtient

$$(8) \qquad \ell(\varphi) = -c|W(\tilde{L})| \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})^1} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{L}}} D^{\tilde{G}}(exp(H)\gamma^1)^{1/2}$$
$$\Theta_{\tilde{\sigma}}(exp(H)\gamma^1) \phi(H) I^{\tilde{L}}(\gamma^1, f[\tilde{\pi}])\, dH\, d\gamma^1.$$

2.7 Utilisation de la propriété : une représentation elliptique est supertempérée

Fixons $\varphi \in \mathcal{F}$. Pour $X \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}$, définissons la fonction $\varphi_X \in \mathcal{F}$ par $\varphi_X(\lambda) = e^{<X,\lambda>}\varphi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$. Si ϕ, resp. ϕ_X, est la fonction sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dont la transformée de Fourier est la restriction de φ, resp. φ_X, à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$, on a $\phi_X(H) = \phi(H - X)$. Donc, φ étant fixé, la fonction f_{φ_X} vérifie l'hypothèse (4) du paragraphe précédent pour tout X assez grand. Fixons un réel $\epsilon > 0$ assez petit et un réel $C > 0$. Considérons le domaine $\mathcal{D}$ des $X \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}$ qui vérifient les deux conditions

(1) $|X| > C$;

(2) pour tout $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{L}})$, $|\alpha(X)| > \epsilon|X|$.

On fixe C assez grand pour que f_{φ_X} vérifie l'hypothèse (4) du paragraphe précédent pour tout $X \in \mathcal{D}$. Soit $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{L})$, notons $\Delta_{\tilde{P}}$ la base de $\Sigma(A_{\tilde{L}})$ associée à $\tilde{P}$ et $\mathcal{C}_{\tilde{P}} \subset \mathcal{A}_{\tilde{L}}$ la chambre positive associée à $\tilde{P}$. Supposons $X \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_{\tilde{P}}$. On peut appliquer la formule (8) du paragraphe précédent, qui, par changement de variable $H \mapsto H + X$, nous donne

$$(3) \qquad \ell(\varphi_X) = -c|W(\tilde{L})| \int_{\tilde{T}(\mathbb{R})^1} \int_{\mathcal{A}_{\tilde{L}}} D^{\tilde{G}}(exp(H+X)\gamma^1)^{1/2}$$

$$\Theta_{\tilde{\sigma}}(exp(H+X)\gamma^1) \phi(H) I^{\tilde{L}}(\gamma^1, f[\tilde{\pi}])\, dH\, d\gamma^1.$$

Puisque ϕ est à support compact, on a $H+X \in \mathcal{C}_{\tilde{P}}$ si $\phi(H) \neq 0$, pourvu que C soit choisi assez grand. On sait que l'on peut alors développer $D^{\tilde{G}}(exp(H+X)\gamma^1)^{1/2}\Theta_{\tilde{\sigma}}(exp(H+X)\gamma^1)$ comme somme finie

$$\sum_{j=1,\dots,k} q_j(H+X)e^{<H+X,\nu_j>}\Theta_j(\gamma^1),$$

où les q_j sont des polynômes, les ν_j sont des éléments de $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et les Θ_j sont des fonctions bornées sur $\tilde{T}(\mathbb{R})^1$, C^∞ sur le sous-ensemble des éléments réguliers. On se rappelle que $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{0,\lambda_0}$, où $\tilde{\lambda}_0 \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ et $\tilde{\sigma}_0$ est une représentation elliptique. Moeglin a prouvé que $\tilde{\sigma}_0$ était supertempérée ([Moe]). Il en résulte que les $Re(\nu_j)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients négatifs ou nuls des éléments de $\Delta_{\tilde{P}}$, l'un au moins des coefficients étant strictement négatif. Il résulte alors de la formule (3) que $lim_{X\in\mathcal{D}\cap\mathcal{C}_{\tilde{P}},|X|\to\infty}\ell(\varphi_X) = 0$. Cela étant vrai pour tout $\tilde{P}$, on a plus simplement $lim_{X\in\mathcal{D},|X|\to\infty}\ell(\varphi_X) = 0$. Mais il résulte de 2.5(5) et de la définition de φ_X que $\ell(\varphi_X)$ est un polynôme exponentiel en X, c'est-à-dire que

$$\ell(\varphi_X) = \sum_{i=1,\dots,m} q_i(X)e^{<X,\lambda_i>},$$

pour des éléments λ_i de $\mathcal{A}^*_{\tilde{L},\mathbb{C}}$ et des polynômes q_i. Notons que cette égalité est cette fois vraie pour tout X. Le lemme ci-dessous (appliqué à l'ouvert U des éléments de $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ qui vérifient (2)) entraîne que ce polynôme exponentiel est identiquement nul. En particulier, pour $X = 0$, $\ell(\varphi) = 0$. Cela achève la preuve de la proposition 2.4 et du théorème 2.3.

Lemme. *Soit V un espace euclidien (de dimension finie), soit U un ouvert de V invariant par multiplication par $\mathbb{R}^\times$ et soit f un polynôme exponentiel sur V. Supposons $lim_{X\in U,|X|\to\infty}f(X) = 0$. Alors $f = 0$.*

Preuve. On écrit comme ci-dessus

$$f(X) = \sum_{i=1,\dots,m} q_i(X)e^{<X,\lambda_i>}$$

où les λ_i sont distincts et les q_i sont non nuls. Si f n'est pas nul (i.e. $m \geq 1$), on peut trouver un élément $X_0 \neq 0$ de U tel que les produits $< X_0, \lambda_i >$ soient deux-à-deux distincts et $q_i(X_0) \neq 0$ pour tout i. La restriction f_D de f à la droite D passant par X_0 est alors un polynôme exponentiel non nul qui vérifie $lim_{|X|\to\infty}f_D(X) = 0$. Cette construction nous ramène au cas où V est une droite, auquel cas l'assertion est un simple exercice que l'on laisse au lecteur. □

2.8 L'espace $D^{st}_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$

On note $D^{st}_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ le sous-espace des éléments de $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui sont des distributions stables, c'est-à-dire qui annulent $I^{inst}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème 2.3 et des relations 1.2(2) et 2.4(2).

Corollaire. *On a l'égalité*

$$D^{st}_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R})) = \Big(\oplus_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R})))\Big)^{W(\tilde{M}_0)}.$$

2.9 L'espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$

On note $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ l'image de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ dans $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$. On fixe des bases $B(\tilde{L})$ comme en 2.4. On note $PW^{st}(\tilde{G})$ le sous-espace de $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ formé des familles $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ telles que l'ensemble des $(\tilde{L}, \tilde{\pi})$ pour lesquels $\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}} \neq 0$ est fini.

Corollaire. *L'application pw^{st} se restreint en un isomorphisme de $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ sur $PW^{st}(\tilde{G})$.*

Preuve. D'après le théorème de Delorme et Mezo, $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ s'envoie par pw sur $PW(\tilde{G})$. La projection dans $PW^{\infty,st}(\tilde{G})$ de cet espace est égale à $PW^{st}(\tilde{G})$. Donc pw^{st} se restreint en une surjection de $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ sur $PW^{st}(\tilde{G})$. Cette restriction est évidemment injective puisque pw^{st} l'est. $\square$

3 Transfert

3.1 Définition d'un transfert spectral elliptique

On revient au cas où $(G, \tilde{G}, \omega)$ est quelconque. Comme on l'a dit en 2.2, on fixe des mesures de Haar sur tous les groupes qui apparaissent. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(G, \tilde{G}, \omega)$. Shelstad a prouvé l'existence du transfert

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) & \to & SI(\mathbf{G}') \\ f & \mapsto & f^{\mathbf{G}'} \end{array}$$

cf. [S]. Il envoie $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ dans $SI_{cusp}(\mathbf{G}')$. Soit $\tilde{\sigma} \in D_{ell,0}^{st}(\mathbf{G}')$, cf. 2.1. Considérons l'application linéaire sur $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ définie par $f \mapsto S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'})$. Le lemme 2.1 et le fait que $\tilde{\sigma}$ est $\mathfrak{Z}(\mathbf{G}')$-finie implique que cette forme linéaire est elle-même $\mathfrak{Z}(G)$-finie. On a défini l'espace $D_{ell,0}^{st}(\mathbf{G}')$ de sorte que cette forme linéaire se factorise en une forme linéaire sur $I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{G}}, \omega)$, cf. 2.1(2). Il existe donc un élément $\tilde{\tau} \in D_{ell,0}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$, nécessairement unique, tel que

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}, f) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'})$$

pour tout $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. Plus généralement, pour $\tilde{\sigma}$ comme ci-dessus et pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G}',\mathbb{C}} \simeq \mathcal{A}^*_{\tilde{G},\mathbb{C}}$, on a

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}_\lambda, f) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}_\lambda, f^{\mathbf{G}'})$$

pour tout $f \in I_{cusp}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. En précisant le raisonnement ci-dessus, on voit qu'avec les définitions de 2.1, on a l'égalité $\tilde{\mu}(\tilde{\tau}_\lambda) = \tilde{\mu}(\tilde{\sigma}_\lambda)$.

On appelle transfert spectral elliptique l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} D_{ell}^{st}(\mathbf{G}') & \to & D_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega) \\ \tilde{\sigma}_\lambda & \mapsto & \tilde{\tau}_\lambda \end{array}$$

où ici, λ appartient à $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$.

3.2 Le théorème

Les données sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Théorème. *Soit $\tilde{\sigma} \in D_{ell}^{st}(\mathbf{G}')$, notons $\tilde{\tau} \in D_{ell}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ son transfert spectral elliptique. Alors $\tilde{\tau}$ est le transfert de $\tilde{\sigma}$, c'est-à-dire que l'on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}, f) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'})$$

pour tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$.

Preuve. Pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on fixe une base orthonormée $B(\tilde{L})$ de $D_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$ et on réalise l'espace $PW_{ell}^{\infty}(\tilde{L}, \omega)$ à l'aide de cette base. Les deux membres de l'égalité de l'énoncé sont continus en f. Grâce au théorème de Paley-Wiener, il suffit de fixer $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi} \in B(\tilde{L})$ et de prouver que cette égalité est vérifiée pour $f \in pw^{-1} \circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L}, \omega))$, où on utilise les mêmes notations qu'en 2.4. C'est vrai par définition du transfert spectral elliptique si $\tilde{L} = \tilde{G}$. On suppose donc $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ et on raisonne par récurrence sur $a_{\tilde{L}}$. Puisque $\tilde{\tau}$ est elliptique et $\tilde{L} \neq \tilde{G}$, on a $I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}, f) = 0$ pour tout $f \in pw^{-1} \circ sym^W(PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L}, \omega))$. Il s'agit de prouver que l'on a aussi $S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'}) = 0$. On utilise les mêmes notations qu'en 2.4 : on note $\mathcal{F} = PW_{\tilde{\pi}}(\tilde{L}, \omega)$ et $f_{\varphi} = pw^{-1} \circ sym^W(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{F}$. On définit l'application linéaire ℓ sur $\mathcal{F}$ par $\ell(\varphi) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, (f_{\varphi})^{\mathbf{G}'})$. On a défini la $W^{G'}$-orbite $\tilde{\mu}(\tilde{\sigma})$ dans $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$. On note simplement $\mu_{\tilde{\sigma}}$ la W-orbite qu'elle engendre dans $\mathfrak{h}^*$. Le lemme 2.1 entraîne que l'on a l'égalité

$$\ell(z\varphi) = z(\mu_{\tilde{\sigma}})\ell(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$ et $z \in \mathfrak{Z}(G)$. Le lemme 2.5 a de nouveau les conséquences suivantes :

(1) si $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*) \cap \mu_{\tilde{\sigma}} = \emptyset$, alors $\ell = 0$.

Dans ce cas, on a fini. Supposons au contraire que $(\mu(\tilde{\pi}) + \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*) \cap \mu_{\tilde{\sigma}} \neq \emptyset$. Alors

(2) il y a un nombre fini de points $\lambda_i \in \mathcal{A}_{\tilde{L},\mathbb{C}}^*$, pour $i = 1, ..., m$, et, pour tout i, un opérateur différentiel D_i de sorte que

$$\ell(\varphi) = \sum_{i=1,...,m} (D_i\varphi)(\lambda_i).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{F}$. On introduit comme en 2.6 une fonction $f_{\varphi}^{\tilde{L}} \in I_{cusp}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \omega)$. Supposons que le support de cette fonction vérifie la condition 2.6(4). On construit alors l'élément $g_{\varphi} \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$ qui vérifie des égalités analogues à 2.6(5) et (6). Précisément, pour un espace de Levi $\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et un élément $\gamma \in \tilde{M}(\mathbb{R})$ elliptique dans $\tilde{M}(\mathbb{R})$ et fortement régulier dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on a

(3) si $\tilde{M}$ n'est pas conjugué à $\tilde{L}$, $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, g_{\varphi}) = 0$;

(4) si $\tilde{M} = \tilde{L}$,

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, g_{\varphi}) = \sum_{w \in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma)))I^{\tilde{L}}(\gamma, \omega, w^{-1}(f[\tilde{\pi}])).$$

L'image g_{φ} est somme de f_{φ} et de termes $g_{\varphi,n}$, pour $n = a_{\tilde{G}}, ...a_{\tilde{L}} - 1$, où $pw(g_{\varphi,n})$ appartient à

$$(\oplus_{\tilde{M} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0); a_{\tilde{M}} = n} PW_{ell}^{\infty}(\tilde{M}, \omega))^{W(\tilde{M}_0)}$$

Parce que l'application $f \mapsto S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f)$ est continue, l'hypothèse de récurrence nous dit que $S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g^{\mathbf{G}'}_{\varphi,n}) = 0$ pour tout $n = a_{\tilde{G}}+1, ..., a_{\tilde{L}}-1$. En posant simplement $g_{\varphi,ell} = g_{\varphi,a_{\tilde{G}}}$, on obtient

$$(5) \qquad \ell(\varphi) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'}_{\varphi}) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g^{\mathbf{G}'}_{\varphi}) - S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g^{\mathbf{G}'}_{\varphi,ell}).$$

Puisque $g_{\varphi,ell}$ est cuspidale, la définition du transfert spectral elliptique nous permet de récrire

$$\ell(\varphi) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g^{\mathbf{G}'}_{\varphi}) - I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}, g_{\varphi,ell}) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g^{\mathbf{G}'}_{\varphi}) - I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}, g_{\varphi}).$$

On fixe $\varphi \in \mathcal{F}$. Soit $X \in \mathcal{A}_{\tilde{L}}$. On définit la fonction φ_X comme en 2.7. Pour un domaine $\mathcal{D}$ comme dans ce paragraphe, la fonction φ_X vérifie la condition 2.6(4) pour $X \in \mathcal{D}$. Parce que $\tilde{\tau}$ est elliptique, donc supertempérée, le même raisonnement qu'en 2.7 montre que

$$(6) \qquad lim_{X\in\mathcal{D};|X|\to\infty} I^{\tilde{G}}(\tilde{\tau}, g_{\varphi_X}) = 0.$$

A l'aide des formules (3) et (4), on calcule aisément les intégrales orbitales stables de la fonction $g^{\mathbf{G}'}_{\varphi_X}$. On fixe des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour $\mathbf{G}'$, en supposant pour simplifier que le caractère $\lambda_{\mathfrak{A}_{G'_1}}$ de 2.1 est trivial. Soit $\tilde{L}'$ un espace de Levi de $\tilde{G}'$. Notons $\tilde{L}'_1$ son image réciproque dans $\tilde{G}'_1$. Soit $\delta_1 \in \tilde{L}'_1(\mathbb{R})$ un élément $\tilde{G}$-régulier et elliptique dans $\tilde{L}'_1(\mathbb{R})$. Il lui correspond un sous-ensemble de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est soit vide, soit une classe de conjugaison stable d'éléments fortement réguliers. Si cet ensemble ne contient aucun élément elliptique de $\tilde{L}(\mathbb{R})$, il résulte de (3) que

$$S^{G'_1}_{\lambda_1}(\delta_1, g^{\tilde{G}'_1}_{\varphi_X}) = 0.$$

Supposons qu'il corresponde à δ_1 un élément $\gamma \in \tilde{L}(\mathbb{R})$ qui est elliptique. Cela entraîne que les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{L}'}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ sont isomorphes et que $H_{\tilde{L}}(\gamma) = H_{\tilde{L}'}(\delta)$ (cf. 2.1). Fixons un ensemble de représentants $(\gamma_j)_{j=1,...,k}$ des classes de conjugaison par $L(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{L}(\mathbb{R})$. On sait que c'est aussi un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$. De plus, $H_{\tilde{L}}(\gamma_j) = H_{\tilde{L}}(\gamma)$ pour tout j. On a alors

$$S^{G'_1}_{\lambda_1}(\delta_1, g^{\tilde{G}'_1}_{\varphi_X}) = \sum_{j=1,...,k} [Z_G(\gamma_j;\mathbb{R}) : G_{\gamma_j}(\mathbb{R})]^{-1}\Delta_1(\delta_1, \gamma_j)$$

$$\sum_{w\in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}}(\gamma_j)) - X) I^{\tilde{L}}(\gamma_j, \omega, w^{-1}(f[\tilde{\pi}])).$$

Pour tout $w \in W(\tilde{L})$, notons g_w le transfert dans $SI_{\lambda_1}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{\tilde{L}'_1})$ de la fonction $w^{-1}(f[\tilde{\pi}])$. On obtient l'égalité

$$S^{G'_1}_{\lambda_1}(\delta_1, g^{\tilde{G}'_1}_{\varphi_X}) = \sum_{w\in W(\tilde{L})} \phi(w(H_{\tilde{L}'}(\delta)) - X) S^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(\delta_1, g_w).$$

A l'aide de ces formules, on peut adapter la preuve de 2.7 : le fait que $\tilde{\sigma}$ soit supertempéré entraîne que

$$lim_{X\in\mathcal{D};|X|\to\infty} S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, g^{\mathbf{G}'}_{\varphi_X}) = 0.$$

Grâce à (5) et (6), cela entraîne

$$lim_{X\in\mathcal{D};|X|\to\infty} \ell(\varphi_X) = 0.$$

De nouveau, le lemme 2.7 montre que cette relation est contradictoire avec (2), sauf si $\ell = 0$. Cela démontre cette nullité et le théorème.

3.3 Le transfert spectral

Fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 pour notre donnée endoscopique $\mathbf{G}'$. On a la variante du corollaire 2.8, avec des notations évidentes :

$$D^{st}_{spec,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R})) = \Big(\oplus_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)} Ind^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{L}'_1}(D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R})))\Big)^{W^{G'}(\tilde{M}'_0)}.$$

Quand on fait varier les données auxiliaires, on a une petite difficulté. Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$. Deux cas se présentent. Si $\tilde{L}'$ est relevant pour $\tilde{G}$, les espaces $D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R}))$ se recollent naturellement en un espace que l'on peut noter $D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}')$. Si $\tilde{L}'$ n'est pas relevant, il n'y a pas de recollement intrinsèque (c'est-à-dire ne dépendant que de $\tilde{L}'$ et pas du groupe ambiant $\tilde{G}'$) entre ces espaces. Par contre, les espaces induits $Ind^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{L}'_1}(D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R})))$ se recollent. Cela ne nous gêne pas trop car il est clair que les transferts à $\tilde{G}(\mathbb{R})$ des éléments de ces espaces sont nuls. Notons $\mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$ qui sont relevants pour $\tilde{G}$. Notons $D^{st,\tilde{G}-nul}_{spec}(\mathbf{G}')$ la somme des images dans $D^{st}_{spec}(\mathbf{G}')$ des espaces $Ind^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{L}'_1}(D^{st}_{ell,\lambda_1,\mathbb{C}}(\tilde{L}'_1(\mathbb{R})))$ pour les $\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}'_0) - \mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)$. On a alors

$$D^{st}_{spec}(\mathbf{G}') = \Big(\oplus_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)} Ind^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{L}'}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}'))\Big)^{W^{G'}(\tilde{M}'_0)} \oplus D^{st,\tilde{G}-nul}_{spec}(\mathbf{G}').$$

On définit une application linéaire, que par anticipation, on note

$$transfert : D^{st}_{spec}(\mathbf{G}') \to D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$$

de la façon suivante. Elle est nulle sur $D^{st,\tilde{G}-nul}_{spec}(\mathbf{G}')$. Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}(\tilde{M}'_0)$. On peut identifier $\mathbf{L}'$ à une donnée endoscopique de $(L,\tilde{L},\mathbf{a})$, où $\tilde{L}$ est un élément de $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. On a le transfert spectral elliptique, qui se prolonge en une application linéaire $D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}') \to D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega)$. Par induction, on en déduit une application linéaire

$$Ind^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{L}'}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}')) \to Ind^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(D_{ell,\mathbb{C}}(\tilde{L}(\mathbb{R}),\omega)).$$

Le dernier espace s'envoie naturellement dans $D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$. Alors l'application $transfert$ coïncide sur $Ind^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{L}'}(D^{st}_{ell,\mathbb{C}}(\mathbf{L}'))$ avec le composé des deux applications précédentes. Puisque le transfert commute à l'induction, le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème 3.2.

Corollaire. *L'application $transfert$ est bien le transfert endoscopique, c'est-à-dire que, pour tout $\tilde{\sigma} \in D^{st}_{spec}(\mathbf{G}')$ et tout $f \in I(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega)$, on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G}}(transfert(\tilde{\sigma}), f) = S^{\mathbf{G}'}(\tilde{\sigma}, f^{\mathbf{G}'}).$$

Remarque. Si l'on rétablit plus canoniquement les espaces de mesures, l'application transfert devient une application linéaire

$$transfert : D^{st}_{spec}(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(\mathbb{R}))^* \to D_{spec}(\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \otimes Mes(G(\mathbb{R}))^*.$$

3.4 Transfert K-fini

Soit Ω un ensemble fini de K-types, c'est-à-dire de représentations irréductibles de K. Pour une fonction f sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et pour $k \in K$, notons $\lambda_k(f)$, resp. $\rho_k(f)$, la fonction $\gamma \mapsto f(k^{-1}\gamma)$, resp. $\gamma \mapsto f(\gamma k)$. On dit que f se transforme à gauche, resp. à droite selon Ω si la représentation de K dans l'ensemble de fonctions $\{\lambda_k(f); k \in K\}$, resp. $\{\rho_k(f); k \in K\}$, se décompose en représentations irréductibles appartenant à Ω. On note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$ l'espace des fonctions qui se transforment à droite et à gauche selon Ω. On note $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega)$ son image dans $I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$. L'espace $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$ est la réunion des $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$ quand Ω parcourt tous les ensembles finis de K-types.

Soit $(\pi, \tilde{\pi})$ une ω-représentation telle que π soit irréductible ou, plus généralement telle que π soit de longueur finie et que toutes ses composantes irréductibles aient un même paramètre infinitésimal. Notons μ ce paramètre, qui est une orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de W. On a vu en 1.2 que l'intersection $(\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}) \cap \mu$ était une unique orbite sous l'action de W^θ. Notons-la $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})$. Soient $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi} \in \mathcal{E}_{ell,0}(\tilde{L}, \omega)$. A $\tilde{\pi}$ est associé une orbite $\tilde{\mu}(\tilde{\pi}) \subset \tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$ pour l'action de $W^{L,\theta}$. Notons $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})^G$ l'orbite pour l'action de W^θ engendrée par $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})$. Appelons "type spectral" une orbite dans $\tilde{\mu}(\omega) + \mathfrak{h}^{\theta,*}$ pour l'action de W^θ. Réalisons l'espace $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ en fixant des bases comme en 2.2. Pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$, on note $B(\tilde{L})$ la base fixée de $D_{ell,0}(\tilde{L}(\mathbb{R}), \omega)$. Pour un type spectral $\tilde{\mu}$, définissons le sous-espace $PW(\tilde{G}, \omega, \tilde{\mu})$ des familles $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0), \tilde{\pi} \in B(\tilde{L})}$ appartenant à $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ vérifiant la condition suivante :

- pour $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ et $\tilde{\pi} \in B(\tilde{L})$, on a $\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}} = 0$ si $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})^G \neq \tilde{\mu}$.

Il est clair que $PW(\tilde{G}, \omega)$ est la somme directe des $PW(\tilde{G}, \omega, \tilde{\mu})$ sur tous les types spectraux $\tilde{\mu}$ (et $PW^\infty(\tilde{G}, \omega)$ est le complété de cette somme). Plus généralement, pour un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux, notons $PW(\tilde{G}, \omega, \Omega^{pw})$ la somme des $PW(\tilde{G}, \omega, \tilde{\mu})$ pour $\tilde{\mu} \in \Omega^{pw}$. Le théorème de Delorme et Mezo affirme précisément que

(1) pour tout ensemble fini Ω de K-types, il existe un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux tel que $pw_{\tilde{G},\omega}(I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega)) \subset PW(\tilde{G}, \omega, \Omega^{pw})$;

(2) pour tout ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux, il existe un ensemble fini Ω de K-types tel que $PW(\tilde{G}, \omega, \Omega^{pw}) \subset pw_{\tilde{G},\omega}(I(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega, \Omega)$.

Dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, on a les variantes stables $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$ et $PW^{st}(\tilde{G}, \Omega^{pw})$. En reprenant la preuve du corollaire 2.9, on obtient des variantes de (1) et (2) pour ces variantes stables.

Fixons des données auxiliaires G_1',...,Δ_1 pour notre donnée endoscopique $\mathbf{G}'$. On fixe un sous-groupe compact maximal K_1' de $G_1'(\mathbb{R})$. Les constructions ci-dessus s'adaptent à ces données auxiliaires, en considérant alors des fonctions et des représentations qui se transforment selon le caractère λ_1 de $C_1(\mathbb{R})$. Il convient peut-être de parler alors de λ_1-type spectral

Corollaire. *(i) Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ qui est K-finie, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ est l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'une fonction K_1'-finie dans $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1'(\mathbb{R}))$.*

(ii) Soit Ω un ensemble fini de K-types. Alors il existe un ensemble fini Ω_1' de K_1'-types tel que, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ est l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1'(\mathbb{R}), \Omega_1')$.

(iii) Soit Ω_1' un ensemble fini de K_1'-types. Alors il existe un ensemble fini Ω de K-types de sorte que la condition suivante soit vérifiée. Soit $f_0 \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, supposons que son transfert $f_0^{\mathbf{G}'}$ soit l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}_1'(\mathbb{R}), \Omega_1')$. Alors il existe $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}), \Omega)$ tel que $f^{\mathbf{G}'} = f_0^{\mathbf{G}'}$.

Preuve. Evidemment, (i) résulte de (ii). Le transfert s'identifie à une application linéaire

$$transfert : PW^{\infty}(\tilde{G},\omega) \to PW^{\infty,st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1).$$

Notons Im son image. Grâce aux propriétés (1) et (2) ci-dessus et à leurs analogues stables, les assertions (ii) et (iii) résultent des propriétés suivantes

(3) soit Ω^{pw} un ensemble fini de types spectraux pour $\tilde{G}$; alors il existe un ensemble fini Ω'^{pw} de λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$ de sorte que

$$transfert(PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})) \subset PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw});$$

(4) soit Ω'^{pw} un ensemble fini de λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$; alors il existe un ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux pour $\tilde{G}$ de sorte que

$$Im \cap PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw}) \subset transfert(PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})).$$

Un λ_1-type spectral $\tilde{\mu}'$ pour $\tilde{G}'_1$ est une orbite pour l'action de $W^{G'}$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}$. Cet ensemble est isomorphe à $\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$, l'isomorphisme étant compatible avec les actions de $W^{G'}$ et W^{θ} et le plongement de $W^{G'}$ dans W^{θ}. On peut donc définir l'orbite pour W^{θ} engendrée par $\tilde{\mu}'$, que l'on note $(\tilde{\mu}')^G$. On obtient une application $q : \tilde{\mu}' \mapsto (\tilde{\mu}')^G$ de l'ensemble des λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$ dans l'ensemble des types spectraux pour $\tilde{G}$. Cette application est à fibres finies. Montrons que

(5) pour tout type spectral $\tilde{\mu}$ pour $\tilde{G}$, on a l'inclusion

$$transfert(PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu}) \subset PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,q^{-1}(\tilde{\mu})).$$

Soit $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ un élément de $PW^{\infty}(\tilde{G},\omega)$, notons $(\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1})_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0),\tilde{\sigma}_1\in B^{st}(\tilde{L}'_1)}$ son transfert (avec une notation évidente). D'après le corollaire 3.3, on a la description suivante. Soit $\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0)$. Si $\tilde{L}'$ ne correspond pas à un espace de Levi de $\tilde{G}$, alors $\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1}=0$ pour tout $\tilde{\sigma}_1$. Supposons que $\tilde{L}'$ soit associé à un espace de Levi $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$. Pour $\tilde{\sigma}_1\in B^{st}(\tilde{L}'_1)$, on peut écrire $transfert(\tilde{\sigma}_1)$ comme une combinaison linéaire finie d'éléments de la base $B(\tilde{L})$:

$$transfert(\tilde{\sigma}_1)=\sum_{\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})} c_{\tilde{\pi}}\tilde{\pi}.$$

On a alors

$$\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1}=\sum_{\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})} c_{\tilde{\pi}}\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}.$$

Par compatibilité du transfert avec les actions des centres de l'algèbre enveloppante, on sait que les éléments $\tilde{\pi}$ qui apparaissent ont un caractère central paramétré par la W^L-orbite dans $\mathfrak{h}^*$ engendrée par la $W^{L'}$-orbite $\mu(\tilde{\sigma}_1)$ dans $\mathfrak{h}^{\mathbf{G}',*}\simeq\tilde{\mu}(\omega)+\mathfrak{h}^{\theta,*}$. Il en résulte que $\tilde{\mu}(\tilde{\pi})=(\tilde{\mu}(\tilde{\sigma}_1))^G$. Supposons que la famille $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ appartienne à $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$. Si $\tilde{\mu}(\tilde{\sigma}_1)\notin q^{-1}(\tilde{\mu})$, le coefficient $c_{\tilde{\pi}}$ est nul ou $\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}$ est nul. Donc $\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1}=0$. Cela prouve que la famille $(\varphi_{\tilde{L}'_1,\tilde{\sigma}_1})_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M}'_0),\tilde{\sigma}_1\in B^{st}(\tilde{L}'_1)}$ appartient à $PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,q^{-1}(\tilde{\mu}))$. Cela prouve (5).

L'assertion (3) en résulte immédiatement : il suffit de prendre pour Ω'^{pw} la réunion des $q^{-1}(\tilde{\mu})$ pour $\mu\in\Omega^{pw}$.

Pour tout type spectral $\tilde{\mu}$ pour $\tilde{G}$, on a défini $PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$ comme un sous-espace de $PW^\infty(\tilde{G},\omega)$. On a un projecteur $p_{\tilde{\mu}} : PW^\infty(\tilde{G},\omega) \to PW(\tilde{G},\omega,\tilde{\mu})$. Il associe à une famille $(\varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$ la famille $(\varphi'_{\tilde{L},\tilde{\pi}})_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0),\tilde{\pi}\in B(\tilde{L})}$, où

$$\varphi'_{\tilde{L},\tilde{\pi}} = \begin{cases} \varphi_{\tilde{L},\tilde{\pi}}, & \text{si } \tilde{\mu}(\tilde{\pi}) = \tilde{\mu}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, on a un projecteur $p_{\Omega^{pw}} : PW^\infty(\tilde{G},\omega) \to PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})$ pour tout ensemble fini Ω^{pw} de types spectraux. La preuve de (5) prouve plus généralement que, pour tout tel ensemble, on a

$$transfert \circ p_{\Omega^{pw}} = p_{q^{-1}(\Omega^{pw})} \circ transfert.$$

Soit Ω'^{pw} un ensemble fini de λ_1-types spectraux pour $\tilde{G}'_1$, posons $\Omega^{pw} = q(\Omega'^{pw})$. Soit $\boldsymbol{\varphi}' \in Im \cap PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw})$. Introduisons un élément $\boldsymbol{\varphi} \in PW^\infty(\tilde{G},\omega)$ tel que $transfert(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}'$. Parce que $\boldsymbol{\varphi}' \in PW^{st}_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1,\Omega'^{pw})$, on a $p_{q^{-1}(\Omega^{pw})}(\boldsymbol{\varphi}') = \boldsymbol{\varphi}'$. Donc

$$\boldsymbol{\varphi}' = p_{q^{-1}(\Omega^{pw})}(\boldsymbol{\varphi}') = p_{q^{-1}(\Omega^{pw})} \circ transfert(\boldsymbol{\varphi}) = transfert \circ p_{\Omega^{pw}}(\boldsymbol{\varphi}).$$

Donc $\boldsymbol{\varphi}'$ est le transfert de l'élément $p_{\Omega^{pw}}(\boldsymbol{\varphi}) \in PW(\tilde{G},\omega,\Omega^{pw})$. Cela prouve (4) et le corollaire. □

3.5 Transfert K-fini, version générale

Considérons dans ce paragraphe un K-espace $K\tilde{G}$, cf. [I] 1.11. On fixe pour chaque composante connexe $K\tilde{G}_p$ un espace de Levi minimal $\tilde{M}_{p,0}$ et un sous-groupe compact maximal K_p de $G_p(\mathbb{R})$ en bonne position relativement à $\tilde{M}_{p,0}$. Les définitions du paragraphe précédent se généralisent immédiatement. Un ensemble fini de K-types est la réunion disjointe d'ensembles finis de K_p-types. On a une application de transfert

$$I(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega) \to \oplus_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} SI(\mathbf{G}').$$

On renvoie à [I] 4.11 pour les notations (on a supprimé les espaces de mesures, les mesures étant fixées depuis 2.2). Pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, fixons des données auxiliaires G'_1,...,Δ_1 et un sous-groupe compact maximal $K^{G'_1}$ de $G'_1(\mathbb{R})$.

Corollaire. *(i) Soit Ω un ensemble fini de K-types. Alors il existe pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$ un ensemble fini de $K^{G'_1}$-types $\Omega^{G'_1}$ de sorte que, pour tout $f \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\omega,\Omega)$ et tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ soit l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}),\Omega^{G'_1})$.*

(ii) Pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, soit $\Omega^{G'_1}$ un ensemble fini de $K^{G'_1}$-types. Alors il existe un ensemble fini Ω de K-types de sorte que la condition suivante soit vérifiée. Soit $f_0 \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R}))$, supposons que, pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$, le transfert $f^{\mathbf{G}'}$ soit l'image dans $SI(\mathbf{G}')$ d'un élément de $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(\mathbb{R}),\Omega^{G'_1})$. Alors il existe un élément $f \in C_c^\infty(K\tilde{G}(\mathbb{R}),\Omega)$ tel que $f^{\mathbf{G}'} = f_0^{\mathbf{G}'}$ pour tout $\mathbf{G}' \in \mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})$.

Preuve. Le (i) se déduit immédiatement du (ii) du corollaire précédent. Le (ii) se prouve de la même façon que le (iii) de ce corollaire. On laisse les détails au lecteur. □

3.6 Le cas du corps de base $\mathbb{C}$

Dans tout l'article, le corps de base était $\mathbb{R}$. Remplaçons-le maintenant par $\mathbb{C}$. Les mêmes définitions et théorèmes restent valables. En effet, considérons un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ défini sur $\mathbb{C}$. Par restriction des scalaires, on en déduit un triplet $(G_{\mathbb{R}}, \tilde{G}_{\mathbb{R}}, \mathbf{a}_{\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}$. Il suffit alors d'appliquer les théorèmes à ce triplet. En fait, le cas complexe est beaucoup plus simple. Il n'y a de fonctions cuspidales sur $\tilde{G}(\mathbb{C})$ que si G est un tore. Le groupe G est forcément déployé. Dans le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est à torsion intérieure, on a l'égalité $SI(\tilde{G}(\mathbb{C})) = I(\tilde{G}(\mathbb{C}))$.

Bibliographie

[A] J. Arthur *On local character relations*, Selecta Math. 2 (1996), p. 501-579

[BR] G. Barbançon, M. Raïs : *Sur le théorème de Hilbert différentiablle pour les groupes linéaires finis (d'après E. Noether)*, Ann. Sc. ENS 16 (1983), p. 355- 373

[BT] A. Borel, J. Tits : *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES 27 (1965), p. 55- 150

[DM] P. Delorme, P. Mezo : *A twisted invariant Paley-Wiener theorem for real reductive groups*, Duke Math. J. 144 (2008), p.341-380

[Me] P. Mezo : *Spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, prépublication 2013

[Moe] C. Moeglin : *Représentations elliptiques ; caractérisation et formules de transfert de caractères*, prépublication 2013

[R] D. Renard : *Intégrales orbitales tordues sur les groupes de Lie réductifs réels*, J. Funct. Analysis 145 (1997), p. 374- 454

[S] D. Shelstad : *On geometric transfer in real twisted endoscopy*, prépublication 2011

[W] J.-L. Waldspurger : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[I] ——————- : *Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*, prépublication 2014

Institut de Mathématiques de Jussieu -CNRS
2 place Jussieu 75005 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr