



**HAL**  
open science

# 1 – Le paradoxe des jumeaux de Langevin et l'expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation

Jean Stratonovitch

► **To cite this version:**

Jean Stratonovitch. 1 – Le paradoxe des jumeaux de Langevin et l'expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation : Incompatibilité logique de la relativité restreinte et de la mécanique des corps élastiques considérés dans leur étendue. 2014. hal-00954283v4

**HAL Id: hal-00954283**

**<https://hal.science/hal-00954283v4>**

Preprint submitted on 10 Jun 2014 (v4), last revised 9 Nov 2014 (v5)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le paradoxe des jumeaux de Langevin et l'expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation

Jean Stratonovitch

## 1 - LE PARADOXE DES JUMEAUX DE LANGEVIN

C'est une expérience de pensée un peu théâtralisée. Deux jumeaux, représentant en fait deux horloges, sont en un lieu galiléen  $O$ . Puis, cependant que l'un d'eux reste « immobile » en  $O$ , l'autre s'éloigne de lui à vitesse uniforme  $v$ , laisse passer du temps, fait demi-tour et revient vers  $O$  à la vitesse uniforme  $-v$ . Quand il retrouve son frère, celui-ci est plus vieux que lui.

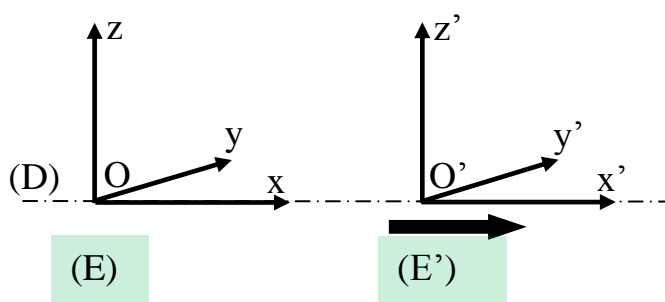
Ce très célèbre paradoxe n'a pas eu la vie facile. À beaucoup, il a paru être à lui seul une preuve de l'inconsistance logique de la relativité restreinte, alors même qu'il ne recèle formellement aucune contradiction.

Bergson, dans *Durée et simultanéité*, publié en 1922, explique en substance que les formules de Lorentz ne recouvrent qu'un effet de perspective : « "Supposez, a-t-on dit, un voyageur enfermé dans un projectile qui serait lancé de Terre avec une vitesse inférieure d'un vingt millièmes environ à celle de la lumière, qui rencontrerait une étoile et qui serait renvoyé à la Terre avec la même vitesse. Ayant vieilli de deux ans quand il sortira de son projectile, il trouvera que c'est de deux cents ans qu'a vieilli notre globe" – En est-on bien sûr ? Regardons de plus près. Nous allons voir s'évanouir l'effet de mirage, car ce n'est pas autre chose ».

S'il vivait encore, Bergson ne persisterait certainement pas dans cette opinion. Il est en effet aujourd'hui clair, par diverses expériences, que des particules en mouvement rapide manifestent bien une augmentation de leur durée de vie conforme à la prédiction de la relativité restreinte.

Mais commençons par faire le calcul. Appelons (E) l'espace galiléen dans lequel le premier jumeau se tient immobile en un lieu O, (E') celui dans lequel son frère, s'éloignant de lui, est immobile en un lieu O'.

Munissons ces deux espaces de deux référentiels galiléens RG et RG' placés selon la configuration standard : les axes des  $x$  et des  $x'$  sont portés par la même droite (D), les autres axes sont deux à deux parallèles, les origines spatiales O et O' coïncident à l'instant 0 de chaque référentiel.



Le deuxième jumeau, lorsqu'il voyage à vitesse uniforme, ce qui est le cas sauf une partie négligeable de son temps, est une horloge dont le battement intrinsèque, celui observé dans le référentiel galiléen RG' accompagnant son mouvement, a pour durée  $T$ . Parce que le changement de coordonnées est une transformation affine, la durée séparant deux battements, observée depuis (E), est constante. Aussi, pour savoir quelle est cette durée, nous pouvons considérer n'importe lequel des battements. Le plus simple est de prendre celui qui commence à l'instant  $t' = 0$ .

Le changement de coordonnées entre (E') et (E) est donné par la transformation de Lorentz.

Relativement à RG', le début et la fin du battement considéré ont pour coordonnées spatio-temporelles  $(0, 0, 0, 0)$  et  $(0, 0, 0, T)$ . Leurs images par le changement de coordonnées sont

**Transformation de Lorentz de (E') vers (E) :**

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v x'}{c^2}\right) \end{cases}$$

Dans ces formules,  $\gamma$  est le coefficient relativiste  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Il est strictement supérieur à 1.

$(0, 0, 0, 0)$  et  $(\gamma v T, 0, 0, \gamma T)$ , si bien que l'horloge, vue depuis (E), a pour période  $\gamma T$  : sa période est plus longue, et elle tourne donc plus lentement.

Si on remplace  $v$  par  $-v$ , la formule reste inchangée : sur le chemin du retour, le même phénomène se produit.

Considérons maintenant les instant locaux  $i_1, i_2, \dots, i_{n+1}$  définis en  $O'$  par les débuts des cycles successifs, puis en  $O''$ , origine du référentiel galiléen « retour », sur le trajet de retour. En  $i_1$ , l'horloge part de  $O$  et en  $i_{n+1}$  elle y revient. Sur le trajet aller, la durée des  $\frac{n}{2}$  premiers cycles est  $\frac{n}{2} T$  relativement à  $RG'$  et  $\frac{n}{2} \gamma T$  relativement à  $RG$  ; sur le trajet retour, il en est de même, en remplaçant  $RG'$  par  $RG''$  : lorsque les deux horloges se retrouvent, si celle qui a fait l'aller et retour a compté une durée  $\tau$ , celle qui est restée immobile a compté une durée  $\gamma \tau$ . Si, pour continuer la métaphore, les horloges sont les muscles cardiaques des jumeaux, celui du jumeau qui a fait l'aller et retour a battu  $\gamma$  fois moins que celui de son frère. Le jumeau resté en  $O$  est donc plus vieux que l'autre.

On peut facilement construire un modèle de la cinématique lorentzienne à l'intérieur de la théorie des ensembles. Aussi, si nous devons considérer comme absurde le résultat de cette expérience de pensée, ce sont les mathématiques tout entières que nous considèrerions comme absurdes – alors même que cette expérience, à proprement parler, ne soulève aucune contradiction. Les deux horloges sont des

On construit ce modèle à partir d'un modèle de la cinématique galiléenne en supprimant tous les « points matériels » qui, relativement à un espace galiléen donné (E), vont à un moment ou un autre plus vite que  $C$ , puis en modifiant par des changements de coordonnées affines les coordonnées spatio-temporelles relatives aux autres espaces que (E) de telle façon que les changements de coordonnées entre eux et (E) soient des transformations de Lorentz de paramètre  $C$ . Comme les transformations de Lorentz forment un groupe, les changements de coordonnées obtenus par composition sont des transformations de Lorentz de paramètre  $C$ , et l'univers est devenu lorentzien. Le modèle obtenu est aussi solide que la cinématique galiléenne, qui est celle du produit cartésien  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , dont la solidité se ramène « immédiatement » à celle des mathématiques en général.

dispositifs physiques subissant des parcours différents, rien ne les oblige à avoir à leur terme commun compté le même nombre de cycles – sinon, évidemment, de vieilles habitudes de pensée. Le paradoxe des jumeaux de Langevin n'en est donc pas un. Mieux, il décrit correctement la réalité physique.

Ce modèle peut, toujours dans le cadre de la théorie des ensembles, être muni des lois de la mécanique du point matériel. La relativité restreinte, pour la cinématique comme pour la mécanique du point matériel, est donc une théorie sans faille logique envisageable, à moins de remettre en cause la solidité des mathématiques.

## 2 - PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE D'ALLER ET RETOUR D'UN CYLINDRE EN ROTATION

Dans l'expérience des jumeaux de Langevin, l'horloge est indéfinie. Mais on peut montrer, par un argumentaire d'ordre épistémologique, que l'horloge première de la physique, celle qui engendre directement un temps conservateur de la quantité de mouvement et du moment cinétique, est l'horloge inertielle. Par exemple un cylindre globalement immobile relativement à un **espace galiléen**, et tournant librement sur lui-même autour de son axe, sans qu'aucune action soit exercée sur lui. Le temps qu'il délivre par le comptage du nombre de ses tours est « parfaitement régulier ».

Un **espace galiléen** est l'ensemble des « événements » (au sens que la relativité restreinte donne à ce mot) dont les trois coordonnées spatiales sont éternellement invariables relativement à un référentiel galiléen donné. Un référentiel galiléen définit un unique espace galiléen, et tout espace galiléen peut être muni d'une infinité de référentiels galiléens.

Cette horloge, ce cylindre tournant peut être soumis à une expérience d'aller et retour axial analogue à celle des jumeaux de Langevin. La différence cruciale est qu'*entre la partie « immobile » et celle qui fait l'aller et retour, un pont de matière reste constamment tendu, celui du cylindre.*

Nous étudions le cas où le cylindre est « mince », autrement dit d'épaisseur infinitésimale.

C'est donc un cas limite qui est étudié. L'hypothèse de la minceur, outre qu'elle simplifie l'analyse, permet d'invoquer une quantité de matière arbitrairement faible, et légitime l'emploi du cadre « plat » de la relativité restreinte.

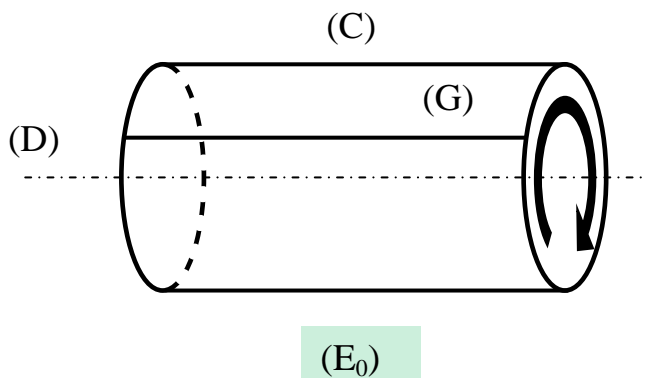
La matière dont il est constitué n'est pas supposée « rigide » (au sens d'infiniment rigide) : elle se déforme sous l'effet des actions exercées sur elle. Elle est supposée élastique, dans le sens où ses propriétés mécaniques restent invariables au cours de l'expérience.

On sait depuis longtemps, par diverses expériences de pensée, que le corps infiniment rigide est incompatible avec la théorie de la relativité restreinte. Les actions physiques devraient s'y propager instantanément.

Cela n'égratigne en rien la théorie, parce que justement le corps infiniment rigide n'existe pas.

La **première partie de l'expérience** se déroule dans le cadre « totalement uniforme ». Le cylindre (C) est globalement immobile dans l'espace galiléen ( $E_0$ ), et tourne librement sur lui-même. Il conserve donc, à ce stade de l'expérience, et à ce stade seulement, une forme invariable.

(G) est une génératrice de (C), définitivement tracée – disons « gravée » – sur lui.

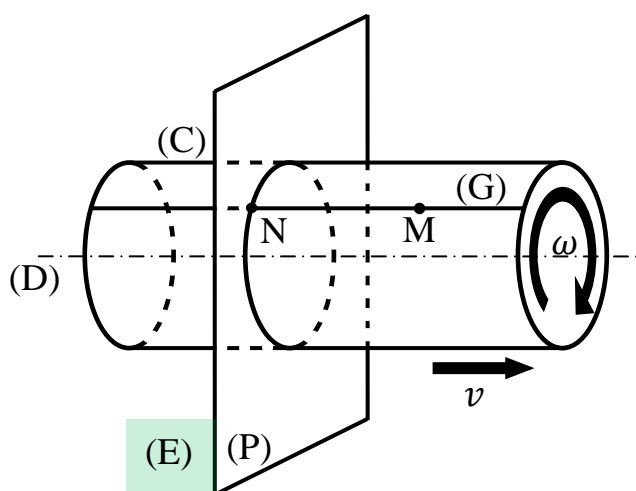


On appelle **génératrice** de (C) l'ensemble des points de sa surface qui, au début de l'expérience, lorsque le mouvement de (C) est uniforme dans toutes ses composantes, et qu'on l'observe dans l'espace galiléen ( $E_0$ ) où il est globalement immobile, appartiennent à une même droite parallèle à son axe. Une génératrice est « gravée » ou « peinte » sur (C) : lorsque, dans un deuxième temps de l'expérience, (C) sera soumis à une action, il se déformera, puisqu'aucun corps n'est infiniment rigide, et (G) se déformera donc en même temps que lui.

(E) est un autre espace galiléen, relativement auquel (C) est animé d'un mouvement uniforme global de translation colinéaire à son axe (D). Cet axe est donc globalement fixe à la fois dans (E) et dans (E<sub>0</sub>), comme l'est le support commun des axes des  $x$  et des  $x'$  dans la présentation traditionnelle de la transformation de Lorentz.

(G) rencontre un plan fixe (P) de (E), perpendiculaire à (D), en un point N qui joue le rôle du premier jumeau. Le rôle du deuxième est tenu par le point M, qui est fixe – « gravé » lui aussi – sur (G). La vitesse globale de translation de (C) relativement à (E) est  $v$ , et sa vitesse **intrinsèque** de rotation, c'est-à-dire celle observée dans (E<sub>0</sub>), est  $\omega$ .

Lorsqu'un objet peut-être considéré comme immobile (ou globalement immobile, s'il tourne sur lui-même) relativement à un espace galiléen donné, ses caractéristiques relativement à cet espace sont qualifiées d'**intrinsèques** ; par rapport à un autre espace galiléen, d'**extrinsèques**. La vitesse intrinsèque de rotation de (C) est donc celle observée depuis (E<sub>0</sub>).



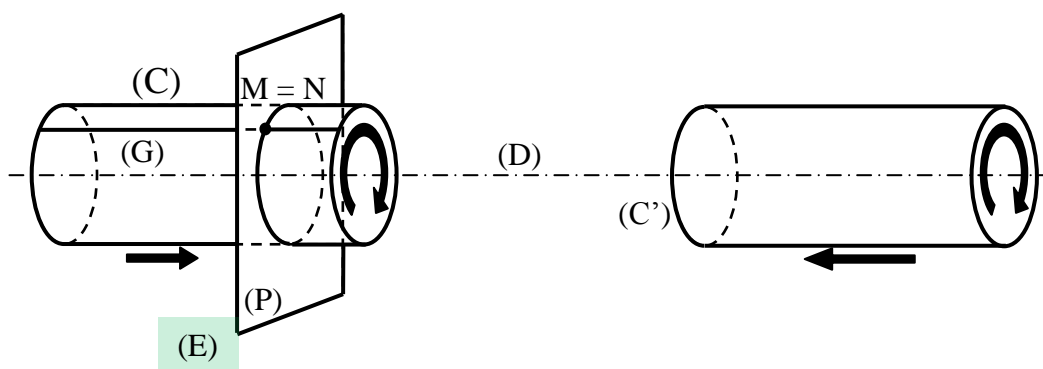
Contrairement à ce que montre cette figure, quand le mouvement de (C) est uniforme par rapport à (E), ses génératrices (G), décrites dans (E), sont à tout instant non pas des droites, mais des hélices régulières (voir plus loin).

Les points M et N sont donc parfaitement définis, et leur définition ne changera pas.

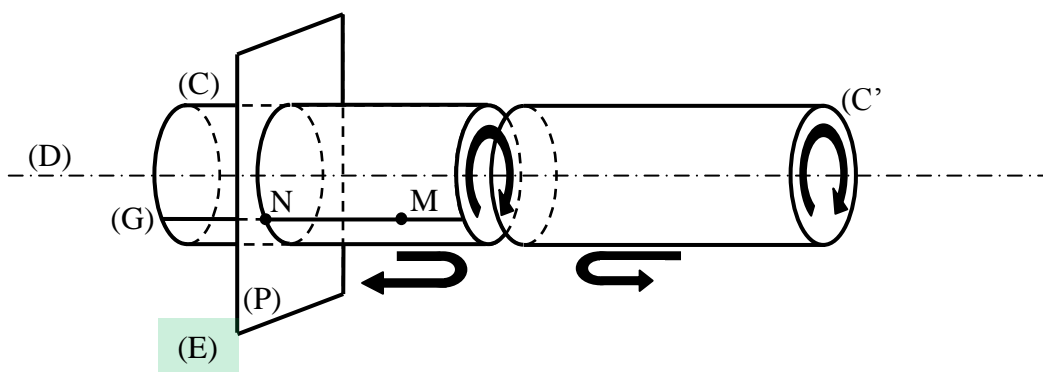
On prendra garde à ce que N n'est pas défini comme la projection orthogonale, dans l'espace galiléen (E<sub>0</sub>) ou dans un autre, du point M sur (P). Cette définition erronée invoque la simultanéité de cet espace, ce qui n'est pas le cas de celle qui a été choisie. Elle coupe d'autre part le lien matériel continu entre M et N, qui est crucial.

Un cylindre (C') identique à (C), au mouvement uniforme dans toutes ses composantes, tournant lui aussi autour de (D) à la vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ , avance à la rencontre de (C).

L'expérience, qui est décrite relativement à (E), commence à l'instant  $i$  de (E) où le point M croise le plan (P) dans le sens « aller », et coïncide alors instantanément avec le point N.

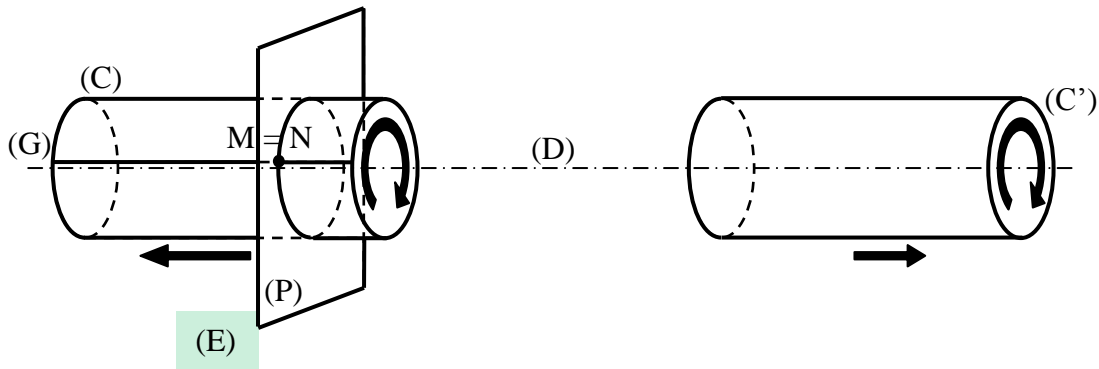


La **deuxième partie de l'expérience** commence lorsque (C') heurte (C). Les mouvements des cylindres cessent alors d'être uniformes dans toutes leurs composantes. C'est un processus complexe qui se produit, et qui fait repartir (C) en arrière relativement à l'espace de référence (E).



M traverse de nouveau (P) à l'instant  $j$  de (E), qui marque la fin de l'expérience. Il coïncide alors de nouveau avec N.



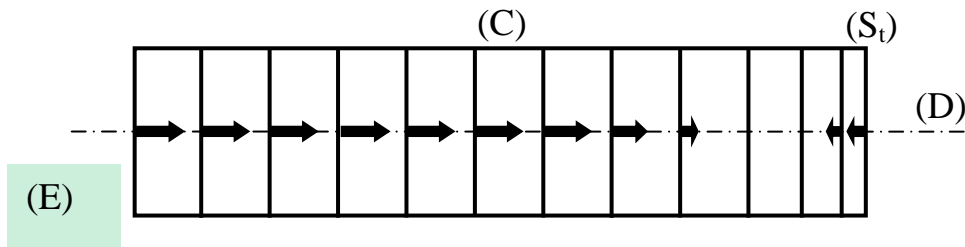


Comme (C) ne franchit pas entièrement (P), le point N existe tout au long de l'intervalle  $[i, j]$  que dure l'expérience, au terme de laquelle M a tourné de  $m$  tours autour de (D) et N de  $n$  tours.

L'inversion du sens du mouvement de (C) ne saurait être immédiate, puisque les actions se propagent à vitesse finie. (C) se déforme et ses sections ne vont plus toutes à la même vitesse relativement à (E). Ainsi, juste après le choc, celles qui sont proches du point d'impact sont déjà reparties en arrière tandis que celles qui en sont loin vont encore vers l'avant. En effet la section de tête ( $S_t$ ) vient d'être heurtée par ( $C'$ ) dont la vitesse relative à (E) est supérieure à celle de (C).

On appelle **section** de (C) son intersection par un plan perpendiculaire à son axe. Les sections, comme les génératrices, sont « gravées » sur (C).

Un objet dont toutes les parties sont animées d'un même mouvement uniforme se déforme si et seulement si ses parties cessent d'être animées de ce même mouvement uniforme.



Le résultat de l'expérience dépend des déformations des corps et il est donc nécessaire de les analyser. Ces déformations, à leur tour, dépendent notamment du matériau dont sont faits les cylindres,

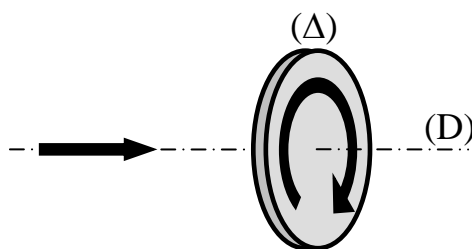
pour lequel les possibilités de variation sont innombrables. Pour simplifier, nous le supposons homogène, isotrope et élastique.

Le mouvement de (C) cesse d'être uniforme dans toutes ses composantes ; mais il continuera comme il se doit d'être analysé relativement à un référentiel galiléen. La relativité restreinte n'oblige en rien à se cantonner à l'étude des mouvements uniformes ; elle oblige seulement à ce que les référentiels soient galiléens. Le jumeau voyageur de Langevin, par exemple, a lorsqu'il fait demi-tour un mouvement accéléré.

On trouve d'ailleurs dans les ouvrages de relativité restreinte la formule de changement de référentiel pour les accélérations. Qui plus est, aucune expérience de physique ne peut être conduite dans un univers où tous les mouvements sont uniformes.

### 3 - CARACTÈRE « ABSOLU » DU MOMENT CINÉTIQUE

Considérons un disque élastique plein ( $\Delta$ ) en rotation sur lui-même autour de son axe (D), et globalement immobile dans un espace galiléen ( $E_0$ ). Appelons  $\omega$  sa vitesse intrinsèque de rotation. À un certain instant, ( $\Delta$ ) reçoit une impulsion colinéaire à (D), exercée par exemple par une « particule » circulant le long de (D), qui l'amène à terme, une fois qu'il a repris sa forme initiale, à être globalement immobile dans l'espace galiléen (E) allant à la vitesse  $v$  relativement à ( $E_0$ ). Sa nouvelle vitesse intrinsèque de rotation est  $\omega'$ .



La symétrie de révolution fait que la particule repart le long de (D) : son moment cinétique par rapport à (D) est donc nul avant comme après l'impact. En vertu de la loi de conservation du moment

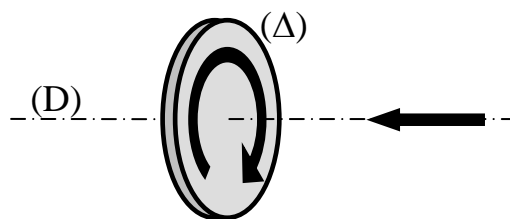
cinétique, le moment cinétique de  $(\Delta)$  autour de  $(D)$ , évalué depuis  $(E_0)$ , est inchangé.

La valeur de  $\omega$  détermine le moment cinétique de  $(\Delta)$  ; et la valeur de ce moment cinétique et de  $v$  déterminent  $\omega'$ , si bien que  $\omega'$  est fonction de  $v$  et  $\omega$  :  $\omega' = f(v, \omega) = f_v(\omega)$ .

Un disque identique  $(\Delta_1)$ , globalement immobile dans  $(E_0)$ , mais tournant à la vitesse  $\omega_1 > \omega$  aurait un moment cinétique plus élevé ; par conservation, ce serait encore le cas lorsqu'il serait amené à la vitesse  $v$ . Sa vitesse intrinsèque de rotation finale  $\omega'_1$  serait donc telle que  $\omega'_1 > \omega'$  : pour  $v$  fixé arbitraire, la fonction  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \omega \mapsto \omega' = f_v(\omega) \end{array} \right.$  est croissante.

Puisque la masse dépend de la vitesse, et que  $(\Delta_1)$  tourne plus vite que  $(\Delta)$ , l'impulsion axiale à lui administrer pour l'amener à la vitesse  $v$  n'est pas la même que celle à exercer sur  $(\Delta)$ .

Faisons à présent subir à  $(\Delta)$  une impulsion axiale de sens opposé, de valeur choisie telle qu'elle le ramène dans une position d'immobilité globale par rapport à  $(E_0)$ .



En vertu du principe de relativité, et puisque la vitesse de  $(E_0)$  par rapport à  $(E)$  vaut celle de  $(E)$  par rapport à  $(E_0)$ , c'est-à-dire  $v$ , sa nouvelle vitesse intrinsèque  $\omega''$  de rotation est donnée par la même loi :  $\omega'' = f_v(\omega')$ .

On a donc  $\omega'' = f_v(f_v(\omega))$ .

Cependant, le moment cinétique de  $(\Delta)$  relativement à  $(E_0)$  est resté invariant dans chacune des deux interactions. Comme  $(\Delta)$  est de nouveau immobile dans  $(E_0)$ , et que son moment cinétique relatif à cet espace est resté invariant,  $\omega'' = \omega = f_v(f_v(\omega))$ .

En composant la fonction croissante positive  $f_v$  avec elle-même, on obtient l'identité. C'est donc que  $f_v$  est elle-même l'identité :  $f_v(\omega) = \omega$ .

Ainsi, au terme de la première interaction, la vitesse intrinsèque de rotation de ( $\Delta$ ) est inchangée.

Son moment cinétique intrinsèque, dans l'espace ( $E$ ) où elle est alors globalement immobile, au terme de la première interaction, est donc le même que celui qu'elle avait (ou qu'elle aura) relativement à ( $E_0$ ) quand elle y était (ou qu'elle y sera) globalement immobile.

C'est aussi le même, en vertu la loi de conservation, que son moment cinétique extrinsèque, celui qu'au terme de la première interaction elle a relativement à ( $E_0$ ).

Par soustraction, ce résultat s'étend aux anneaux tournant autour de ( $D$ ), qui sont les corps élémentaires intervenant dans le problème du cylindre en rotation.

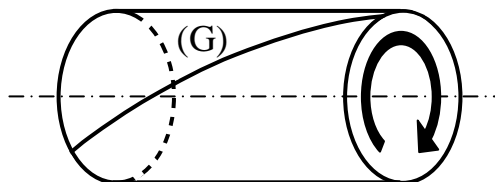
Moment cinétique intrinsèque et moment cinétique extrinsèque sont égaux : le moment cinétique, au contraire des durées, des longueurs, des masses, est un « absolu », du moins tant qu'on se limite aux référentiels glissant le long de ( $D$ ).

*Le moment cinétique d'un anneau en rotation autour de son axe ( $D$ ), considéré à un instant  $t$  de son existence, est le même relativement à tous les espaces galiléens en translation le long de ( $D$ ).*

## 4 - LES PHÉNOMÈNES DE TORSION

Durant l'expérience d'aller et retour, la symétrie de révolution du système est conservée. Mais des phénomènes de torsion autour de l'axe peuvent ou non se produire, qui n'altèrent en rien cette symétrie de révolution.

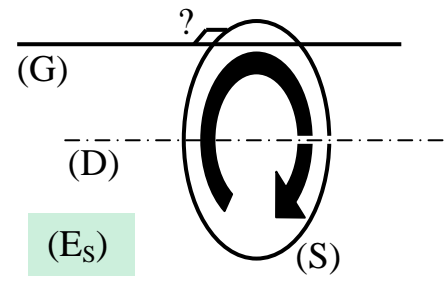
Il faut distinguer trois concepts de torsion, qui sont liés les uns aux autres.



**La torsion intrinsèque**

Elle demande pour pouvoir être définie que des génératrices aient été préalablement gravées sur (C) quand il tourne librement sur lui-même, globalement immobile dans un certain espace galiléen. Ce cylindre présente une **torsion intrinsèque** au niveau d'une de ses sections (S) si, observant le tube depuis l'espace galiléen tangent au mouvement de translation d'un des points M de (S), on constate – par exemple avec une équerre, ou bien par un procédé en théorie équivalent – que l'angle formé par la génératrice et la section passant par M n'est pas un angle droit. Peu importe le point M choisi sur (S), puisqu'il y a symétrie de révolution. L'absence de torsion intrinsèque est une caractéristique locale : l'équerre est en théorie infinitésimale, ce qui ne l'empêche pas d'être infiniment exacte.

Les référentiels utilisés dans cette étude sont tous animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement de translation colinéaire à (D) – à une exception près, celui que nous venons d'utiliser, l'espace galiléen tangent au mouvement du point M. Parce que les changements de coordonnées dans plusieurs directions différentes engendrent des calculs compliqués, c'est une situation que nous avons intérêt à éviter.



Lorsqu'un système matériel peut à un instant donné être considéré comme fait de points allant tous à la même vitesse, on appelle **espace galiléen tangent à son mouvement** l'unique espace dans lequel sa vitesse est nulle à cet instant.

(S) est ici considérée en tant que courbe, et pas en tant que plan. En effet, (C) peut aussi avoir une torsion intrinsèque lorsque ses déformations font que son rayon varie, et qu'il est assimilable, au voisinage de (S), à un tronc de cône. Le critère de perpendicularité de (S) et de (G) est alors celui de deux courbes, et pas celui d'une courbe et d'un plan.

Soit  $(E_S)$  l'espace galiléen tangent au mouvement de translation de  $(S)$ . Le mouvement de  $(E_M)$  dans  $(E_S)$  est colinéaire à la tangente en  $M$  à  $(S)$ , et la transformation de Lorentz transforme une droite perpendiculaire à la direction du mouvement en une droite perpendiculaire à la direction du mouvement, aussi l'inexistence d'une torsion intrinsèque de  $(C)$  peut-elle être constatée depuis  $(E_S)$  :

On appelle **espace galiléen tangent au mouvement de translation** d'une section (ou d'une tranche infinitésimale) l'unique espace galiléen dans lequel sa vitesse de translation est nulle à l'instant où on la considère : elle y est alors globalement immobile, quoique tournant sur elle-même.

*La torsion intrinsèque au niveau d'une section est nulle si et seulement si, dans l'espace galiléen tangent à son mouvement de translation, les génératrices lui sont perpendiculaires.*

### La torsion mécanique

On dit que  $(C)$  présente à un instant donné une **torsion mécanique** au niveau d'une de ses sections  $(S)$  si les **tranches** infinitésimales de  $(C)$  de part et d'autre de  $(S)$  exercent un couple l'une sur l'autre.

Une **tranche** de  $(C)$  est l'ensemble des points compris entre deux sections.

Le couple exercé par une tranche sur une autre est la quantité (effective ou virtuelle) de moment cinétique échangée par unité de temps, autrement dit sa dérivée par rapport au temps. Il dépend du référentiel glissant le long de  $(D)$  choisi, puisque le moment cinétique n'en dépend pas, tandis que le temps en dépend. Mais sa nullité est indépendante du référentiel choisi.

### Lien entre torsion mécanique et torsion intrinsèque.

Pour savoir s'il y a une torsion mécanique au niveau d'une section  $(S)$  à l'instant  $t$  de l'espace de référence, nous disposons d'un test simple : nous considérons une situation en tout point identique, à ceci près que  $(C)$  a été coupé au niveau de  $(S)$  par un trait d'épaisseur nulle qui le sépare en deux tronçons successifs  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

L'opération remplace (S) par deux faces ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) adjacentes, que nous supposons parfaitement glissantes. Comme le choc est compressif, elles restent en contact dans les instants qui suivent immédiatement  $t$ .

Dans ces instants, deux possibilités se présentent :

a) ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) se mettent à tourner à des vitesses différentes. Comme elles tournent à la même vitesse quand (C) n'est pas coupé, nous concluons à l'existence d'une torsion mécanique au niveau de (S), dans un sens déterminé par le signe de la différence des vitesses de rotation.

b) ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) continuent de tourner à la même vitesse. Nous en déduisons que la torsion mécanique est nulle au niveau de (S).

La torsion mécanique au niveau de (S) est nulle à l'instant  $t$  si et seulement si une coupure parfaitement glissante de (C) à son niveau serait telle que les faces en contact des deux tronçons continueraient de tourner à la même vitesse dans les instants immédiatement ultérieurs à  $t$ .

Cependant, nous pouvons également savoir s'il y a torsion mécanique au niveau de (S) en étudiant les déformations locales du corps élastique (C) au voisinage de (S). En vertu de la symétrie de révolution de la situation, ces déformations sont les mêmes en tout point de (S), et il suffit de faire cette étude au voisinage d'un quelconque d'entre eux.

Les déformations de (C) au voisinage d'un point M de (S), considérées dans l'espace galiléen tangent au mouvement de ce point, témoignent de l'existence ou de l'inexistence d'une torsion mécanique au niveau de (S).

En vertu du principe de relativité, la matière élastique composant (C) a des propriétés locales intrinsèques indépendantes de son mouvement de translation. Aussi, le fait que les déformations intrinsèques d'un voisinage de M soient ou non telles qu'une coupure glissante instantanée de ce voisinage le long de (S) engendre un glissement immédiat des deux parties l'une sur l'autre ne dépend



que des déformations intrinsèques de ce voisinage, et pas de son mouvement de translation.

Nous pouvons donc nous ramener au cas où la vitesse intrinsèque de rotation de (C) est nulle. Quelle que soit alors l'interaction avec (C'), en tout point identique à (C), et donc également de vitesse intrinsèque de rotation nulle, la situation initiale est symétrique par rapport au plan contenant (D) et (G), et le demeure donc durant toute l'interaction. (G) reste par conséquent, quelles que soient ses déformations, coplanaire avec (D), et donc perpendiculaire à (S) : la torsion intrinsèque est constamment nulle. En même temps, les vitesses intrinsèques de rotation des sections sont nulles, si bien que l'échange de moment cinétique est nul, et que la torsion mécanique est donc nulle.

Ce raisonnement n'oublie qu'en apparence les forces centrifuges, qui interviennent à leur exacte mesure, parmi toutes les autres forces, sur l'engendrement de la forme locale de (C).

Parce que la torsion intrinsèque témoigne de la torsion mécanique,

*Il y a torsion mécanique au niveau d'une section (S) de (C) si et seulement il y a torsion intrinsèque.*

### La torsion extrinsèque

Étudions, dans le cas général où les différentes parties de (C) ne vont pas toutes à la même vitesse, les caractéristiques extrinsèques locales de son mouvement.

Soit (S) une section de (C) allant, à l'instant  $t$  de (E) où nous nous intéressons à elle, à la vitesse  $v$  relativement à (E), telle que sa vitesse intrinsèque de rotation soit  $\omega$  et la torsion intrinsèque à son niveau  $\tau$ .

Soit (E<sub>S</sub>) l'espace galiléen tangent au mouvement de translation de (S) à cet instant.

Sans perte de généralité, nous pouvons choisir des référentiels RG de (E) et RG' de (E<sub>S</sub>) placés selon la configuration standard, tels que (S) traverse le

**Transformation de Lorentz de (E) vers (E<sub>S</sub>) :**

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$



plan  $x = 0$  à l'instant 0 de RG, qui est celui où nous voulons étudier son comportement, et qui correspond donc localement à l'instant 0 de RG'.

La génératrice (G) a pour torsion locale intrinsèque  $\tau$  à l'instant 0 de  $(E_S)$ , mais cette torsion locale n'est pas constante. Les coordonnées spatio-temporelles d'un M point générique de (G) sont donc, dans  $(E_S)$ , à cet instant, sans perte de généralité :

$$(x', R \cos(\tau x') + o(x'), R \sin(\tau x') + o(x'), 0).$$

Les vitesses de translation des sections de (C) ne sont pas supposées constantes au voisinage de M, pas plus que leurs vitesses de rotation. Mais elles doivent être supposées continues. En effet, le point M, étant infiniment petit, n'a pas de réalité physique. Seuls « existent » les voisinages infinitésimaux de M, dont la reconnaissance en tant qu'entités physiques élémentaires pertinentes, ayant une vitesse globale, présuppose la continuité des vitesses. À l'instant  $t'$ , les coordonnées spatio-temporelles de M sont donc, en tenant compte de la continuité des fonctions cosinus et sinus :

$$(x', R \cos(\tau x' + \omega t') + o(x', t'), \\ R \sin(\tau x' + \omega t') + o(x', t'), t'),$$

où les  $o(x', t')$  sont, conformément à la notation de Landau, négligeables devant  $\|(x', t')\|$ .

Un point de coordonnées  $(x, y, z, t)$  relativement à (E) est sur la génératrice si et seulement si il existe  $x'$  et  $t'$  tels que son transformé de Lorentz soit de la forme ci-dessus.

Les  $o(x', t')$  étant des  $o(x, t)$ , cela équivaut à :

$$\begin{cases} y = R \cos \left[ \tau \gamma (x - vt) + \omega \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \right] + o(x, t) \\ z = R \sin \left[ \tau \gamma (x - vt) + \omega \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \right] + o(x, t) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi l'équation spatio-temporelle de (G) dans (E) aux voisinages de l'origine et de l'instant 0.

En l'arrêtant à l'instant 0, on en déduit l'équation de (G) dans (E) à l'instant 0 au voisinage de l'origine :

$$\begin{cases} y = R \cos \left[ \gamma \left( \tau - \frac{v \omega}{c^2} \right) x \right] + o(x) \\ z = R \sin \left[ \gamma \left( \tau - \frac{v \omega}{c^2} \right) x \right] + o(x) \end{cases}$$

(G) est donc, à l'instant 0, et au voisinage de (S), tangente à une hélice régulière de « torsion »  $\gamma \left( \tau - \frac{v \omega}{c^2} \right)$ .

Si  $\tau = 0$ , la torsion extrinsèque locale de (C) est  $-\frac{\gamma v \omega}{c^2}$ . Elle ne correspond à aucune torsion mécanique, mais découle simplement du fait que deux sections du cylindre voisines de (S), considérées au même instant relatif à (E), sont dans  $(E_S)$  considérées avec un décalage temporel qui, puisque (C) tourne sur lui-même, engendre un décalage angulaire. Si la différence des abscisses dans (E) à l'instant considéré est  $x$ , le décalage temporel dans  $(E_S)$  est  $\gamma \left( \frac{-v x}{c^2} \right)$ . Comme la vitesse intrinsèque de rotation est  $\omega$ , le décalage angulaire est  $-\frac{\gamma v x \omega}{c^2}$ ; et la torsion extrinsèque est  $\frac{-\frac{\gamma v x \omega}{c^2}}{x} = -\frac{\gamma v \omega}{c^2}$ . On retrouve et explique la valeur qui vient d'être établie par un autre raisonnement.

Cette « torsion » n'est pas celle au sens usuel du mot pour une courbe, mais le « paramètre axial » de l'hélice : l'angle dont tourne un de ses points quand sa projection sur l'axe avance d'une unité de longueur.

En arrêtant l'équation ci-dessus à la position  $x = 0$ , on obtient la vitesse de rotation de N dans (E) :  $\gamma(\omega - v \tau)$ .  
Ce résultat nous servira ultérieurement.

*La transformation de Lorentz, parce qu'elle invoque une simultanéité dépendant de l'espace galiléen de référence, engendre un phénomène de torsion extrinsèque du cylindre en rotation, qui n'est lié à aucune déformation physique.*

Nous n'avons pas calculé la torsion extrinsèque lorsque les déformations de (C) au niveau de (S) font que son rayon varie, et que (C) est alors tangent à un cône. Un artifice nous aidera. Cette torsion extrinsèque, n'étant liée à aucune déformation physique, sera la même pour un tube épais que pour un tube mince, et encore la même

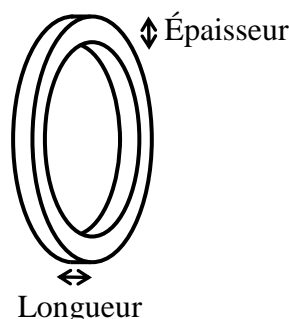
pour les surfaces minces que nous pouvons découper dans ce tube épais, et particulier pour ce tronc de cône.

*Lorsque les déformations que subit le cylindre font varier son rayon, les formules donnant la torsion extrinsèque et la vitesse de rotation de  $N$  restent les mêmes.*

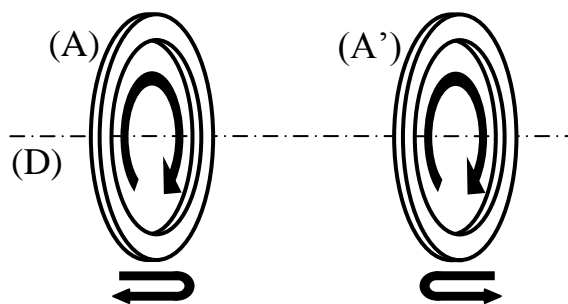
## 5 - INTERACTION DE DEUX ANNEAUX MINCES

### Condition suffisante pour que deux anneaux en interaction n'exercent aucun couple l'un sur l'autre

Soit (A) et (A') deux anneaux élastiques identiques d'axe (D), minces dans leur longueur comme dans leur épaisseur, et tournant sur eux-mêmes à la même vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ . Ils n'ont ni l'un ni l'autre de torsion mécanique.



Ils avancent l'un vers l'autre, se heurtent et repartent en sens inverse.



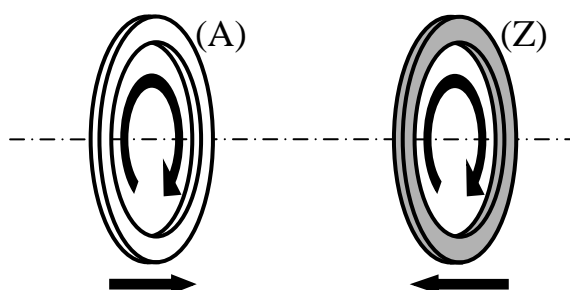
La symétrie de la situation entre (A) et (A') fait qu'ils n'échangent jamais de moment cinétique lors de leur interaction. Le couple exercé sur l'un par l'autre est donc constamment nul.

Ce résultat ne dépend pas de la vitesse des anneaux l'un par rapport à l'autre.

Comme, par raison de symétrie, ils tournent à la même vitesse durant le choc, les points qui entrent en contact au moment du choc restent en contact durant toute l'interaction : aucun des anneaux ne ripe sur l'autre. Leurs surfaces peuvent être parfaitement glissantes ou bien rugueuses, cela ne fait pas de différence. Pour chacun d'eux le choc est le même que s'il rebondissait sur une surface plane parfaitement lisse.

La vitesse intrinsèque commune de rotation des deux anneaux vaut  $\omega$  au début du choc ; mais cette valeur n'est a priori pas conservée durant le choc : en effet, le moment cinétique  $\mu$  des anneaux reste invariable, mais leurs déformations temporaires font varier leur moment d'inertie intrinsèque  $J$ , et donc leur vitesse intrinsèque de rotation  $\frac{\mu}{J}$ .

Remplaçons l'anneau (A') par un anneau mince élastique (Z) de même taille, animé comme lui d'un mouvement global uniforme de translation colinéaire à (D), et tournant sur lui-même à la vitesse intrinsèque de rotation  $\omega'$ . Sa matière est homogène et isotrope, comme celle de (A), mais ses autres caractéristiques sont possiblement différentes. Il n'a aucune torsion mécanique avant le choc



Durant l'interaction, les faces de (A) et de (Z) en regard l'une de l'autre sont à tout instant adjacentes. Leur zone de contact est donc une couronne circulaire d'épaisseur infinitésimale.

Étudions la situation suivant les différentes valeurs de  $\omega'$ , en commençant par le cas où  $\omega' < \omega$ .

Supposons dans un premier temps que les faces en contact sont parfaitement glissantes. L'échange de moment cinétique entre elles est donc nul tout au long du choc.

Un observateur emporté par le mouvement de (A), au bord de la zone de contact, observe la situation.

Si la vitesse intrinsèque de rotation de (Z) était  $\omega$ , il verrait au début du choc, d'après ce que nous venons d'établir, les points de (Z) tourner à la même vitesse que ceux de (A). Mais la vitesse intrinsèque de rotation de (Z) est strictement inférieure à  $\omega$  et l'observateur voit donc les points de (Z) glisser le long de (A) dans le sens contraire à celui dans lequel tourne (A). Il en déduit que s'il y avait des frottements, (Z) s'opposerait au mouvement de rotation de (A), autrement dit exercerait un couple antagoniste à ce mouvement.

De la même façon, si  $\omega' > \omega$  et que les frottements ne sont pas nuls, (Z) exercerait sur (A) un couple allant dans le sens de son mouvement.

Comme le couple exercé par un des anneaux sur l'autre dépend continûment de  $\omega'$ , il est, par le théorème de la valeur intermédiaire, nul quand  $\omega' = \omega$  et que les frottements ne sont pas nuls.

Cette propriété demeure vraie, par le même raisonnement, à tout instant de l'interaction ; cependant  $\omega$  et  $\omega'$  peuvent, parce que le moment d'inertie des anneaux a changé, ne plus avoir leurs valeurs primitives, auquel cas nous sortons des hypothèses.

*Soit deux anneaux minces tournant autour du même axe, et animés d'un mouvement global de translation le long de lui. Si ces anneaux, à un certain instant, sont en interaction, et qu'à cet instant*

- ils n'ont pas de torsion intrinsèque,*
- ils tournent à la vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ ,*

*alors, à cet instant, ces anneaux n'exercent aucun couple l'un sur l'autre. L'échange instantané de moment cinétique entre eux est par conséquent nul.*

Si l'interaction est en outre telle que les déformations ne font à aucun instant varier les moments d'inertie intrinsèques des anneaux, ils ont un comportement particulièrement simple :

*Si on ajoute aux hypothèses ci-dessus que les anneaux ont durant toute l'interaction leurs moments d'inertie intrinsèques qui restent invariables, alors, durant toute l'interaction,*

- ils n'échangent aucun moment cinétique,*
- ils n'exercent aucun couple l'un sur l'autre,*

- ils ne subissent aucun phénomène de torsion intrinsèque,
- ils conservent leur vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ .

### **Possibilité d'une interaction à moments d'inertie intrinsèques constants**

Les variations des moments d'inertie intrinsèques dépendent de la constitution des anneaux.

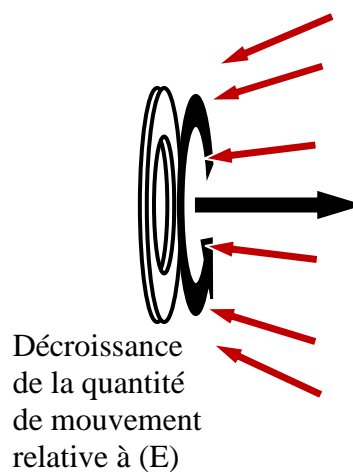
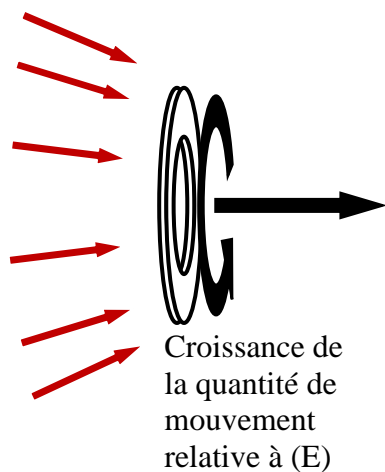
On peut imaginer des matériaux composites tels que lors des phénomènes de compression engendrés par le choc, plus de matière soit rejetée vers l'intérieur que vers l'extérieur, et que cela fasse diminuer le moment d'inertie intrinsèque – suffisamment pour que l'effet dépasse celui de l'alourdissement relativiste consécutif au stockage de l'énergie mécanique dans le matériau comprimé, qui joue en sens inverse.

On peut à l'inverse imaginer de matériaux rejetant plus de matière vers l'extérieur que vers l'intérieur, et donc tels que lors du choc leur moment d'inertie intrinsèque augmente.

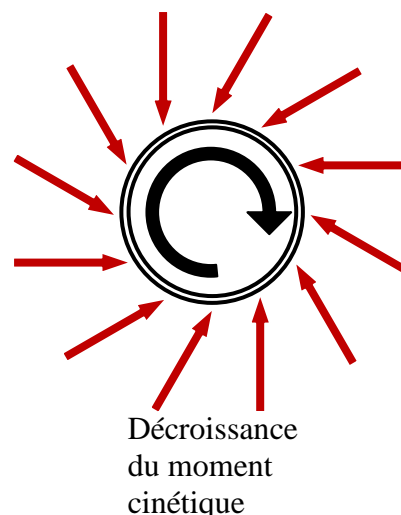
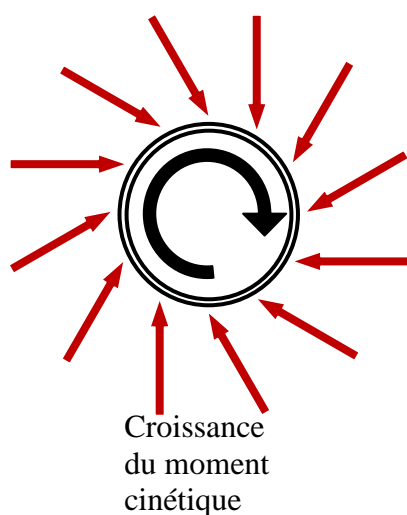
Entre les deux, semble-t-il, il existe la possibilité d'anneaux *neutres*, dont le moment d'inertie intrinsèque ne varie pas lors du choc. Mais ce n'est qu'une possibilité approximative et limitée. L'anneau qui serait parfaitement neutre pour telle force d'impact a toutes les chances de ne plus l'être tout à fait pour une autre. Et si d'aventure il l'était, nous serions bien incapables de le prouver en toute rigueur.

Mais nous disposons d'une autre solution pour obtenir des anneaux neutres. Il suffit en effet d'exercer sur (A) une poussée latérale compensant exactement les variations de son moment d'inertie. Pour cela, bombardons (A) durant l'interaction par un jet continu de particules qui la heurtent toutes sous le même angle et à la même vitesse en chacun de ses points, respectant ainsi sa symétrie de révolution. Si c'est une augmentation du moment d'inertie intrinsèque qu'il faut compenser, ces particules heurteront la face cylindrique externe ; si c'est une diminution, la face interne. Plaçons-nous sans perte de généralité dans le premier cas.

Selon la façon dont le jet arrive sur (A), il peut faire croître sa quantité de mouvement relative à (E), ou bien la faire décroître :

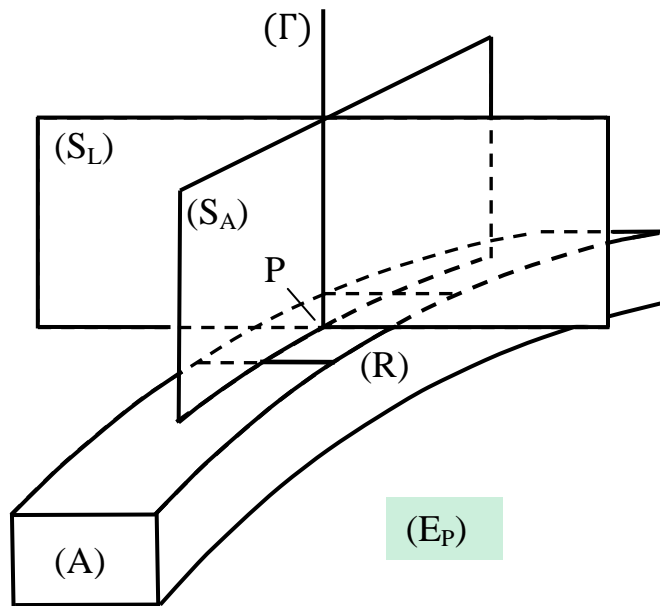


De même, il peut aussi faire croître ou décroître le moment cinétique de (A).



Soit (R) un rectangle élémentaire de la surface cylindrique extérieure de (A), dont il joint les deux bords. Observons la situation depuis l'espace galiléen ( $E_P$ ) tangent à son mouvement.

L'action exercée sur (R) peut être bijectivement représentée par un vecteur arrivant au centre P de (R), colinéaire au jet, et de longueur proportionnelle à son intensité.



Les origines des vecteurs peuvent être prises partout dans le demi-espace au-dessus de (R). Les jets qui augment la quantité de mouvement de (A) relativement à (E) correspondent à un vecteur qui pousse (R) disons vers la droite ; et ceux qui la diminuent à un vecteur poussant (R) vers la gauche. Cette discrimination répartit les origines des vecteurs en deux domaines séparés par une surface de révolution ( $S_A$ ) transversale à l'axe de l'anneau. De même, les jets qui augmentent le moment cinétique et ceux qui le diminuent sont de part et d'autre d'une surface ( $S_L$ ) disposée dans le sens de cet axe. Les deux surfaces se croisent selon une courbe ( $\Gamma$ ) représentant les jets qui ne modifient ni la quantité de mouvement relative à (E) ni le moment cinétique de (A).

Parmi eux, il en est dont l'intensité est trop faible pour compenser l'augmentation du moment d'inertie de (A) : par exemple le jet nul.

Choisissons une fois pour toutes de faire l'expérience d'aller et retour à des vitesses de rotation et de rapprochement des cylindres « raisonnables », c'est-à-dire telles que les déformations et les effets relativistes soient « petits », voire « négligeables ». Non pas que nous ayons l'intention de négliger quoi que ce soit, nous entendons au contraire raisonner avec l'absolue précision de la géométrie, qui dépasse infiniment celle de nos expériences concrètes.

Mais si ces phénomènes sont « petits » ou « négligeables », c'est qu'on peut, en agissant sur la matière élastique, les renverser.



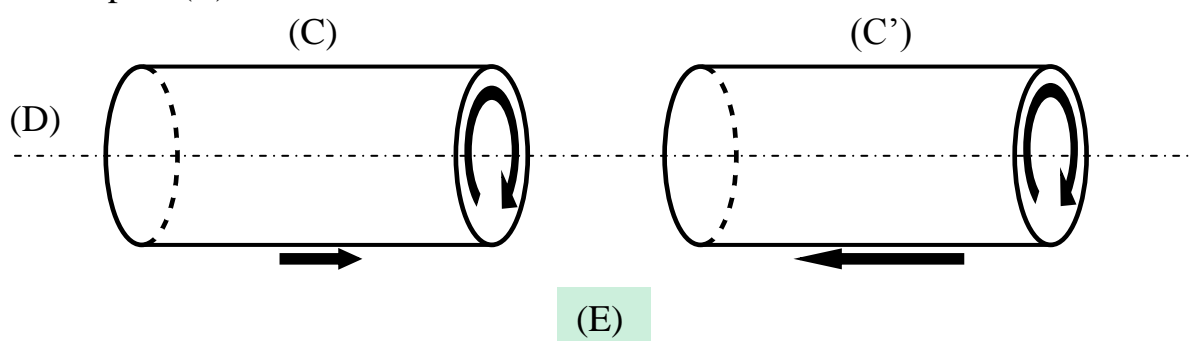
Une intensité  $I$  suffisamment forte du jet aura des effets dépassant ce « petit », et fera décroître le moment d'inertie. Comme il dépend continûment de  $I$ , il existe à tout instant de l'interaction une valeur intermédiaire de  $I$  telle que sa variation soit nulle.

Ainsi, il est possible d'exercer sur (A) tout au long de l'interaction une pression homogène variable dans le temps, qui, sans lui communiquer de moment cinétique ni de quantité de mouvement, maintient son moment d'inertie intrinsèque inchangé.

La relativité restreinte est une théorie « géométrique », en ce sens qu'elle est régie par des axiomes dont l'exactitude n'est pas supposée approximative mais parfaite. On peut, comme en géométrie, y faire des raisonnements dont la précision outrepassé nos capacités concrètes d'observation ; et en particulier portant sur des corps allant à des vitesses aussi petites que l'on veut, bien plus lentes que celle d'un escargot. Pour invisibles qu'ils soient, les « effets relativistes » n'en continuent pas moins, en toute rigueur, d'exister.

## 6 - POSSIBILITÉ DE FAIRE L'EXPÉRIENCE D'ALLER ET RETOUR À VITESSE INTRINSÈQUE DE ROTATION CONSTANTE ET TORSION INTRINSÈQUE NULLE

Reprenons l'étude de l'interaction des deux tubes élastiques (C) et (C') arrivant frontalement l'un sur l'autre. La figure est étudiée depuis (E).



Faisons l'hypothèse de récurrence qu'à un certain instant  $t$  de (E) nous connaissons l'ensemble des positions et des vitesses des points des deux cylindres et que

- chaque section tourne à la vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$  ;

- il n’y a nulle part aucune torsion intrinsèque ;
- le moment cinétique de chaque tranche infinitésimale est celui qu’elle a dans la première partie de l’expérience, lorsque le mouvement de (C) est uniforme dans toutes ses composantes.

Parce que nous connaissons l’ensemble des positions et des vitesses des points du système, et que ces données, jointes à la connaissance de ses caractéristiques mécaniques, déterminent son évolution à l’instant  $t$ , nous pouvons, du moins en théorie, en déduire cette évolution, c’est-à-dire l’ensemble des positions et des vitesses à l’instant  $t + dt$ .

Mais nous ne retrouverons pas l’hypothèse de récurrence, car les déformations font a priori varier les moments d’inertie intrinsèques des tranches infinitésimales. Du coup, les vitesses intrinsèques de rotation varient, il y a des échanges de moment cinétique, et on voit apparaître des phénomènes de torsion mécanique, c’est-à-dire intrinsèque. Il nous faut donner un coup de pouce pour remédier à cet inconvénient : exercer sur chaque tranche infinitésimale de (C) et de (C') l’action que nous venons d’étudier, qui compense exactement les variations de son moment intrinsèque d’inertie.

Les tranches infinitésimales successives composant (C) sont soudées les unes aux autres, mais c’est sans incidence sur le fait qu’elles n’exercent alors aucun couple les unes sur les autres.

Imaginons en effet que (C), à cet instant  $t$  où nous étudions son comportement au niveau d’une quelconque de ses sections (S), soit soudain coupé en deux le long de (S). Les deux cylindres adjacents ainsi obtenus (que les phénomènes de compression longitudinale empêchent de se séparer l’un de l’autre), considérés à cet instant au voisinage du trait de coupe,

- ont partout la même vitesse intrinsèque de rotation,
- sont partout sans torsion intrinsèque.

Ils n’exercent donc à cet instant aucun couple l’un sur l’autre.

L’action correctrice des variations du moment d’inertie intrinsèque n’exerce elle non plus aucun couple sur eux, si bien qu’il n’apparaîtra aucune torsion mécanique, donc aucune torsion intrinsèque. Comme le moment d’inertie intrinsèque et le moment cinétique sont conservés, ces voisinages continueront dans les instants immédiatement ultérieurs à  $t$  de garder partout la même vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ , et de n’exercer aucun couple l’un

sur l'autre. Les faces adjacentes pourraient être rugueuses ou parfaitement glissantes, cela reviendrait au même.

Des points adjacents situés de part et d'autre de la coupure continueront de coïncider comme ils le font si la coupure n'est pas faite, et cela montre qu'aucun couple n'est exercé au niveau de (S) quand la coupure n'est pas faite.

Comme c'est vrai où que soit faite la coupure, aucun échange de moment cinétique ne se fait au travers d'aucune section de (C). Toutes les tranches élémentaires du cylindre non coupé conservent donc leur moment cinétique, et, puisqu'elles conservent leur moment d'inertie intrinsèque, elles continuent de tourner à la même vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ . D'autre part, puisque aucun moment cinétique n'est échangé, aucun couple n'apparaît, et donc aucune torsion intrinsèque.

Qu'il y ait coupure ou non, que les faces coupées soient rugueuses ou parfaitement glissantes, le comportement de (C) est inchangé dans l'interaction tant pour l'absence de torsion intrinsèque que pour la conservation de la vitesse intrinsèque de rotation. On peut même le découper si l'on veut en un nombre arbitrairement grand de rondelles successives, sa génératrice restera une courbe continue et n'aura aucune torsion intrinsèque, cependant que chacune des rondelles continuera de tourner à la vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ .

Ainsi, l'hypothèse de récurrence (pas de torsion intrinsèque, moments cinétiques des tranches et vitesses intrinsèques de rotation des sections inchangés) se trouve vérifiée à l'instant  $t + dt$  : la propriété est héréditaire. Comme son amorçage est immédiat dans la première partie de l'expérience, on obtient :

Ce raisonnement invoque une récurrence faite sur une progression de pas infinitésimal, ce qui est une technique légitime en analyse non-standard – celle qu'utilisent implicitement les physiciens lorsqu'ils calculent « à la physicienne » et se servent d'infinitésimaux.

*Il est possible de construire une expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation telle que ses sections conservent la vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$  qu'elles ont avant le choc, et que sa torsion intrinsèque soit partout nulle.*

## 7 – UN ENTIER À LA FOIS NUL ET NON NUL

Durant tout l'aller et retour, donc, il n'apparaît aucune torsion intrinsèque sur (C), et la vitesse intrinsèque de rotation de ses sections est constamment égale à  $\omega$ .

D'après ce qui a été établi lors de l'étude de la torsion extrinsèque, et puisque la torsion intrinsèque est nulle, la vitesse  $\omega_N(t)$  de rotation de N dans (E) est  $\omega_N(t) = \gamma_N(t) \omega$ , où  $\gamma_N(t)$  est le coefficient relativiste associé à la vitesse de translation dans (E) de la section traversant (P) à l'instant  $t$ . Quant à M, puisque la section qui le porte est assimilable à une horloge de vitesse intrinsèque de rotation  $\omega$ , sa vitesse  $\omega_M(t)$  de rotation dans (E) est  $\frac{\omega}{\gamma_M(t)}$ , où  $\gamma_M(t)$  est le coefficient relativiste – a priori différent de  $\gamma_N(t)$  – associé à la vitesse de translation dans (E) de la section qui porte M. Nous ne refaisons pas le calcul, c'est le même que celui fait dans l'étude du paradoxe des jumeaux de Langevin.

Comme  $\gamma_N(t)$  et  $\gamma_M(t)$  sont, sauf instants isolés, strictement supérieurs à 1, on a que, sauf instants isolés,  $\omega_N(t) > \omega_M(t)$ .

Les nombres respectifs de tours faits autour de (D) par M et par N entre les instants  $i$  et  $j$  de début et de fin de l'expérience sont  $m = \int_i^j \omega_M(t) dt$  et  $n = \int_i^j \omega_N(t) dt$ . Comme les fonctions  $\omega_M(t)$  et  $\omega_N(t)$  sont continues et que la seconde est presque partout strictement supérieure à la première,  $n > m$ .

D'autre part, M et N coïncident aux instants  $i$  et  $j$ . La différence des nombres de tours qu'ils font est donc un entier.

*$n - m$  est un entier strictement positif.*

Toutes choses restant par ailleurs égales, faisons maintenant varier un des paramètres : la position du plan (P). Ce plan est encore immobile dans (E) durant toute l'expérience, encore perpendiculaire à (D), mais son point d'intersection avec (D) n'est plus le même d'une expérience à l'autre.

Chaque position de (P) est repérée par l'abscisse  $x$  de son point d'intersection avec (D), et l'ensemble des réels  $x$  tels que (C), dont le mouvement relatif à (E) est toujours exactement le même, franchisse en partie (P) sans le franchir complètement, autrement dit donne lieu à une expérience d'aller et retour, est un intervalle  $[x_1, x_2]$  de  $\mathbb{R}$ .

La plus longue expérience possible, celle où le cylindre presque en entier franchit temporairement (P), à l'exception de sa dernière section, correspond à l'abscisse  $x_1$ .

La plus courte expérience possible, celle où le point M atteint (P) en bout de course, sans le franchir, et où  $i = j$ , correspond à l'abscisse  $x_2$ .

Pour un  $x$  donné dans  $[x_1, x_2]$ , l'expérience repérée par  $x$  rend deux nombres de tours  $m(x)$  et  $n(x)$ . Une variation infinitésimale de  $x$  ne peut induire qu'une variation infinitésimale de  $m(x)$  et de  $n(x)$ . En d'autres termes,  $n(x) - m(x)$  est une fonction continue sur  $[x_1, x_2]$ . Comme elle ne prend que des valeurs entières, elle est constante sur cet intervalle. Cette constante est la valeur  $n - m$  prise dans l'expérience particulière étudiée tout au long de cet article ; autrement dit l'entier strictement positif  $n - m$  ; mais c'est aussi la valeur atteinte en  $x = x_2$ , pour lequel, puisque l'expérience ne dure alors qu'un instant,  $m(x_2) = n(x_2) = 0$ . On a donc

$$n - m = 0$$

Et ce résultat, en s'opposant au précédent, montre que l'expérience, analysée selon la relativité restreinte, aboutit à une contradiction.

## 8 - CONCLUSION PROVISOIRE

Sur le plan mathématique, l'existence d'une contradiction est une catastrophe. La théorie, en prédisant qu'il existe un entier  $n - m$  à la fois nul et non nul, permet, par multiplication par un réel arbitraire, de démontrer que tous les réels sont nuls, et donc égaux entre eux – ce qui n'empêche pas qu'on puisse en même temps prouver qu'ils sont non nuls : lorsque l'édifice est contradictoire, on peut prouver tout et le contraire de tout.

La situation évoque celle que durent connaître les mathématiciens grecs lorsque leur croyance naïve en la rationalité de tous les nombres fut brusquement anéantie par la découverte que la racine carrée de 2 est irrationnelle. Si l'on suppose en effet que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux, on montre que  $q$  est à la fois pair et impair, donc que  $0 = 1$  ; il s'ensuit un effondrement de la théorie aussi injuste qu'incompréhensible, vu les nombreuses preuves de sa valeur précédemment données.

En raison de toutes ces preuves, justement, la théorie ne pouvait pas sombrer. Elle était trop puissante, trop efficace pour pouvoir être ruinée par une byzantine question de parité, totalement hors du champ de l'expérience ; car l'ensemble des rationnels est dense parmi les réels, si bien qu'aucun protocole expérimental ne fera jamais, ni dans un sens ni dans l'autre, la différence entre les uns et les autres. Il y avait forcément une issue, que les Grecs trouvèrent : admettre tout simplement que tous les nombres ne sont pas rationnels. Une fois cet inconcevable accepté, tout rentrait dans l'ordre. Les vieux théorèmes retrouvaient leur solidité première, et la géométrie, un moment ruinée, sortait renforcée de sa débâcle provisoire. Qui plus est, les mathématiques se retrouvaient plus riches d'une connaissance essentielle et féconde, celle de l'existence de nombres irrationnels.

Comme la géométrie euclidienne en ce temps, la théorie de la relativité restreinte a suffisamment montré sa bonne adéquation au réel pour ne pas survivre à la catastrophe, même si elle s'en verra forcément modifiée. Puisque la modification ne peut qu'être mineure, on peut la considérer comme un « détail ». Mais, puisque ce détail est nécessairement lié à quelque point de vue erroné, comme l'était la croyance naïve que tous les nombres sont rationnels, c'est plus qu'un simple détail, et nous apprendra nécessairement quelque chose d'important.

Dans un article faisant suite à celui-ci, nous déterminerons quelle est la modification minimale à apporter à la théorie pour la rendre capable de supporter l'expérience d'aller et retour du cylindre en rotation, vérifierons que, comme dans le cas de la géométrie « pré-irrationnelle » et « post-irrationnelle », elle permet bien de sauver la totalité pragmatique de la théorie, et nous examinerons ses principales implications.

# Table des matières

1 – LE PARADOXE DES JUMEAUX DE LANGEVIN .....	1
2 – PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE D'ALLER ET RETOUR D'UN CYLINDRE EN ROTATION .....	4
3 – CARACTÈRE « ABSOLU » DU MOMENT CINÉTIQUE .....	9
4 – LES PHÉNOMÈNES DE TORSION .....	11
La torsion intrinsèque .....	12
La torsion mécanique.....	13
Lien entre torsion mécanique et torsion intrinsèque.....	13
La torsion extrinsèque.....	15
5 – INTERACTION DE DEUX ANNEAUX MINCES .....	18
Condition suffisante pour que deux anneaux en interaction n'exercent aucun couple l'un sur l'autre .....	18
Possibilité d'une interaction à moments d'inertie intrinsèques constants .....	21
6 – POSSIBILITÉ DE FAIRE L'EXPÉRIENCE D'ALLER ET RETOUR À VITESSE INTRINSÈQUE DE ROTATION CONSTANTE ET TORSION INTRINSÈQUE NULLE .....	24
7 – UN ENTIER À LA FOIS NUL ET NON NUL .....	27
8 – CONCLUSION PROVISOIRE .....	28