HAL
open science

Stabilisation de la formule des traces tordue III: intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien; réductions et preuves.

Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Stabilisation de la formule des traces tordue III: intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien; réductions et preuves.. 2014. hal-00945232

HAL Id: hal-00945232

https://hal.science/hal-00945232v1

Preprint submitted on 12 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation de la formule des traces tordue III : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves

J.-L. Waldspurger

7 février 2014

Introduction

Cet article est la suite de [I] et [II] dont on adopte les notations. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, G un groupe réductif connexe défini sur F, $\tilde{G}$ un espace tordu sous G et $\mathbf{a}$ un élément de $H^1(W_F;Z(\hat{G}))$, dont se déduit un caractère ω de $G(F)$. On impose les hypothèses de [II] 1.1. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On a énoncé dans [II] diverses assertions concernant les intégrales pondérées ω-équivariantes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ et leurs variantes endoscopiques $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$. Le terme $\boldsymbol{\gamma}$ est un élément de $D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$, ce qui revient essentiellement à dire que c'est une combinaison linéaire finie d'intégrales orbitales dans $\tilde{M}(F)$ (tordues par ω). Le terme $\mathbf{f}$ est un élément de $I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, ce qui revient essentiellement à dire que c'est une fonction sur $\tilde{G}(F)$, localement constante et à support compact. Considérons l'hypothèse suivante :

(Hyp) *soient $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$; supposons que $\boldsymbol{\gamma}$ soit à support fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$; alors on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}).$$

Le but de l'article est de prouver toutes les assertions énoncées en [II] sous cette hypothèse. La preuve de celle-ci nécessite un argument global et sera faite plus tard. Esquissons comment se déduit le théorème [II] 1.16 de l'hypothèse (Hyp). L'énoncé de ce théorème est le même que celui de (Hyp), sauf que l'on supprime l'hypothèse sur le support de $\boldsymbol{\gamma}$. En utilisant la théorie des germes de Shalika, on a prouvé en [II] 2.10 que (Hyp) entraînait une assertion plus forte, à savoir la même égalité sous l'hypothèse plus faible que le support de $\boldsymbol{\gamma}$ est formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers, c'est-à-dire d'éléments $\gamma\in\tilde{M}(F)$ tels que $M_\gamma=G_\gamma$. Passons au cas où $\boldsymbol{\gamma}$ est quelconque. On peut fixer une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ d'éléments semi-simples de $\tilde{M}(F)$ et supposer $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$, c'est-à-dire que le support de $\boldsymbol{\gamma}$ est formé d'éléments de parties semi-simples dans $\mathcal{O}$. Soit $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale. On note $a\boldsymbol{\gamma}$ la translatée de $\boldsymbol{\gamma}$ par a. Le support de cette distribution est formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. On a donc pour tout $\mathbf{f}$ l'égalité

$$(1)\qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}).$$

Faisons tendre a vers 1. On a établi un développement de ces deux termes en [II] 3.2 et [II] 3.9. Pour les énoncer facilement, faisons l'hypothèse simplificatrice que $\tilde{M}$ est un espace de Levi propre et maximal de $\tilde{G}$. Alors $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ est équivalent (en un sens défini en [II] 3.1) à

$$(2) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) + \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}} I^{\tilde{G}}(\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}},\mathbf{f}).$$

L'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ est celui des racines de $A_{\tilde{M}}$ dans $\mathfrak{g}$, au signe près. Pour $J=\{\pm\alpha\}$, le terme $\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)$ est le produit d'un élément de $D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ indépendant de a et de $log(|\alpha(a)-\alpha(a)^{-1}|_F)$. Enfin, l'exposant $\tilde{G}$ de $\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}}$ indique que l'on induit cette distribution à $\tilde{G}(F)$. On a un développement parallèle

$$(3) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) + \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}} I^{\tilde{G}}(\rho_J^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}},\mathbf{f}).$$

La notion d'équivalence évoquée plus haut est inoffensive : l'égalité (1) entraîne que (2) et (3) sont égaux. Pour $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, considérons l'assertion

$(4)_J$ on a $\rho_J^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}}=\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}}$ pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et tout $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et proche de 1.

L'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ possède un élément "maximal" $J_{max}=\{\pm\alpha\}$ formé des deux racines indivisibles. Supposons $(4)_J$ prouvé pour $J\neq J_{max}$. Alors l'égalité de (2) et (3) entraîne

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{\tilde{G}}(\rho_{J_{max}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}} - \rho_{J_{max}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}},\mathbf{f}).$$

Or le membre de gauche est constant en a tandis que celui de droite est proportionnel à $log(|\alpha(a)-\alpha(a)^{-1}|_F)$, où α est une racine indivisible. Il ne peuvent être égaux que s'ils sont tous deux nuls. La nullité du membre de gauche est l'assertion du théorème [II] 1.16. La nullité du membre de droite est l'assertion $(4)_{J_{max}}$. Tout revient donc à prouver $(4)_J$ pour J non maximal. Dans le cas où $\tilde{G}=G$ et $\mathbf{a}=1$, on raisonne par récurrence sur la dimension de G. A un J non maximal, on associe un certain sous-groupe $G_J\subsetneq G$, et on montre que l'assertion se déduit de l'assertion analogue où G est remplacé par G_J. Le cas général utilise la descente. On fixe $\eta\in\mathcal{O}$ et on montre que les termes $\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)$ et $\rho_J^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},a)$ se déduisent de termes analogues où $\tilde{G}$ est remplacé par la composante neutre G_η du commutant de η dans $\tilde{G}$. Ce groupe G_γ n'étant plus tordu, le résultat précédent s'applique et on peut conclure. La théorie de la descente est facile pour le terme $\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)$ (du moins, elle est facile maintenant que Harish-Chandra et Arthur ont travaillé pour nous). C'est beaucoup plus délicat pour le terme endoscopique $\rho_J^{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},a)$ car, dans le cas tordu, mélanger descente et endoscopie fait apparaître des "triplets endoscopiques non standard", cf. 6.1. Il y a une analogue de l'assertion $(4)_J$ pour de tels triplets que nous déduirons elle-aussi de l'hypothèse (Hyp), modulo un raisonnement par récurrence assez sophistiqué, cf. 6.4.

Il y a deux cas où on obtient des résultats non conditionnels, parce que l'on peut dès maintenant prouver la validité de (Hyp). Le premier, détaillé dans la section 1, est celui où il n'y a pas de torsion : $\tilde{G}=G$ et $\mathbf{a}=1$. Dans ce cas, (Hyp) a été prouvé par Arthur ([A1] local theorem 1). Le second, auquel est consacré la section 2, est celui où G est quasi-déployé, $\tilde{G}$ est à torsion intérieure et $\mathbf{a}=1$. Dans ce cas, on montre que l'on peut plonger $\tilde{G}$ dans un groupe non tordu H de sorte que l'hypothèse (Hyp) pour $\tilde{G}$ se déduise de la même hypothèse pour ce groupe H. Comme on vient de le dire, cette dernière a été prouvée par Arthur puisque H n'est pas tordu.

Dans la troisième section, limitée au cas des groupes non tordus, on montre comment se comportent nos objets (par exemple les termes $\rho_J(\boldsymbol{\gamma}, a)$) par passage au revêtement simplement connexe du groupe dérivé. Dans la quatrième section, on énonce comment se comportent ces mêmes objets par descente d'Harish-Chandra. Dans la section 5, on reprend les constructions de [W1] qui permettent de relier descente et endoscopie. C'est là qu'apparaissent les triplets endoscopiques non standard. La section 6 leur est consacrée. Dans la section 7, on développe la démonstration grossièrement évoquée ci-dessus, c'est-à-dire que l'on montre que la plupart des énoncés de [II] résultent de l'hypothèse (Hyp). La huitième et dernière section concerne les énoncés restants, à savoir ceux concernant les germes de Shalika. Ces germes sont locaux, c'est-à-dire vivent au voisinage d'une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ fixée dans $\tilde{M}(F)$. On prouve ces résultats sans recourir à l'hypothèse (Hyp), pourvu que $\mathcal{O}$ n'appartienne pas à un ensemble au plus fini de telles classes. Ces résultats n'ont pas de conséquence immédiate mais le fait qu'ils soient obtenus sans hypothèse nous sera utile plus tard.

1 Le cas des groupes non tordus

1.1 Rappel des résultats d'Arthur

Dans tout l'article, le corps de base F est local non-archimédien de caractéristique nulle, sauf mention expresse du contraire. On considère dans cette section un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ non tordu, c'est-à-dire que $\tilde{G} = G$ et $\mathbf{a} = 1$. Le triplet se réduit donc à l'unique groupe G. On fixe une fonction B comme en [II] 1.8. On peut affaiblir les hypothèses de récurrence posées en [II] 1.1. En effet, en partant de notre groupe G, on ne peut faire apparaître par les constructions de [II] que des triplets non tordus, réduits à un unique groupe. Les hypothèses de récurrence suivantes sont donc suffisantes : si G est quasi-déployé, on suppose connus tous les résultats concernant des groupes G' quasi-déployés tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$; si G n'est pas quasi-déployé, on suppose connus tous les résultats concernant les groupes quasi-déployés G' tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$ et tous les résultats concernant les groupes quelconques tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$. Si une assertion est relative à un Levi M de G, on suppose connues toutes les assertions concernant le même groupe G et relatives à un Levi $L \in \mathcal{L}(M)$ tel que $L \neq M$.

Soit M un Levi de G. Dans ce cas, les résultats suivants ont été prouvés par Arthur ([A1] local theorem 1) :

(1) soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(G(F)) \otimes Mes(G(F))$; on suppose que le support de $\boldsymbol{\gamma}$ est formé d'éléments fortement G-réguliers ; alors on a l'égalité

$$I_M^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_M^G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f});$$

(2) supposons G quasi-déployé ; soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$; on suppose que le support de $\boldsymbol{\delta}$ est formé d'éléments fortement G-réguliers ; alors la distribution $\mathbf{f} \mapsto S_M^G(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est stable.

En vertu de la proposition 2.10 de [II], les mêmes résultats valent sous des hypothèses plus faibles concernant les supports des éléments $\boldsymbol{\gamma}$ ou $\boldsymbol{\delta}$: on peut y remplacer "G-réguliers" par "G-équisinguliers".

1.2 Intégrales orbitales pondérées stables

On suppose G quasi-déployé. Soit M un Levi de G. On a défini en [II] 3.3 l'ensemble $\mathcal{J}_M^G(B)$. Pour $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, on peut appliquer la construction [II] 3.5 à la classe $\mathcal{O} = \{1\}$ et au système de fonctions déduit de notre fonction B. Cela définit une application linéaire

$$\sigma_J^G : D_{unip}^{st}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^* \to U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^G.$$

On a aussi défini en [II] 3.3 un groupe G_J qui n'est pas, en général, un sous-groupe de G. Le système de racines de G_J est un sous-système de celui de G, de même rang que celui-ci et l'inclusion est équivariante pour les actions galoisiennes. Il en résulte que $Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ est un sous-groupe d'indice fini de $Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F}$. On pose

$$i_J^G = [Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}.$$

Remarquons que, dans le cas où J est maximal, cf. [II] 3.1, on a $G_J = G$ et $i_J^G = 1$. En particulier, si l'on remplace G par G_J, J devient l'élément maximal de $\mathcal{J}_M^{G_J}(B)$ et $i_J^{G_J} = 1$. On a prouvé en [II] 3.3 l'inclusion $Ann_{unip}^{G_J} \subset Ann_{unip}^G$.

Proposition. *(i) Pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, σ_J^G est la composée de $i_J^G \sigma_J^{G_J}$ et de la projection*

$$U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^{G_J} \to U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^G.$$

(ii) Pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, σ_J^G prend ses valeurs dans

$$U_J \otimes (D_{unip}^{st}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^{G,st}.$$

(iii) Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{unip}^{st}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, la distribution

$$\mathbf{f} \mapsto S_M^G(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$$

est stable.

Preuve. Rappelons que l'on note $\rho_{J,st}^G$ la restriction de ρ_J^G à l'espace $D_{unip}^{st}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$. On peut reformuler la définition de σ_J^G par l'égalité

$$(1) \qquad \rho_{J,st}^G = \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, J \in \mathcal{J}_M^{G'(s)}(B)} i_M(G, G'(s)) \sigma_J^{G'(s)}.$$

Plus exactement, il s'agit des projections modulo Ann_{unip}^G des $\sigma_J^{G'(s)}$. Pour simplifier, on oublie de telles projections dans la notation. Le membre de gauche est égal à $\rho_{J,st}^{G_J}$ d'après [II] 3.3(i) (en oubliant les projections). Pour $s \neq 1$, on peut utiliser par récurrence le (i) de l'énoncé : on a $\sigma_J^{G'(s)} = i_J^{G'(s)} \sigma_J^{G'(s)_J}$. Posons $x = \sigma_J^G - i_J^G \sigma_J^{G_J}$. Remarquons que le (i) de l'énoncé revient à prouver que $x = 0$. L'égalité (1) devient

$$(2) \qquad \rho_{J,st}^{G_J} = x + \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, J \in \mathcal{J}_M^{G'(s)}(B)} i_M(G, G'(s)) i_J^{G'(s)} \sigma_J^{G'(s)_J}.$$

On a une projection

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F}.$$

Un élément $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ détermine donc à la fois un groupe endoscopique $G'(s)$ de G et un groupe endoscopique $(G_J)'(s)$ de G_J. Montrons que

(3) on a $J \in \mathcal{J}_M^{G'(s)}(B)$ si et seulement si $J \in \mathcal{J}_M^{(G_J)'(s)}(B)$;

(4) si $J \in \mathcal{J}_M^{G'(s)}(B)$, on a l'égalité $G'(s)_J = (G_J)'(s)$.

Rappelons que l'on a associé à J un réseau $R_J \subset \mathfrak{a}_M^*$ de rang $n = a_M - a_G$, cf. [II] 3.1. Fixons une paire de Borel (B, T) de G définie sur F telle que M soit standard. On note α_M la restriction à $\mathfrak{a}_M$ d'un élément $\alpha \in \mathfrak{t}^*$. On a les égalites

$$\Sigma^{G'(s)}(T) = \{\alpha \in \Sigma^G(T); \hat{\alpha}(s) = 1\},$$

$$\Sigma^{G_J}(T) = \{\alpha \in \Sigma^G(T); B(\alpha)^{-1}\alpha_M \in R_J\},$$

$$\Sigma^{(G_J)'(s)}(T) = \{\alpha \in \Sigma^G(T); B(\alpha)^{-1}\alpha_M \in R_J, \hat{\alpha}(s) = 1\}.$$

On a $J \in \mathcal{J}_M^{G'(s)}(B)$ si et seulement si il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Sigma^{G'(s)}(T)$ telles que les éléments $B(\alpha_i)^{-1}\alpha_{i,M}$ pour $i = 1, ..., n$ engendrent R_J. Dans ce cas, ces éléments α_i appartiennent aussi à $\Sigma^{(G_J)'(s)}(T)$, donc $J \in \mathcal{J}_M^{(G_J)'(s)}(B)$. La réciproque est évidente. Si ces conditions sont vérifiées, les ensembles $\Sigma^{G'(s)_J}(T)$ et $\Sigma^{(G_J)'(s)}(T)$ sont égaux : conserver les racines α telles que $\hat{\alpha}(s) = 1$ et conserver les racines α telles que $B(\alpha)^{-1}\alpha_M \in R_J$ sont des opérations qui commutent. Les actions galoisiennes sont aussi les mêmes : ce sont les restrictions de l'action sur $\Sigma^G(T)$. Cela prouve (3) et (4).

On récrit (2) sous la forme

$$\rho_{J,st}^{G_J} = x + \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, J \in \mathcal{J}_M^{(G_J)'(s)}(B)} i_M(G, G'(s)) i_J^{G'(s)} \sigma_J^{(G_J)'(s)}.$$

Pour tout s apparaissant, on a

$$i_M(G, G'(s)) i_J^{G'(s)} = [Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1} [Z(\hat{G}'(s)_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F}]^{-1}.$$

En utilisant (4), on obtient

$$i_M(G, G'(s)) i_J^{G'(s)} = [Z((\hat{G}_J)'(s))^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}$$

$$= [Z((\hat{G}_J)'(s))^{\Gamma_F} : Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F}]^{-1} [Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}$$

$$= i_M(G_J, (G_J)'(s)) [Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}.$$

Alors (2) se récrit

$$\rho_{J,st}^{G_J} = x + [Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1} \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, J \in \mathcal{J}_M^{(G_J)'(s)}(B)} i_M(G_J, (G_J)'(s)) \sigma_J^{(G_J)'(s)}$$

ou encore

$$\rho_{J,st}^{G_J} = x + \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F}, J \in \mathcal{J}_M^{(G_J)'(s)}(B)} i_M(G_J, (G_J)'(s)) \sigma_J^{(G_J)'(s)}.$$

En comparant avec l'égalité (1) appliquée au groupe G_J, on obtient $x = 0$, ce qui prouve le (i) de l'énoncé.

En raisonnant par récurrence, ce résultat implique (ii) pour tout J tel que $G_J \neq G$. C'est-à-dire pour tout J sauf l'unique élément maximal J_{max}.

Rappelons le développement [II] 3.7. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(G(F)) \otimes Mes(G(F))$. Le germe en 1 de la fonction $a \mapsto S^G_M(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est équivalent à

$$\sum_{J \in \mathcal{J}^G_M(B)} I^G(\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)^G, \mathbf{f})$$

$$+ \sum_{L \in \mathcal{L}(M), L \neq G} \sum_{J \in \mathcal{J}^L_M(B)} S^G_L(\sigma^L_J(\boldsymbol{\delta}, a)^L, B, \mathbf{f}).$$

Pour $L \neq G$ et $J \in \mathcal{J}^L_M(B)$, on sait par récurrence que $\sigma^L_J(\boldsymbol{\delta}, a)^L$ est stable. Si de plus $L \neq M$, on sait que la distribution $\mathbf{f} \mapsto S^G_L(\sigma^L_J(\boldsymbol{\delta}, a)^L, B, \mathbf{f})$ est stable. Pour $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$ non maximal, on sait que $\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)^G$ est stable. Supposons que $\mathbf{f}$ soit "instable", c'est-à-dire que l'image de $\mathbf{f}$ dans $SI(G(F)) \otimes Mes(G(F))$ soit nulle. Alors tous les termes du développement ci-dessus s'annulent, sauf deux : ceux pour l'élément maximal J_{max} de $\mathcal{J}^G_M(B)$ et pour l'élément $J = \emptyset$ de $\mathcal{J}^M_M(B)$ (on peut les supposer distincts, sinon $M = G$ et la proposition est tautologique). Pour $J = \emptyset$, on a $\sigma^M_\emptyset(\boldsymbol{\delta}, a) = \boldsymbol{\delta}$. Le développement ci-dessus se réduit à

$$I^G(\sigma^G_{J_{max}}(\boldsymbol{\delta}, a)^G, \mathbf{f}) + S^G_M(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}).$$

Les résultats d'Arthur impliquent que $S^G_M(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = 0$, cf. 1.1. Donc la somme ci-dessus est équivalente à 0. Comme fonction de a, le premier terme appartient à $U_{J_{max}}$ et le second est constant. La propriété [II] 3.1(3) entraîne que les deux termes sont nuls. La nullité du premier pour tout $\mathbf{f}$ instable signifie que $\sigma^G_{J_{max}}(\boldsymbol{\delta}, a)^G$ est stable. En vertu du lemme [I] 5.13, cela achève de prouver (ii). La nullité du second terme implique le (iii) de l'énoncé. □

1.3 Germes stables

On suppose G quasi-déployé. Soit M un Levi de G.

Corollaire. *Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,G-équi}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ assez proche de 1, le terme $Sg^G_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}, B)$ appartient à $D^{st}_{unip}(G(F)) \otimes Mes(G(F))^*$.*

Preuve. On applique le lemme [II] 2.9, en prenant pour $\mathcal{D}^{st}$ l'espace $D^{st}_{géom,G-équi}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ tout entier. L'hypothèse de ce lemme est vérifiée d'après 1.1. Le (i) du lemme l'est aussi d'après le (iii) de la proposition précédente. Donc le (ii) aussi, ce qui est l'assertion de l'énoncé. □

1.4 Intégrales orbitales pondérées endoscopiques

Le groupe G est quelconque. Soient M un Levi de G et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ une donnée endoscopique de M, elliptique et relevante. Pour $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$, on a défini en [II] 3.8 un homomorphisme

$$\rho^{G,\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}') : D^{st}_{unip}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^* \to U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann^G_{unip}.$$

Proposition. *(i) Pour tout $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$, $\rho^{G,\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}')$ est le composé de $\rho^{G_J,\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}')$ et de la projection*

$$U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann^{G_J}_{unip} \to U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann^G_{unip}.$$

(ii) Pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{unip}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et tout $a \in A_M(F)$ en position générale et assez proche de 1, on a l'égalité

$$\rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^G(transfert(\boldsymbol{\delta}), a).$$

(iii) Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et tout $\mathbf{f} \in I(G(F)) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$I_M^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}) = I_M^G(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}).$$

Preuve. Rappelons la définition, pour $\boldsymbol{\delta} \in D_{unip}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et $a \in A_M(F)$ en position générale et proche de 1 :

$$\rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{M'}(G, G'(s)) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{G'(s)}(B); J' \mapsto J} transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a))),$$

cf. [II] 3.8. Comme on l'a dit en [II] 3.6, il y a un isomorphisme

$$\iota : D_{unip}^{st}(M'(F)) \otimes Mes(M'(F))^* \to D_{unip}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$$

et on a l'égalité

$$\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \xi(a)) = \iota(\sigma_{J'}^{G'(s)}(\iota^{-1}(\boldsymbol{\delta}), \xi(a)))$$

pour tout s apparaissant ci-dessus. En posant $\boldsymbol{\delta}' = \iota^{-1}(\boldsymbol{\delta})$, la formule ci-dessus devient

$$\rho_J^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = transfert \circ \iota(X_J^G),$$

où

$$(1) \qquad X_J^G = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{M'}(G, G'(s)) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{G'(s)}(B); J' \mapsto J} \sigma_{J'}^{G'(s)}(\boldsymbol{\delta}', \xi(a)).$$

Plus exactement, ce qui nous importe est la projection de ce terme modulo le sous-espace $Ann' \subset D_{unip}^{st}(M'(F)) \otimes Mes(M'(F))^*$ formé des éléments dont l'image par $transfert \circ \iota$ appartient à Ann_{unip}^G. En vertu des formules ci-dessus, il suffit pour prouver (i) de montrer que, modulo cet espace Ann', X_J^G coïncide avec $X_J^{G_J}$. La preuve est alors similaire à celle de 1.2. Un élément $s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ détermine à la fois un groupe endoscopique $G'(s)$ de G et un groupe endoscopique $(G_J)'(s)$ de G_J. Les propriétés similaires à 1.2(3) et (4) sont vérifiées :

(2) les ensembles (réduits à au plus un élément) $\{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{G'(s)}(B); J' \mapsto J\}$ et $\{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{(G_J)'(s)}(B); J' \mapsto J\}$ coïncident ;

(3) s'ils ne sont pas vides, notons J' leur seul élément ; alors $G'(s)_{J'} = (G_J)'(s)$.

En utilisant ces propriétés et en appliquant la proposition 1.2(i) aux termes du membre de droite de (1), on transforme (1) en

$$X_J^G = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{M'}(G, G'(s)) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{M'}^{(G_J)'(s)}(B); J' \mapsto J} i_{J'}^{G'(s)} \sigma_{J'}^{(G_J)'(s)}(\boldsymbol{\delta}', \xi(a))$$

du moins modulo Ann'. De nouveau, on calcule

$$i_{M'}(G, G'(s)) i_{J'}^{G'(s)} = [Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1} i_{M'}(G_J, (G_J)'(s)).$$

D'où

$$X_J^G = [Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F} : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1} \sum_{s\in\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{M'}(G_J,(G_J)'(s))$$

$$\sum_{J'\in\mathcal{J}_{M'}^{(G_J)'(s)}(B);J'\mapsto J} \sigma_{J'}^{(G_J)'(s)}(\boldsymbol{\delta}',\xi(a))$$

$$= \sum_{s\in\zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_J)^{\Gamma_F}} i_{M'}(G_J,(G_J)'(s)) \sum_{J'\in\mathcal{J}_{M'}^{(G_J)'(s)}(B);J'\mapsto J} \sigma_{J'}^{(G_J)'(s)}(\boldsymbol{\delta}',\xi(a)) = X_J^{G_J}.$$

Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Posons $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Pour tout $a \in A_M(F)$, on a $a\boldsymbol{\gamma} = transfert(\xi(a)\boldsymbol{\delta})$. Soit $\mathbf{f} \in I(G(F)) \otimes Mes(G(F))$. Utilisons les développements [II] 3.3 de $I_M^G(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ et [II] 3.9 de $I_M^{G,\mathcal{E}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I_M^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\xi(a)\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$. On obtient que

$$(4) \qquad I_M^G(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) - I_M^{G,\mathcal{E}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$

est équivalent à

$$\sum_{L\in\mathcal{L}(M)} \sum_{J\in\mathcal{J}_M^L(B)} I_L^G(\rho_J^L(\boldsymbol{\gamma},a)^L,B,\mathbf{f}) - I_L^{G,\mathcal{E}}(\rho_J^{L,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^L,B,\mathbf{f}).$$

On sait d'après 1.1 que l'expression (4) est nulle. En raisonnant par récurrence et en utilisant le (i) de l'énoncé, on connaît l'assertion (ii) pour tout J sauf pour le terme maximal J_{max} de $\mathcal{J}_M^G(B)$. On sait aussi que les intégrales orbitales $I_L^{G,\mathcal{E}}$ coïncident avec I_L^G si $L \neq M$. L'expression ci-dessus se simplifie et on obtient que l'expression

$$I^G(\rho_{J_{max}}^G(\boldsymbol{\gamma},a)^G - \rho_{J_{max}}^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^G,\mathbf{f})$$

$$+I_M^G(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f}) - I_M^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$$

est nulle. La propriété [II] 3.1(3) entraîne de nouveau la nullité de ces deux termes. La nullité du premier achève de prouver l'assertion (ii) de l'énoncé. La nullité du second démontre l'assertion (iii) pour notre distribution $\boldsymbol{\gamma}$. Mais tout élément de $D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ est combinaison linéaire de transferts de $\boldsymbol{\delta}$ comme ci-dessus, quand on fait varier la donnée $\mathbf{M}'$. Il s'ensuit que l'assertion (iii) est vérifiée pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$. □

1.5 Germes endoscopiques

Soit M un Levi de G.

Corollaire. *Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ assez proche de 1, on a l'égalité*

$$g_{M,unip}^G(\boldsymbol{\gamma},B) = g_{M,unip}^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B).$$

Comme en 1.3, cela se déduit de la proposition précédente en utilisant le lemme [II] 2.8. □

2 Premiers résultats dans le cas quasi-déployé et à torsion intérieure

2.1 Un lemme sur les groupes abéliens finis

Soient X un groupe abélien fini et n un entier supérieur ou égal à 1. Tout élément $\underline{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ détermine un homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\underline{m}} : & X^n & \to & X \\ & \underline{x} = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \sum_{i=1,...,n} m_i x_i \end{array}$$

Evidemment, cet homomorphisme ne dépend que de l'image de $\underline{m}$ dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$, où N est l'exposant de X (c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à 1 qui annule X).

Lemme. *Soit $\underline{x}, \underline{y} \in X^n$. Alors $\underline{y}$ appartient au sous-groupe de X^n engendré par $\underline{x}$ si et seulement si, pour tout $\underline{m} \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi_{\underline{m}}(\underline{y})$ appartient au sous-groupe de X engendré par $\varphi_{\underline{m}}(\underline{x})$.*

Preuve. Dans un sens, c'est évident : si $\underline{y} = r\underline{x}$, avec $r \in \mathbb{Z}$, alors $\varphi_{\underline{m}}(\underline{y}) = r\varphi_{\underline{m}}(\underline{x})$ pour tout $\underline{m}$. Supposons inversement que, pour tout $\underline{m} \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi_{\underline{m}}(\underline{y})$ appartient au sous-groupe de X engendré par $\varphi_{\underline{m}}(\underline{x})$. Décomposons X en somme directe $\oplus_{p \in P} X_p$ où P est un ensemble fini de nombres premiers et X_p est un p-groupe pour tout $p \in P$. On décompose conformément tout $z \in X$ en $z = \sum_{p \in P} z_p$. Le sous-groupe de X engendré par z est l'ensemble des $z' = \sum_{p \in P} z'_p$ tels que, pour tout $p \in P$, z'_p appartienne au sous-groupe de X_p engendré par z_p. La même propriété s'applique à $X^n = \oplus_{p \in P} X_p^n$. Donc, pour tout $p \in P$ et pour tout $\underline{m} \in \mathbb{Z}^n$, $(\varphi_{\underline{m}}(\underline{y}))_p$ appartient au sous-groupe de X_p engendré par $(\varphi_{\underline{m}}(\underline{x}))_p$. Pour tout $\underline{z} \in X^n$, on a $(\varphi_{\underline{m}}(\underline{z}))_p = \varphi_{\underline{m}}(\underline{z}_p)$. Donc, pour tout $p \in P$ et pour tout $\underline{m} \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi_{\underline{m}}(\underline{y}_p)$ appartient au sous-groupe de X_p engendré par $\varphi_{\underline{m}}(\underline{x}_p)$. Supposons le lemme démontré pour chaque X_p. Alors la propriété précédente entraîne que, pour tout $p \in P$, $\underline{y}_p$ appartient au sous-groupe de X_p^n engendré par $\underline{x}_p$. D'où la conclusion.

On est ainsi ramené au cas où X est un p-groupe pour un certain nombre premier p. Ecrivons $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\underline{y} = (y_1, ..., y_n)$. Pour tout $i = 1, ..., n$, notons $a_i \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $p^{a_i} x_i = 0$. A permutation près, on peut supposer $a_1 \geq ... \geq a_n$. L'assertion à prouver étant évidente dans le cas $n = 1$, on suppose $n \geq 2$. On pose $\underline{x}' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $\underline{y}' = (y_1, ..., y_{n-1})$. Ces elements vérifient la même hypothèse que $\underline{x}$ et $\underline{y}$, mais pour $n - 1$. En raisonnant par récurrence, on peut supposer qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $\underline{y}' = r\underline{x}'$. Alors l'élément $(0, ..., 0, y_n - rx_n) = \underline{y} - r\underline{x}$ vérifie la même hypothèse que $\underline{y}$. On va montrer qu'il est nul. En oubliant cette construction, on suppose simplement que $\underline{y} = (0, ..., 0, y_n)$ et on va prouver que $y_n = 0$. En appliquant l'hypothèse à $\underline{m} = (0, ..., 0, 1)$, on voit qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $y_n = rx_n$. D'où la conclusion si $x_n = 0$. On suppose $x_n \neq 0$. Soit $h \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $p^h x_n$ appartienne au sous-groupe de X engendré par x_1. On a $h \leq a_n$ et une égalité $p^h x_n + p^{h'} u x_1 = 0$, où $u \in \mathbb{Z}$ est premier à p et $h' = h + a_1 - a_n$. Posons $z = x_n + p^{a_1 - a_n} u x_1$. On vérifie que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^{a_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z} & \to & X \\ (e, f) & \mapsto & ex_1 + fz \end{array}$$

est injective. Appliquons l'hypothèse à $\underline{m} = (m, 0, ..., 0, 1)$. On obtient que rx_n appartient au groupe engendré par $mx_1 + x_n$. Autrement dit $r(z - p^{a_1 - a_n} u x_1)$ appartient au groupe

engendré par $z+(m-p^{a_1-a_n}u)x_1$. Posons $m=p^{a_1-a_n}u$. Alors $r(z-p^{a_1-a_n}ux_1)$ appartient au groupe engendré par z. D'après l'injectivité précédente, p^{a_1} doit diviser $rup^{a_1-a_n}$. Donc p^{a_n} divise r. D'où $y_n=rx_n=0$. $\square$

2.2 Un lemme sur les tores

Dans ce paragraphe et les trois suivants, on lève l'hypothèse que F est non-archimédien. Le corps F est un corps local de caractéristique nulle.

Lemme. *Soient T un tore défini sur F et $U\subset T(F)$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. Alors il existe un tore T' défini sur F et un homomorphisme $f:T'\to T$ défini sur F de sorte que $f(T'(F))=U$.*

Preuve dans le cas où F est archimédien. Si $F=\mathbb{C}$, $T(\mathbb{C})$ est connexe. Donc $U=T(\mathbb{C})$. Le tore $T'=T$ et l'homomorphisme identité conviennent. Supposons $F=\mathbb{R}$. Introduisons les trois tores T_1, T_2 et T_3 sur $\mathbb{R}$ tels que $T_1(\mathbb{R})=\mathbb{R}^\times$, $T_2(\mathbb{R})=\mathbb{C}^\times$, $T_3(\mathbb{R})=\{z\in\mathbb{C};z\bar{z}=1\}$. On sait que T est isomorphe à un produit de tels tores, disons $T=T_1^a\times T_2^b\times T_3^c$. Le sous-groupe U est nécessairement de la forme $U_1\times T_2(\mathbb{R})^b\times T_3(\mathbb{R})^c$, où U_1 est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $T_1(\mathbb{R})^a$. Si on trouve T_1' et f_1 résolvant le problème pour le tore T_1^a et le sous-groupe U_1, on pose $T'=T_1'\times T_2^b\times T_3^c$, on étend f_1 en f par l'identité sur les autres composantes. Cela résout le problème initial. On est ainsi ramené au cas où $T=T_1^a$. Quitte à appliquer un automorphisme de T, on peut supposer qu'il existe un entier e avec $0\le e\le a$ de sorte que $U=(\mathbb{R}_+^\times)^e\times(\mathbb{R}^\times)^{a-e}$. On pose $T'=T_2^e\times T_1^{a-e}$, on définit f comme étant la norme sur les e-premières composantes et l'identité sur les $a-e$ dernières. Cela résout le problème.

Preuve dans le cas où F est non-archimédien. On fixe une extension finie E de F tel que Γ_E agisse trivialement sur $X_*(T)$. On introduit le tore $S=Res_{E/F}(GL(1)_E)$. Le groupe $X_*(S)$ est le groupe des fonctions $\phi:\Gamma_E\backslash\Gamma_F\to\mathbb{Z}$, muni de l'action de Γ_F par translations à droite. On a $S(F)=E^\times$. On introduit le tore D tel que $X_*(D)$ soit $X_*(S)\otimes_{\mathbb{Z}}X_*(T)$, c'est-à-dire le groupe des fonctions $\phi:\Gamma_E\backslash\Gamma_F\to X_*(T)$, muni de l'action de Γ_F par translations à droite. On a $D\simeq S^n$, où n est la dimension de T. On a un plongement $\iota:T\to D$ ainsi défini : pour $x_*\in X_*(T)$, $\iota\circ x_*$ est l'élément ϕ de $X_*(D)$ tel que $\phi(\sigma)=\sigma(x_*)$. Ce plongement est défini sur F. Soit $N\ge 1$ un entier. Pour tout groupe abélien Y, notons $Y^{(N)}$ le groupe des puissances N-ièmes dans Y. Montrons que

(1) il existe N tel que $D(F)^{(N)}\cap\iota(T(F))\subset\iota(U)$.

Introduisons le sous-groupe compact maximal $D(F)_c$ de $D(F)$. Les sous-groupes $(D(F)_c)^N$ forment un système de voisinages ouverts de l'origine dans $D(F)$. Le plongement $\iota:T(F)\to D(F)$ est une immersion fermée. Puisque U est ouvert dans $T(F)$, il existe un entier $N_1\ge 1$ tel que $(D(F)_c)^{N_1}\cap\iota(T(F))\subset\iota(U)$. On a une suite exacte

$$1\to D(F)_c\to D(F)\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}^n\to 0$$

Posons $L_T=\pi\circ\iota(T(F))$, $L_U=\pi\circ\iota(U)$ et $L_0=\mathbb{Z}^n\cap(L_T\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$. Le groupe L_U est d'indice fini dans L_T par hypothèse et L_T est d'indice fini dans L_0. Soit $N_2\ge 1$ tel que $N_2L_0\subset L_U$. Soit $N=N_1N_2$ et soit $d\in D(F)$ tel que $d^N\in\iota(T(F))$. Alors $N\pi(d)\in L_T\subset L_0$. Le groupe $\mathbb{Z}^n/L_0$ est sans torsion. Donc $\pi(d)\in L_0$ puis $N_2\pi(d)\in L_U$. On peut donc trouver $u\in U$ et $d_c\in D(F)_c$ tels que $d^{N_2}=\iota(u)d_c$. On a $d_c^{N_1}=d^N\iota(u)^{-N_1}$. Ceci appartient à

$\iota(T(F))$, donc à $(D(F)_c)^{N_1} \cap \iota(T(F))$, donc à $\iota(U)$. Posons $d_c^{N_1} = \iota(v)$, avec $v \in U$. Alors $d^N = \iota(u^{N_1}v)$ appartient à $\iota(U)$. Cela démontre (1).

Fixons N vérifiant (1). Si $N = 1$, on a $U = T(F)$ et le lemme est évident (on prend $T' = T$ et f l'identité). Supposons $N > 1$. Soit $d \in D(F)$, notons V le sous-groupe de $D(F)$ engendré par d et $D(F)^{(N)}$. Montrons que

(2) il existe un tore D' défini sur F et un homomorphisme $g : D' \to D$ défini sur F de sorte que $g(D'(F)) = V$ et que le noyau de g soit connexe.

On identifie D à S^n. Si $n = 1$, V est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $S(F) = E^\times$. On sait qu'il existe une extension finie E' de E telle que, en notant $N_{E'/E}$ la norme, V soit égal au groupe des normes $N_{E'/E}(E'^\times)$ ([S] XIV.6 théorème 1). On pose $S' = Res_{E'/F}(GL(1)_{E'})$. On construit facilement un homomorphisme $g : S' \to S$ défini sur F dont l'homomorphisme déduit de $S'(F) = E'^\times$ dans $S(F) = E^\times$ soit la norme $N_{E'/E}$. Avec la description donnée plus haut de $X_*(S)$ et la description similaire de $X_*(S')$, pour $\phi' \in X_*(S')$, on a $g \circ \phi'(\sigma) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{E'} \backslash \Gamma_E} \phi'(\gamma\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Il en résulte que l'on a une suite exacte

$$0 \to Y \to X_*(S') \to X_*(S) \to 0,$$

où Y est un $\mathbb{Z}$-module libre. Le noyau de g est donc connexe. Alors le tore $D' = S'$ et cet homomorphisme g conviennent.

Supposons maintenant $n > 1$. On choisit un sous-ensemble $\underline{M} \subset \mathbb{Z}^n$ qui s'envoie bijectivement sur $\mathbb{Z}^n/(N\mathbb{Z})^n$. On suppose que $\underline{M}$ contient les éléments de base de $\mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire les éléments qui ont une coordonnée égale à 1 et dont les autres coordonnées sont nulles. Pour tout $\underline{m} = (m_1, ..., m_n) \in \underline{M}$, on définit l'homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\underline{m}} : & D = S^n & \to & S \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \prod_{i=1,...,n} x_i^{m_i} \end{array}$$

On note $V_{\underline{m}}$ le sous-groupe de $S(F)$ engendré par $S(F)^{(N)}$ et par $\varphi_{\underline{m}}(d)$. En appliquant le résultat du cas $n = 1$, on choisit un tore $S_{\underline{m}}$ défini sur F et un homomorphisme $g_{\underline{m}} : S_{\underline{m}} \to S$ défini sur F de sorte que $g_{\underline{m}}(S_{\underline{m}}(F)) = V_{\underline{m}}$ et que le noyau de $g_{\underline{m}}$ soit connexe. En posant $S_{\underline{M}} = \prod_{\underline{m} \in \underline{M}} S_{\underline{m}}$ et $S^{\underline{m}} = \prod_{\underline{m} \in \underline{M}} S$, les homomorphismes $g_{\underline{m}}$ se regroupent en un homomorphisme $g_{\underline{M}} : S_{\underline{M}} \to S^{\underline{M}}$. Son noyau est connexe et on a l'égalité $g_{\underline{M}}(S_{\underline{M}}(F)) = \prod_{\underline{m} \in \underline{M}} V_{\underline{m}}$. D'autre part, les homomorphismes $\varphi_{\underline{m}}$ se regroupent en un homomorphisme $\varphi_{\underline{M}} : D = S^n \to S^{\underline{M}}$. C'est une immersion fermée : quand $\underline{m}$ décrit les éléments de base de $\mathbb{Z}^n$, les applications $\varphi_{\underline{m}}$ décrivent les applications coordonnées naturelles sur S^n. Notons D' le produit fibré de D et $S_{\underline{M}}$ au-dessus de $S^{\underline{M}}$. Autrement dit $D'(\bar{F})$ est le groupe des $(x, y) \in D(\bar{F}) \times S_{\underline{M}}(\bar{F})$ tels que $\varphi_{\underline{M}}(x) = g_{\underline{M}}(y)$. Parce que $\varphi_{\underline{M}}$ est une immersion fermée et que le noyau de $g_{\underline{M}}$ est connexe, D' est connexe. C'est donc un tore, qui est évidemment défini sur F. On note $g : D' \to D$ la projection $(x, y) \mapsto x$. Cet homomorphisme est défini sur F. Son noyau est celui de $g_{\underline{M}}$, donc est connexe. Le groupe $g(D'(F))$ est celui des $x \in D(F)$ tels que, pour tout $\underline{m} \in \underline{M}$, $\varphi_{\underline{m}}(x)$ appartienne à $g_{\underline{m}}(S_{\underline{m}}(F))$, autrement dit à $V_{\underline{m}}$. En appliquant le lemme du paragraphe précédent au groupe $X = S(F)/S(F)^{(N)}$, on obtient que $g(D'(F)) = V$. Cela prouve (2).

La propriété (2) s'étend de la façon suivante. Soit V un sous-groupe de $D(F)$ contenant $D(F)^{(N)}$. Alors

(3) il existe un tore D' défini sur F et un homomorphisme $g : D' \to D$ défini sur F de sorte que $g(D'(F)) = V$ et que le noyau de g soit connexe.

Le groupe V est engendré par $D(F)^{(N)}$ et un ensemble fini d'éléments $d_1, ..., d_k$. On peut supposer $k \geq 1$, quitte à prendre $d_1 = 1$. Si $k = 1$, on applique l'assertion (2). Si

$k \geq 2$, on note V_1, resp. V_2, le sous-groupe de $D(F)$ engendré par $D(F)^{(N)}$ et les éléments $d_1, ..., d_{k-1}$, resp. d_k. En raisonnant par récurrence, on choisit D'_1 et g_1, resp. D'_2 et g'_2, vérifiant (3) pour le groupe V_1, resp. V_2. On pose $D' = D'_1 \times D'_2$ et on prend pour g le produit de g_1 et g_2. Il est clair que D et g sont définis sur F et que $g(D(F)) = V$. Le noyau de g est fibré au-dessus de D'_1, de fibres isomorphes au noyau de g_2. Donc ce noyau est connexe. Cela prouve (3).

Appliquons (3) au groupe $V = D(F)^{(N)}\iota(U)$. On en déduit un tore D' et un homomorphisme g. Soit T' le produit fibré de T et D' au-dessus de D. C'est-à-dire que $T'(\bar{F})$ est le groupe des $(t, d') \in T(\bar{F}) \times D'(\bar{F})$ tels que $\iota(t) = g(d')$. Notons $f : T' \to T$ la projection $(t, d') \mapsto t$. Cette projection est surjective et son noyau est isomorphe à celui de g, donc est connexe. Donc le groupe T' est lui-même connexe et c'est un tore. Il est clair que T et f sont définis sur F. L'image $f(T'(F))$ est le sous-groupe des $t \in T(F)$ tels que $\iota(t)$ appartienne à $g(D'(F))$, autrement dit à $D(F)^{(N)}\iota(U)$. En appliquant (1), on obtient que $f(T'(F)) = U$. Cela achève la démonstration. $\square$

2.3 Détordre un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure. On suppose comme toujours $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$.

Proposition. *Il existe des objets H, D, d, ι, $\tilde{\iota}$, q vérifiant les conditions suivantes :*

(i) H est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F ;

(ii) D est un tore défini sur F ;

(iii) $d \in D(F)$;

(iv) $\iota : G \to H$ est un plongement défini sur F dont l'image est un sous-groupe distingué de H ;

(v) $q : H \to D$ est un homomorphisme ;

(vi) la suite

$$1 \to G \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{q} D \to 1$$

est exacte ;

(vii) en notant $H_d = \{h \in H; q(h) = d\}$, $\tilde{\iota} : \tilde{G} \to H_d$ est un isomorphisme de variétés algébriques définies sur F tel que $\tilde{\iota}(g\gamma g') = \iota(g)\tilde{\iota}(\gamma)\iota(g')$ pour tous $g, g' \in G$, $\gamma \in \tilde{G}$;

(viii) $q(H(F)) = D(F)$ et ce groupe est engendré par $q(Z(H; F))$ et par d.

Preuve. On a construit en [W1] 1.3(6) et (7) des objets H', D', ι', q' vérifiant les analogues de (i), (ii), (iv), (v), et tels que $Z(H')$ soit connexe et soit un tore induit. Comme on l'a dit en [I] 1.9, l'ensemble $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ s'identifie à celui des $e \in \tilde{G}$ tels que ad_e soit l'identité. Fixons un élément $e \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Il y a un cocycle $z : \Gamma_F \to Z(G)$ tel que $\sigma(e) = z(\sigma)^{-1}e$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Puisque $Z(H')$ est induit, le cocycle $\iota \circ z$ est un bord. On peut fixer $e_{H'} \in Z(H')$ tel que $\sigma(e_{H'}) = \iota \circ z(\sigma)^{-1}e_{H'}$ pour tout σ. On pose $d' = q'(e_{H'})$. On définit $\tilde{\iota}' : \tilde{G} \to H'_{d'}$ par $\tilde{\iota}'(ge) = \iota'(g)e_{H'}$. On voit que toutes nos conditions sont vérifiées, sauf éventuellement la huitième. Appliquons le lemme du paragraphe précédent au tore D' et au groupe U engendré par $q'(Z(H'; F))$ et d'. On obtient un tore que nous notons D et un homomorphisme $f : D \to D'$. Notons H le produit fibré de H' et D au-dessus de D'. C'est-à-dire que $H(\bar{F})$ est le groupe des $(x, y) \in H'(\bar{F}) \times D(\bar{F})$ tels que $q'(x) = f(y)$. On note $\iota : G \to H$ le plongement $g \mapsto (\iota'(g), 1)$ et $q : H \to D$ la projection

$(x,y) \mapsto y$. La suite

$$1 \to G \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{q} D \to 1$$

est exacte. Cela prouve que H est connexe. On sait qu'il existe $d \in D(F)$ tel que $f(d) = d'$. On fixe un tel d et on définit $\tilde{\iota} : \tilde{G} \to H_d$ par $\tilde{\iota}(\gamma) = (\tilde{\iota}'(\gamma), d)$. Les sept premières propriétés de l'énoncé sont vérifiées. Le groupe $Z(H)$ est le produit fibré de $Z(H')$ et de D au-dessus de D'. Remarquons que d appartient à $q(H(F))$: on a $d = q \circ \tilde{\iota}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Soit $y \in D(F)$. On a $f(y) \in U$. On peut donc écrire $f(y) = q'(z')(d')^n$, avec $z' \in Z(H';F)$ et $n \in \mathbb{Z}$. Posons $y_1 = yd^{-n}$. Alors $y_1 \in D(F)$ et $f(y_1) = q'(z')$. L'élément $z = (z', y_1)$ appartient à $Z(H;F)$. Alors $y = q(z)d^n$. Cela prouve que $D(F)$ est engendré par $q(Z(H;F))$ et par d. Puisque d appartient à $q(H(F))$ et que $q(Z(H;F))$ est inclus dans ce groupe, on a aussi $D(F) = q(H(F))$. $\square$

Pour la suite de la section, les hypothèses sont celles de ce paragraphe et on fixe des objets vérifiant la proposition. Pour simplifier les notations, on oublie ι et $\tilde{\iota}$ en identifiant G et $\tilde{G}$ à des sous-ensembles de H via ces plongements.

Soit $\gamma \in \tilde{G}(F)$. La propriété (viii) entraîne que

(1) tout élément de $H(F)$ peut s'écrire $\gamma^n zg$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $z \in Z(H;F)$ et $g \in G(F)$.

Puisque γ appartient à $Z_H(\gamma;F)$, il en résulte que

(2) $Z_H(\gamma;F)$ est le sous-groupe de $H(F)$ engendré par γ, $Z(H;F)$ et $Z_G(\gamma;F)$.

On a aussi

(3) l'application naturelle $Z_G(\gamma;F)\backslash G(F) \to Z_H(\gamma;F)\backslash H(F)$ est bijective.

En effet, elle est évidemment injective. Les propriétés (1) et (2) entraînent sa surjectivité.

Il y a une bijection $M \mapsto M^H$ entre Levi de G et Levi de H : M^H est engendré par M et $Z(H)$; inversement, $M = G \cap M^H$. Puisque $\tilde{G}$ est à torsion intérieure, il y a aussi une bijection $M \mapsto \tilde{M}$ entre Levi de G et espaces de Levi de $\tilde{G}$. On a simplement $\tilde{M} = M^H \cap \tilde{G}$. Il est clair que, pour tout espace de Levi $\tilde{M}$, le groupe M^H et les mêmes objets D, q, d vérifient la proposition du paragraphe précédent relativement à $\tilde{M}$.

2.4 Fonctions, intégrales orbitales, représentations

De l'inclusion $\tilde{G}(F) \subset H(F)$ se déduit un homomorphisme de restriction $res^H_{\tilde{G}}$: $C_c^\infty(H(F)) \to C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Dans le cas où F est archimédien, ces espaces sont munis d'une topologie et cet homomorphisme est continu. On a donc un homomorphisme dual qui, à une distribution sur $\tilde{G}(F)$, associe une distribution sur $H(F)$. Soit $\gamma \in \tilde{G}(F)$, munissons $Z_G(\gamma;F)\backslash G(F)$ d'une mesure. A ces données est associée une distribution sur $\tilde{G}(F)$, qui à $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ associe l'intégrale orbitale

$$\int_{Z_G(\gamma;F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

D'après 2.3(2), son image dans l'espace des distributions sur $H(F)$ est l'intégrale orbitale sur $H(F)$ associée à γ et la mesure sur $Z_H(\gamma;F)\backslash H(F)$ transportée de celle fixée sur $Z_G(\gamma;F)\backslash G(F)$ par l'isomorphisme entre ces deux quotients. Il en résulte que l'homomorphisme $res^H_{\tilde{G}}$ se quotiente en un homomorphisme $res^H_{\tilde{G}} : I(H(F)) \to I(\tilde{G}(F))$. En sens inverse, une distribution invariante sur $\tilde{G}(F)$ à support dans un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F)$ s'envoie sur une distribution sur $H(F)$ à support

dans un nombre fini de classes de conjugaison par $H(F)$. Autrement dit, on obtient un homomorphisme $res_{\tilde{G}}^{H,*} : D_{géom}(\tilde{G}(F)) \to D_{géom}(H(F))$.

On a vu qu'il était plus canonique de considérer les espaces $I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ et $D_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^*$. La suite exacte

$$1 \to G(F) \to H(F) \to D(F) \to 1$$

induit un isomorphisme $Mes(H(F)) \simeq Mes(G(F)) \otimes Mes(D(F))$. On choisit une fois pour toutes une mesure de Haar sur $D(F)$. L'isomorphisme ci-dessus devient simplement un isomorphisme $Mes(H(F)) \simeq Mes(G(F))$. On a aussi un isomorphisme dual $Mes(H(F))^* \simeq Mes(G(F))^*$. On peut voir les homomorphismes ci-dessus sous la forme

$$res_{\tilde{G}}^{H} : I(H(F)) \otimes Mes(H(F)) \to I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F)),$$

$$res_{\tilde{G}}^{H,*} : D_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^* \to D_{géom}(H(F)) \otimes Mes(H(F))^*.$$

Pour un élément $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$, la classe de conjugaison stable de γ dans $\tilde{G}(F)$ est égale à la classe de conjugaison stable de γ dans $H(F)$. La propriété 2.3(3) implique d'ailleurs que, si $\dot{\mathcal{X}}(\gamma)$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans cette classe de conjugaison stable, c'est aussi un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H(F)$. En choisissant des mesures comme ci-dessus, on voit que

$$S^{\tilde{G}}(\gamma, res_{\tilde{G}}^{H}(f)) = S^{H}(\gamma, f)$$

pour tout $f \in C_c^\infty(H(F))$. Il en résulte que l'homomorphisme de restriction se quotiente en un homomorphisme

$$res_{\tilde{G}}^{H} : SI(H(F)) \otimes Mes(H(F)) \to SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F)).$$

On a un homomorphisme dual

$$res_{\tilde{G}}^{H,*} : D_{géom}^{st}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^* \to D_{géom}^{st}(H(F)) \otimes Mes(H(F))^*.$$

Les choses sont moins simples du côté spectral. Soit $(\pi, \tilde{\pi})$ une représentation $G(F)$-irréductible de $\tilde{G}(F)$. C'est-à-dire que π est une représentation admissible irréductible de $G(F)$ dans un espace complexe V_π et $\tilde{\pi}$ est une application de $\tilde{G}(F)$ dans le groupe des automorphismes linéaires de V_π telle que $\tilde{\pi}(g\gamma g') = \pi(g)\tilde{\pi}(\gamma)\pi(g')$ pour tous $g, g' \in G(F)$ et $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Notons χ_π le caractère central de π et prolongeons-le en un caractère χ_π^H de $Z(H;F)$. Fixons $\gamma_0 \in \tilde{G}(F)$, notons N l'ordre de d dans le groupe fini $D(F)/q(Z(H;F))$. Alors γ_0^N appartient à $Z(H;F)G(F)$ et on peut l'écrire conformément $\gamma_0^N = z_0 g_0$. Le lemme de Schur implique qu'il existe $c_0 \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\tilde{\pi}(\gamma_0)^N = c_0 \chi_\pi^H(z_0)\pi(g_0)$. Fixons une racine N-ième c de c_0. Pour $h \in H(F)$, écrivons $h = zg\gamma^n$, avec $z \in Z(H;F)$, $g \in G(F)$ et $n \in \mathbb{Z}$. Posons $\pi^H(h) = \chi_\pi^H(z)\pi(g)(c^{-1}\tilde{\pi}(\gamma))^n$. On vérifie que cela ne dépend pas de la décomposition choisie de h et que l'application π^H ainsi définie est une représentation admissible de $H(F)$ dans V_π. Elle est irréductible puisque sa restriction π à $G(F)$ l'est. Introduisons le groupe localement compact $D(F)^\vee$ des caractères unitaires de $D(F)$. La théorie de la dualité pour les groupes abéliens localement compacts nous dit que $Mes(D(F)^\vee)$ est isomorphe à $Mes(D(F))^*$. Autrement dit, de la mesure que l'on a fixée sur $D(F)$ se déduit une mesure duale $d\kappa$ sur $D(F)^\vee$. Fixons une mesure de Haar

dh sur $H(F)$, qui détermine une telle mesure dg sur $G(F)$. De $\tilde{\pi}$, resp. π^H, se déduit un caractère-distribution $I^{\tilde{G}}(\tilde{\pi},.)$, resp. $I^H(\pi^H,.)$, sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, resp. sur $C_c^\infty(H(F))\otimes Mes(H(F))$. Pour $f\in C_c^\infty(H(F))$, on vérifie que l'intégrale de gauche ci-dessous est absolument convergente et que l'on a l'égalité

$$(1)\qquad \int_{D(F)^\vee} I^H(\pi^H, f(\kappa\circ q)\otimes dh)\kappa(d)^{-1}\,d\kappa = I^{\tilde{G}}(res^H_{\tilde{G}}(f)\otimes dg).$$

Comme on le sait, les caractères-distributions sont associés à des fonctions localement intégrables $trace\,\tilde{\pi}$ sur $\tilde{G}(F)$ et $trace\,\pi^H$ sur $H(F)$. Alors $trace\,\tilde{\pi}$ n'est autre que la restriction de $trace\,\pi^H$ à $\tilde{G}(F)$.

Inversement, soit π^H une représentation admissible irréductible de $H(F)$. Utilisons la théorie de Mackey appliquée à $H(F)$ et à son sous-groupe distingué $G(F)Z(H;F)$, dont le quotient $D(F)/q(Z(H;F))$ est engendré par l'image de d. Cette théorie nous dit que, si la restriction de $trace\,\pi^H$ n'est pas identiquement nulle sur $\tilde{G}(F)$, alors la restriction π de π^H à $G(F)$ est irréductible. Notons dans ce cas $\tilde{\pi}$ la restriction de π^H à $\tilde{G}(F)$. Le couple $(\pi,\tilde{\pi})$ est une représentation $G(F)$-irréductible de $\tilde{G}(F)$. Le procédé ci-dessus appliqué à ce couple, en prenant pour caractère χ^H_π le caractère central de π^H, reconstruit π^H. On obtient que l'application qui, à $trace\,\pi^H$, associe sa restriction à $\tilde{G}(F)$, est un homomorphisme surjectif

$$(2)\qquad D_{spec}(H(F))\to D_{spec}(\tilde{G}(F)).$$

Il est clair qu'il se restreint en un homomorphisme surjectif

$$D_{temp}(H(F))\to D_{temp}(\tilde{G}(F)),$$

les indices $temp$ signifiant que l'on se limite aux représentations tempérées. On a introduit en [W2] 2.12 le sous-espace $D_{ell}(\tilde{G}(F))\subset D_{temp}(\tilde{G}(F))$ engendré par les caractères de représentations elliptiques au sens d'Arthur. On a le sous-espace analogue $D_{ell}(H(F))\subset D_{temp}(H(F))$.

Lemme. *L'homomorphisme précédent se restreint en un homomorphisme surjectif*

$$D_{ell}(H(F))\to D_{ell}(\tilde{G}(F)).$$

Preuve. Soient M un Levi semi-standard de G, σ une représentation irréductible et de la série discrète de $M(F)$ et $(A,\gamma)\in\mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$. C'est-à-dire que A est un automorphisme unitaire de l'espace V_σ de σ, $\gamma\in\tilde{G}(F)$ normalise M et on a la relation

$$\sigma(ad_\gamma(x))\circ A = A\circ\sigma(x)$$

pour tout $x\in M(F)$. On note $W_0(\sigma)$ le groupe habituel de la théorie des R-groupes (cf. [W2] 1.11) et on suppose $W_0(\sigma)=\{1\}$. On suppose aussi que l'automorphisme de $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ défini par γ n'a pas de point fixe non nul. Fixons $P\in\mathcal{P}(M)$. A l'aide de (A,γ), on a défini en [W2] 2.9 une représentation $(\pi,\tilde{\pi})$ de $\tilde{G}(F)$. La représentation π n'est autre que l'induite $Ind_P^G(\sigma)$. Elle n'est pas irréductible en général. En la réalisant dans son modèle V_π habituel, l'opérateur $\tilde{\pi}(\gamma)$ est le composé des trois opérateurs

- $e\mapsto A\circ e$ de V_π dans $V_{\pi'}$, où $\pi'=Ind_P^G(\sigma\circ ad_\gamma)$;

- $e \mapsto \partial_P(\gamma)^{1/2} e \circ ad_\gamma^{-1}$ de $V_{\pi'}$ dans $V_{\pi''}$, où $\pi'' = Ind_{ad_\gamma(P)}^G(\sigma)$; $\partial_P(\gamma)^{1/2}$ est un facteur de normalisation sans importance pour nous ;

- l'opérateur d'entrelacement normalisé $R_{P|ad_\gamma(P)}(\sigma) : V_{\pi''} \to V_\pi$.

Le caractère de $\tilde{\pi}$ appartient à $D_{ell}(\tilde{G}(F))$ (il peut éventuellement être nul) et cet espace est engendré par de tels caractères.

Remarquons que cette construction s'applique pour construire $D_{ell}(H(F))$, en posant simplement $\tilde{H} = H$.

Notons M^H le Levi de H associé à M. Fixons un caractère unitaire χ de $Z(H;F)$ qui coïncide sur $Z(M;F) \cap Z(H;F)$ avec le caractère central de σ. On prolonge σ en une représentation encore notée σ de $Z(H;F)M(F)$ par $\sigma(zx) = \chi(z)\sigma(x)$ pour tous $z \in Z(H;F)$ et $x \in M(F)$. Posons $\sigma^H = Ind_{Z(H;F)M(F)}^{M^H(F)}(\sigma)$ que l'on réalise dans son espace habituel V_{σ^H}. On définit un opérateur A^H de V_{σ^H} par

$$(A^H f)(x) = Af(\gamma^{-1}x\gamma).$$

Il vérifie la relation

$$\sigma^H(ad_\gamma(x)) \circ A^H = A^H \circ \sigma^H(x)$$

pour tout $x \in M^H(F)$. Fixons $\delta \in \tilde{M}(F)$, notons l le plus petit entier strictement positif tel que $\sigma \circ (ad_\delta)^l \simeq \sigma$. D'après la théorie de Mackey, la représentation σ^H se décompose en une somme

$$\Sigma \oplus (\Sigma \otimes (\kappa \circ q)) \oplus ... \otimes (\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^{\frac{N}{l}-1})$$

de représentations irréductibles et deux à deux inéquivalentes, où N est l'ordre de d dans $D(F)/q(Z(H;F))$ et κ est un caractère primitif de $D(F)/q(Z(H;F))$. Notons P^H le sous-groupe parabolique de H déduit de P. On peut utiliser pour chaque composante $\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^n$ les mêmes facteurs de normalisation que pour σ et définir ainsi l'opérateur $R_{P^H|ad_\gamma(P^H)}(\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^n)$. Ces opérateurs se regroupent en un opérateur $R_{P^H|ad_\gamma(P^H)}(\sigma^H)$. Posons $\pi^H = Ind_{P^H}^H(\sigma^H)$. On copie la définition ci-dessus pour définir un opérateur $\tilde{\pi}^H(\gamma)$ de l'espace V_{π^H}, puis une représentation $(\pi^H, \tilde{\pi}^H)$ de $\tilde{H}(F) = H(F)$ (on a par définition $\tilde{\pi}^H(x\gamma) = \pi^H(x)\tilde{\pi}^H(\gamma)$ pour tout $x \in H(F)$). Montrons que

(3) l'image par l'homomorphisme (2) du caractère de $\tilde{\pi}^H$ est N fois le caractère de $\tilde{\pi}$.

Pour la simplicité de l'écriture, on ne distingue pas les représentations de leurs espaces naturels. Notons $\epsilon : \sigma^H \to \sigma$ l'évaluation $f \mapsto f(1)$. Pour $\varphi \in \sigma^H$ et $n \in \mathbb{Z}$, définissons une fonction φ_n sur $G(F)$ par $\varphi_n(g) = \epsilon \circ \varphi(\gamma^n g)$. Elle appartient à $Ind_{ad_\gamma^{-n}(P)}^G(\sigma \circ ad_\gamma^n)$. Puisque $H(F)$ est réunion disjointe des $\gamma^n Z(H;F)G(F)$ pour $n = 0, ..., N-1$ et $M^H(F)$ est réunion disjointe des $\gamma^n Z(H;F)M(F)$ pour les mêmes n, on vérifie que l'application

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} \pi^H = Ind_{P^H}^H(\sigma^H) & \to & \oplus_{n=0,...,N-1} Ind_{ad_\gamma^{-n}(P)}^G(\sigma \circ ad_\gamma^n) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi_n)_{n=0,...N-1} \end{array}$$

est un isomorphisme. Il est équivariant pour les actions de $G(F)$. Pour tout n, définissons une application

$$\begin{array}{ccc} Ind_{ad_\gamma^{-n}(P)}^G(\sigma \circ ad_\gamma^n) & \to & Ind_P^G(\sigma) \\ \varphi_n & \mapsto & \psi_n = R_{P|ad_\gamma^{-n}(P)}(\sigma)(A^{-n} \circ \varphi_n) \end{array}$$

C'est un isomorphisme. En composant (4) avec ces isomorphismes, on obtient un isomorphisme $G(F)$-équivariant

$$\begin{array}{ccc} \pi^H = Ind_{P^H}^H(\sigma^H) & \to & \oplus_{n=0,...,N-1} Ind_P^G(\sigma) \\ \varphi & \mapsto & (\psi_n)_{n=0,...N-1} \end{array}$$

Un simple calcul montre que cet isomorphisme transporte l'opérateur $\tilde{\pi}^H(\gamma)$ de l'espace de gauche sur l'opérateur diagonal de l'espace de droite, dont chaque composante est $\tilde{\pi}(\gamma)$. L'assertion (3) en résulte.

Montrons que :

(5) ou bien la représentation $(\pi^H, \tilde{\pi}^H)$ de $\tilde{H}(F) = H(F)$ est somme de représentations elliptiques, ou bien son caractère est nul.

Remarquons d'abord que, de la décomposition de σ^H en composantes irréductibles résulte une décomposition en composantes pas forcément irréductibles

$$(6) \qquad \pi^H = Ind_{P^H}^H(\Sigma) \oplus ... \oplus Ind_{P^H}^H(\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^{\frac{N}{l}-1})).$$

Puisque $\sigma^H \circ ad_\gamma$ est isomorphe σ^H, sa composante irréductible $\Sigma \circ ad_\gamma$ est isomorphe à une autre composante irréductible $\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^j$, avec $j \in \{0, ..., \frac{N}{l} - 1\}$. Par tensorisation, $(\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^n) \circ ad_\gamma$ est isomorphe à $\Sigma \otimes (\kappa \circ q)^{j+n}$ pour tout $n \in \{0, ..., \frac{N}{l} - 1\}$. Supposons d'abord $j \neq 0$. Puisque l'opérateur A^H réalise les isomorphismes ci-dessus, il permute sans point fixe l'ensemble des composantes irréductibles de σ^H. Il résulte de sa construction que l'opérateur $\tilde{\pi}^H(\gamma)$ permute sans point fixe les différentes composantes du membre de droite de (6). Il en est de même de $\tilde{\pi}^H(x\gamma)$ pour tout $x \in H(F)$. Il est alors clair que le caractère de $\tilde{\pi}^H$ est nul. Supposons maintenant $j = 0$. Pour la même raison, l'opérateur $\tilde{\pi}^H(\gamma)$ conserve chaque composante du membre de droite de (6) et $\tilde{\pi}$ se décompose en représentations agissant dans chaque composante. Il suffit de voir que chacune de ces sous-représentations est elliptique ou de caractère nul. On ne perd rien à se limiter à la première composante $Ind_{P^H}^H(\Sigma)$. La représentation Σ est de la série discrète. L'opérateur A^H se restreint à Σ en un opérateur B qui vérifie

$$\Sigma(ad_\gamma(x)) \circ B = B \circ \Sigma(x)$$

pour tout $x \in M^H(F)$. Donc $(B, \gamma) \in \mathcal{N}^H(\Sigma)$. On voit que la restriction de $\tilde{\pi}^H(\gamma)$ à $Ind_{P^H}^H(\Sigma)$ s'obtient à partir du couple (B, γ) par le même procédé rappelé plus haut qui construit les représentations elliptiques. Il suffit de montrer que le Σ et γ vérifie les conditions requises plus haut, à savoir que l'action déduite de γ dans $\mathcal{A}_{M^H}/\mathcal{A}_H$ est sans point fixe non nul et que $W_0(\Sigma) = \{1\}$. La première condition résulte de l'hypothèse sur γ et de l'isomorphisme $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G \simeq \mathcal{A}_{M^H}/\mathcal{A}_H$. Supposons $W_0(\Sigma) \neq \{1\}$. Par définition de ce groupe, on peut trouver un Levi L^H de H contenant strictement M^H, tel que $\mathcal{A}_{M^H}/\mathcal{A}_{L^H}$ soit de dimension 1 et tel que la condition suivante soit vérifiée. L'ensemble $\mathcal{P}^{L^H}(M^H)$ a deux éléments, disons Q^H et $\bar{Q}^H$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}_{M^H,\mathbb{C}}$, on définit Σ_λ par tensorisation de Σ avec le caractère $x \mapsto e^{<H_{M^H}(x),\lambda>}$ de $M^H(F)$. On définit l'opérateur d'entrelacement usuel $J_{\bar{Q}^H|Q^H}(\Sigma_\lambda)$, qui est méromorphe en λ. Alors cet opérateur a un pôle en $\lambda = 0$. Posons $L = L^H \cap G$, $Q = Q^H \cap L$, $\bar{Q} = \bar{Q}^H \cap L$. Les opérateurs d'entrelacement vivent dans le groupe dérivé de L^H, a fortiori dans L. Puisque la restriction de Σ à $M(F)$ se décompose en $\sigma \oplus ... \oplus \sigma \circ ad_{\delta^{l-1}}$, il existe $j \in \{0, ..., l-1\}$ tel que l'opérateur $J_{\bar{Q}|Q}(\sigma_\lambda \circ ad_{\delta^j})$ ait un pôle en $\lambda = 0$. Conjuguer par δ^j ne change pas cette propriété. Donc $J_{\bar{Q}|Q}(\sigma_\lambda)$ a un pôle en $\lambda = 0$. Mais alors $W_0(\sigma) \neq \{1\}$ contrairement à l'hypothèse. Cela achève la preuve de (5).

Il résulte de (3) et (5) que, si le caractère de $\tilde{\pi}$ n'est pas nul, c'est l'image par l'homomorphisme (1) d'un élément de $D_{ell}(H(F))$.

La réciproque est similaire. On part cette fois d'un Levi semi-standard M^H de H, d'une représentation Σ de $M^H(F)$ irréductible et de la série discrète et d'un couple $(B, \gamma) \in \mathcal{N}^H(\Sigma)$. On suppose que l'automorphisme de $\mathcal{A}_{M^H}/\mathcal{A}_H$ déduit de γ n'a pas de

point fixe non nul et que $W_0(\Sigma) = \{1\}$. On déduit de ces données une représentation $\tilde{\pi}^H$ de $\tilde{H}(F) = H(F)$ dans $\pi^H = Ind_{M^H}^H(\Sigma)$. L'espace $D_{ell}(H(F))$ est engendré par les caractères de telles représentations. On ne change pas la représentation $\tilde{\pi}^H$ si l'on remplace le couple (B, γ) par $(\Sigma(x)B, x\gamma)$ pour un $x \in M^H(F)$. Notons que cette opération ne change pas l'automorphisme de $\mathcal{A}_{M^H}/\mathcal{A}_H$ déduit de γ. Puisque $M^H(F)$ s'envoie surjectivement sur $D(F)$, on peut par un tel changement supposer $q(\gamma) = d$, autrement dit $\gamma \in \tilde{G}(F)$. On pose $M = M^H \cap G$ et on fixe $\delta \in M^H(F) \cap \tilde{G}(F)$. La théorie de Mackey nous dit que la restriction de Σ à $M(F)$ se décompose en une somme $\sigma_1 \oplus ... \oplus \sigma_l$ de représentations irréductibles deux-à-deux non équivalentes. Pour $n = 1, ..., l$, on note ϵ_n la projection sur la composante σ_n. Pour $\varphi \in \pi^H$ et $n \in \{1, ..., l\}$, définissons une fonction φ_n sur $G(F)$ par $\varphi_n(g) = \epsilon_n \circ \varphi(g)$. On vérifie que l'application

$$(7) \qquad \begin{array}{ccc} \pi^H & \to & \oplus_{n=0,...,l-1} Ind_M^G(\sigma_n) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi_n)_{n=1,...,l} \end{array}$$

est un isomorphisme équivariant pour les actions de $G(F)$. L'opérateur B permute les composantes σ_n. Par construction, l'opérateur $\tilde{\pi}^H(\gamma)$ permute conformément les composantes de la décomposition (7). Il en est de même de $\tilde{\pi}^H(x\gamma)$ pour tout $x \in G(F)$, autrement dit de $\tilde{\pi}^H(\gamma')$ pour tout $\gamma' \in \tilde{G}(F)$. On veut montrer que l'image du caractère de $\tilde{\pi}^H$ par l'homomorphisme (1) appartient à $D_{ell}(\tilde{G}(F))$. Cette image ne dépend que la restriction de ce caractère à $\tilde{G}(F)$. Les composantes de (7) permutées non trivialement ne contribuent pas à cette restriction. On peut donc se limiter aux n tels que σ_n est conservé par B. Pour un tel n, la restriction de $\tilde{\pi}^H$ à $\tilde{G}(F)$ conserve la composante $Ind_M^G(\sigma_n)$ du membre de droite de (7). Il suffit de prouver que cette action de $\tilde{G}(F)$ dans cette composante est elliptique ou de trace nulle. Fixons un tel n, notons simplement $\sigma = \sigma_n$, $\pi = Ind_M^G(\sigma)$ et A la restriction de B à σ. La représentation σ est de la série discrète et on a $(A, \gamma) \in \mathcal{N}^{\tilde{G}}(\sigma)$. On voit que l'action de $\tilde{G}(F)$ dans π est déduite de (A, γ) par le même procédé décrit au début de la preuve. Il suffit de prouver que (σ, γ) vérifie les conditions requises, à savoir que $W_0(\sigma) = \{1\}$ et que l'action sur $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ déduite de γ est sans point fixe non nul. Ces deux propriétés résultent comme dans la preuve de (5) des propriétés analogues de (Σ, γ). Cela achève la preuve. $\square$

2.5 Endoscopie

Du côté dual, on a une suite exacte

$$1 \to \hat{D} \to \hat{H} \xrightarrow{\hat{\iota}} \hat{G} \to 1$$

qui est équivariante pour les actions galoisiennes. Cette suite s'étend en une suite exacte

$$1 \to \hat{D} \to {}^LH \xrightarrow{{}^L\iota} {}^LG \to 1.$$

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G})$ (on oublie $\mathbf{a}$ qui est trivial). Fixons $s^H \in \hat{H}$ qui s'envoie sur s. Cet élément est uniquement déterminé modulo $\hat{D}$, a fortiori modulo $Z(\hat{H})$. On a une suite exacte

$$1 \to \hat{D} \to \hat{H}_{s^H} \to \hat{G}_s \to 1.$$

Notons $\mathcal{H}'$ l'image inverse de $\mathcal{G}'$ dans ${}^LH$. Pour tout $w \in W_F$, fixons $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_w} agisse par $w_{G'}$ sur $\hat{G}' = \hat{G}_s$. Relevons g_w en $h_w = (h(w), w) \in \mathcal{H}'$. Alors

l'action $w \mapsto ad_{h_w}$ munit $\hat{H}_{s^H}$ d'une action de W_F, qui se quotiente en une action de Γ_F qui préserve une paire de Borel épinglée. On peut introduire un groupe reductif H' défini et quasi-déployé sur F de sorte que $\hat{H}_{s^H}$, muni de l'action précédente, s'identifie au groupe dual $\hat{H}'$ de H'. On a une suite exacte

$$1 \to G' \to H' \xrightarrow{q'} D \to 1.$$

Pour $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on a une égalité $sgw(s)^{-1} = a(w)g$, où $a : W_F \to Z(\hat{G})$ est un cocycle qui est un cobord. Il en résulte qu'il existe un cocycle $a^H :: W_F \to Z(\hat{H})$ de sorte que $s_H hw(s_H)^{-1} = a^H(w)h$ pour tout $(h, w) \in \mathcal{H}'$. En notant $\mathbf{a}^H$ la classe de a^H, on voit que $\mathbf{H}' = (H', \mathcal{H}', s_H)$ est une donnée endoscopique pour le triplet $(H, \tilde{H} = H, \mathbf{a}^H)$ (nous noterons simplement ce triplet comme un couple $(H, \mathbf{a}^H)$). Evidemment, $\mathbf{a}^H$ appartient au noyau Ker de l'homomorphisme

$$H^1(W_F; Z(\hat{H})) \to H^1(W_F; Z(\hat{G})),$$

ou encore à l'image de l'homomorphisme

$$H^1(W_F; \hat{D}) \to H^1(W_F; Z(\hat{H})).$$

Inversement, soit $\mathbf{a}^H$ un élément de Ker et soit $\mathbf{H}' = (H', \mathcal{H}', s_H)$ une donnée endoscopique pour le couple $(H, \mathbf{a}^H)$. On a une injection $\hat{D} \subset Z(\hat{H}) \subset Z(\hat{H}')$, d'où une surjection $H' \to D$ dont le noyau est connexe. On note G' ce noyau. On note $\mathcal{G}'$ la projection de $\mathcal{H}'$ dans ${}^LG$ et s la projection de s^H dans $\hat{G}$. Alors $(G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G})$.

Il est assez clair que les correspondances ci-dessus se quotientent en des bijections entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques pour $(G, \tilde{G})$ et la réunion sur les éléments $\mathbf{a}^H \in Ker$ des ensembles de classes d'équivalence de données endoscopiques pour $(H, \mathbf{a}^H)$. Cette bijection préserve l'ellipticité : $\mathbf{G}'$ est elliptique si et seulement si $\mathbf{H}'$ l'est.

Soient $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{H}'$ comme ci-dessus. On a construit l'espace endoscopique $\tilde{G}' = G' \times_{Z(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Or $\mathcal{Z}(\tilde{G}) \subset \tilde{G}$ s'envoie dans H par $\tilde{\iota}$, plus précisément dans $Z(H)$. On a une injection $Z(H) \to Z(H')$. Puisque G' s'envoie lui-aussi dans H', on en déduit une application naturelle $\tilde{\iota}' : \tilde{G}' \to H'$. Elle est définie sur F. Par construction, son image est contenue dans l'image réciproque de $d \in D(F)$ dans H'. Puisque cette image réciproque est une unique classe à gauche modulo G', l'image de $\tilde{\iota}'$ est exactement cette image réciproque. Soient $\gamma \in \tilde{G}_{ss}(F)$ et $\delta \in \tilde{G}'_{ss}(F)$. On a défini en [I] 1.10 la propriété : γ et δ se correspondent. Cette notion est relative aux données ambiantes $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$. C'est-à-dire que, si on considère maintenant γ comme un élément de $H_{ss}(F)$ et δ comme un élément de $H'_{ss}(F)$, on a une autre notion de correspondance relative aux données ambiantes H et H'. On vérifie qu'en fait, ces deux notions coïncident. Cela résulte du fait qu'il y a une bijection évidente entre paires de Borel pour G, resp. G', et paires de Borel pour H, resp. H'.

Lemme. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) la donnée $\mathbf{G}'$ est relevante ;
(ii) d appartient à $q'(H'(F))$;
(iii) d appartient à $q'(H'(F))$ et $\mathbf{a}^H = 1$.

Preuve. La donnée $\mathbf{G}'$ est relevante si et seulement si $\tilde{G}'(F)$ n'est pas vide ([I] lemme 1.9). Puisque $\tilde{G}'(F)$ est l'ensemble des $h \in H'(F)$ tels que $q'(h) = d$, on obtient l'équivalence entre (i) et (ii). Evidemment, (iii) entraîne (ii). Supposons $\mathbf{G}'$ relevante. Soient $\gamma \in \tilde{G}_{ss}(F)$ et $\delta \in \tilde{G}'_{ss}(F)$ deux éléments qui se correspondent, avec $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$. Comme on vient de le dire, il se correspondent aussi pour les données ambiantes H et H', et on a encore $\gamma \in \tilde{H}_{reg}(F)$. L'élément $\mathbf{a}^H$ provient d'un élément $\mathbf{a}^D \in H^1(W_F; \hat{D})$. Ces éléments déterminent des caractères ω^H de $H(F)$ et ω^D de $D(F)$. On a $\omega^H = \omega^D \circ q$. D'après [KS] lemme 4.4.C, ω^H est trivial sur $H_\gamma(F)$. D'après 2.3(2), ω^H est trivial sur γ et sur $Z(H; F)$. Donc ω^D est trivial sur $q(\gamma) = d$ et sur $q(Z(H; F))$. Il l'est aussi sur le groupe engendré par d et $q(Z(H; F))$, c'est-à-dire $D(F)$ tout entier. Donc $\omega^D = 1$. Puisque D est un tore, cela entraîne que $\mathbf{a}^D = 1$, donc aussi $\mathbf{a}^H = 1$. $\square$

Supposons $\mathbf{G}'$ relevante. Alors les objets H', D, d, q' et les plongements que l'on a définis de G' et $\tilde{G}'$ dans H' vérifient la proposition 2.3 relativement à $(G', \tilde{G}')$. En effet, puisque $D(F)$ est engendré par $q(Z(H; F))$ et d et puisque $Z(H) \subset Z(H')$, $D(F)$ est a fortiori engendré par $q'(Z(H'; F))$ et d. Fixons des données auxiliaires H'_1, $\tilde{H}'_1 = H'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1^H$, Δ_1^H pour $\mathbf{H}'$. On note G'_1 et $\tilde{G}'_1$ les images réciproques de G' et $\tilde{G}'$ dans H'_1. On a une suite exacte

$$1 \to G'_1 \to H'_1 \to D \to 1$$

d'où dualement

$$1 \to \hat{D} \to {}^L H'_1 \to {}^L G'_1 \to 1.$$

Le plongement $\hat{\xi}_1^H : \mathcal{H}' \to {}^L H'_1$ se quotiente en un plongement

$$\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' = \mathcal{H}'/\hat{D} \to {}^L G'_1 = {}^L H'_1/\hat{D}.$$

Les données G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$ sont des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'$. Notons Δ_1 la restriction de Δ_1^H aux couples (δ, γ) d'éléments qui se correspondent tels que $\delta \in \tilde{G}'_1(F)$, $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Il est facile quoique fastidieux de vérifier que Δ_1 est un facteur de transfert complétant nos données auxiliaires. On a un homomorphisme de restriction

$$res_{\tilde{G}'_1}^{H'_1} : C^\infty_{c,\lambda_1}(H'_1(F)) \to C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)),$$

ou encore

$$res_{\tilde{G}'_1}^{H'_1} : C^\infty_{c,\lambda_1}(H'_1(F)) \otimes Mes(H'(F)) \to C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) \otimes Mes(G'(F)).$$

Comme en 2.4, il se quotiente en un homomorphisme

$$res_{\tilde{G}'_1}^{H'_1} : SI_{\lambda_1}(H'_1(F)) \otimes Mes(H'(F)) \to SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) \otimes Mes(G'(F)).$$

Du fait que Δ_1 est la restriction de Δ_1^H résulte que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(H(F)) \otimes Mes(H(F)) & \overset{res_{\tilde{G}}^H}{\to} & C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F)) \\ \downarrow transfert & & \downarrow transfert \\ SI_{\lambda_1}(H'_1(F)) \otimes Mes(H'(F)) & \overset{res_{\tilde{G}'_1}^{H'_1}}{\to} & SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) \otimes Mes(G'(F)) \end{array}$$

Si on fait varier les données auxiliaires pour $\mathbf{H}'$, on voit que les applications $res_{\tilde{G}'_1}^{H'_1}$ se recollent en un homomorphisme

$$res_{\mathbf{G}'}^{\mathbf{H}'} : SI(\mathbf{H}') \otimes Mes(H'(F)) \to SI(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F)).$$

Le diagramme ci-dessus devient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(H(F))\otimes Mes(H(F)) & \overset{res_{\tilde{G}}^H}{\rightarrow} & C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F)) \\ \downarrow transfert & & \downarrow transfert \\ SI(\mathbf{H}')\otimes Mes(H'(F)) & \overset{res_{\mathbf{G}'}^{\mathbf{H}'}}{\rightarrow} & SI(\mathbf{G}')\otimes Mes(G'(F)) \end{array}$$

2.6 L'application $\phi_{\tilde{M}}$

On suppose de nouveau, et jusqu'à la fin de l'article, que F est non-archimédien.

Remarque. On reprend cette hypothèse parce que nous allons travailler avec des objets que nous n'avons défini que dans le cas non-archimédien. Mais s'il anticipe les définitions nécessaires dans le cas archimédien, le lecteur verra que la suite de cette section vaut aussi dans ce cas.

On a la suite exacte

$$0\rightarrow \mathcal{A}_G\rightarrow \mathcal{A}_H\rightarrow \mathcal{A}_D\rightarrow 0.$$

On a introduit en [II] 1.6 l'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ et l'application $\tilde{H}_{\tilde{G}}:\tilde{G}(F)\rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$. On peut identifier $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ à l'image de $\tilde{G}(F)$ dans $\mathcal{A}_H$ par l'application H_H (avec une double signification de la lettre H) et $\tilde{H}_{\tilde{G},F}$ à la restriction de cette application H_H à $\tilde{G}(F)$. On a introduit en [II] 1.6 les espaces $C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))$ et $I_{ac}(\tilde{G}(F))$. On voit que l'application linéaire $res_{\tilde{G}}^H: C_c^\infty(H(F))\rightarrow C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ se prolonge en une application linéaire $res_{\tilde{G}}^H: C_{ac}^\infty(H(F))\rightarrow C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))$. Celle-ci se quotiente en une application linéaire $res_{\tilde{G}}^H: I_{ac}(H(F))\rightarrow I_{ac}(\tilde{G}(F))$.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On fixe un sous-groupe compact maximal spécial K^H de $H(F)$ en bonne position relativement à M^H. Posons $K=G(F)\cap K^H$. C'est un sous-groupe compact maximal de $G(F)$ en bonne position relativement à M. On a défini en [W2] 6.4 une application linéaire

$$\phi_{\tilde{M}}: C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))\rightarrow I_{ac}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F)).$$

Remarquons que la mesure fixée sur $D(F)$ détermine encore un isomorphisme $Mes(M^H(F))\simeq Mes(M(F))$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_{ac}^\infty(H(F))\otimes Mes(H(F)) & \overset{res_{\tilde{G}}^H}{\rightarrow} & C_{ac}^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F)) \\ \phi_{M^H}\downarrow & & \downarrow\phi_{\tilde{M}} \\ I_{ac}(M^H(F))\otimes Mes(M^H(F)) & \overset{res_{\tilde{M}}^{M^H}}{\rightarrow} & I_{ac}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F)) \end{array}$$

Lemme. *Le diagramme ci-dessus est commutatif.*

Preuve. Pour simplifier, on fixe sur les groupes $G(F)$ et $M(F)$ des mesures de Haar compatibles. Il s'en déduit des mesures de Haar sur $H(F)$ et $M^H(F)$. Cela nous débarrasse des espaces de mesures. Soit π^H une représentation tempérée irréductible de $M^H(F)$. Notons $\tilde{\pi}$ sa restriction à $\tilde{M}(F)$ et supposons que le caractère de cette restriction

n'est pas nul. Soit $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M},F} \subset \mathcal{A}_{M^H}$. Soit $f \in C_c^\infty(H(F))$, posons $\varphi = res_{\tilde{G}}^H(f)$. On a défini en [W2] 6.4 les termes $J_{M^H}^H(\pi^H, X, f)$ et $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \varphi)$. On va les comparer. Notons $D(F)_c$ le plus grand sous-groupe compact de $D(F)$ et $D(F)_c^\vee$ son groupe des caractères. On prolonge chaque élément de $D(F)_c^\vee$ en un caractère unitaire de $D(F)$. Pour chaque $\kappa \in D(F)_c^\vee$, on dispose de la représentation $\pi^H \otimes (\kappa \circ q)$ de $H(F)$. On note $mes(D(F)_c)$ la mesure de $D(F)_c$, vu comme sous-groupe ouvert de $D(F)$. Montrons que

$$(1) \qquad J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \varphi) = mes(D(F)_c)^{-1} \sum_{\kappa \in D(F)_c^\vee} J_{M^H}^H(\pi^H \otimes (\kappa \circ q), X, f)\kappa(d)^{-1}.$$

Montrons d'abord que la somme est finie. Soit $P^H \in \mathcal{P}(M^H)$. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{M^H}^*$, posons $\Pi_\lambda^H = Ind_{P^H}^H(\pi_\lambda^H)$. La fonction f n'intervient dans la définition de $J_{M^H}^H(\pi^H \otimes (\kappa \circ q), X, f)$ que via des opérateurs $(\Pi_\lambda^H \otimes (\kappa \circ q))(f)$. Notons U le plus grand sous-groupe compact de $Z(H; F)$ et χ la restriction à U du caractère central de π^H. Les opérateurs ci-dessus ne dépendent que de la fonction f_* sur $H(F)$ définie par

$$f_*(h) = \int_U f(zh)\chi(z)\kappa \circ q(z)\, dz.$$

Fixons un sous-groupe $U' \subset U$ ouvert et d'indice fini tel que f et χ soient invariants par U'. Alors f_* est nulle si κ n'est pas trivial sur $q(U')$. Puisque $q(Z(H; F))$ est d'indice fini dans $D(F)$, $q(U')$ est d'indice fini dans $D(F)_c$. Il n'y a qu'un nombre fini de κ triviaux sur $q(U')$, d'où l'assertion de finitude.

Par définition,

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \varphi) = \int_{i\mathcal{A}_{M,F}^*} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_{\tilde{\lambda}}, \varphi) e^{-<\tilde{\lambda}, X>}\, d\lambda.$$

Expliquons cette formule. Ici $\mathcal{A}_{M,F}^* = i\mathcal{A}_M^* / i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$, où $i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$ est le sous-groupe des $\lambda \in i\mathcal{A}_M^*$ tels que $< \lambda, H_M(x) > \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $x \in M(F)$. On a relevé tout élément $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$ en un élément $\tilde{\lambda} \in i\mathcal{A}_{M^H}^*$. L'expression ci-dessus ne dépend pas du relèvement choisi. Enfin, la mesure sur $i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}^*$ est de masse totale 1. On a une suite exacte

$$0 \to i\mathcal{A}_D^* \to i\mathcal{A}_{M^H}^* \to i\mathcal{A}_M^* \to 0$$

dont on déduit une suite exacte

$$0 \to i\mathcal{A}_{D,F}^* \to i\mathcal{A}_{M^H,F}^* \to i\mathcal{A}_{M,F}^* \to 0,$$

avec des notations imitées des précédentes. La formule ci-dessus se récrit

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \varphi) = \int_{i\mathcal{A}_{M^H,F}^* / i\mathcal{A}_{D,F}^*} J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi) e^{-<\lambda, X>}\, d\lambda.$$

L'expression $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi)$ est construite à l'aide d'opérateurs d'entrelacement et de l'opérateur $\tilde{\Pi}_\lambda(\varphi)$, où $\tilde{\Pi}_\lambda = Ind_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda)$ pour un élément fixé $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$. Les opérateurs pour les représentations induites de $\tilde{\pi}_\lambda$ étant les restrictions des mêmes opérateurs pour les représentations induites de π_λ^H, la formule 2.4(1) se généralise en

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi) = \int_{D(F)^\vee} J_{M^H}^H(\pi_\lambda^H, f(\kappa \circ q))\kappa(d)^{-1}\, d\kappa.$$

Le groupe $D(F)^\vee$ s'identifie au produit $D(F)_c^\vee \times i\mathcal{A}_{D,F}^*$. Si on munit le groupe discret $D(F)_c^\vee$ de la mesure de comptage et le groupe $i\mathcal{A}_{D,F}^*$ de la mesure de masse totale 1, l'identification ci-dessus envoie la mesure sur $D(F)^\vee$ sur $mes(D(F)_c)^{-1}$ fois celle sur $D(F)_c^\vee \times i\mathcal{A}_{D,F}^*$. D'où

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}_\lambda, \varphi) = mes(D(F)_c)^{-1} \sum_{\kappa \in D(F)_c^\vee} \int_{i\mathcal{A}_{D,F}^*} J_{M^H}^H(\pi_\lambda^H, f_\mu(\kappa \circ q))\kappa(d)^{-1} e^{-<\mu, H_D(d)>}\, d\mu,$$

où on a noté f_μ la fonction $x \mapsto f(x)e^{<\mu, H_H(x)>}$ sur $H(F)$. La somme en κ est finie pour la même raison que ci-dessus. Le terme $J_{M^H}^H(\pi_\lambda^H, f_\mu(\kappa \circ q))$ est construit à l'aide d'opérateurs d'entrelacement et de l'opérateur $\Pi_\lambda^H(f_\mu(\kappa \circ q))$, où $\Pi_\lambda^H = Ind_{P^H}^H(\pi_\lambda)$ pour un élément fixé $P^H \in \mathcal{P}(M^H)$. Les opérateurs d'entrelacement vivent dans $G(F)$ et sont insensibles à la torsion par un caractère se factorisant par q. On a aussi $\Pi_\lambda^H(f_\mu(\kappa \circ q)) = (\Pi_{\lambda+\mu}^H \otimes (\kappa \circ q))(f)$ et $\Pi_{\lambda+\mu}^H \otimes (\kappa \circ q)$ n'est autre que $Ind_{P^H}^H((\pi^H \otimes (\kappa \circ q))_{\lambda+\mu})$. On obtient

$$J_{M^H}^H(\pi_\lambda^H, f_\mu(\kappa \circ q)) = J_{M^H}^H((\pi^H \otimes (\kappa \circ q))_{\lambda+\mu}, f).$$

D'où

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \varphi) = mes(D(F)_c)^{-1} \sum_{\kappa \in D(F)_c^\vee} \int_{i\mathcal{A}_{M^H,F}^*/i\mathcal{A}_{D,F}^*}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{D,F}^*} J_{M^H}^H((\pi^H \otimes (\kappa \circ q))_{\lambda+\mu}, f)\kappa(d)^{-1} e^{-<\mu, H_D(d)>}\, d\mu\, e^{-<\lambda, X>}\, d\lambda.$$

Puisque $X \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{M}}$, sa projection dans $\mathcal{A}_D$ est $H_D(d)$, donc $<\mu, H_D(d)> = <\mu, X>$ pour tout $\mu \in i\mathcal{A}_{D,F}^*$. La double intégrale ci-dessus se recompose en une intégrale unique

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\pi}, X, \varphi) = mes(D(F)_c)^{-1} \sum_{\kappa \in D(F)_c^\vee} \kappa(d)^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{M^H,F}^*} J_{M^H}^H((\pi^H \otimes (\kappa \circ q))_\lambda, f) e^{-<\lambda, X>}\, d\lambda.$$

cette dernière intégrale n'est autre que $J_{M^H}^H(\pi^H \otimes (\kappa \circ q), X, f)$, ce qui prouve (1).

Un raisonnement facile, similaire à celui fait en [W2] 6.4, permet d'étendre la relation (1) à une fonction $f \in C_{ac}^\infty(H(F))$. Posons $\varphi_{\tilde{M}} = res_{\tilde{M}}^{M^H}(\phi_{M^H}(f))$. En appliquant (1) au cas $G = M$ et à la fonction $\phi_{M^H}(f))$, on obtient

$$(2) \qquad I^{\tilde{M}}(\tilde{\pi}, X, \varphi_{\tilde{M}}) = mes(D(F)_c)^{-1} \sum_{\kappa \in D(F)_c^\vee} \kappa(d)^{-1} I^{M^H}(\pi^H \otimes (\kappa \circ q), X, \phi_{M^H}(f)).$$

Par définition de ϕ_{M^H}, les membres de droite de (1) et (2) sont égaux. Donc aussi les membres de gauche. Par définition de $\phi_{\tilde{M}}$, cela signifie que $\varphi_{\tilde{M}} = \phi_{\tilde{M}}(\varphi)$, autrement dit $res_{\tilde{M}}^{M^H}(\phi_{M^H}(f)) = \phi_{\tilde{M}}(res_{\tilde{G}}^H(f))$. $\square$

2.7 Intégrales orbitales pondérées équivariantes

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On fixe un sous-groupe compact maximal spécial K^H de $H(F)$ en bonne position relativement à M^H. Posons $K = G(F) \cap K^H$. C'est un sous-groupe compact maximal de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Soient $f \in C_c^\infty(H(F))$ et $\gamma \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{reg}(F)$. On définit comme en [II] 1.2 les intégrales orbitales pondérées $J_{M^H}^H(\gamma, f)$ et $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, res_{\tilde{G}}^H(f))$. On suppose que les mesures sur $M_\gamma(F)\backslash G(F)$

et $M_\gamma^H(F)\backslash H(F)$ se correspondent par la bijection 2.3(3). On suppose aussi que les mesures sur $\mathcal{A}_M^G$ et $\mathcal{A}_{M^H}^H$ nécessaires pour définir des intégrales orbitales pondérées se correspondent via l'isomorphisme naturel entre ces deux espaces. On vérifie que les fonctions poids $v_{\tilde{M}}$ et v_{M^H}, qui sont définies sur ces deux quotients, se correspondent par la bijection. Il en résulte que les deux intégrales ci-dessus sont égales.

En appliquant la définition de [II] 1.6, le lemme du paragraphe précédent permet d'en déduire par récurrence la même égalité des intégrales pondérées invariantes

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, res_{\tilde{G}}^H(f)) = I_{M^H}^H(\gamma, f).$$

A partir de cette égalité, les choix effectués ci-dessus de sous-groupes compacts maximaux n'ont plus d'importance. Les choix de mesures disparaissent aussi : on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})) = I_{M^H}^H(res_{\tilde{M}}^{M^H,*}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{f}),$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^* \otimes Mes(D(F))^*$ à support formé d'éléments $\tilde{G}$-fortement réguliers et tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(H(F)) \otimes Mes(H(F))$.

2.8 Intégrales orbitales pondérées stables

On utilisera plus loin la propriété suivante :

(1) soit $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ dont l'image dans $SI(\tilde{G}(F))$ est nulle ; alors il existe $f \in C_c^\infty(H(F))$ dont l'image dans $SI(H(F))$ est nulle et telle que $\varphi = res_{\tilde{G}}^H(f)$.

Fixons un sous-espace $\mathfrak{s}$ défini sur F de $\mathfrak{z}(H)$ supplémentaire de $\mathfrak{z}(G)$. Fixons un voisinage ouvert $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{s}(F)$. Si $\mathfrak{u}$ est assez petit, l'application

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}(F) \times \mathfrak{u} & \to & H(F) \\ (\gamma, X) & \mapsto & exp(X)\gamma \end{array}$$

est un isomorphisme de $\tilde{G}(F) \times \mathfrak{u}$ sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\tilde{G}(F)$ dans $H(F)$ invariant par conjugaison et par conjugaison stable (si $\gamma \in \mathcal{U}$ est fortement H-régulier, sa classe de conjugaison stable dans $H(F)$ est contenue dans $\mathcal{U}$). On fixe une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathfrak{s}(F))$ à support dans $\mathfrak{u}$ et telle que ψ est constante de valeur 1 dans un voisinage de 0. On définit f_1 sur $\tilde{G}(F) \times \mathfrak{u}$ par $f_1(\gamma, X) = \psi(X)\varphi(\gamma)$. On transporte f_1 par l'isomorphisme ci-dessus en une fonction sur $\mathcal{U}$, que l'on prolonge par 0 hors de $\mathcal{U}$ en une fonction f sur $H(F)$. Cette fonction répond à la question.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On a défini $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. On sait aussi définir $S_{M^H}^H(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(M^H(F)) \otimes Mes(M^H(F))^*$ et tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(H(F)) \otimes Mes(H(F))$.

Proposition. *Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$. On suppose que le support de $\boldsymbol{\delta}$ est formé d'éléments fortement réguliers dans $\tilde{G}(F)$.*

(i) Pour tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(H(F)) \otimes Mes(H(F))$, on a l'égalité

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})) = S_{M^H}^H(res_{\tilde{M}}^{M^H}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}).$$

(ii) La distribution $\boldsymbol{\varphi} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi})$ est stable.

Preuve. Posons $\boldsymbol{\varphi} = res^H_{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ et recopions la définition [II] 1.10(8) :

$$(2) \qquad S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}) = I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

D'après 2.7, le premier terme est égal à $I^H_{M^H}(res^{M^H}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f})$. Parce que $Z(\hat{M}_{ad})$ est un tore induit, $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$ est connexe et l'homomorphisme naturel

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$$

est bijectif. Mais $\hat{M}_{ad} = \hat{M}^H_{ad}$. D'où un isomorphisme

$$Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H})^{\Gamma_F} = Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}.$$

Pour un élément s de cet ensemble, on a une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ de $(G, \tilde{G})$ déduite de $\mathbf{M}$ et de s et on a une donnée endoscopique $\mathbf{H}'(s)$ de H déduite de $\mathbf{M}^H$ et de s. On voit que la donnée $\mathbf{H}'(s)$ est déduite de $\mathbf{G}'(s)$ par la correspondance définie en 2.5. Que l'une des données soit elliptique équivaut à ce que l'autre le soit. Montrons que

(3) $i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) = i_{M^H}(H, H'(s))$.

On peut supposer les données elliptiques, sinon les deux membres sont nuls. On a la suite exacte

$$1 \to \hat{D} \to \hat{H}'(s) \to \hat{G}'(s) \to 1.$$

Les groupes adjoints $\hat{H}'(s)_{AD}$ et $\hat{G}'(s)_{AD}$ sont égaux. L'image de $\hat{M}^H$ dans le premier est égale à celle de $\hat{M}$ dans le second. On a donc comme plus haut l'égalité

$$Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H}'(s))^{\Gamma_F} = Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F}.$$

Les homomorphismes

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F}$$

et

$$Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H}'(s))^{\Gamma_F}$$

s'identifient. Puisque $i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))$, resp. $i_{M^H}(H, H'(s))$, est l'inverse du nombre d'élément du noyau du premier homomorphisme, resp. du second, (3) s'ensuit.

Pour $s \neq 1$, on peut admettre par récurrence la proposition que l'on cherche à prouver. Modulo quelques formalités, elle affirme que

$$S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, res^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)})) = S^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{M}^H}(res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)}).$$

Comme on l'a dit en 2.5, on a l'égalité $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{G}'(s)} = res^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)})$. L'égalité précédente devient

$$S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{G}'(s)}) = S^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{M}^H}(res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)}).$$

Le membre de droite de (2) devient

$$I^H_{M^H}(res^{M^H}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}) - \sum_{s \in Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H})^{\Gamma_F}, s \neq 1} i_{M^H}(H, H'(s)) S^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{M}^H}(res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)}),$$

ce qui n'est autre que $S^H_{M^H}(res^{M^H}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f})$. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Soit $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ dont l'image dans $SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ est nulle. D'après (1), on peut choisir $\mathbf{f} \in C_c^\infty(H(F)) \otimes Mes(H(F))$ dont l'image dans $SI(H(F)) \otimes Mes(H(F))$ est nulle et telle que $\boldsymbol{\varphi} = res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})$. On veut prouver que $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi}) = 0$. D'après (i), il suffit de prouver que $S_{M^H}^H(res_{\tilde{M}}^{M^H,*}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}) = 0$. Mais on est maintenant dans la situation d'un groupe non tordu et l'assertion a été prouvée par Arthur, cf. 1.1.□

2.9 Intégrales orbitales pondérées endoscopiques

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$.

Proposition. *Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))$. On suppose que le support de $\boldsymbol{\gamma}$ est formé d'éléments fortement réguliers dans $\tilde{G}(F)$.*

(i) Pour tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(H(F)) \otimes Mes(H(F))$, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})) = I_{M^H}^{H,\mathcal{E}}(res_{\tilde{M}}^{M^H,*}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{f}).$$

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}).$$

Preuve. On peut fixer une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \zeta)$ de $(M, \tilde{M})$, qui est elliptique et relevante, et un élément $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}')$ et supposer que $\boldsymbol{\gamma}$ est le transfert de $\boldsymbol{\delta}$. On a alors

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})).$$

Il y a un cocycle $a : W_F \to Z(\hat{M})$ défini par $\zeta m w_{M'}(\zeta)^{-1} = a(w)m$ pour tout $(m, w) \in \mathcal{M}'$. Comme toujours, on suppose qu'il prend ses valeurs dans $Z(\hat{G})$, ce qui est possible quitte à multiplier ζ par un élément de $Z(\hat{M})$. On a alors

$$(1) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f})) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, (res_{\tilde{G}}^H(\mathbf{f}))^{\mathbf{G}'(s)}).$$

A partir de $\mathbf{M}'$, on construit une donnée endoscopique $\mathbf{M}'^H = (M'^H, \mathcal{M}'^H, \zeta^H)$ de M^H. Le lemme 2.5 et l'hypothèse de relevance de $\mathbf{M}'$ assurent que c'est bien une donnée endoscopique pour le caractère trivial de M^H. De plus, le cocycle a^H associé à ces données vérifie automatiquement la condition analogue à celle vérifiée par a. Comme dans le paragraphe précédent, la projection naturelle induit un isomorphisme

$$\zeta^H Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H})^{\Gamma_F} \simeq \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}.$$

Identifions ces deux ensembles. Pour un élément s dans cet ensemble commun, la donnée $\mathbf{H}'(s)$ se déduit de $\mathbf{G}'(s)$ par le procédé de 2.5. L'une de ces données est elliptique si et seulement si l'autre l'est. Montrons que

(2) $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) = i_{M'^H}(H', H'(s))$.

L'argument est le même qu'en 2.8(3). On peut supposer les données elliptiques sinon les deux membres sont nuls. Le premier terme est le nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F}.$$

Le deuxième terme est le nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme

$$Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}'^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H}'(s))^{\Gamma_F}.$$

Mais ces homomorphismes s'identifient et (2) en résulte.

Comme on l'a dit en 2.5, on a l'égalité $(res^H_{\tilde{G}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{G}'(s)} = res^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{G}'(s)}(\mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)})$. Remarquons que l'on peut supposer que $\boldsymbol{\delta}$ est à support dans l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{M}'(F)$ qui correspondent à un élément du support de $\boldsymbol{\gamma}$. Alors le support de $\boldsymbol{\delta}$ est formé d'éléments qui sont fortement réguliers dans $H'(s)$. Modulo quelques formalités, la proposition 2.8(i) nous dit que

$$S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, (res^H_{\tilde{G}}(\mathbf{f}))^{\mathbf{G}'(s)}) = S^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{M}'^H}(res^{\mathbf{M}'^H,*}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)}).$$

Le membre de droite de (1) devient

$$\sum_{s\in\zeta^H Z(\hat{M}^H)^{\Gamma_F}/Z(\hat{H})^{\Gamma_F}} i_{M'^H}(H, H'(s)) S^{\mathbf{H}'(s)}_{\mathbf{M}'^H}(res^{\mathbf{M}'^H,*}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}^{\mathbf{H}'(s)}).$$

Ceci n'est autre que $I^{H,\mathcal{E}}_{M^H}(\mathbf{M}'^H, res^{\mathbf{M}'^H,*}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f})$, ou encore $I^{H,\mathcal{E}}_{M^H}(transfert(res^{\mathbf{M}'^H,*}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta})), \mathbf{f})$. Mais, par dualité à partir du dernier diagramme de 2.5, on a l'égalité

$$transfert(res^{\mathbf{M}'^H,*}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta})) = res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta})) = res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Le membre de droite de (1) est donc égal à $I^{H,\mathcal{E}}_{M^H}(res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{f})$ et cela démontre le (i) de l'énoncé.

Pour $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty_c(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on choisit $\mathbf{f} \in C^\infty_c(H(F)) \otimes Mes(H(F))$ tel que $\boldsymbol{\varphi} = res^H_{\tilde{G}}(\mathbf{f})$. Dans la situation d'un groupe non tordu, on peut appliquer 1.1 : on a l'égalité

$$I^{H,\mathcal{E}}_{M^H}(res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{f}) = I^H_{M^H}(res^{M^H,*}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{f}).$$

On a vu en 2.7 que le membre de droite était égal à $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi})$. Le (i) de l'énoncé nous dit que le membre de gauche est égal à $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi})$. D'où le (ii) de l'énoncé. □

3 Passage à un revêtement

3.1 Définition des homomorphismes de passage

On fixe pour toute la section un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ tel que $\tilde{G} = G$. Mais $\mathbf{a}$ est quelconque. On considère un sous-tore $Z \subset Z(G)$ et un groupe réductif connexe $G_\sharp$. On suppose donné un homomorphisme $q : G_\sharp \to G$. Ces trois données sont définies sur F. On pose $G_\flat = Z \times G_\sharp$ et on prolonge q par l'identité sur Z. On obtient ainsi un homomorphisme encore noté $q : G_\flat \to G$. On suppose qu'il sinscrit dans une suite exacte

$$1 \to \Xi_\flat \to G_\flat \xrightarrow{q} G \to 1$$

où $\Xi_\flat$ est un sous-groupe fini central. On note Ξ la projection de $\Xi_\flat$ dans $G_\sharp$. Notons que $\Xi_\flat \to \Xi$ est bijective puisque Z est inclus dans G.

Exemples. On peut prendre $Z = Z(G)^0$ et $G_\sharp = G_{SC}$. Ou bien, supposons que G soit un Levi d'un groupe H. On note G_{sc} son image réciproque dans H_{SC}. On peut prendre $Z = Z(H)^0$ et $G_\sharp = G_{sc}$.

On suppose que ω est trivial sur $q(G_\flat(F))$. On fixe une mesure de Haar sur $Z(F)$. Il s'en déduit une identification $Mes(G_\sharp(F)) \simeq Mes(G_\flat(F))$. Puisque l'homomorphisme $q : G_\flat(F) \to G(F)$ est un isomorphisme local, on a aussi un isomorphisme $Mes(G_\flat(F)) \simeq Mes(G(F))$: deux mesures se correspondent si elles se correspondent localement. D'où aussi $Mes(G_\sharp(F)) \simeq Mes(G(F))$.

L'action adjointe de $G(F)$ sur lui-même se remonte en une action de $G(F)$ sur $G_\sharp(F)$. Fixons un voisinage ouvert $V_\sharp$ de 1 dans $G_\sharp(F)$ invariant par cette action de $G(F)$ et tel que $x \in V_\sharp$ si et seulement si la partie semi-simple de x appartient à $V_\sharp$. On suppose $V_\sharp$ assez petit pour que $V_\sharp \cap \xi V_\sharp = \emptyset$ pour tout $\xi \in \Xi(F) - \{1\}$. On pose $V = q(Z(F) \times V_\sharp)$. Alors q se restreint en un isomorphisme de $Z(F) \times V_\sharp$ sur V.

Rappelons que l'on a défini en [II] 1.6 les espaces $C_{ac}^\infty(G(F))$ et $I_{ac}(G(F), \omega)$. On note $C_c^\infty(V)$, resp $C_{ac}^\infty(V)$, $I(V, \omega)$, $I_{ac}(V, \omega)$, $D_{géom}(V, \omega)$, l'espace des éléments de $C_c^\infty(G(F))$, resp $C_{ac}^\infty(G(F))$, $I(G(F), \omega)$, $I_{ac}(G(F), \omega)$, $D_{géom}(G(F), \omega)$, à support dans V.

Le groupe $q(G_\flat(F))$ est un sous-groupe distingué de $G(F)$, qui est ouvert et d'indice fini. Fixons un ensemble $\mathcal{U}$ de représentants du quotient

$$q(G_\sharp(F))\backslash G(F).$$

Pour $f \in C_c^\infty(V)$ et $u \in \mathcal{U}$, on définit une fonction $({}^u f)_{G_\sharp}$ sur $V_\sharp$ par $({}^u f)_{G_\sharp}(x) = f(u^{-1}q(x)u)$ pour tout $x \in V_\sharp$. On définit une application linéaire

$$\iota_{G_\sharp,G} : C_c^\infty(V) \to C_c^\infty(V_\sharp)$$

par $\iota_{G_\sharp,G}(f) = |\mathcal{U}|^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}} \omega(u)({}^u f)_{G_\sharp}$. Elle dépend du choix de $\mathcal{U}$.

En sens inverse, on définit une application

$$\iota_{G,G_\sharp} : C_c^\infty(V_\sharp) \to C_{ac}^\infty(G(F))$$

de la façon suivante. Pour $\varphi \in C_c^\infty(G_\sharp(F))$, $f = \iota_{G,G_\sharp}(\varphi)$ est la fonction sur $G(F)$ qui est nulle hors de V et qui vérifie $f(zq(x_\sharp)) = \varphi(x_\sharp)$ pour tout $z \in Z(F)$ et $x_\sharp \in V_\sharp$.

Fixons un sous-tore maximal T de G et notons $T_\sharp$ son image réciproque dans $G_\sharp$. De la même façon que ci-dessus, on a un isomorphisme $Mes(T(F)) \simeq Mes(T_\sharp(F))$. Fixons des mesures de Haar sur $T_\sharp(F)$ et $G_\sharp(F)$, donc aussi sur $T(F)$ et $G(F)$. Alors, pour $t_\sharp \in T_\sharp(F) \cap G_{\sharp,reg}(F)$, l'intégrale orbitale $I^{G_\sharp}(t_\sharp, .)$ est bien définie. C'est un élément de $D_{géom}(G_\sharp(F))$. De même, pour $t \in T(F) \cap G_{reg}(F)$, l'intégrale orbitale $I^G(t, \omega, .)$ est bien définie. C'est un élément de $D_{géom}(G(F), \omega)$. Notons c_T le nombre d'éléments de l'ensemble de doubles classes

$$q(G_\flat(F))\backslash G(F)/T(F).$$

Lemme. *Soient $t_\sharp \in T_\sharp(F) \cap V_\sharp$ et $z \in Z(F)$. Posons $t = q(t_\sharp)$ et supposons $t \in G_{reg}(F)$.*

(i) Soit $f \in C_c^\infty(V)$, posons $\varphi = \iota_{G_\sharp,G}(\varphi)$. On a l'égalité

$$c_T^{-1} I^G(t, \omega, f) = I^{G_\sharp}(t_\sharp, \varphi).$$

(ii) Soit $\varphi \in C_c^\infty(V_\sharp)$, posons $f = \iota_{G,G_\sharp}(\varphi)$. On a l'égalité

$$c_T |\mathcal{U}|^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}} \omega(u) I^{G_\sharp}(ad_{u^{-1}}(t_\sharp), \varphi) = I^G(zt, \omega, f).$$

Preuve de (i). On a par définition

$$I^{G_\sharp}(t_\sharp,\varphi)|\mathcal{U}|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}}\omega(u)D^{G_\sharp}(t_\sharp)^{1/2}\int_{T_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F)}f(u^{-1}q(x^{-1}t_\sharp x)u)\,dx.$$

On voit que cette expression ne dépend pas du choix de $\mathcal{U}$. On peut fixer des ensembles de représentants $\mathcal{U}'$ du quotient $q(G_\flat(F))\backslash q(G_\flat(F))T(F)$ et $\mathcal{U}''$ du quotient $q(G_\flat(F))T(F)\backslash G(F)$ et supposer que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des produits $u'u''$ avec $u'\in\mathcal{U}'$ et $u''\in\mathcal{U}''$. On peut de plus supposer que $\mathcal{U}'\subset T(F)$. On obtient

$$I^{G_\sharp}(t_\sharp,\varphi)=|\mathcal{U}''|^{-1}\sum_{u''\in\mathcal{U}''}\omega(u'')|\mathcal{U}'|^{-1}\sum_{u'\in\mathcal{U}'}\omega(u')D^{G_\sharp}(t_\sharp)^{1/2}$$

$$\int_{T_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F)}f((u'')^{-1}(u')^{-1}q(x^{-1}t_\sharp x)u'u'')\,dx.$$

Pour $u'\in\mathcal{U}'\subset T(F)$, l'action $ad_{u'}^{-1}$ sur $G_\sharp(F)$ normalise $T_\sharp(F)$ et définit un automorphisme de $T_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F)$ qui préserve la mesure. D'autre part, cette action fixe $t_\sharp$. Par changement de variables, on voit que le terme u' disparaît de l'intégrale intérieure. L'expression ci-dessus devient

$$I^{G_\sharp}(t_\sharp,\varphi)=d|\mathcal{U}''|^{-1}\sum_{u''\in\mathcal{U}''}\omega(u'')D^{G_\sharp}(t_\sharp)^{1/2}\int_{T_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F)}f((u'')^{-1}q(x^{-1}t_\sharp x)u'')\,dx,$$

où

$$d=|\mathcal{U}'|^{-1}\sum_{u'\in\mathcal{U}'}\omega(u').$$

Si ω est non trivial sur $T(F)$, d est nul et $I^{G_\sharp}(t_\sharp,\varphi)=0$. Mais l'intégrale orbitale $I^G(t,\omega,f)$ est nulle elle aussi, d'où l'égalité voulue dans ce cas. Supposons que ω est trivial sur $T(F)$. Alors $d=1$. Pour tout $u''\in\mathcal{U}''$, l'application

$$\begin{array}{ccc} T_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F) & \to & T(F)\backslash G(F)\\ x & \mapsto & q(x)u'' \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace de départ sur un ouvert fermé de l'espace d'arrivée. Il respecte les mesures par définition de celles-ci. Par définition de $\mathcal{U}''$ et parce que $Z\subset T$, $T(F)\backslash G(F)$ est réunion disjointe des images de ces applications quand u'' décrit $\mathcal{U}''$. On obtient

$$I^{G_\sharp}(t_\sharp,\varphi)=|\mathcal{U}''|^{-1}D^{G_\sharp}(t_\sharp)^{1/2}\int_{T(F)\backslash G(F)}f(y^{-1}ty)\omega(y)\,dy.$$

Il est clair que $D^{G_\sharp}(t_\sharp)=D^G(t)$. Par définition, on a $c_T=|\mathcal{U}''|$. Alors la formule ci-dessus équivaut à

$$I^{G_\sharp}(t_\sharp,\varphi)=c_T^{-1}I^G(t,\omega,f),$$

d'où le (i) de l'énoncé.

Le (ii) se démontre de façon analogue. □

Ce lemme entraîne que les applications linéaires définies ci-dessus se quotientent en des applications linéaires

$$\iota_{G_\sharp,G}:I(V,\omega)\to I(V_\sharp)$$

et

$$\iota_{G,G_\sharp} : I(V_\sharp) \to I_{ac}(V,\omega).$$

Ces applications ne dépendent pas du choix de l'ensemble $\mathcal{U}$. Dualement, on a des applications linéaires

$$\iota^*_{G_\sharp,G} : D_{géom}(V_\sharp) \to D_{géom}(V,\omega),$$
$$\iota^*_{G,G_\sharp} : D_{géom}(V,\omega) \to D_{géom}(V_\sharp).$$

Décrivons plus complètement ces applications. De l'action adjointe de $G(F)$ sur $G_\sharp(F)$ se déduit une action de $G(F)$ sur $D_{géom}(V_\sharp)$. Notons $D_{géom}(V_\sharp)^{G(F),\omega}$ le sous-espace des $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(V_\sharp)$ tels que $ad(g)(\boldsymbol{\gamma}) = \omega(g)\boldsymbol{\gamma}$ pour tout $g \in G(F)$. Puisque cette action se quotiente en l'action du groupe fini $q(G_\flat(F))\backslash G(F)$, on a une projection naturelle

$$p : D_{géom}(V_\sharp) \to D_{géom}(V_\sharp)^{G(F),\omega}.$$

Notons d'autre part $D_{géom}(V,\omega)_\sharp$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(V,\omega)$ à support dans $q(V_\sharp)$. Alors $\iota^*_{G_\sharp,G}$ se factorise en

$$D_{géom}(V_\sharp) \xrightarrow{p} D_{géom}(V_\sharp)^{G(F),\omega} \overset{\iota^*_{G_\sharp,G}}{\simeq} D_{géom}(V,\omega)_\sharp \subset D_{géom}(V,\omega).$$

En sens inverse, tout élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(V,\omega)$ s'écrit de façon unique $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{z\in Z(F)} z\boldsymbol{\gamma}_z$, où $\boldsymbol{\gamma}_z \in D_{géom}(V,\omega)_\sharp$ et $\boldsymbol{\gamma}_z = 0$ pour presque tout z. Notons $\boldsymbol{\gamma}_{z,\sharp}$ l'élément de $D_{géom}(V_\sharp)^{G(F),\omega}$ tel que $\boldsymbol{\gamma}_z = \iota^*_{G_\sharp,G}(\boldsymbol{\gamma}_{z,\sharp})$. Alors

$$\iota^*_{G,G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{z\in Z(F)} \boldsymbol{\gamma}_{z,\sharp}.$$

Remarquons que nos applications dépendent du choix de $V_\sharp$. Mais, pour deux tels voisinages, les applications relatives à chacun de ces voisinages coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. En particulier, $\iota^*_{G_\sharp,G}$ se restreint en une application surjective

$$D_{unip}(G_\sharp(F)) \to D_{unip}(G(F),\omega).$$

On note encore $\iota^*_{G_\sharp,G}$ l'application obtenue en tensorisant ces espaces par les espaces de mesures adéquats.

3.2 Les termes ρ_J

Soit M un espace de Levi de G. On note $M_\sharp$, resp. $M_\flat$, son image réciproque dans $G_\sharp$, resp. $G_\flat$. Remarquons que l'application naturelle

$$q(M_\flat(F))\backslash M(F) \simeq q(G_\flat(F))\backslash G(F)$$

est bijective. Son injectivité est immédiate. Pour la surjectivité, il suffit de traiter le cas où M est un Levi minimal de G. On fixe $P \in \mathcal{P}(M)$ et on note $P_\flat$ son image réciproque dans $G_\flat$. Alors $(P_\flat, M_\flat)$ est aussi une paire parabolique minimale de $G_\flat$. Pour $g \in G(F)$, $ad_g(P_\flat, M_\flat)$ est encore une paire parabolique minimale de $G_\sharp$. Deux telles paires étant toujours conjuguées par un élément de $G_\flat(F)$, on peut multiplier g à gauche par un élément de $q(G_\flat(F))$ de sorte que ad_g conserve $(P_\flat, M_\flat)$. Mais alors ad_g conserve (P, M) donc $g \in M(F)$. D'où la surjectivité requise.

En conséquence, on peut supposer que l'ensemble $\mathcal{U}$ de 3.1 est contenu dans $M(F)$. On voit que les applications linéaires définies en 3.1 commutent au passage au terme constant. C'est-à-dire que, pour $\mathbf{f} \in I(V,\omega) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$\iota_{M_\sharp,M}(\mathbf{f}_{M,\omega}) = (\iota_{G_\sharp,G}(\mathbf{f})_{M_\sharp})$$

et, pour $\boldsymbol{\varphi} \in I(V_\sharp(F)) \otimes Mes(G_\sharp(F))$, on a l'égalité

$$\iota_{M,M_\sharp}(\boldsymbol{\varphi}_{M_\sharp}) = (\iota_{G,G_\sharp}(\boldsymbol{\varphi}))_{M,\omega}.$$

On a des formules duales de commutation à l'induction.

L'application q se restreint en une bijection entre les ensembles d'éléments unipotents de $M_\sharp(F)$ et de $M(F)$. On a aussi une bijection entre les ensembles de racines $\Sigma(A_{M_\sharp})$ et $\Sigma(A_M)$. Enfin, de q se déduit un plongement $q : \mathcal{A}_{M_\sharp} \to \mathcal{A}_M$. Soit u un élément unipotent de $M_\sharp(F)$ et $\alpha \in \Sigma(A_{M_\sharp})$. On a défini un élément $\rho^{G_\sharp}(\alpha,u) \in \mathcal{A}_{M_\sharp}$ en [II] 1.4. Modulo l'identification ci-dessus, on a aussi un élément $\rho^G(\alpha,q(u)) \in \mathcal{A}_M$. On a

(1) $\rho^G(\alpha,q(u)) = q(\rho^{G_\sharp}(\alpha,u))$.

Preuve. On n'en donne qu'une esquisse. On montre d'abord la même égalité pour les termes primitifs définis par Arthur, c'est-à-dire l'égalité $\rho^{G,Art}(\alpha,q(u)) = q(\rho^{G_\sharp,Art}(\alpha,u))$. Pour cela, on applique comme dans les preuves de [II] 1.4 la caractérisation de ces termes par les fonctions $W_\omega(a,\pi)$ de [A2] (3.8). On compare aisément ces fonctions pour G et $G_\sharp$ et l'assertion en résulte. Ensuite, à tout élément $\alpha \in \Sigma(A_{M_\sharp})$ sont associés deux groupes G_α et $G_{\sharp,\alpha}$. On voit que ces groupes sont reliés de la même façon que G et $G_\sharp$, c'est-à-dire que l'on a une suite exacte

$$1 \to \Xi_\flat \to Z \times G_{\alpha,\sharp} \xrightarrow{q} G_\alpha \to 1.$$

La définition inductive des termes $\rho^G(\alpha,q(u))$ et $\rho^{G_\sharp}(\alpha,u)$ conduit alors au résultat. $\square$

De l'identification ci-dessus entre ensembles de racines se déduit une identification entre $\mathcal{J}_M^G$ et $\mathcal{J}_{M_\sharp}^{G_\sharp}$. Pour un élément J de cet ensemble, on a défini un espace U_J de germes de fonctions sur $A_M(F)$ et, de même, un espace $U_{J,\sharp}$ de germes de fonctions sur $A_{M_\sharp}(F)$. L'espace $U_{J,\sharp}$ est celui des fonctions $u \circ q$ pour $u \in U_J$. On identifie ainsi ces deux espaces. On a défini en [II] 3.2 des applications ρ_J^G et $\rho_J^{G_\sharp}$. Dans leur définition interviennent des mesures sur $\mathcal{A}_M^G$ et $\mathcal{A}_{M_\sharp}^{G_\sharp}$. On suppose que ces mesures se correspondent par la bijection déduite de q entre ces espaces. On a

(2) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_{unip}(M(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^* & \xrightarrow{\rho_J^G} & U_J \otimes (D_{unip}(M(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann^G \\ \uparrow \iota^*_{M_\sharp,M} & & \uparrow \iota^*_{M_\sharp,M} \\ D_{unip}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^* & \xrightarrow{\rho_J^{G_\sharp}} & U_J \otimes (D_{unip}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^*)/Ann^{G_\sharp}. \end{array}$$

Cela résulte des définitions des applications et de (1).

Variante. Supposons $\mathbf{a} = 1$ et supposons donnée une fonction B comme en [II] 1.8. Cette fonction se remonte à $G_\sharp$. On sait alors définir les variantes $\rho^G(\alpha,u,B)$, $\Sigma(A_M,B)$ etc... des termes considérés ci-dessus. Ces variantes vérifient les mêmes propriétés.

3.3 Intégrales orbitales pondérées et revêtement

Soit M un Levi de G. Rappelons que les intégrales orbitales pondérées dépendent du choix d'un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Si besoin est, on introduit ce compact dans la notation pour la préciser : $J_M^G(\boldsymbol{\gamma}, \omega, \mathbf{f}, K)$. Ce compact étant fixé, on note $K_\sharp$ son image réciproque dans $G_\sharp(F)$. C'est un sous-groupe compact spécial de $G_\sharp(F)$ (il est associé au même point spécial de l'immeuble de $G_{\sharp,AD} = G_{AD}$). Pour $g \in G(F)$, on pose ${}^gK_\sharp = ad_g(K_\sharp)$. Les intégrales orbitales pondérées dépendent aussi de mesures sur $\mathcal{A}_M^G$ et $\mathcal{A}_{M_\sharp}^{G_\sharp}$. Comme dans le paragraphe précédent, on suppose que ces mesures se correspondent par l'isomorphisme déduit de q entre ces espaces.

Fixons des mesures sur nos différents groupes $G(F)$, $G_\sharp(F)$, etc... qui se correspondent comme en 3.1.

Lemme. *Pour tout $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{géom}(V_\sharp)$ à support $G_\sharp$-équisingulier ou unipotent et tout $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité*

$$J_M^G(\iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp), \omega, f) = |\mathcal{U}|^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}} \omega(u) J_{M_\sharp}^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp, ({}^uf)_{G_\sharp}, {}^uK_\sharp).$$

Preuve. On peut supposer que $\boldsymbol{\gamma}_\sharp$ est l'intégrale orbitale associée à un élément $\gamma_\sharp \in M_\sharp(F)$ et à une certaine mesure sur $M_{\sharp,\gamma_\sharp}(F)$. Par un calcul similaire à celui de la preuve du lemme 3.1, $\iota_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp)$ est l'intégrale orbitale associée à l'élément $\gamma = q(\gamma_\sharp)$, et à une certaine mesure sur $M_\gamma(F)$. Remarquons en passant que, si on remplace $\gamma_\sharp$ par $a\gamma_\sharp$, avec $a \in A_{M_\sharp}(F)$ et si on conserve la même mesure sur $M_{\sharp,a\gamma_\sharp}(F) = M_{\sharp,\gamma_\sharp}(F)$, la mesure déduite sur $M_{q(a)\gamma}(F) = M_\gamma(F)$ ne change pas. Supposons d'abord que $\gamma_\sharp$ soit $G_\sharp$-équisingulier. Si ω n'est pas trivial sur $M_\gamma(F)$, on vérifie facilement que les deux membres de l'égalité de l'énoncé sont nuls. Supposons que ω soit trivial sur $M_\gamma(F)$. Alors

$$J_M^G(\iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp), \omega, f) = J_M^G(\gamma, \omega, f) = D^G(\gamma)^{1/2} \int_{M_\gamma(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma x)\omega(x) v_M^G(x)\, dx$$

$$= D^G(\gamma)^{1/2} D^M(\gamma)^{-1/2} \int_{M(F)\backslash G(F)} I^M(\gamma, \omega, ({}^xf)_M)\omega(x) v_M^G(x)\, dx,$$

où $({}^xf)_M$ est la fonction $y \mapsto f(x^{-1}yx)$ sur $M(F)$. Puisque l'intégrale orbitale $I^M(\gamma, \omega, .)$ est par définition l'image par $\iota_{M_\sharp,M}^*$ de l'intégrale orbitale $I^{M_\sharp}(\gamma_\sharp, .)$, la définition de $\iota_{M_\sharp,M}^*$ entraîne

$$J_M^G(\iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp), \omega, f) = D^G(\gamma)^{1/2} D^M(\gamma)^{-1/2} \int_{M(F)\backslash G(F)} |\mathcal{U}|^{-1}$$

$$\sum_{u \in \mathcal{U}} I^{M_\sharp}(\gamma_\sharp, ({}^{ux}f)_{M_\sharp})\omega(ux) v_M^G(ux)\, dx,$$

avec une définition évidente de $({}^{ux}f)_{M_\sharp}$. Par définition de $\mathcal{U}$, cette expression se récrit

$$J_M^G(\iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp), \omega, f) = D^G(\gamma)^{1/2} D^M(\gamma)^{-1/2} |\mathcal{U}|^{-1}$$

$$\int_{q(M_\flat(F))\backslash G(F)} I^{M_\sharp}(\gamma_\sharp, ({}^xf)_{M_\sharp})\omega(x) v_M^G(x)\, dx.$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} (M_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F))\times\mathcal{U} & \to & q(M_\flat(F))\backslash G(F) \\ (x,u) & \mapsto & q(x)u \end{array}$$

est bijective. On vérifie qu'elle préserve les mesures, si on met sur $\mathcal{U}$ la mesure de comptage. L'expression précédente se récrit

$$J_M^G(\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f) = D^G(\gamma)^{1/2}D^M(\gamma)^{-1/2}|\mathcal{U}|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}}$$

$$\int_{M_\sharp(F)\backslash G_\sharp(F)} I^{M_\sharp}(\gamma_\sharp,({}^{xu}f)_{M_\sharp})\omega(xu)v_M^G(xu)\,dx.$$

Pour $u\in\mathcal{U}$ et $x\in G_\sharp(F)$, on vérifie que $v_M^G(xu)$ est égal au poids $v_{M_\sharp}^{G_\sharp}(x,{}^uK_\sharp)$ calculé relativement au compact ${}^uK_\sharp$ (on utilise ici la compatibilité entre les mesures sur $\mathcal{A}_{M_\sharp}^{G_\sharp}$ et sur $\mathcal{A}_M^G$). On a de plus l'égalité

$$D^G(\gamma)^{1/2}D^M(\gamma)^{-1/2} = D^{G_\sharp}(\gamma_\sharp)^{1/2}D^{M_\sharp}(\gamma_\sharp)^{-1/2}.$$

L'intégrale intérieure ci-dessus multipliée par ce facteur devient $J_{M_\sharp}^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp,({}^uf)_{G_\sharp},{}^uK_\sharp)$ et on obtient la formule de l'énoncé.

Si $\gamma_\sharp$ est unipotent, on a une égalité

$$J_M^G(\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f) = lim_{a\to 1}\sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r_M^L(\gamma,q(a))J_L^G(\iota^*_{M_\sharp,M}(q(a)\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f),$$

où $a\in A_{M_\sharp}(F)$ est en position générale, cf. [A1] 6.5 ou [II] 1.5. On a des formules similaires pour les termes du membre de droite de l'énoncé. Remarquons que, d'après une remarque faite plus haut, les mesures qui interviennent implicitement dans ces formules ne dépendent pas de a. En utilisant 3.2(1), on voit que $r_M^L(\gamma,q(a)) = r_{M_\sharp}^{L_\sharp}(\gamma_\sharp,a)$. L'assertion de l'énoncé pour $\gamma_\sharp$ unipotent se déduit alors par passage à la limite du cas particulier traité précédemment. $\square$

Remarque. La proposition vaut en fait pour tout $\boldsymbol{\gamma}_\sharp\in D_{géom}(V_\sharp\cap M_\sharp(F))$ mais nous ne nous en servirons que pour les $\boldsymbol{\gamma}_\sharp$ indiqués.

3.4 Germes de Shalika et revêtement

On conserve les données du paragraphe précédent.

Proposition. *(i) Pour $\boldsymbol{\gamma}_\sharp\in D_{géom,G_\sharp-équi}(M_\sharp(F))\otimes Mes(M_\sharp(F))^*$ assez voisin de l'origine, on a l'égalité*

$$g_{M,unip}^G\circ\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = \iota^*_{G_\sharp,G}\circ g_{M_\sharp,unip}^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp).$$

(ii) Pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom,G-équi}(M(F))\otimes Mes(M(F))^*$ assez voisin de l'origine, on a l'égalité

$$g_{M,unip}^G(\boldsymbol{\gamma}) = g_{M,unip}^G\circ\iota^*_{M_\sharp,M}\circ\iota^*_{M,M_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Preuve. On fixe des mesures de Haar sur les groupes $G(F)$, $G_\sharp(F)$ etc... se correspondant comme en 3.1. Soient $\boldsymbol{\gamma}_\sharp \in D_{géom,G_\sharp-équi}(M_\sharp(F))$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$. Si $\boldsymbol{\gamma}_\sharp$ est assez voisin de l'origine, on a l'égalité

$$J_M^G(\iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} J_L^G(g_{M,unip}^L \circ \iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f).$$

Pour $L \neq G$, nos hypothèses de récurrence nous permettent d'appliquer la proposition à prouver : on a

$$g_{M,unip}^L \circ \iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp) = \iota_{L_\sharp,L}^* \circ g_{M_\sharp,unip}^{L_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp).$$

Pour $L = G$, notons X la différence entre le membre de gauche de l'énoncé et celui de droite. On obtient

$$J_M^G(\iota_{M_\sharp,M}^*(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f) = I^G(X,\omega,f) + \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} J_L^G(\iota_{L_\sharp,L}^* \circ g_{M_\sharp,unip}^{L_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),\omega,f).$$

On applique la proposition 3.3 au membre de gauche et aux termes de la somme de droite. On obtient

$$I^G(X,\omega,f) = |\mathcal{U}|^{-1}\sum_{u\in\mathcal{U}}\left(J_{M_\sharp}^{G_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp,({}^uf)_\sharp,{}^uK_\sharp) - \sum_{L_\sharp\in\mathcal{L}(M_\sharp)} J_{L_\sharp}^{G_\sharp}(g_{M_\sharp,unip}^{L_\sharp}(\boldsymbol{\gamma}_\sharp),{}^uf_{G_\sharp},{}^uK_\sharp)\right).$$

Bien que les intégrales orbitales pondérées dépendent du choix d'un sous-groupe compact spécial, les germes n'en dépendent pas. Cela résulte aisément des formules de passage entre intégrales orbitales pondérées relatives à différents choix de sous-groupes compacts (et c'est ce qui permet aux germes pour les intégrales orbitales pondérées non ω-équivariantes d'être aussi les germes pour leurs avatars ω-équivariants). Donc tous les termes de la somme en u sont nuls. Donc aussi le membre de gauche, c'est-à-dire $X = 0$. Cela prouve le (i) de la proposition.

Il est clair que les germes sont insensibles aux centres, c'est-à-dire que l'on a l'égalité $g_{M,unip}^G(z\boldsymbol{\gamma}) = g_{M,unip}^G(\boldsymbol{\gamma})$ pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,G-équi}(M(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $z \in Z(F)$, pourvu que z et le support de $\boldsymbol{\gamma}$ soient assez proches de 1. L'assertion (ii) résulte alors de (i) et de la description explicite donnée en 3.1 de l'application $\iota_{M,M_\sharp}^*$. $\square$

Variante. Supposons $\omega = 1$ et soit B une fonction comme en [II].1.8. La même proposition vaut pour les germes $g_{M,unip}^G(.,B)$ et $g_{M_\sharp,unip}^{G_\sharp}(.,B)$.

3.5 Revêtement et stabilité

On suppose que G est quasi-déployé et que $\mathbf{a} = 1$. On suppose que le voisinage $V_\sharp$ utilisé en 3.1 est invariant par conjugaison stable (si $x \in V_\sharp$ est fortement régulier et si y est stablement conjugué à x, alors $y \in V_\sharp$). Notons qu'il existe de tels voisinages vérifiant de plus notre condition $V_\sharp \cap \xi V_\sharp = \emptyset$ pour tout $\xi \in \Xi(F) - \{1\}$ puisqu'un tel ξ n'est pas stablement conjugué à 1. On a un analogue du lemme 3.1 pour les intégrales orbitales stables. Reprenons les hypothèses de ce lemme.

Lemme. *Soient $t_\sharp \in T_\sharp(F)\cap V_\sharp$ et $z \in Z(F)$. Posons $t = q(t_\sharp)$ et supposons $t \in G_{reg}(F)$. Alors*

(i) l'image de $S^{G_\sharp}(t_\sharp,.)$ par l'application $\iota_{G_\sharp,G}^*$ est $S^G(t,.)$;

(ii) l'image de $S^G(zt,.)$ par l'application $\iota^*_{G,G_\sharp}$ est $S^{G_\sharp}(t_\sharp,.)$.

Preuve. Notons $\mathcal{O}_\sharp$ la classe de conjugaison stable de $t_\sharp$ dans $G_\sharp(F)$ et $\mathcal{O}$ celle de t dans $G(F)$. Il est clair que $q(\mathcal{O}_\sharp) \subset \mathcal{O}$. Montrons que

(1) la restriction de q à $\mathcal{O}_\sharp$ est une bijection de $\mathcal{O}_\sharp$ sur $\mathcal{O}$.

Par hypothèse sur $V_\sharp$, on a $\mathcal{O}_\sharp \subset V_\sharp$ et on sait que q est injective sur $V_\sharp$, a fortiori sur $\mathcal{O}_\sharp$. Soit $t' \in \mathcal{O}$. On peut fixer $x \in G$ tel que $x^{-1}tx = t'$. Soit $x_\sharp \in G_\sharp$ ayant même image que x dans $G_{AD} = G_{\sharp,AD}$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on a la relation $x\sigma(x)^{-1} \in T$, donc $x_\sharp\sigma(x_\sharp)^{-1} \in T_\sharp$. Il en résulte que l'élément $t'_\sharp = x_\sharp^{-1}t_\sharp x_\sharp$ appartient à $\mathcal{O}_\sharp$. Et on a $t' = q(t'_\sharp)$. D'où la surjectivité, ce qui prouve (1).

Fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\mathcal{O}$. Pour tout $x \in \dot{\mathcal{X}}$, fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{X}}_x$ des classes de conjugaison par $G_\sharp(F)$ dans l'image réciproque par q de la classe de conjugaison par $G(F)$ de x. Posons $\dot{\mathcal{X}}_\sharp = \sqcup_{x\in\dot{\mathcal{X}}}\dot{\mathcal{X}}_x$. C'est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_\sharp(F)$ dans $\mathcal{O}_\sharp$. Par définition, on a l'égalité

$$S^{G_\sharp}(t_\sharp,.) = \sum_{x_\sharp\in\dot{\mathcal{X}}_\sharp} I^{G_\sharp}(x_\sharp,.) = \sum_{x\in\dot{\mathcal{X}}}\sum_{x_\sharp\in\dot{\mathcal{X}}_x} I^{G_\sharp}(x_\sharp,.).$$

On applique le lemme 3.1(i). Par l'application $\iota^*_{G_\sharp,G}$, la dernière intégrale $I^{G_\sharp}(x_\sharp,.)$ s'envoie sur $c_{T_x}^{-1}I^G(x,.)$, où T_x est le commutant de x dans G. Donc

$$\iota^*_{G_\sharp,G}(S^{G_\sharp}(t_\sharp,.)) = \sum_{x\in\dot{\mathcal{X}}} c_{T_x}^{-1}|\dot{\mathcal{X}}_x|I^G(x,.).$$

La classe de conjugaison de x par $G(F)$ s'identifie à $T_x(F)\backslash G(F)$. Donc $\dot{\mathcal{X}}_x$ est un ensemble de représentants du quotient $T_x(F)\backslash G(F)/q(G_\sharp(F)) = T_x(F)\backslash G(F)/q(G_\flat(F))$. D'où $|\dot{\mathcal{X}}_x| = c_{T_x}$ et le membre de droite de l'égalité ci-dessus devient

$$\sum_{x\in\dot{\mathcal{X}}} I^G(x,.),$$

ce qui n'est autre que $S^G(t,.)$. Cela prouve le (i) de l'énoncé. La preuve de (ii) est similaire. □

Il résulte de ce lemme que les applications de 3.1 se quotientent en des applications linéaires

$$\iota_{G_\sharp,G} : SI(V) \to SI(V_\sharp)$$

et

$$\iota_{G,G_\sharp} : SI(V_\sharp) \to SI(V),$$

avec des définitions évidentes de ces espaces. On a dualement des applications linéaires

$$\iota^*_{G_\sharp,G} : D^{st}_{géom}(V_\sharp) \to D^{st}_{géom}(V)$$

et

$$\iota^*_{G,G_\sharp} : D^{st}_{géom}(V) \to D^{st}_{géom}(V_\sharp).$$

La description de 3.1 se simplifie pour les distributions stables : une distribution stable sur $V_\sharp$ est forcément invariante par l'action du groupe adjoint $G_{\sharp,AD}(F)$, a fortiori par

celle de $G(F)$. Il en résulte que $\iota^*_{G_\sharp,G}$ est injective et a pour image le sous-espace des éléments de $D^{st}_{géom}(V)$ à support dans $q(V_\sharp)$. En particulier, cette application se restreint en un isomorphisme

$$\iota^*_{G_\sharp,G} : D^{st}_{unip}(G_\sharp(F)) \simeq D^{st}_{unip}(G(F)).$$

On peut aussi tensoriser les applications ci-dessus par des espaces de mesures.

3.6 Les termes σ_J

On suppose G quasi-déployé et $\mathbf{a} = 1$. On suppose fixée une fonction B comme en [II] 1.8. Soit M un Levi de G. L'assertion suivante est similaire à 3.2(2).

Lemme. *Pour tout $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} D^{st}_{unip}(M(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^* & \stackrel{\sigma^G_J}{\to} & U_J \otimes (D_{unip}(M(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann^G \\ \uparrow \iota^*_{M_\sharp,M} & & \uparrow \iota^*_{M_\sharp,M} \\ D^{st}_{unip}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^* & \stackrel{\sigma^{G_\sharp}_J}{\to} & U_J \otimes (D_{unip}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^*)/Ann^{G_\sharp}. \end{array}$$

Remarque. Ainsi qu'on l'a dit ci-dessus, les applications verticales sont des isomorphismes.

Preuve. Dualement à la suite exacte

$$1 \to \Xi_\flat \to Z \times G_\sharp \to G \to 1$$

on a une suite exacte

$$1 \to \hat{\Xi}_\flat \to \hat{G} \to \hat{Z} \times \hat{G}_\sharp \to 1,$$

où $\hat{\Xi}_\flat$ est un certain sous-groupe fini central. On a les isomorphismes

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \simeq Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F} \simeq Z(\hat{M}_{\sharp,ad})^{\Gamma_F} \simeq Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_\sharp)^{\Gamma_F}.$$

En effet, les deux flèches extrêmes sont bijectives car les groupes $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F}$ et $Z(\hat{M}_{\sharp,ad})^{\Gamma_F}$ sont connexes. Celle du milieu est bijective car l'égalité $\hat{G}_{AD} = \hat{G}_{\sharp,AD}$ entraîne $\hat{M}_{ad} = \hat{M}_{\sharp,ad}$. Ainsi, pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on a à la fois une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ de G et une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_\sharp(s)$ de $G_\sharp$. On a une suite exacte

$$1 \to \hat{\Xi}_\flat \to \hat{G}'(s) \to \hat{Z} \times \hat{G}'_\sharp(s) \to 1.$$

Dualement, on a une suite exacte

$$1 \to \Xi_\flat \to Z \times G'_\sharp(s) \stackrel{q_s}{\to} G'(s) \to 1.$$

C'est bien le groupe $\Xi_\flat$ qui intervient ici. En effet, $Z \times G'_\sharp(s)$ a pour Levi $M_\flat = Z \times M_\sharp$, tandis que $G'(s)$ a pour Levi M. L'homomorphisme q_s se restreint en l'homomorphisme de départ $M_\flat \to M$, dont le noyau est $\Xi_\flat$. Montrons que l'on a l'égalité

$$(1) \qquad i_M(G, G'(s)) = i_{M_\sharp}(G_\sharp, G'_\sharp(s)).$$

Puisque $\mathcal{A}_Z \oplus \mathcal{A}_{G'_\sharp(s)} = \mathcal{A}_{G'(s)}$ et $\mathcal{A}_Z \oplus \mathcal{A}_{G_\sharp} = \mathcal{A}_G$, les données $\mathbf{G}'(s)$ et $\mathbf{G}'_\sharp(s)$ sont simultanément elliptiques ou non. Si elles ne le sont pas, les deux termes ci-dessus sont nuls. Supposons qu'elles soient elliptiques. Le même argument que ci-dessus fournit l'isomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F} = Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'_\sharp(s))^{\Gamma_F}.$$

Le terme $i_M(G, G'(s))$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F}.$$

Le terme $i_{M_\sharp}(G_\sharp, G'_\sharp(s))$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme

$$Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_\sharp)^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'_\sharp(s))^{\Gamma_F}.$$

Ces homomorpismes s'identifient et (1) en résulte.

Soient $\boldsymbol{\delta}_\sharp \in D^{st}_{unip}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^*$ et $a_\sharp \in A_{M_\sharp}(F)$ en position générale et proche de 1. Posons $\boldsymbol{\delta} = \iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$ et $a = q(a_\sharp)$. Posons

$$X = \sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a) - \iota^*_{M_\sharp,M}(\sigma^{G_\sharp}_J(\boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp)).$$

L'assertion de l'énoncé est que $X = 0$. On a

$$\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a) = \rho^G_J(\boldsymbol{\delta}, a) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1, J \in \mathcal{J}^{G'(s)}_M(B)} i_M(G, G'(s))\sigma^{G'(s)}_J(\boldsymbol{\delta}, a).$$

On peut appliquer au premier terme la propriété 3.2(2). Par récurrence, on peut appliquer le présent lemme aux autres termes. On obtient que $\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}, a)$ est l'image par $\iota^*_{M_\sharp,M}$ de

$$\rho^{G_\sharp}_J(\boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1, J \in \mathcal{J}^{G'(s)}_M(B)} i_M(G, G'(s))\sigma^{G'_\sharp(s)}_J(\boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp).$$

Il est clair que $J \in \mathcal{J}^{G'(s)}_M(B)$ si et seulement si $J \in \mathcal{J}^{G'_\sharp(s)}_{M_\sharp}(B)$. Les considérations qui précèdent transforment l'expression ci-dessus en

$$\rho^{G_\sharp}_J(\boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp) - \sum_{s \in Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_\sharp)^{\Gamma_F}, s \neq 1, J \in \mathcal{J}^{G'_\sharp(s)}_{M_\sharp}(B)} i_{M_\sharp}(G_\sharp, G'_\sharp(s))\sigma^{G'_\sharp(s)}_J(\boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp)$$

ce qui n'est autre que $\sigma^{G_\sharp}_J(\boldsymbol{\delta}_\sharp, a_\sharp)$. Cela prouve $X = 0$ et le lemme. □

3.7 Revêtement et germes stables

On conserve les mêmes hypothèses. Soit M un Levi de G.

Proposition. *(i) Pour $\boldsymbol{\delta}_\sharp \in D^{st}_{géom,G_\sharp-équi}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^*$ assez voisin de l'origine, on a l'égalité*

$$Sg^G_{M,unip}(\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\delta}_\sharp), B) = \iota^*_{G_\sharp,G}(Sg^{G_\sharp}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B)).$$

(ii) Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,G-équi}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ *assez voisin de l'origine, on a l'égalité*

$$Sg^G_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}, B) = Sg^G_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}', B),$$

où $\boldsymbol{\delta}' = \iota^*_{M_\sharp,M} \circ \iota^*_{M,M_\sharp}(\boldsymbol{\delta})$.

Preuve. Posons $\boldsymbol{\delta} = \iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\delta}_\sharp)$. On utilise la définition de [II] 2.4(1) :

$$(1) \qquad Sg^G_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}, B) = g^G_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}, B) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}; s \neq 1} i_M(G, G'(s))$$

$$transfert(Sg^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M},unip}(\boldsymbol{\delta}, B)).$$

Fixons $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ avec $s \neq 1$. Comme on l'a dit dans la preuve précédente, on a à la fois une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ de G et une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_\sharp(s)$ de $G_\sharp$. On a vu en [II] 1.10 que l'on pouvait choisir comme données auxiliaires pour $\mathbf{G}'(s)$ le groupe $G'(s)_1 = G'(s)$, le tore $C(s)_1 = \{1\}$ et un plongement $\hat{\xi}(s)_1 : \mathcal{G}'(s) \to {}^LG'(s)$ de la forme $(x, w) \mapsto (x\chi(w), w)$ où χ est un cocycle de W_F dans $Z(\hat{M})$. On doit fixer de plus un facteur de transfert $\Delta(s)$. On a une projection $\hat{q}_s : \hat{G}'(s) \to \hat{G}'_\sharp(s)$ qui est équivariante pour les actions galoisiennes. Définissons $\hat{\xi}_\sharp(s)_1 : \mathcal{G}'_\sharp(s) \to {}^LG'_\sharp(s)$ par $\hat{\xi}_\sharp(s)_1(x, w) = (x\hat{q}_s(\chi(w)), w)$. Alors les données $G'_\sharp(s)_1 = G'_\sharp(s)$, $C_\sharp(s)_1 = \{1\}$ et $\hat{\xi}_\sharp(s)_1$ sont des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'_\sharp(s)$. Notons $q_s : G'_\sharp(s) \to G'(s)$ un homomorphisme dual de $\hat{q}_s$. Pour deux éléments assez réguliers $\delta \in G'_\sharp(s)(F)$ et $\gamma \in G_\sharp(F)$ qui se correspondent, posons $\Delta_\sharp(s)(\delta, \gamma) = \Delta(s)(q_s(\delta), q(\gamma))$. On vérifie que $\Delta_\sharp(s)$ est un facteur de transfert.

Remarque. Ce facteur n'est pas tout-à-fait l'image réciproque de $\Delta(s)$. A cause du noyau Ξ, il y a des couples (δ, γ) d'éléments qui ne se correspondent pas mais pour lesquels $q_s(\delta)$ et $q(\gamma)$ se correspondent. Pour un tel couple, on a $\Delta(s)(q_s(\delta), q(\gamma)) \neq 0$ mais $\Delta_\sharp(s)(\delta, \gamma) = 0$.

L'élément $\boldsymbol{\delta}$ appartient au départ à l'espace $D^{st}_{géom}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$. Dans la formule (1), on l'a identifié à un élément de $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}) \otimes Mes(M(F))^*$ en utilisant pour la donnée $\mathbf{M}$ les données auxiliaires "triviales". Une fois fixé s, on utilise les données auxiliaires pour $\mathbf{M}$ déduites par restriction des données auxiliaires pour $\mathbf{G}'(s)$. Alors $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie de nouveau à un élément de $D^{st}_{géom}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, qui n'est pas en général l'élément de départ et que l'on note $\boldsymbol{\delta}(s)$. De la même façon, l'élément $\boldsymbol{\delta}_\sharp$ détermine un élément $\boldsymbol{\delta}_\sharp(s) \in D^{st}_{géom}(M_\sharp(F)) \otimes Mes(M_\sharp(F))^*$. Montrons que

(2) $\iota^*_{M_\sharp,M}(\boldsymbol{\delta}_\sharp(s)) = \boldsymbol{\delta}(s)$.

Pour $m \in M(F)$ assez régulier, on a une égalité $\Delta(s)(m, m) = c\underline{\chi}(m)$, où c est une constante non nulle et $\underline{\chi}$ est le caractère de $M(F)$ déduit de χ (à moins que ce ne soit l'inverse, peu importe). Par construction, $\boldsymbol{\delta}(s)$ se déduit de $\boldsymbol{\delta}$ par un automorphisme de $D^{st}_{géom}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$. Celui-ci envoie l'intégrale orbitale stable associée à un élément $m \in M(F)$ assez régulier sur la même intégrale orbitale stable, multipliée par $c\underline{\chi}(m)$. Le caractère $\underline{\chi}$ est localement constant. Il vaut 1 sur les éléments assez voisins de l'origine. Restreint aux éléments à support proche de l'origine, l'automorphisme est donc l'homothétie de rapport c. D'où $\boldsymbol{\delta}(s) = c\boldsymbol{\delta}$. D'après la définition de $\Delta_\sharp(s)$, on a de même $\boldsymbol{\delta}_\sharp(s) = c\boldsymbol{\delta}_\sharp$ avec la même constante c. L'assertion (2) s'ensuit.

Par définition, on a l'égalité

$$Sg^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M},unip}(\boldsymbol{\delta}, B) = Sg^{G'(s)}_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}(s), B).$$

Puisque $s \neq 1$, on peut appliquer le présent énoncé par récurrence. Grâce à (2), on obtient

$$(3) \qquad Sg^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M},unip}(\boldsymbol{\delta}, B) = \iota^*_{G'_\sharp(s),G'(s)}(Sg^{G'_\sharp(s)}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp(s), B)).$$

Montrons que

(4) on a l'égalité $transfert \circ \iota^*_{G'_\sharp(s),G'(s)} = \iota^*_{G_\sharp,G} \circ transfert$.

Rappelons que nos applications $\iota^*_{G'_\sharp(s),G'(s)}$ et $\iota^*_{G_\sharp,G}$ sont définies au voisinage de l'unité. Considérons d'abord un élément $t'_\sharp \in G'_\sharp(s;F)$ semi-simple assez régulier et proche de 1. Soit $t_\sharp \in G_\sharp(F)$ un élément qui lui correspond. On note $T'_\sharp$ et $T_\sharp$ leurs commutants dans $G'_\sharp(s)$ et $G_\sharp$. On note $t' = q_s(t'_\sharp)$ et $t = q(t_\sharp)$ les images de $t'_\sharp$ et $t_\sharp$ dans $G'(s;F)$ et $G(F)$. On note T' et T les commutants de t' et t dans $G'(s)$ et G. Les tores $T'_\sharp$ et $T_\sharp$ sont isomorphes, ainsi que les tores T' et T. Fixons une mesure de Haar sur $T(F)$ que l'on transporte en une mesure sur $T'(F)$. On fixe aussi des mesures de Haar sur $G(F)$ et $G'(s;F)$. On en déduit comme en 3.1 des mesures sur $T_\sharp(F)$, $T'_\sharp(F)$, $G_\sharp(F)$ et $G'_\sharp(s)(F)$. Toutes ces mesures permettent de définir les intégrales orbitales qui interviennnent ci-dessous. En particulier, on a une intégrale orbitale stable $S^{G'_\sharp(s)}(t'_\sharp, .)$. Le lemme 3.5 montre que son image par $\iota^*_{G'_\sharp(s),G'(s)}$ est $S^{G'(s)}(t', .)$. Utilisons les notations introduites dans la preuve du lemme 3.5 pour les éléments $t_\sharp$ et t. L'image par transfert de $S^{G'(s)}(t', .)$ est

$$(5) \qquad \sum_{x \in \dot{\mathcal{X}}} \Delta(s)(t', x) I^G(x, \omega, .).$$

D'autre part, l'image par transfert de $S^{G'_\sharp(s)}(t'_\sharp, .)$ est

$$\sum_{x_\sharp \in \dot{\mathcal{X}}_\sharp} \Delta_\sharp(s)(t'_\sharp, x_\sharp) I^{G_\sharp}(x_\sharp, .),$$

ou encore

$$\sum_{x \in \dot{\mathcal{X}}} \sum_{x_\sharp \in \dot{\mathcal{X}}_x} \Delta_\sharp(s)(t'_\sharp, x_\sharp) I^{G_\sharp}(x_\sharp, .).$$

En utilisant le lemme 3.1, l'image de cette expression par $\iota^*_{G_\sharp,G}$ est

$$\sum_{x \in \dot{\mathcal{X}}} \sum_{x_\sharp \in \dot{\mathcal{X}}_x} \Delta_\sharp(s)(t'_\sharp, x_\sharp) c^{-1}_{T_{q(x_\sharp)}} I^G(q(x_\sharp), \omega, .).$$

Pour $x_\sharp$ intervenant ci-dessus, on a $\Delta_\sharp(s)(t'_\sharp, x_\sharp) = \Delta(s)(t, q(x_\sharp))$ par définition. Puisque la fonction

$$y \mapsto \Delta(s)(t, y) c^{-1}_{T_y} I^G(y, \omega, .)$$

est invariante par conjugaison et puisque $q(x_\sharp)$ est conjugué à x, on peut remplacer $q(x_\sharp)$ par x dans l'expression ci-dessus. On obtient

$$\sum_{x \in \dot{\mathcal{X}}} c^{-1}_{T_x} |\dot{\mathcal{X}}_x| \Delta(s)(t, x) I^G(x, \omega, .).$$

On a vu dans la preuve du lemme 3.5 que $c_{T_x} = |\dot{\mathcal{X}}_x|$. Alors l'expression ci-dessus devient (5). Cela prouve l'égalité (4) sur les distributions stables à support assez régulier. Elle se généralise sans hypothèse de support par bidualité. En effet, puisque le transfert d'une fonction est déterminé par ses intégrales orbitales stables assez régulières, cela implique

que la relation duale à (4) vaut pour les fonctions. Par dualité, cela entraîne l'assertion (4) sans restriction sur le support des distributions. Cela prouve (4).

En utilisant (3), (4) et la proposition 3.4, on transforme l'expression (1) sous la forme suivante. Le terme $Sg_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}, B)$ est l'image par $\iota^*_{G_\sharp,G}$ de

$$(5) \qquad g^{G_\sharp}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B) - \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_M(G, G'(s)) transfert(Sg^{G'_\sharp(s)}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp(s), B)).$$

Comme ci-dessus, on a

$$transfert(Sg^{G'_\sharp(s)}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp(s), B)) = transfert(Sg^{\mathbf{G}'_\sharp(s)}_{\mathbf{M}_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B)).$$

Les mêmes calculs que dans la preuve précédente transforment (5) en

$$g^{G_\sharp}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B) - \sum_{s\in Z(\hat{M}_\sharp)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_\sharp)^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{M_\sharp}(G_\sharp, G'_\sharp(s)) transfert(Sg^{\mathbf{G}'_\sharp(s)}_{\mathbf{M}_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B)).$$

Ou encore, par une formule similaire à (1), en $Sg^{G_\sharp}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B)$. On a ainsi obtenu l'égalité

$$Sg^G_{M,unip}(\boldsymbol{\delta}, B) = \iota^*_{G_\sharp,G}(Sg^{G_\sharp}_{M_\sharp,unip}(\boldsymbol{\delta}_\sharp, B)).$$

C'est ce qu'affirme le (i) de l'énoncé. L'assertion (ii) s'en déduit comme en 3.4. □

4 Germes et descente d'Harish-Chandra

4.1 Formule de descente pour les termes $\rho^{\tilde{G}}_J$

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et η un élément semi-simple de $\tilde{M}(F)$. Il y a une application naturelle $Z(\hat{G}) \to Z(\hat{G}_\eta)$, équivariante pour les actions galoisiennes. La classe de cocycle $\mathbf{a}$ détermine par composition avec cette application une classe dans $H^1(\Gamma_F; Z(\hat{G}_\eta))$, que nous noterons encore $\mathbf{a}$ pour simplifier. Le caractère de $G_\eta(F)$ qui s'en déduit est la restriction à ce groupe du caractère ω de $G(F)$ déduit du $\mathbf{a}$ initial. En considérant G_η comme un espace tordu sur lui-même, le triplet $(G_\eta, G_\eta, \mathbf{a})$ vérifie les mêmes hypothèses que notre triplet initial mais est "sans torsion".

Considérons un voisinage ouvert U_η de l'origine dans $G_\eta(F)$ qui est invariant par l'action de $Z_G(\eta; F)$, qui est tel que, pour $x \in G_\eta(F)$, x appartient à U_η si et seulement si la partie semi-simple de x appartient à U_η et qui est "assez petit". La descente d'Harish-Chandra fournit des applications transposées

$$desc^{\tilde{G}}_\eta : I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F)) \to I(U_\eta, \omega) \otimes Mes(G_\eta(F)),$$

$$desc^{\tilde{G},*}_\eta : D_{géom}(U_\eta, \omega) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \to D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))^*.$$

Rappelons que la donnée d'un élément $x \in U_\eta$ et d'une mesure dh sur $(G_\eta)_x(F)$ définit un élément $\mathbf{x} \in D_{géom}(U_\eta, \omega) \otimes Mes(G_\eta(F))^*$. C'est l'intégrale orbitale qui, à $f \in C^\infty_c(U_\eta)$ et à une mesure dg sur $G_\eta(F)$, associe l'intégrale

$$I^{G_\eta}(\mathbf{x}, \omega, f \otimes dg) = D^{G_\eta}(x)^{1/2} \int_{(G_\eta)_x(F)\backslash G_\eta(F)} f(y^{-1}xy)\omega(y)\, dy,$$

où dy est déduite de dg et dh. Si x est assez proche de 1, on a $(G_\eta)_x = G_{x\eta}$ et le couple $(x\eta, dh)$ définit de même un élément de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$. Alors $desc_\eta^{\tilde{G},*}$ envoie l'élément de $D_{géom}(U_\eta,\omega)\otimes Mes(G_\eta(F))^*$ défini par (x,dh) sur l'élément de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$ défini par $(x\eta, dh)$. Pour simplifier les notations, on oubliera le voisinage U_η et on notera

$$desc_\eta^{\tilde{G}} : I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F)) \to I(G_\eta(F),\omega)\otimes Mes(G_\eta(F))$$

et

$$desc_\eta^{\tilde{G},*} : D_{géom}(G_\eta(F),\omega)\otimes Mes(G_\eta(F))^* \to D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$$

les applications ci-dessus. On considérera toutefois que, pour $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, les intégrales orbitales de $desc_\eta^{\tilde{G}}(\mathbf{f})$ n'ont un sens que dans un voisinage de l'origine et que, de même, pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(G_\eta(F),\omega)$, $desc_\eta^{\tilde{G},*}(\boldsymbol{\gamma})$ n'est défini que si le support de $\boldsymbol{\gamma}$ est assez voisin de l'origine.

On note $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison de η dans $\tilde{M}(F)$ et $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ sa classe de conjugaison dans $\tilde{G}(F)$. Rappelons que l'on note $D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)$ le sous-espace de $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)$ engendré par les intégrales orbitales associées à des éléments $\gamma\in\tilde{G}(F)$ dont les parties semi-simples appartiennent à $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$. Il est clair que $desc_\eta^{\tilde{G},*}$ envoie $D_{unip}(G_\eta(F),\omega)\otimes Mes(G_\eta(F))^*$ dans (et même sur) $D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)\otimes Mes(G(F))^*$.

On suppose η elliptique dans $\tilde{M}(F)$, c'est-à-dire $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$. De cette égalité se déduit une injection $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})\to\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$. Rappelons que les ensembles $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}$, resp. $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, sont des classes d'équivalence d'ensembles $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ formés d'éléments linéairement indépendants de $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})$, resp. $\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$, tels que $n = a_{M_\eta} - a_{G_\eta}$, resp. $n = a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$. Deux ensembles sont équivalents s'ils engendrent le même $\mathbb{Z}$-module. L'égalité $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$ équivaut à $a_{M_\eta} = a_{\tilde{M}}$. Si $A_{\tilde{G}}\neq A_{G_\eta}$, il n'y a pas de correspondance entre les ensembles $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}$, resp. $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Mais, si l'on suppose $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$, de l'injection précédente se déduit une injection $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}\to\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ que l'on note $J'\mapsto J$. Pour de tels $J'\mapsto J$, l'espace $U_{J'}$ associé à J' est égal à l'espace U_J associé à J.

Lemme. *Soient $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, $\boldsymbol{\gamma}'\in D_{unip}(M_\eta(F),\omega)\otimes Mes(M_\eta(F))^*$ et $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1. Posons $\boldsymbol{\gamma} = desc_\eta^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}')$. On a l'égalité*

$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a) = \begin{cases} desc_\eta^{\tilde{M},*}(\rho_{J'}^{G_\eta}(\boldsymbol{\gamma}',a)), & \text{si } A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta} \text{ et } J \text{ provient de } J'\in\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}, \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Preuve. Par linéarité, on peut supposer que $\boldsymbol{\gamma}'$ est une intégrale orbitale associée à un élément unipotent $u\in M_\eta(F)$. Alors $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale associé à l'élément $u\eta\in\tilde{M}(F)$. On applique la formule de définition [II] 3.2(5) :

$$(1)\qquad \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a) = \sum_{\underline{\alpha}\in J} m(\underline{\alpha},u\eta)sgn(\underline{\alpha},u\eta)u_{\underline{\alpha}}(a)\boldsymbol{\gamma}.$$

Considérons $\underline{\alpha} = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}\in J$. Pour tout $i = 1,...,n$, fixons une "coracine" $\check{\alpha}_i$ que nous normalisons par la condition $<\alpha_i,\check{\alpha}_i>=1$ (sic !). Notons m le volume du quotient

de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}[J]}$ par le $\mathbb{Z}$-module engendré par ces $\check{\alpha}_i$, pour $i = 1, ..., n$. Le terme $\rho^{\tilde{G}}(\alpha_i, u\eta)$ défini en [II] 1.5 est proportionnel à $\check{\alpha}_i$. Il résulte des définitions que

$$m(\underline{\alpha}, u\eta)sgn(\underline{\alpha}, u\eta) = m \prod_{i=1,...,n} < \alpha_i, \rho^{\tilde{G}}(\alpha_i, u\eta) > .$$

Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Parce que $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$, la définition [II] 1.5 entraîne que $\rho^{\tilde{G}}(\alpha_i, u\eta) = 0$ si α_i ne provient pas de $\Sigma_{M_\eta}^{G_\eta}(A_{M_\eta})$, tandis que

$$\rho^{\tilde{G}}(\alpha_i, u\eta) = \rho^{G_\eta}(\alpha_i', u)$$

si α_i est l'image de $\alpha_i' \in \Sigma_{M_\eta}^{G_\eta}(A_{M_\eta})$. Si $A_{\tilde{G}} \neq A_{G_\eta}$ ou si $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$ mais J ne provient pas de $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}$, il n'y a aucun élément $\underline{\alpha} \in J$ qui vérifie cette condition pour tout i et on obtient $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = 0$. Supposons désormais que $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$ et que J est l'image de $J' \in \mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}$. Les $\underline{\alpha}$ qui contribuent à (1) sont exactement les images d'éléments $\underline{\alpha}' \in J'$. Si $\underline{\alpha}$ provient de $\underline{\alpha}'$, les formules ci-dessus montrent que

$$m(\underline{\alpha}, u\eta)sgn(\underline{\alpha}, u\eta) = m(\underline{\alpha}', u)sgn(\underline{\alpha}', u).$$

On a aussi $u_{\underline{\alpha}}(a) = u_{\underline{\alpha}'}(a)$. On obtient

$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = \sum_{\underline{\alpha}' \in J'} m(\underline{\alpha}', u)sgn(\underline{\alpha}', u)u_{\underline{\alpha}'}(a)\boldsymbol{\gamma}.$$

On a une formule analogue à (1) :

$$\rho_{J'}^{G_\eta}(\boldsymbol{\gamma}', a) = \sum_{\underline{\alpha}' \in J'} m(\underline{\alpha}', u)sgn(\underline{\alpha}', u)u_{\underline{\alpha}'}(a)\boldsymbol{\gamma}'.$$

Puisque $\boldsymbol{\gamma} = desc_\eta^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}')$, on en déduit

$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = desc_\eta^{\tilde{M},*}(\rho_{J'}^{G_\eta}(\boldsymbol{\gamma}', a)),$$

ce qui prouve le lemme. $\square$

Variante. Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en [II] 1.9. Ce système détermine une fonction B_η sur le système de racines de G_η, que l'on notera $B_{\mathcal{O}}$ pour simplifier. Ainsi on dispose des ensembles $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ et $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}(B_\eta)$. On a une proposition similaire relative à ces ensembles. En fait, sa conclusion se simplifie car, avec la définition que l'on a donnée de l'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, l'injection $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}(B_{\mathcal{O}}) \to \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ est bijective. L'existence d'un $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ entraîne donc que $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$ et que J provient d'un $J' \in \mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}(B_{\mathcal{O}})$.

4.2 Descente des germes d'intégrales orbitales pondérées

On conserve les mêmes données. On suppose toujours que η est elliptique dans $\tilde{M}$.

Proposition. *On a l'égalité*

$$g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}} \circ desc_\eta^{\tilde{M},*} = \begin{cases} desc_\eta^{\tilde{G},*} \circ g_{M_\eta,unip}^{G_\eta}, & si\ A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}, \\ 0, & sinon. \end{cases} .$$

Les deux termes sont des germes d'applications linéaires définies sur $D_{géom,G_\eta-équi}(M_\eta(F),\omega)$ au voisinage de l'élément neutre de $M_\eta(F)$. L'assertion n'est qu'une reformulation du lemme 9.2 de [A2]. Un examen de la preuve de ce lemme montre que l'hypothèse de régularité figurant dans l'énoncé d'Arthur ne sert pas. D'autre part, on a modifié les définitions d'Arthur en [II] 1.5 et on doit montrer que cela n'influe pas sur la preuve. On se rend compte qu'il suffit de prouver que le lemme 8.2 de [A2] reste vrai avec notre définition des fonctions $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,a)$. Précisément, soit $x\in M_\eta(F)$ assez proche de 1. Soit $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$. Posons $P_\eta=P\cap G_\eta$. On doit montrer que, pour $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$ et pour $a\in A_{\tilde{M}}(F)\simeq A_{M_\eta}(F)$ en position générale et assez proche de 1, on a l'égalité

$$(1)\qquad r_{\tilde{P}}(x\eta,a;\lambda)=r_{P_\eta}(x,a;\lambda).$$

Cela résulte de notre définition : si on note t la partie semi-simple de x et u sa partie unipotente, les deux fonctions se définissent à l'aide des mêmes termes $\rho^{G_{t\eta}}(\beta,u)$, pour $\beta\in\Sigma^{G_{t\eta}}(A_{M_\eta})$. $\square$

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en [II] 1.9. On a

(2) soit $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom,G_\eta-équi}(M_\eta(F),\omega)\otimes Mes(M_\eta(F))^*$ assez proche de l'origine ; alors on a l'égalité

$$g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(desc_\eta^{\tilde{M},*}(\boldsymbol{\gamma}),B)=\begin{cases} desc_\eta^{\tilde{G},*}(g_{M_\eta,unip}^{G_\eta}(\boldsymbol{\gamma},B_\eta)), & \text{si } A_{\tilde{G}}=A_{G_\eta},\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

La preuve est la même. Il y a toutefois une subtilité. Il ne doit intervenir dans la preuve que des éléments $x\eta$, avec $x\in M_\eta(F)$, pour lesquels on a l'analogue de (1), à savoir

$$(2)\qquad r_{\tilde{P}}(x\eta,a,B;\lambda)=r_{P_\eta}(x,a,B_\eta;\lambda).$$

Avec les notations plus haut, la fonction de gauche est définie à l'aide des termes $\rho^{G_{t\eta}}(\beta,u)$ pour $\beta\in\Sigma^{G_{t\eta}}(A_{M_\eta},B_{t\eta})$ tandis que celle de droite est définie à l'aide des termes $\rho^{G_{t\eta}}(\beta,u)$ pour $\beta\in\Sigma^{G_{t\eta}}(A_{M_\eta},B_\eta)$. Pour x quelconque, il n'y a guère de raison pour que ces termes soient égaux. Mais il n'intervient que des x unipotents, pour lesquels $t=1$ et les termes coïncident, et des x qui sont G_η-équisinguliers pour lesquels les termes coïncident aussi car les deux ensembles de racines sont vides.

4.3 Formule de descente pour les termes σ_J

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure, B un système de fonctions comme en [II] 1.9, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et η un élément semi-simple de $\tilde{M}(F)$. On note $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(F)$ et $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ sa classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$.

La descente d'Harish-Chandra s'adapte aux distributions stables, cf. [I] 4.8. Pour définir correctement les applications de descente, il faudrait introduire comme en 4.1 un voisinage convenable U_η de l'origine dans $G_\eta(F)$. Pour simplifier la notation, on considère comme dans ce paragraphe que l'on a des applications transposées

$$desc_\eta^{st,\tilde{G}}:SI(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))\to SI(G_\eta(F))\otimes Mes(G_\eta(F)),$$

$$desc_\eta^{st,\tilde{G},*} : D^{st}_{géom}(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F))^* \to D^{st}_{géom}(G(F)) \otimes Mes(G(F))^*.$$

Mais, pour $\mathbf{f} \in SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, les intégrales orbitales stables de $desc_\eta^{st,\tilde{G}}(\mathbf{f})$ n'ont de sens que que dans un voisinage de l'origine. De même, pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F))^*$, $desc_\eta^{st,\tilde{G},*}(\boldsymbol{\delta})$ n'est défini que si le support de $\boldsymbol{\delta}$ est assez voisin de l'origine. En particulier, $desc_\eta^{st,\tilde{G},*}$ se restreint en une surjection de $D^{st}_{unip}(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F))^*$ sur $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}}) \otimes Mes(G(F))^*$.

Attention. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F)) & \overset{desc_\eta^{\tilde{G}}}{\to} & I(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F)) & \overset{desc_\eta^{st,\tilde{G}}}{\to} & SI(G_\eta(F)) \otimes Mes(G_\eta(F)) \end{array}$$

n'est pas commutatif, cf. [I] 5.10.

On suppose η elliptique dans $\tilde{M}(F)$. Le groupe dual $\hat{M}_\eta$ s'identifie à un sous-groupe de $\hat{M}$. Dualement, l'ellipticité de η entraîne que $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$ est un sous-groupe d'indice fini de $Z(\hat{M}_\eta)^{\Gamma_F}$. Dans le cas où $A_G = A_{G_\eta}$, le groupe $Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ est aussi un sous-groupe d'indice fini de $Z(\hat{G}_\eta)^{\Gamma_F}$. L'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_\eta)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_\eta)^{\Gamma_F}$$

est surjectif et son noyau est fini. On note $e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta)$ l'inverse du nombre d'éléments de ce noyau.

Rappelons que l'on a défini en 4.1 une bijection de $\mathcal{J}_{M_\eta}^{G_\eta}(B_\mathcal{O})$ dans $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_\mathcal{O})$. Pour simplifier, on identifie ces deux ensembles. L'hypothèse que $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_\mathcal{O})$ est non vide implique automatiquement que $A_G = A_{G_\eta}$.

Proposition (à prouver). *Soient $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_\mathcal{O})$, $\boldsymbol{\delta}' \in D^{st}_{unip}(M_\eta(F), \omega) \otimes Mes(M_\eta(F))^*$ et $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1. Posons $\boldsymbol{\delta} = desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\boldsymbol{\delta}')$. On a l'égalité*

$$\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a) = e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\sigma_J^{G_\eta}(\boldsymbol{\delta}', a)).$$

4.4 Formule de descente pour les germes des intégrales orbitales pondérées stables

On conserve les mêmes hypothèses. On suppose η elliptique dans $\tilde{M}(F)$.

Proposition (à prouver). *Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,G_\eta-équi}(M_\eta(F)) \otimes Mes(M_\eta(F))^*$ à support assez proche de l'origine. Alors on a l'égalité*

$$Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\boldsymbol{\delta}), B) = \begin{cases} e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) desc_\eta^{st,\tilde{G},*}(Sg_{M_\eta,unip}^{G_\eta}(\boldsymbol{\delta}, B_\eta)), & si\ A_G = A_{G_\eta}, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

5 Descente et endoscopie

5.1 Descente de données endoscopiques

Soient $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quelconque et $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante.

D'après [I] paragraphe 3, on peut réaliser les objets duaux de la façon suivante. On fixe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$. On note $\hat{\theta}$ l'automorphisme dual de θ^* qui conserve cette paire. On modifie l'action galoisienne de sorte que $\hat{\mathcal{E}}$ soit stable par cette action. On suppose $\tilde{s} = s\hat{\theta}$ avec $s \in \hat{T}$. On munit $\hat{G}'$ d'une paire de Borel épinglée conservée par l'action galoisienne sur ce groupe, dont la paire de Borel sous-jacente est $(\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$.

Fixons un diagramme

$$(\epsilon, B, T', B, T, \eta)$$

cf. [I] 1.10. Le terme η est un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$ et ϵ est un élément semi-simple de $\tilde{G}'(F)$. On suppose que G'_ϵ est quasi-déployé. Rappelons que l'homomorphisme $\xi : T \to T'$ déduit du diagramme fixé se déduit de l'homomorphisme composé

$$X_*(T) \simeq X^*(\hat{T}) \to X^*(\hat{T}^{\hat{\theta},0}) \simeq X_*(T').$$

Posons $(\bar{B}, \bar{T}) = (B \cap G_\eta, T \cap G_\eta)$, complétons cette paire en une paire de Borel épinglée de G_η et introduisons l'action galoisienne quasi-déployée $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}}$ sur G_η qui la conserve, cf. [I] 1.2. Elle est de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}} = ad_{\bar{u}(\sigma)} \circ \sigma_G$, où $\bar{u}(\sigma) \in G_{\eta,SC}$.On note $\bar{G}$ le groupe G_η muni de cette action galoisienne quasi-déployée. Complétons de même la paire de Borel (B, T) de G en une paire de Borel épinglée et introduisons l'action galoisienne quasi-déployée sur G qui conserve celle-ci. Elle est de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{G^*} = ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G$, où $u(\sigma) \in G_{SC}$. On a $\sigma_{\bar{G}} = ad_{\bar{u}(\sigma)u(\sigma)^{-1}} \circ \sigma_{G^*}$. Puisque les deux actions intervenant ici conservent T, l'élément $\bar{u}(\sigma)u(\sigma)^{-1}$ normalise T. Il s'envoie sur un élément du groupe de Weyl W que l'on note $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$. En utilisant le fait que ad_η conserve (B, T), on vérifie que $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ est fixe par θ, cf. [I] 1.3(3). On peut identifier un tore maximal $\hat{\bar{T}}$ du groupe $\hat{\bar{G}}$ a $\hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$, muni de l'action $\sigma \mapsto \omega_{\bar{G}}(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ (en notant encore σ_{G^*} l'action sur le groupe $\hat{G}$).

Dans [W1] 3.5, on a défini une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$ associé à la donnée $\mathbf{G}'$ et au diagramme $(\epsilon, B, T', B, T, \eta)$. Notons-la $\bar{\mathbf{G}}' = (\bar{G}', \bar{\mathcal{G}}', \bar{s})$. Rappelons le point clé de sa définition. Par la suite d'homomorphismes

$$\hat{T} \to \hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T}) \simeq \hat{\bar{T}} \to \hat{\bar{T}}_{ad} = \hat{\bar{T}}/Z(\hat{\bar{G}}),$$

l'élément s s'envoie sur un élément $\bar{s} \in \hat{\bar{T}}_{ad}$. Le groupe $\hat{\bar{G}}'$ est la composante neutre du commutant de $\bar{s}$ dans $\hat{\bar{G}}_{AD}$. L'action galoisienne sur $\hat{\bar{G}}'$ est composée de celle sur $\hat{\bar{G}}_{AD}$ et d'un cocycle à valeurs dans ce groupe. On renvoie à [W1] 3.5 pour une description plus complète. Fixons une paire de Borel $(B^\flat, T^\flat)$ de G'_ϵ définie sur F et un élément $g' \in G'_{\epsilon,SC}$ tel que $ad_{g'}$ envoie cette paire sur $(B' \cap M'_\epsilon, T')$. Fixons une paire de Borel $(\bar{B}', \bar{T}')$ de $\bar{G}'$ définie sur F. On note $T^\flat_{sc}$, resp. $\bar{T}'_{sc}$, l'image réciproque de $T^\flat$ dans $G'_{\epsilon,SC}$, resp. l'image réciproque de $\bar{T}'$ dans $\bar{G}'_{SC}$. On a la suite d'homomorphismes

$$\bar{T}'_{sc} \times Z(\bar{G}')^0 \times Z(\bar{G})^0 \to \bar{T}' \times Z(\bar{G})^0,$$

$$\bar{T}' \times Z(\bar{G})^0 \to \bar{T}_{sc} \times Z(\bar{G})^0,$$

celui-ci provenant du fait que $\bar{\mathbf{G}}'$ est une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$,

$$\bar{T}_{sc} \times Z(\bar{G})^0 \to \bar{T},$$

$$\bar{T} \xrightarrow{\xi} T' \xrightarrow{ad_{g'}^{-1}} T^\flat,$$

et l'homomorphisme en sens inverse

$$T^\flat \leftarrow T^\flat_{sc} \times Z(G'_\epsilon)^0.$$

Par composition, on en déduit un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$j : \bar{\mathfrak{t}}'_{sc} \oplus \mathfrak{z}(\bar{G}') \oplus \mathfrak{z}(\bar{G}) \simeq \mathfrak{t}^\flat_{sc} \oplus \mathfrak{z}(G'_\epsilon).$$

On a vu en [W1] 3.5 que cet isomorphisme était équivariant pour les actions galoisiennes et se restreignait en un isomorphisme de $\bar{\mathfrak{t}}'_{sc}$ sur $\mathfrak{t}^\flat_{sc}$ et un isomorphisme

$$(1) \qquad \mathfrak{z}(\bar{G}) \oplus \mathfrak{z}(\bar{G}') \simeq \mathfrak{z}(G'_\epsilon).$$

On note $j_* : X_*(\bar{T}'_{sc}) \otimes \mathbb{Q} \to X_*(T^\flat_{sc}) \otimes \mathbb{Q}$ l'isomorphisme sous-jacent à la restriction de l'homomorphisme j à $\bar{\mathfrak{t}}'_{sc}$. Le triplet $(\bar{G}'_{SC}, G'_{\epsilon,SC}, j_*)$ est un triplet endoscopique non standard, cf. [W1] 1.7.

Cas particulier. Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Alors les triplets endoscopiques non standard sont triviaux, c'est-à-dire que $\bar{G}'_{SC} = G'_{\epsilon,SC}$. En fait, dans ce cas, on n'a pas besoin de passer au revêtements simplement connexes des groupes dérivés (ce passage sert en général à trivialiser le caractère ω). Le groupe G'_ϵ est celui d'une donnée endoscopique de $\bar{G}$.

Fixons des données auxiliaires $G'_1, ..., \Delta_1$ pour la donnée $\mathbf{G}'$. On fixe une image réciproque ϵ_1 de ϵ dans $\tilde{G}'_1(F)$ ainsi qu'une décomposition d'algèbres de Lie

$$(2) \qquad \mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{g}'.$$

Notons $\mathcal{Y}$ l'ensemble des $y \in G$ tels que $y\sigma(y)^{-1} \in I_\eta$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, où $I_\eta = Z(G)^\theta G_\eta$. Pour tout $y \in \mathcal{Y}$, on pose $\eta[y] = y^{-1}\eta y$. Notons pour plus de clarté $\psi : G_\eta \to \bar{G}$ l'identité, qui est un torseur pour les actions galoisiennes définies sur ces deux groupes. On a défini la donnée endoscopique $\bar{\mathbf{G}}'$ de $\bar{G}_{SC}$. L'application $\psi \circ ad_y : G_{\eta[y]} \to \bar{G}$ est un torseur intérieur grâce auquel $\bar{\mathbf{G}}'$ apparaît aussi comme une donnée endoscopique pour $G_{\eta[y],SC}$. Supposons que cette donnée soit relevante. Il s'agit ici d'endoscopie non tordue. De plus, le groupe $G_{\eta[y],SC}$ est simplement connexe. On sait qu'alors on n'a pas besoin de données auxiliaires, on peut définir un facteur de transfert sur $\bar{G}'(F) \times G_{\eta[y],SC}(F)$. On fixe un tel facteur de transfert $\Delta(y)$. Soit $Y \in \mathfrak{g}'_\epsilon(F)$ en position générale et assez proche de 0, que l'on identifie par (2) à un élément de $\mathfrak{g}'_{1,\epsilon_1}(F)$. On le décompose en $Y_{sc} + Z$ avec $Y_{sc} \in \mathfrak{g}'_{\epsilon,SC}(F)$ et $Z \in \mathfrak{z}(G'_\epsilon; F)$. Via l'isomorphisme (1), on décompose Z en $Z_1 + Z_2$, avec $Z_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G}; F)$ et $Z_2 \in \mathfrak{z}(\bar{G}'; F)$. Par endoscopie non standard, Y_{sc} détermine une classe de conjugaison stable dans $\bar{\mathfrak{g}}'_{SC}(F)$. Fixons $\bar{Y}_{sc}$ dans cette classe. Posons $\bar{Y} = \bar{Y}_{sc} + Z_2$. Par endoscopie ordinaire, il peut correspondre ou pas à $\bar{Y}$ une classe de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{\eta[y],SC}(F)$. Supposons que cette classe existe et fixons un élément $X[y]_{sc}$ de cette classe. Puisque $\bar{G}$ est une forme intérieure de $G_{\eta[y]}$, les espaces $\mathfrak{z}(\bar{G})$ et $\mathfrak{z}(G_{\eta[y]})$ s'identifient et on peut considérer Z_1 comme un élément de $\mathfrak{z}(G_{\eta[y]}; F)$. On pose $X[y] = X[y]_{sc} + Z_1$. Rappelons le théorème 3.9 de [W1] : il existe $d(y) \in \mathbb{C}^\times$ tel que, pour des données comme ci-dessus, on ait l'égalité

$$(3) \qquad d(y)\Delta(y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc})) = \Delta_1(exp(Y)\epsilon_1, exp(X[y])\eta[y])$$

pourvu que X et Y soient assez proches de 0.

5.2 Transfert des fonctions et des distributions

Fixons des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant, auxquelles on imposera quelques conditions de compatibilité, cf. remarque (5) ci-dessous. Soient $f \in I(\tilde{G}(F), \omega)$ et $Y \in \mathfrak{g}'_\epsilon(F)$ comme en 5.1. On utilise pour Y les définitions de ce paragraphe. On définit

- le transfert f' de f, qui est une fonction sur $\tilde{G}'_1(F)$;

- l'image f'_{ϵ_1} de $f^{\tilde{G}'_1}$ par l'application de descente $desc_{\epsilon_1}^{st,\tilde{G}'_1}$; c'est une fonction sur $G'_{1,\epsilon_1}(F)$;

- l'image $f'(Z)_{sc}$ de la fonction $x \mapsto f'_{\epsilon_1}(exp(Z)x)$ par l'application $\iota_{G'_{\epsilon,SC},G'_{1,\epsilon_1}}$; c'est une fonction sur $G'_{\epsilon,SC}(F)$ (on remarque que $G'_{\epsilon,SC}$ est aussi le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G'_{1,ϵ_1}).

Soit $y \in \mathcal{Y}$. Définissons

- l'image $f[y]$ de f par l'application de descente $desc_{\eta[y]}^{\tilde{G}}$; c'est une fonction sur $G_{\eta[y]}(F)$;

- l'image $f[y, Z_1]_{sc}$ de la fonction $x \mapsto f[y](exp(Z_1)x)$ par l'application $\iota_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}}$; c'est une fonction sur $G_{\eta[y],SC}(F)$;

- le transfert $\bar{f}[y, Z_1]$ de $f[y, Z_1]_{sc}$; c'est une fonction sur $\bar{G}'(F)$ qui est nulle si $\bar{G}'$ n'est pas relevante pour $G_{\eta[y],SC}$;

- l'image $\bar{f}[y, Z]_{sc}$ de la fonction $x \mapsto \bar{f}[y, Z_1](exp(Z_2)x)$ par l'application $\iota_{\bar{G}'_{SC},\bar{G}'}$; c'est une fonction sur $\bar{G}'_{SC}(F)$.

On pose

$$c[y] = [I_{\eta[y]}(F) : G_{\eta[y]}(F)]^{-1}.$$

Fixons un ensemble de représentants $\dot{\mathcal{Y}}$ de l'ensemble de doubles classes $I_\eta \backslash \mathcal{Y}/G(F)$. Avec les notations ci-dessus, le lemme 3.11 de [W1] affirme l'égalité

$$S_{\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}(exp(Y)\epsilon_1, f^{\tilde{G}'_1}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(y)S^{\bar{G}'}(\bar{Y}, \bar{f}[y, Z_1])$$

pourvu que Y soit assez proche de 0, cette notion étant indépendante de f. Le terme $d(y)$ n'a été défini que dans le cas où $\bar{G}'$ est relevante pour $G_{\eta[y],SC}$. Par convention, il est nul dans le cas contraire (la fonction $\bar{f}[y, Z_1]$ est nulle dans ce cas). D'après les définitions, on a

$$S_{\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}(exp(Y)\epsilon_1, f^{\tilde{G}'_1}) = S^{G'_{\epsilon,SC}}(exp(Y_{sc}), f'(Z)_{sc}),$$

$$S^{\bar{G}'}(\bar{Y}, \bar{f}[y, Z_1]) = S^{\bar{G}'_{SC}}(exp(\bar{Y}_{sc}), \bar{f}[y, Z]_{sc}).$$

L'égalité précédente devient

$$(1) \qquad S^{G'_{\epsilon,SC}}(exp(Y_{sc}), f'(Z)_{sc}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(y)S^{\bar{G}'_{SC}}(exp(\bar{Y}_{sc}), \bar{f}[y, Z]_{sc}).$$

Remarquons que les termes Y_{sc} et Z jouent le rôle de variables indépendantes. Les définitions des fonctions $f'(Z)_{sc}$ et $\bar{f}[y, Z]_{sc}$ conservent un sens pour $Z = 0$. On note f'_{sc} et $\bar{f}[y]_{sc}$ leurs valeurs en $Z = 0$. On obtient l'égalité

$$(2) \qquad S^{G'_{\epsilon,SC}}(exp(Y_{sc}), f'_{sc}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(y)S^{\bar{G}'_{SC}}(exp(\bar{Y}_{sc}), \bar{f}[y]_{sc}).$$

Remarques. (3) Dans [W1], on n'avait pas de constantes $d(y)$ simplement parce qu'on avait normalisé les facteurs de transfert de sorte que ces constantes vaillent 1.

(4) La définition de la fonction $f[y]_{sc}$ dans [W1] est plus directe que celle ci-dessus. Elle consiste à remplacer l'application $\iota_{G_{\eta[y]},SC,G_{\eta[y]}}$ utilisée ici par la simple image réciproque. C'est-à-dire que l'on ne moyenne pas cette image réciproque par l'action adjointe de $G_{\eta[y]}(F)$. Mais la formule 5.1(3) implique que le facteur de transfert $\Delta(y)$ est ω-équivariant par cette action. Il en résulte aisément que les deux définitions possibles de $f[y]_{sc}$ donnent le même transfert $\bar{f}[y]$.

(5) La formule (2) nécessite des compatibilités entre les mesures choisies. Notons $T_{Y_{sc}}$ le commmutant de Y_{sc} dans $G'_{\epsilon,SC}$ et $T_{\bar{Y}_{sc}}$ celui de $\bar{Y}_{sc}$ dans $\bar{G}'_{SC}$. Pour définir les intégrales orbitales stables, on doit fixer des mesures sur $T_{Y_{sc}}(F)$ et $T_{\bar{Y}_{sc}}$. Via l'exponentielle, il revient au même de fixer des mesures sur $\mathfrak{t}_{Y_{sc}}(F)$ et $\mathfrak{t}_{\bar{Y}_{sc}}(F)$. Or on est dans une situation d'endoscopie non standard et ces algèbres de Lie sont naturellement isomorphes. On choisit des mesures qui se correspondent par cet isomorphisme. D'autre part, dans les passages entre groupes et revêtements simplement connexes, il est nécessaire de fixer des mesures sur les centres. Précisément, on doit fixer des mesures sur $Z(G'_\epsilon)^0(F)$, $Z(G_{\eta[y]})^0(F)$ et $Z(\bar{G}')^0(F)$. De nouveau, on peut remplacer ces groupes par les algèbres de Lie correspondantes. Mais alors la première est naturellement isomorphe à la somme directe des deux autres, cf. 5.1(1). On choisit des mesures qui se correspondent par cet isomorphisme.

Seul compte pour nous le comportement des fonctions f'_{sc} et $\bar{f}[y]_{sc}$ dans des voisinages de l'unité invariants par conjugaison stable. On peut donc aussi bien descendre ces fonctions par l'exponentielle et considérer qu'elles sont définies sur des algèbres de Lie. Pour simplifier, on ne change pas leur notation. Alors l'égalité (2) équivaut à l'égalité

$$(6) \qquad f'_{sc} = transfert(\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(y)\bar{f}[y]_{sc}),$$

où $transfert$ est ici le transfert non standard de $\bar{G}'_{SC}$ à $G'_{\epsilon,SC}$.

Fixons un élément $Z \in \mathfrak{z}(G'_\epsilon, F)$ assez proche de 0, que l'on écrit $Z = Z_1 + Z_2$ comme en 5.1. Soit $\boldsymbol{\delta}_{SC} \in D^{st}_{géom}(G'_{\epsilon,SC}(F))$ à support assez proche de 1. On définit

- l'image $\boldsymbol{\delta}(Z)$ de $\boldsymbol{\delta}_{SC}$ par la composée de l'application $\iota^*_{G'_{\epsilon,SC},G'_{1,\epsilon_1}}$ et de la translation par $exp(Z)$;

- l'image $\boldsymbol{\delta}(Z)^{\tilde{G}'_1}$ de $\boldsymbol{\delta}(Z)$ par l'application $desc^{st,\tilde{G}'_1}_{\epsilon_1}$.

C'est une distribution stable sur $\tilde{G}'_1(F)$, à support proche de la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}^{\tilde{G}_1}$ de ϵ_1.

On définit :

- l'image $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC}$ de $\boldsymbol{\delta}_{SC}$ par transfert endoscopique non standard (on doit descendre les distributions aux algèbres de Lie pour définir ce transfert) ; c'est une distribution stable sur $\bar{G}'_{SC}(F)$;

- l'image $\bar{\boldsymbol{\delta}}(Z_2)$ de $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC}$ par la composée de l'application $\iota^*_{\bar{G}'_{SC},\bar{G}'}$ et de la translation par $exp(Z_2)$;

- pour $y \in \mathcal{Y}$, l'image $\boldsymbol{\delta}[y, Z_2]$ de $\bar{\boldsymbol{\delta}}(Z_2)$ par transfert à $G_{\eta[y],SC}(F)$, avec la convention que ce transfert est nul si $\bar{\mathbf{G}}'$ n'est pas relevante pour $G_{\eta[y],SC}$;

- l'image $\boldsymbol{\delta}[y, Z]$ de $\boldsymbol{\delta}[y, Z_2]$ par la composée de l'application $\iota^*_{G_{\eta[y]},SC,G_{\eta[y]}}$ et de la translation par $exp(Z_1)$; c'est une distribution sur $G_{\eta[y]}(F)$;

- l'image $\boldsymbol{\delta}[y, Z]^{\tilde{G}}$ de $\boldsymbol{\delta}[y, Z]$ par l'application $desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}$.

C'est une distribution sur $\tilde{G}(F)$, à support proche de la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ de η.

A partir de l'égalité (1), un calcul formel conduit à l'égalité

$$(7) \qquad transfert(\boldsymbol{\delta}(Z)^{\tilde{G}'_1}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(y)\boldsymbol{\delta}[y,Z]^{\tilde{G}}.$$

On supprime de la notation les termes Z dans le cas où $Z = 0$.

5.3 Levi et descente de données endoscopiques

Soient $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quelconque, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$.

D'après [I] paragraphe 3, on peut réaliser les objets duaux de la façon suivante. On fixe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$. On note $\hat{\theta}$ l'automorphisme dual de θ^* qui conserve cette paire. On modifie l'action galoisienne de sorte que $\hat{\mathcal{E}}$ soit stable par cette action. On suppose que $\hat{M}$ est standard et on munit ce groupe de la paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}^M = (\hat{B} \cap \hat{M}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)^M_{\alpha \in \Delta})$. On suppose $\tilde{\zeta} = \zeta\hat{\theta}$ avec $\zeta \in \hat{T}$. On suppose ζ tel que le cocycle qui intervient dans la définition d'une donnée endoscopique prenne ses valeurs dans $Z(\hat{G})$. On munit $\hat{M}'$ d'une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}^{M'}$ dont la paire de Borel sous-jacente soit $(\hat{B} \cap \hat{M}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$.

Fixons un diagramme

$$(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$$

cf. [I] 1.10. Les espaces ambiants sont $\tilde{M}'$ et $\tilde{M}$. Le terme η est un élément semi-simple de $\tilde{M}(F)$ et ϵ est un élément semi-simple de $\tilde{M}'(F)$. On suppose que M'_ϵ est quasi-déployé.

Les deux paires de Borel (B^M, T) de M et $(\hat{B} \cap \hat{M}, \hat{T})$ de $\hat{M}$ fournissent une identification $X_*(T) \simeq X^*(\hat{T})$, qui transporte l'action de $\theta = ad_\eta$ en $\hat{\theta}$. On introduit le groupe de Borel B de G contenant T dont l'ensemble de coracines simples s'identifie à l'ensemble des racines simples de $\hat{B}$. Il est clair que les deux paires de Borel (B, T) de G et $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ fournissent la même identification $X_*(T) \simeq X^*(\hat{T})$ que ci-dessus. On vérifie d'ailleurs que le groupe P engendré par B et M est un élément de $\mathcal{P}(M)$ et que l'ensemble $\tilde{P} = P\eta$ est un élément de $\mathcal{P}(\tilde{M})$. De la paire de Borel $(\hat{B} \cap \hat{M}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$ de $\hat{M}'$ et de la paire $(B^{M'}, T')$ de M' se déduit une identification $X_*(T') \simeq X^*(\hat{T}^{\hat{\theta},0})$.

Posons $(\bar{B}, \bar{T}) = (B \cap G_\eta, T \cap G_\eta)$, complétons cette paire en une paire de Borel épinglée de G_η et introduisons l'action galoisienne quasi-déployée sur G_η qui la conserve. Elle est de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}} = ad_{\bar{u}(\sigma)} \circ \sigma_G$, cf. 5.1. Parce que $P \cap G_\eta$ est défini sur F pour l'action galoisienne naturelle, on a nécessairement $\bar{u}(\sigma) \in M_{\eta,sc}$. Donc M_η est stable par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}}$ et les deux actions galoisiennes coïncident sur $Z(M_\eta)$. On note $\bar{G}$, resp. $\bar{M}$, le groupe G_η, resp. M_η, muni de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\bar{G}}$. Complétons de même la paire de Borel (B, T) de G en une paire de Borel épinglée et introduisons l'action galoisienne quasi-déployée sur G qui conserve celle-ci. Elle est de la forme $\sigma \mapsto \sigma_{G^*} = ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G$, où $u(\sigma) \in G_{SC}$. Toujours parce que P est défini sur F pour l'action galoisienne naturelle, on a $u(\sigma) \in M_{sc}$. Donc M est stable par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ et les deux actions coïncident sur $Z(M)$. On a $\sigma_{\bar{G}} = ad_{\bar{u}(\sigma)u(\sigma)^{-1}} \circ \sigma_{G^*}$. L'élément $\bar{u}(\sigma)u(\sigma)^{-1}$ appartient à M_{sc}. Il s'envoie donc sur un élément du groupe de Weyl W^M que l'on note $\omega_{\bar{M}}(\sigma)$. Il est fixe par θ. Le groupe $\hat{\bar{M}}$ est le commutant dans $\hat{\bar{G}}$ de l'image dans $\hat{\bar{T}}$ de $Z(\hat{M})$.

On peut définir comme en 5.1 une donnée endoscopique de $\bar{M}_{SC}$ associée à la donnée $\mathbf{M}'$ et au diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$. Mais on peut aussi refaire la même construction en remplaçant le groupe $\bar{M}_{SC}$ par l'image réciproque $\bar{M}_{sc}$ de $\bar{M}$ dans $\bar{G}_{SC}$. On obtient une donnée endoscopique de $\bar{M}_{sc}$. C'est celle-là que nous noterons $\bar{\mathbf{M}}' = (\bar{M}', \bar{\mathcal{M}}', \bar{\zeta})$.

Fixons une paire de Borel $(B^{M',\flat}, T^\flat)$ de M'_ϵ définie sur F et un élément $m' \in M'_{\epsilon,SC}$ tel que $ad_{m'}$ envoie cette paire sur $(B^{M'} \cap M'_\epsilon, T')$. Fixons une paire de Borel $(\bar{B}^{\bar{M}'}, \bar{T}')$ de $\bar{M}'$ définie sur F. Pour une raison qui apparaîtra plus loin, on note $T^\flat_{M-sc}$, resp. $\bar{T}'_{M'-sc}$, l'image réciproque de $T^\flat$ dans $M'_{\epsilon,SC}$, resp. l'image réciproque de $\bar{T}'$ dans $\bar{M}'_{SC}$. Comme en 5.1, on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$j : \bar{\mathfrak{t}}'_{M'-sc} \oplus \mathfrak{z}(\bar{M}') \oplus \mathfrak{z}(\bar{G}) \simeq \mathfrak{t}^\flat_{M-sc} \oplus \mathfrak{z}(M'_\epsilon)$$

qui est équivariant pour les actions galoisiennes. On note $j_* : X_*(\bar{T}'_{M'-sc}) \otimes \mathbb{Q} \to X_*(T^\flat_{M-sc}) \otimes \mathbb{Q}$ l'isomorphisme sous-jacent à la restriction de l'homomorphisme j à $\bar{\mathfrak{t}}'_{M'-sc}$. Le triplet $(\bar{M}'_{SC}, M'_{\epsilon,SC}, j_*)$ est un triplet endoscopique non standard. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{z}(M)^{\Gamma_F,\theta} & = & \mathfrak{z}(M)^{\Gamma_F,\theta} \\
\downarrow & & \\
\mathfrak{z}(\bar{M})^{\Gamma_F} & & \downarrow \\
\| & & \mathfrak{z}(M')^{\Gamma_F} \\
\mathfrak{z}(\bar{M}_{sc})^{\Gamma_F} \oplus \mathfrak{z}(\bar{G})^{\Gamma_F} & & \downarrow \\
\downarrow & & \\
\mathfrak{z}(\bar{M}')^{\Gamma_F} \oplus \mathfrak{z}(\bar{G})^{\Gamma_F} & \simeq & \mathfrak{z}(M'_\epsilon)^{\Gamma_F}
\end{array}$$

On suppose désormais

(1) ϵ est elliptique dans $\tilde{M}'(F)$.

Les flèches de droite du diagramme sont des isomorphismes parce que $\mathbf{M}'$ est une donnée elliptique de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$ et que ϵ est elliptique dans $\tilde{M}'(F)$. Les flèches de gauche sont donc aussi des isomorphismes. Pour la flèche du haut, cela entraîne que η est elliptique dans $\tilde{M}(F)$. Pour celle du bas, cela entraîne que $\mathbf{M}'$ est une donnée endoscopique elliptique de $\bar{M}_{sc}$. Rappelons que, dans cette situation non tordue et sur un corps local non-archimédien, une telle donnée est automatiquement relevante.

L'ellipticité de η entraîne dualement que

(2) l'homomorphisme naturel

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} \to Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F,0}$$

est surjectif et de noyau fini.

Puisque $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ s'envoie évidemment dans $Z(\bar{G})^{\Gamma_F}$ et puisque les quotients ci-dessous sont connexes, on a aussi

(3) l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F}$$

est surjectif.

Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Le groupe $\hat{G}'(\tilde{s})$ est composante neutre du centralisateur de $\tilde{s}$ dans $\hat{G}$. Il est muni de la paire de Borel $(\hat{B} \cap \hat{G}'(\tilde{s}), \hat{T}^{\hat{\theta},0})$. De même que l'on a construit le groupe B, on construit un groupe de Borel B' de $G'(\tilde{s})$ de sorte que

l'identification $X_*(T') \simeq X^*(\hat{T}^{\hat{\theta},0})$ déduite des paires (B',T') et $(\hat{B}\cap\hat{G}'(\tilde{s}),\hat{T}^{\hat{\theta},0})$ soit la même que celle ci-dessus. De nouveau, le groupe P' engendré par M' et B' est un élément de $\mathcal{P}^{G'(\tilde{s})}(M')$. On voit alors que le sextuplet $(\epsilon,B',T',B,T,\eta)$ est encore un diagramme, avec cette fois pour groupes ambiants $G'(\tilde{s})$ et G, donnant naissance au même homomorphisme ξ. A partir du diagramme $(\epsilon,B',T',B,T,\eta)$ et de $\mathbf{G}'(\tilde{s})$, on définit une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$. L'élément s s'envoie sur un élément $\bar{s}\in\hat{\bar{T}}_{ad}$, plus précisément $\bar{s}\in\bar{\zeta}Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}$. En considérant les définitions de [W1] 3.5, on s'aperçoit que la donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$ que l'on construit ainsi n'est autre que celle associée à la donnée $\bar{\mathbf{M}}'$ du Levi $\bar{M}_{sc}$ et à cet élément $\bar{s}$. Nous la noterons $\bar{\mathbf{G}}'(\bar{s})=(\bar{G}'(\bar{s}),\bar{\mathcal{G}}'(\bar{s}),\bar{s})$. Fixons un sous-groupe parabolique de $\bar{G}'(\bar{s})$ défini sur F et de composante de Levi $\bar{M}'$. On note $\bar{B}'(\bar{s})$ le sous-groupe de Borel de $\bar{G}'(\bar{s})$ qui est inclus dans ce parabolique et vérifie $\bar{B}'(\bar{s})\cap\bar{M}'=\bar{B}^{\bar{M}'}$. Le couple $(\bar{B}'(\bar{s}),\bar{T}')$ est une paire de Borel de $\bar{G}'(\bar{s})$ qui est définie sur F. On pose $B^\flat=ad_{m'}^{-1}(B')$. Alors $(B^\flat,T^\flat)$ est une paire de Borel de $G'(\tilde{s})_\epsilon$ définie sur F. On note $T^\flat_{sc}$, resp. $\bar{T}'_{sc}$, l'image réciproque de $T^\flat$ dans $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$, resp. l'image réciproque de $\bar{T}'$ dans $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$. On a un isomorphisme

$$j:\bar{\mathfrak{t}}'_{sc}\oplus\mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s}))\oplus\mathfrak{z}(\bar{G})\simeq\mathfrak{t}^\flat_{sc}\times\mathfrak{z}(G'(\tilde{s})_\epsilon)$$

qui vérifie des propriétés analogues à celles ci-dessus. C'est le même que plus haut, modulo les identifications

$$\bar{\mathfrak{t}}'_{sc}\simeq\bar{\mathfrak{t}}'_{M-sc}\oplus\mathfrak{z}(\bar{M}'(\bar{s})_{sc}),$$

où $\bar{M}'(\bar{s})_{sc}$ est l'image réciproque de $\bar{M}'$ dans $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$ et

$$\mathfrak{t}^\flat_{sc}\simeq\mathfrak{t}^\flat_{M'-sc}\oplus\mathfrak{z}(M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}),$$

où $M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$ est l'image réciproque de M'_ϵ dans $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$. De nouveau (avec un léger abus de notation), on note $j_*:X_*(\bar{T}'_{sc})\otimes\mathbb{Q}\to X_*(T^\flat_{sc})\otimes\mathbb{Q}$ l'isomorphisme sous-jacent à la restriction de l'homomorphisme j à $\bar{\mathfrak{t}}'_{sc}$. Le triplet $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC},j_*)$ est un triplet endoscopique non standard. Résumons les isomorphismes obtenus :

$$(4)\qquad \begin{array}{ccccccc} & & \mathfrak{z}(G'(\tilde{s})_\epsilon) & \to & \mathfrak{z}(\bar{G})\oplus\mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s})) & & \mathfrak{z}(\bar{G}) & \to & \mathfrak{z}(\bar{G}) \\ \mathfrak{z}(M'_\epsilon) & \to & \oplus & & \oplus & \to & \oplus & & \oplus \\ & & \mathfrak{z}(M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}) & \to & \mathfrak{z}(\bar{M}'(\bar{s})_{sc}) & & \mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s}))\oplus\mathfrak{z}(\bar{M}'(\bar{s})_{sc}) & \to & \mathfrak{z}(\bar{M}') \end{array}$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ soit elliptique et $A_{G'(\tilde{s})}=A_{G'(\tilde{s})_\epsilon}$. Montrons que

(5) si $A_{G_\eta}\neq A_{\tilde{G}}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est vide ;

(6) supposons $A_{G_\eta}=A_{\tilde{G}}$; alors $\mathcal{S}$ est égal à l'ensemble des $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que la donnée déduite $\mathbf{G}'(\bar{s})$ de $\bar{G}_{SC}$ soit elliptique.

Pour $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, on a un diagramme similaire à celui écrit plus haut

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{z}(G)^{\Gamma_F,\theta} & = & \mathfrak{z}(G)^{\Gamma_F,\theta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{z}(\bar{G})^{\Gamma_F} & & \mathfrak{z}(G'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s}))^{\Gamma_F}\oplus\mathfrak{z}(\bar{G})^{\Gamma_F} & \simeq & \mathfrak{z}(G'(\tilde{s})_\epsilon)^{\Gamma_F} \end{array}$$

L'élément $\tilde{s}$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si les deux flèches de droite sont des isomorphismes. C'est équivalent à ce que celles de gauche soient elles-aussi des isomorphismes.

Que la flèche du haut à gauche soit un isomorphisme signifie que $A_{G_\eta} = A_{\tilde{G}}$. Cette condition est indépendante de $\tilde{s}$. Si elle n'est pas vérifiée, l'ensemble $\mathcal{S}$ est donc vide. Si elle est vérifiée, la seule condition est que la flèche du bas à gauche soit un isomorphisme, ce qui équivaut à l'ellipticité de $\mathbf{G}'(\bar{s})$.

5.4 Facteurs de transfert et transfert des distributions

Pour fixer les notations, reprenons brièvement les constructions de 5.1 et 5.2. Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On fixe des données auxiliaires $G'_1(\tilde{s}), ..., \Delta_1(\tilde{s})$ pour la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. On note $M'_1(\tilde{s})$, resp. $\tilde{M}'_1(\tilde{s})$, l'image réciproque de M' dans $G'_1(\tilde{s})$, resp. de $\tilde{M}'$ dans $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$. On fixe une image réciproque $\epsilon_1(\tilde{s})$ de ϵ dans $\tilde{M}'_1(\tilde{s}; F)$, ainsi qu'une décomposition d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}'_1(\tilde{s}) = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{g}'(\tilde{s}).$$

On en déduit des décompositions

$$\mathfrak{g}'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})} = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{g}'(\tilde{s})_\epsilon,$$

$$\mathfrak{m}'_1(\tilde{s}) = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{m}',$$

$$\mathfrak{m}'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})} = \mathfrak{c}_1(\tilde{s}) \oplus \mathfrak{m}'_\epsilon.$$

Pour $y \in \mathcal{Y}$, on fixe un facteur de transfert sur $G'(\bar{s}, F) \times G_{\eta[y],SC}(F)$ que l'on note $\Delta(\bar{s}, y)$. Alors il existe $d(\tilde{s}, y) \in \mathbb{C}^\times$ tel que, pour des données comme en 5.1, on ait l'égalité

$$(1) \qquad d(\tilde{s}, y)\Delta(\bar{s}, y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc})) = \Delta(\tilde{s})_1(exp(Y)\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X[y])\eta[y])$$

pourvu que X et Y soient assez proches de 0.

Pour appliquer la formule 5.2(7) à la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$, on glisse des termes $\tilde{s}$ ou $\bar{s}$ dans les notations. Fixons un élément $Z \in \mathfrak{z}(G'(\tilde{s})_\epsilon, F)$ assez proche de 0, que l'on écrit $Z = Z_1 + Z_2$ avec $Z_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G}; F)$ et $Z_2 \in \mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s}); F)$. Soit $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{SC} \in D^{st}_{géom}(G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}(F))$ à support assez proche de 1. On définit

- l'image $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s}, Z)$ de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{SC}$ par la composée de l'application $\iota^*_{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, G'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}$ et de la translation par $exp(Z)$;
- l'image $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s}, Z)^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}$ de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s}, Z)$ par l'application $desc^{st,\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\epsilon_1(\tilde{s})}$;
- l'image $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{SC}$ de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{SC}$ par transfert endoscopique non standard ;
- l'image $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s}, Z_2)$ de $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{SC}$ par la composée de l'application $\iota^*_{\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, \bar{G}'(\bar{s})}$ et de la translation par $exp(Z_2)$;
- pour $y \in \mathcal{Y}$, l'image $\boldsymbol{\delta}[y, Z_2]$ de $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s}, Z_2)$ par transfert à $G_{\eta[y],SC}(F)$;
- l'image $\boldsymbol{\delta}[y, Z]$ de $\boldsymbol{\delta}[y, Z_2]$ par la composée de l'application $\iota^*_{G_{\eta[y],SC}, G_{\eta[y]}}$ et de la translation par $exp(Z_1)$;
- l'image $\boldsymbol{\delta}[y, Z]^{\tilde{G}}$ de $\boldsymbol{\delta}[y, Z]$ par l'application $desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}$.

La formule 5.2(7) devient

$$(2) \qquad transfert(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s}, Z)^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}} c[y] d(\tilde{s}, y) \boldsymbol{\delta}[y, Z]^{\tilde{G}}.$$

On supprime de la notation les termes Z dans le cas où $Z = 0$.

On peut remplacer $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$ dans les constructions ci-dessus. On ajoute des exposants M pour indiquer les analogues pour $\tilde{M}$ des termes précédemment définis pour $\tilde{G}$. On obtient une assertion où la donnée de départ est un élément $\boldsymbol{\delta}_{SC} \in D^{st}_{géom}(M'_{\epsilon,SC}(F))$. On aura besoin d'une variante où le groupe $M'_{\epsilon,SC}$ est remplacée par le groupe intermédiaire $M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$. Partons ainsi d'un élément $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{sc} \in D^{st}_{unip}(M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}(F))$ (le cas unipotent nous suffira). On définit

- $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s}) = \iota^*_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M'_1(\tilde{s})\epsilon_1(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{sc})$;

- l'image $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})^{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}$ de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})$ par l'application $desc^{st,\tilde{M}'_1(\tilde{s})}_{\epsilon_1(\tilde{s})}$.

C'est une distribution stable sur $\tilde{M}'_1(\tilde{s};F)$, dont les éléments du support ont des parties semi-simples dans la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}$ de $\epsilon_1(\tilde{s})$.

On définit :

- l'image $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc}$ de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{sc}$ par transfert endoscopique non standard ; c'est une distribution stable sur $\bar{M}'(\bar{s})_{sc}(F)$;

- $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s}) = \iota^*_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc})$;

- pour $y \in \mathcal{Y}^M$, l'image $\boldsymbol{\delta}[y]$ de $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})$ par la composée du transfert à $M_{\eta[y],sc}(F)$ et de l'application $\iota^*_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}$; c'est une distribution sur $M_{\eta[y]}(F)$;

- l'image $\boldsymbol{\delta}[y]^{\tilde{M}}$ de $\boldsymbol{\delta}[y,]$ par l'application $desc^{\tilde{M},*}_{\eta[y]}$.

C'est une distribution sur $\tilde{M}(F)$, dont les éléments du support ont des parties semi-simples dans la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ de η.

On a alors l'égalité

$$(3) \qquad transfert(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})^{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y]d(\tilde{s},y)\boldsymbol{\delta}[y]^{\tilde{M}}.$$

Cette variante se déduit facilement de la formule précédente. Il suffit d'utiliser la formule 3.7(4) qui permet de permuter un transfert endoscopique avec une application telle que $\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}$, ainsi qu'une formule analogue concernant le transfert non standard, laquelle se prouve de la même façon. On laisse les détails au lecteur.

5.5 Applications de transition

Notons $\mathcal{O}_{M'}$ la classe de conjugaison stable de ϵ. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$ à support proche de $\mathcal{O}_{M'}$. Fixons des données auxiliaires $M'_1, ..., \Delta_1$ pour $\mathbf{M}'$ et un élément $\epsilon_1 \in \tilde{M}'_1(F)$ se projetant sur ϵ. Alors $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie à un élément de $D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F))$. Comme on l'a dit en [II] 1.10, on a une surjection $D^{st}_{géom}(\tilde{M}'_1(F)) \to D^{st}_{géom,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F))$. L'action par translations sur l'espace de départ d'un élément $c \in C_1(F)$ se traduit sur l'espace d'arrivée par la multiplication par $\lambda_1(c)$. Puisque le support de $\boldsymbol{\delta}$ est voisin de $\mathcal{O}_{M'}$, on peut donc relever cette distribution en un élément $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}'_1(F))$ à support voisin de la classe de conjugaison stable de ϵ_1. C'est l'image par l'application $desc^{st,\tilde{M}'_1}_{\epsilon_1}$ d'un élément de $D^{st}_{géom}(M'_{1,\epsilon_1}(F))$ à support proche de 1. Un tel élément est combinaison linéaire de termes $exp(Z)\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{1,\epsilon_1}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC})$, avec $Z \in \mathfrak{z}(M'_{1,\epsilon_1};F)$ et $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC} \in D^{st}_{géom}(M'_{\epsilon,SC}(F))$, à support proche de 1 (le produit par $exp(Z)$ signifie la translation par cet élément). Pour simplifier, on suppose que la combinaison linéaire est réduite à un seul terme, c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{\delta}_1 = desc^{st,\tilde{M}'_1}_{\epsilon_1}(exp(Z)\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{1,\epsilon_1}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC})).$$

Fixons une décomposition

$$\mathfrak{m}'_{1,\epsilon_1} = \mathfrak{c}_1 \oplus \mathfrak{m}'_\epsilon.$$

Les translations par $\mathfrak{c}_1(F)$ ne comptent pas par le même argument que ci-dessus (d'ailleurs, le composé de λ_1 et de l'exponentielle est égal à 1 au voisinage de 0). On peut donc supposer que l'élément Z appartient à $\mathfrak{z}(M'_\epsilon; F)$. Posons alors $\boldsymbol{\delta}_\epsilon = exp(Z)\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{1,\epsilon_1}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC})$. On peut considérer que c'est un élément de $D^{st}_{géom}(M'_\epsilon(F))$ à support proche de 1.

Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Utilisons les données auxiliaires introduites au paragraphe précédent, que l'on restreint à M'. En remplaçant $\tilde{M}'_1$ par $\tilde{M}'_1(\tilde{s})$, on construit un autre élément $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_\epsilon$. Les distributions $\boldsymbol{\delta}_\epsilon$ et $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_\epsilon$ appartiennent au même espace $D^{st}_{géom}(M'_\epsilon(F))$ et proviennent par descente d'un même élément $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$. Mais elles ne sont pas forcément égales. Rappelons en effet la construction de l'isomorphisme composé

$$SI_{\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F)) \simeq SI(\mathbf{M}') \simeq SI_{\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{M}'_1(\tilde{s}; F)).$$

Il provient d'un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F)) & \simeq & C^\infty_{c,\lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{M}'_1(\tilde{s}; F)) \\ \phi & \mapsto & \phi(\tilde{s}). \end{array}$$

Soient $\delta_1 \in \tilde{M}'_1(F)$ et $\delta_1(\tilde{s}) \in \tilde{M}'_1(\tilde{s}; F)$ deux éléments au-dessus d'un même point de $\tilde{M}'(F)$. Alors on a une égalité

$$\phi(\tilde{s})(\delta_1(\tilde{s})) = \tilde{\lambda}(\tilde{s})(\delta_1, \delta_1(\tilde{s}))\phi(\delta_1),$$

où $\tilde{\lambda}(\tilde{s})$ est une fonction de recollement définie en [I] 2.5. Cette fonction de recollement est localement constante. Parce que l'on travaille dualement avec des distributions, un dévissage des définitions conduit à l'égalité

$$(1) \qquad \boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_\epsilon = d(\tilde{s})\boldsymbol{\delta}_\epsilon,$$

où

$$d(\tilde{s}) = \tilde{\lambda}(\tilde{s})(\epsilon_1, \epsilon_1(\tilde{s}))^{-1}.$$

On peut calculer ce terme en fixant un élément $Y \in \mathfrak{m}'_\epsilon(F)$ en position générale et elliptique. Il lui correspond un élément $X \in \mathfrak{m}_\eta(F)$ par la construction de 5.1 appliquée en remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$ et y par 1. A l'aide des décompositions fixées, on peut identifier Y soit à un élément de $\mathfrak{m}'_{1,\epsilon_1}(F)$, soit à un élément de $\mathfrak{m}'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}(F)$. D'après [I] lemme 2.5, on a l'égalité

$$(2) \qquad d(\tilde{s}) = \frac{\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1, exp(X)\eta)}{\Delta_1(\tilde{s})(exp(Y)\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X)\eta)}.$$

6 Triplets endoscopiques non standard

6.1 Apparition des triplets endoscopiques non standard

Rappelons la notion de triplet endoscopique non standard introduite dans [W1] 1.7. On considère deux groupes réductifs connexes G_1 et G_2 définis sur F, simplement connexes et quasi-déployés. Pour $i = 1, 2$, soit (B_i, T_i) une paire de Borel de G_i définie

sur F. On introduit l'ensemble $\Sigma(T_i)$ des racines de T_i dans G_i et l'ensemble $\check{\Sigma}(T_i)$ des coracines. On note $\alpha \mapsto \check{\alpha}$ la bijection usuelle entre ces ensembles. On suppose données une bijection $\tau : \Sigma(T_2) \to \Sigma(T_1)$, une fonction $b : \Sigma(T_2) \to \mathbb{Q}_{>0}$ et un isomorphisme $j_* : X_*(T_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X_*(T_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On note $j^* : X^*(T_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to X^*(T_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ l'isomorphisme dual. On impose les conditions suivantes :

- pour $\alpha_2 \in \Sigma(T_2)$, α_2 est positif pour B_2 si et seulement si $\tau(\alpha_2)$ est positif pour B_1 (cette condition ne figure pas dans [W1] 1.7 mais peut être ajoutée d'après le lemme de cette référence) ;
- j_* (donc aussi j^*) est équivariant pour les actions galoisiennes ;
- pour tout $\alpha_2 \in \Sigma(T_2)$, $j^*(\alpha_2) = b(\alpha_2)\tau(\alpha_2)$;
- pour tout $\alpha_1 \in \Sigma(T_1)$, $j_*(\check{\alpha}_1) = b(\alpha_2)\check{\alpha}_2$, où $\alpha_2 = \tau^{-1}(\alpha_1)$.

A ces conditions, on dit que (G_1, G_2, j_*) est un triplet endoscopique non standard.

De tels triplets interviennent dans nos constructions comme on l'a vu en 5.1. Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un de nos triplets comme en [II] 1.1 et $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique elliptique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Soient $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$ un diagramme reliant un élément semi-simple $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$ à un élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}'(F)$. Supposons G'_ϵ quasi-déployé. A l'aide de ces données, on construit une donnée endoscopique $\bar{\mathbf{G}}' = (\bar{G}', \bar{\mathcal{G}}', \bar{s})$ de $G_{\eta,SC}$. Posons $G_1 = \bar{G}'_{SC}$ et $G_2 = G'_{\epsilon,SC}$. Alors le couple (G_1, G_2) se complète naturellement en un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*). Dans [W1] 1.7, on a classifié les triplets endoscopiques non standard. Considérons les triplets élémentaires suivants :

(1) $G_1 = G_2$ et j_* est l'identité ;

(2) G_1 est de type B_n avec $n \geq 2$, G_2 est de type C_n et j_* envoie une coracine courte sur une coracine longue et envoie la coracine longue sur 2 fois la coracine courte ;

(3) G_1 est de type C_n avec $n \geq 2$, G_1 est de type B_n et j_* envoie la coracine courte sur la coracine longue et envoie une coracine longue sur 2 fois une coracine courte ;

(4) G_1 et G_2 sont de type F_4 et j_* envoie une coracine courte sur une coracine longue et une coracine longue sur 2 fois une coracine courte ;

(5) G_1 et G_2 sont de type G_2 (sic !) et j_* envoie une coracine courte sur une coracine longue et une coracine longue sur 3 fois une coracine courte.

Disons qu'un triplet est quasi-élémentaire s'il se déduit par restriction des scalaires d'un triplet élémentaire. Disons que deux triplets (G_1, G_2, j_*) et (G'_1, G'_2, j'_*) sont équivalents si, à isomorphismes près, on a $G_1 = G'_1$, $G_2 = G'_2$ et $j_* = cj'_*$ où c est un rationnel strictement positif. Alors tout triplet est isomorphe à un produit de triplets équivalents à un triplet quasi-élémentaire.

Pour chacun des triplets élémentaires ci-dessus, on pose $N(G_1, G_2, j_*) = 0$ dans le cas (1), $(n+1)(2n+1)$ dans le cas (2), $4n^2 - 1$ dans le cas (3), 78 dans le cas (4), 28 dans le cas (5). Pour un triplet quasi-élémentaire (G_1, G_2, j_*), déduit par restriction des scalaires disons de F' à F d'un triplet élémentaire (G'_1, G'_2, j'_*), on pose $N(G_1, G_2, j_*) = [F' : F]N(G'_1, G'_2, j'_*)$. Pour un triplet général, produit sur $i = 1, ..., n$ de triplets équivalents à des triplets quasi-élémentaires $(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i})$, on pose

$$N(G_1, G_2, j_*) = sup_{i=1,...,n} N(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i}).$$

Remarque. Pour $n = 2$, les triplets (2) et (3) sont les mêmes. Les deux recettes possibles pour définir $N(G_1, G_2, j_*)$ donnent le même résultat.

Lemme. *Si un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*) est issu comme ci-dessus de couples (η, ϵ), on a $N(G_1, G_2, j_*) \leq dim(G_{SC})$.*

Preuve. Introduisons la forme quasi-déployée G^*_{AD} de G_{AD}. Fixons-en une paire de Borel épinglée $(B^*, T^*, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ définie sur F. On a sur G^*_{AD} une action galoisienne et un automorphisme θ^* qui conservent cette paire de Borel épinglée. Soit $t \in T^*$. On introduit la composante neutre $I(t) = G^*_{AD,t\theta^*}$ du commutant de $t\theta^*$ et son groupe dual $\hat{I}(t)$. Soit s un élément semi-simple de $\hat{I}(t)$. On introduit la composante neutre $\hat{I}(t)_s$ du commutant de s et son groupe dual. On note $R(s,t)$ le système de racines de ce groupe dual. Il résulte de l'hypothèse et de [W1] 3.3 qu'il existe t et s de sorte que le système de racines de G_1 coïncide avec $R(s,t)$. De l'action galoisienne sur G_1 se déduit une action galoisienne sur $R(s,t)$. Elle est composée de l'action galoisienne sur le système de racines de G^*_{AD} et d'un cocycle à valeurs dans W^{θ^*}. On déduit du système de racines $R(s,t)$ un autre système de racines, notons-le $R(t,s)$ (dans [W1] 3.3, les deux systèmes sont notés respectivement Σ_2 et Σ_1). C'est celui du groupe G_2. On a décomposé plus haut (G_1, G_2, j_*) en produit sur $i = 1, ..., n$ de triplets équivalents à des triplets quasi-élémentaires $(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i})$. Posons $N = N(G_1, G_2, j_*) = sup_{i=1,...,n} N(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i})$. Fixons i tel que $N(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i}) = N$. Il suffit de prouver que, s'il existe t et s comme ci-dessus de sorte que le système de racines de $G_{1,i}$ soit un sous-système de $R(s,t)$ et que le système de racines de $G_{2,i}$ soit un sous-système de $R(t,s)$, alors $N \leq dim(G^*_{AD})$. A ce point, on peut simplifier les notations en supposant que $(G_1, G_2, j_*) = (G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i})$ et en abandonnant l'indice i.

Supposons qu'il existe t et s vérifiant les conditions ci-dessus. Notons J la composante neutre du centralisateur du centre de $I(t)$. Il est stable par l'action galoisienne et par θ^*. Il contient T^* et le groupe $I(t)$ coïncide avec la composante neutre du centralisateur de $t\theta^*$ dans J. Il en résulte que les systèmes de racines $R(s,t)$ et $R(t,s)$ se déduisent aussi bien du groupe J, ou mieux de la forme quasi-déployée J^*_{AD} de son groupe adjoint. Si l'on prouve l'assertion pour ce groupe, on en déduit la même assertion pour G^*_{AD} puisque $dim(J^*_{AD}) \leq dim(G^*_{AD})$. Cela nous ramène au cas où $J = G^*_{AD}$, ce que l'on suppose désormais. On peut décomposer G^*_{AD} en produit de groupes G^*_j pour $j = 1, ..., m$ tels que, pour tout j, les composantes irréductibles de G^*_j forment une seule orbite pour le groupe de permutations engendré par l'action galoisienne et par θ^*. Les systèmes de racines $R(s,t)$ et $R(t,s)$ se décomposent conformément (y compris en tenant compte de l'action galoisienne). Il existe donc un indice j tel que le groupe $G^*_{AD,j}$ vérifie les mêmes hypothèses que G^*_{AD}. De nouveau, si l'on démontre l'assertion pour ce groupe $G^*_{AD,j}$, on en déduit l'assertion pour G^*. Cela nous ramène au cas où les composantes irréductibles de G^*_{AD} forment une seule orbite pour le groupe de permutations engendré par l'action galoisienne et par θ^*. Fixons une telle composante irréductible $\underline{G}$. Notons c le plus petit entier strictement positif tel que $(\theta^*)^c(\underline{G}) = \underline{G}$. Posons $\bar{G} = \underline{G} \times \theta^*(\underline{G}) \times ... \times (\theta^*)^{c-1}(\underline{G})$. Soit F'' l'extension de F tel que $\Gamma_{F''}$ soit le sous-groupe des $\sigma \in \Gamma_F$ qui conservent $\bar{G}$. Alors G^*_{AD} est déduit de $\bar{G}$ par restriction des scalaires de F'' à F. Les systèmes de racines $R(s,t)$ et $R(t,s)$ se décomposent en produits indexés par $Gal(F''/F)$ de systèmes analogues relatifs à $\bar{G}$. Puisqu'on a supposé notre triplet (G_1, G_2, j_*) équivalent à un triplet quasi-élémentaire, on peut supposer qu'il existe un triplet élémentaire $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ et une extension F' de F tels que le système de racines de $G_{0,1}$, resp. $G_{0,2}$, soit un sous-système d'un système $R(\bar{s}, \bar{t})$, resp. $R(\bar{t}, \bar{s})$, relatif à $\bar{G}$ et que (G_1, G_2, j_*) soit équivalent au système déduit de $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ par restriction des scalaires. D'après la propriété rappelée ci-dessus des actions galoisiennes, un élément de Γ_F qui conserve $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ conserve aussi $\bar{G}$, autrement dit $F' \subset F''$. Notons $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{j}_*)$ le triplet sur F'' déduit de $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ par restriction des scalaires de F' à F''. On voit alors que F'', $\bar{G}$ et $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{j}_*)$ vérifient les mêmes hypothèses que F, G^*_{AD} et (G_1, G_2, j_*). Par définition, $N = [F'' : F]N(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{j}_*)$ (ce dernier entier étant

relatif au corps de base F'') et $dim(G^*_{SC}) = [F'' : F]dim(\bar{G})$. Il suffit donc de démontrer la relation $N(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{j}_*) \leq dim(\bar{G})$. En oubliant cette construction, on est ramené au cas où toutes les composantes irréductibles de G^*_{AD} sont permutées par le groupe d'automorphismes engendré par θ^*. On fixe comme ci-dessus une composante irréductible $\underline{G}$ et on note c le plus petit entier strictement positif tel que $(\theta^*)^c(\underline{G}) = \underline{G}$. Mais alors les systèmes de racines $R(s,t)$ et $R(t,s)$ sont exactement les mêmes que des systèmes $R(\underline{s},\underline{t})$ et $R(\underline{t},\underline{s})$ déduits de $\underline{G}$, de son automorphisme $(\theta^*)^c$ et d'éléments convenables $\underline{t}$ et $\underline{s}$. De nouveau, cela nous ramène au cas où $G^*_{AD} = \underline{G}$, autrement dit, on peut supposer G^*_{AD} irréductible.

Il reste à étudier cas par cas chaque système possible pour $I(t)$ (soumis à la condition $J = I(t)$) et chaque triplet quasi-élémentaire possible. On suppose donc que (G_1, G_2, j_*) est équivalent à un triplet déduit par restriction des scalaires de F' à F d'un triplet $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ de type (1) à (5). On peut exclure le triplet (1) : dans ce cas $N = 0$ et l'inégalité $N \leq dim(G^*_{AD})$ à prouver est évidente. On peut aussi exclure le cas où θ^* est l'identité. On est alors dans le cas d'endoscopie non tordue et il résulte des constructions de [W1] 3.3 qu'alors le triplet endoscopique non standard est forcément de type (1). D'après [L] proposition II.3.2, les possibilités pour G^*_{AD} et $I(t)$ sont les suivantes :

(6) G^*_{AD} de type A_{2m}, $dim(G^*_{AD}) = (2m+1)^2 - 1$, $I(t)$ de type B_m ;

(7) G^*_{AD} de type A_{2m-1}, $dim(G^*_{AD}) = 4m^2 - 1$, $I(t)$ de type C_m ;

(8) G^*_{AD} de type A_{2m-1}, $dim(G^*_{AD}) = 4m^2 - 1$, $I(t)$ de type D_m ;

(9) G^*_{AD} de type D_m avec $m \geq 4$, $dim(G^*_{AD}) = m(2m-1)$, $I(t)$ de type $B_{m^+} \cup B_{m^-}$, avec $m^+ + m^- = m - 1$;

(10) G^*_{AD} de type D_4, $dim(G^*_{AD}) = 28$, $I(t)$ de type G_2 ;

(11) G^*_{AD} de type D_4, $dim(G^*_{AD}) = 28$, $I(t)$ de type A_2 ;

(12) G^*_{AD} de type E_6, $dim(G^*_{AD}) = 78$, $I(t)$ de type F_4, C_4 ou $B_3 \cup A_1$.

Dans le cas où $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ est de type (4), on peut exclure les cas classiques (6) à (9) : des opérations consistant à prendre des commutants ou à passer au groupe dual à partir d'un groupe classique ne sauraient créer un groupe de type F_4. Les cas (10) et (11) sont exclus car $I(t)$ y est trop petit pour contenir F_4. Il ne reste que le cas (12). La seule possibilité est que $I(t)$ soit lui-même de type F_4. Il ne contient évidemment qu'une copie de ce système, donc $F' = F$. Mais alors, par définition, $N = 78 = dim(G^*_{AD})$.

Dans le cas où $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ est de type (5), on peut exclure les cas classiques pour la même raison que ci-dessus. Un système de type G_2 ne peut pas être contenu dans des systèmes de types A_2, F_4, C_4 ou B_2. Il ne reste que le cas (10). De nouveau $F' = F$ et $N = 28 = dim(G^*_{AD})$.

Supposons $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ de type (2). On peut exclure les cas (8), (10) et (11) : un système de type B_n ne peut pas intervenir dans un système de type D_m, G_2 ou A_2. Posons $d = [F' : F]$. Alors $N = d(n+1)(2n+1)$. On a d systèmes orthogonaux de type B_n contenus dans le système de racines de $I(t)$. Donc le rang de $I(t)$ est au moins dn. Il suffit alors de prouver

- dans le cas (6), l'inégalité $m \geq dn$ entraîne $(2m+1)^2 - 1 \geq d(n+1)(2n+1)$;
- dans le cas (7), l'inégalité $m \geq dn$ entraîne $4m^2 - 1 \geq d(n+1)(2n+1)$;
- dans le cas (9), l'inégalité $m - 1 \geq dn$ entraîne $m(2m-1) \geq d(n+1)(2n+1)$;
- dans le cas (12), l'inégalité $4 \geq dn$ entraîne $78 \geq d(n+1)(2n+1)$.

On laisse au lecteur la vérification élémentaire.

Supposons $(G_{0,1}, G_{0,2}, j_{0,*})$ de type (3). On peut supposer $n \geq 3$: si $n = 2$, le cas (3) se confond avec le cas (2) déjà traité. On peut alors exclure les cas (10) et (11) où $I(t)$ est de trop petit rang. On peut aussi exclure les cas (6), (8) ou (9) : un système C_n avec

$n \geq 3$ n'est pas un sous-système de B_m ou D_m. Dans les cas restants, le même argument que ci-dessus ramène à prouver

- dans le cas (7), l'inégalité $m \geq dn$ entraîne $4m^2 - 1 \geq d(4n^2 - 1)$;
- dans le cas (12), l'inégalité $4 \geq dn$ entraîne $78 \geq d(4n^2 - 1)$.

De nouveau, on laisse la vérification au lecteur. Cela prouve le lemme. $\square$

6.2 Compléments à propos de l'ensemble $\mathcal{Z}(\tilde{G})$

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F et $\tilde{G}$ un espace tordu sous G. Pour $\eta \in \tilde{G}$, notons E_η l'ensemble des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}$ de G telles que $\eta \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$, c'est-à-dire que ad_η conserve $\mathcal{E}$. Notons Θ l'ensemble des $\eta \in \tilde{G}$ tels que $E_\eta \neq \emptyset$. Rappelons les propriétés suivantes, cf. [KS] 1.1. Soient $\eta \in \Theta$ et $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) \in E_\eta$. On note W le groupe de Weyl de T dans G et $\theta = ad_\eta$. Alors

(1) les sous-groupes $Z_{G_{AD}}(\eta)$ et $(T_{ad})^\theta$ de G_{AD} sont connexes ($Z_{G_{AD}}(\eta)$ est le groupe des points fixes de θ dans G_{AD}) ;

(2) W^θ s'identifie au groupe de Weyl de $T^{\theta,0}$ dans G_η.

Montrons que

(3) pour $\eta \in \Theta$, l'ensemble E_η est une classe de conjugaison sous G_η.

Preuve. Il est clair que la conjugaison par un élément de G_η conserve E_η. Inversement, soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in E_\eta$. D'après [I] 1.3(2) et (2) ci-dessus, il existe $x \in G_\eta$ tel que $\mathcal{E}$ et $ad_x(\mathcal{E}')$ aient la même paire de Borel sous-jacente. Notons (B, T) cette paire. Il existe alors $t \in T$ de sorte que $\mathcal{E} = ad_{tx}(\mathcal{E}')$. Puisque ad_η conserve $\mathcal{E}'$ et que $x \in G_\eta$, ad_η conserve $ad_x(\mathcal{E}')$. Puisque ad_η conserve aussi $\mathcal{E} = ad_{tx}(\mathcal{E}')$, on a $ad_\eta(t) \in tZ(G)$. Donc l'image t_{ad} de t dans T_{ad} est fixe par θ. D'après (1), $T^{\theta,0}$ s'envoie surjectivement dans T_{ad}^θ. On a donc $t \in Z(G)T^{\theta,0}$. Quitte à multiplier t par un élément de $Z(G)$, on peut supposer $t \in T^{\theta,0} \subset G_\eta$. En posant $y = tx$, on a $y \in G_\eta$ et $\mathcal{E} = ad_y(\mathcal{E}')$. $\square$

Rappelons que, pour toute paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$, on a des applications

$$(4) \qquad Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) \to \mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E}) = Z(\tilde{G}, \mathcal{E})/(1-\theta)(Z(G)) \simeq \mathcal{Z}(\tilde{G}).$$

Pour une autre paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'$, on choisit $x \in G$ tel que $ad_x(\mathcal{E}') = \mathcal{E}$. Le diagramme suivant est commutatif

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} Z(\tilde{G}, \mathcal{E}') & & \\ & \searrow & \\ ad_x \downarrow & & \mathcal{Z}(\tilde{G}) \\ & \nearrow & \\ Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) & & \end{array}$$

Pour $\eta \in \Theta$, choisissons $\mathcal{E} \in E_\eta$. Via (4), η s'envoie alors sur un élément de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. La propriété (3) et la commutativité du diagramme ci-dessus montrent que cet élément ne dépend pas du choix de $\mathcal{E}$. On obtient ainsi une application $\Theta \to \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Il est immédiat qu'elle est équivariante pour les actions galoisiennes. L'ensemble Θ est invariant par conjugaison par G. Notons $\Theta/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison.

Lemme. *L'application précédente se quotiente en une bijection de $\Theta/conj$ sur $\mathcal{Z}(\tilde{G})$.*

Preuve. Soient $\eta, \eta' \in \Theta$, supposons ces éléments conjugués. Fixons $x \in G$ tel que $ad_x(\eta') = \eta$. Fixons aussi $\mathcal{E} \in E_\eta$ et $\mathcal{E}' \in E_{\eta'}$. La paire de Borel épinglée $ad_x(\mathcal{E}')$ est conservée par ad_η. D'après (3), quitte à multiplier x à gauche par un élément de G_η, on peut supposer $ad_x(\mathcal{E}') = \mathcal{E}$. Le diagramme (5) montre alors que η et η' ont même image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Inversement, soient $\eta, \eta' \in \Theta$, supposons que ces éléments ont même image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. On fixe $\mathcal{E} \in E_\eta$ et $\mathcal{E}' \in E_{\eta'}$. On fixe $x \in G$ tel que $ad_x(\mathcal{E}') = \mathcal{E}$. Alors $ad_x(\eta') = z\eta$, avec $z \in Z(G)$. D'après (5), l'image de η' dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est aussi celle de $z\eta$. Pour qu'elle soit égale à celle de η, il faut que z appartienne à $(1-\theta)(Z(G))$. Ecrivons $z = (\theta - 1)(z')$, avec $z' \in Z(G)$. Alors $ad_{z'x}(\eta') = \eta$ et η et η' sont conjugués. Cela prouve que l'application $\Theta \to \mathcal{Z}(\tilde{G})$ se quotiente en une injection $\Theta/conj \to \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$. Alors $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ est contenu dans Θ et notre application coïncide sur cet ensemble avec l'application (4). Celle-ci est surjective par définition de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Cela prouve la surjectivité de l'application de l'énoncé. $\square$

6.3 Définition de triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ particuliers

Considérons un système de racines et un automorphisme θ^* de ce système. On introduit un groupe réductif connexe G sur F, simplement connexe et déployé, dont le système de racines est celui fixé. Fixons une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^*$ de G définie sur F. A θ^* est alors associé un automorphisme de G qui conserve $\mathcal{E}^*$, et qui est défini sur F. On le note encore θ^*. On introduit l'espace tordu $\tilde{G} = G\theta^*$. C'est un espace principal homogène sous G à gauche, muni du point marqué θ^*. L'action de G à droite est définie par $(g\theta^*, x) \mapsto g\theta^*(x)\theta^*$ et l'action galoisienne fixe θ^*. On voit que la classe d'isomorphisme du couple $(G, \tilde{G})$ est uniquement déterminée par le système de racines et son automorphisme (plus précisément par la classe de conjugaison de ce dernier dans le groupe d'automorphismes du système de racines). Plus généralement, considérons une extension finie F' de F, un système de racines et un automorphisme θ^* de ce système. On introduit un couple $(G_{F'}, \tilde{G}_{F'})$ défini sur F' associé au système de racines et à son automorphisme. On note $(G, \tilde{G})$ le couple sur F déduit de $(G_{F'}, \tilde{G}_{F'})$ par restriction des scalaires.

Fixons un tel couple $(G, \tilde{G})$. Parce que G est simplement connexe, on a la propriété supplémentaire suivante. Soient $\eta \in \Theta$ et $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) \in E_\eta$. Posons $\theta = ad_\eta$. Alors

(1) $Z_G(\eta)$ et T^θ sont connexes.

Pour $\eta \in \tilde{G}(F)$, notons $E_{\eta,F}$ l'ensemble des paires de Borel épinglées $\mathcal{E}$ de G définies sur F telles que $\eta \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. Notons Θ_F l'ensemble des $\eta \in \tilde{G}(F)$ tels que $E_{\eta,F} \neq \emptyset$. Par construction, l'ensemble Θ_F n'est pas vide. On a $\Theta_F \subset \Theta^{\Gamma_F}$ et l'application de 6.2 se restreint en une application $\Theta_F \to \mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$. L'ensemble Θ_F n'a pas de raison d'être invariant par conjugaison stable. On peut néanmoins introduire la relation d'équivalence dans Θ_F : deux éléments sont équivalents si et seulement s'ils sont stablement conjugués. On note $\Theta_F/st-conj$ l'ensemble des classes d'équivalence. Remarquons que, d'après (1), la classe de conjugaison stable d'un élément $\eta \in \Theta_F$ est l'intersection de $\tilde{G}(F)$ avec la classe de conjugaison par $G(\bar{F})$ de η. On en déduit une injection $\Theta_F/st-conj \to \Theta/conj$. Montrons que

(2) l'application du lemme 6.2 se restreint en une bijection $\Theta_F/st-conj \simeq \mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$.

Preuve. Le lemme 6.2 nous dit que cette restriction est injective. Soit $e \in \mathcal{Z}(\tilde{G})^{\Gamma_F}$. Puisque Θ_F n'est pas vide, fixons $\eta \in \Theta_F$ et $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) \in E_{\eta,F}$. On peut

fixer un élément $z \in Z(G)$ tel que e soit l'image de $z\eta$. Puisque e est fixe par Γ_F, on a $z\sigma(z)^{-1} \in (1-\theta)(Z(G))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. L'application $\sigma \mapsto z\sigma(z)^{-1}$ est un cocycle de Γ_F dans $(1-\theta)(Z(G))$, que l'on pousse en un cocycle à valeurs dans $(1-\theta)(T)$. Il résulte des constructions que T et $(1-\theta)(T)$ sont déduits par restriction des scalaires de tores déployés sur F'. Donc $(1-\theta)(T)$ est induit et $H^1(\Gamma_F;(1-\theta)(T)) = \{1\}$. On peut donc fixer $u \in T$ de sorte que $z\sigma(z)^{-1} = (1-\theta)(u\sigma(u)^{-1})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. En notant u_{ad} l'image de u dans T_{ad}, cette relation implique que $u_{ad}\sigma(u_{ad})^{-1} \in T_{ad}^{\theta}$. Donc $\sigma \mapsto u_{ad}\sigma(u_{ad})^{-1}$ est un cocycle à valeurs dans T_{ad}^{θ}. De nouveau, ce tore est induit et $H^1(\Gamma_F;T_{ad}^{\theta}) = \{1\}$. On peut donc fixer $v_{ad} \in T_{ad}^{\theta}$ de sorte que $u_{ad}\sigma(u_{ad})^{-1} = v_{ad}\sigma(v_{ad})^{-1}$ pour tout σ. Relevons v_{ad} en un élément $v \in T^{\theta}$. Posons $t = uv^{-1}$. On a alors $x_{ad} \in T_{ad}^{\Gamma_F}$. Puisque $v \in T^{\theta}$, on a encore l'égalité $z\sigma(z)^{-1} = (1-\theta)(x\sigma(x)^{-1})$ pour tout σ. Posons $\eta' = ad_{x^{-1}}(z\eta)$ et $\mathcal{E}' = ad_{x^{-1}}(\mathcal{E})$. La relation précédente implique que $\eta' \in \tilde{G}(F)$. Parce que x_{ad} est fixe par Γ_F, $\mathcal{E}'$ est définie sur F. Alors $\mathcal{E}'$ appartient à $E_{\eta',F}$ et η' appartient à Θ_F. Le diagramme 6.2 (5) montre que l'image de η' dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est la même que celle de $z\eta$, laquelle est e. Cela achève la preuve. $\square$

Puisque G est simplement connexe, $\hat{G}$ est adjoint et $H^1(W_F;Z(\hat{G})) = \{1\}$. Complétons le couple $(G,\tilde{G})$ par l'unique cocycle possible $\mathbf{a} = 1$. Remarquons que, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$, le choix d'un élément $\eta \in \Theta_F$ permet d'identifier $\tilde{G}'$ à G' de la façon suivante. On note e l'image de η dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$. Cet élément est fixe par Γ_F. En se rappelant que $\tilde{G}' = G' \times_{\mathcal{Z}(G)} \mathcal{Z}(\tilde{G})$, l'application qui, à $x \in G'$, associe l'image de (x,e) dans $\tilde{G}'$ identifie G' à $\tilde{G}'$.

On fixe comme toujours une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B},\hat{T},(\hat{E}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}\in\Delta})$ de $\hat{G}$, conservée par l'action galoisienne et on note $\hat{\theta}$ l'automorphisme habituel qui la conserve. Introduisons la donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ "maximale" de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ définie par $\tilde{s} = \hat{\theta}$ et $\mathcal{G}' = \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$. **On suppose désormais que le système de racines de départ ne contient pas de composante de type** A_{2n}. On a

(3) les applications naturelles $\mathcal{Z}(G) = Z(G)/(1-\theta)(Z(G)) \to Z(G')$ et $\mathcal{Z}(\tilde{G}) \to \mathcal{Z}(\tilde{G}')$ sont bijectives.

Preuve. Puisque les ensembles $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ et $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$ sont des espaces principaux homogènes sous respectivement $\mathcal{Z}(G)$ et $Z(G')$, la bijectivité de la deuxième application résulte de celle de la première. Fixons des paires de Borel (B,T) de G et (B',T') de G'. Notons $\Sigma(T)$ et $\Sigma(T')$ les ensembles de racines de T dans $\mathfrak{g}$ et de T' dans $\mathfrak{g}'$. On a un homomorphisme $\xi : T \to T'$ qui se quotiente en un isomorphisme $T/(1-\theta)(T) \simeq T'$. La description de [I] 1.6 se simplifie puisque, d'après l'hypothèse sur le système de racines, tous les éléments de $\Sigma(T)$ sont de type 1. On obtient que $\Sigma(T')$ est l'ensemble des $N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(T)$. Soit $t \in T$ tel que $\xi(t) \in Z(G')$. Alors $N\alpha(t) = 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(T)$. Puisque θ permute la base de $X_*(T_{ad})$ formée des copoids associés aux racines simples, on voit que cette condition implique que l'image t_{ad} de t dans T_{ad} appartient à $(1-\theta)(T_{ad})$. Il en résulte que $t \in Z(G)(1-\theta)(T)$. Alors $\xi(t)$ est aussi l'image par ξ d'un élément de $Z(G)$. Cela prouve la surjectivité de la première application de (3). Pour prouver son injectivité, il suffit de prouver celle de l'application $Z(G)/(1-\theta)(Z(G)) \to T/(1-\theta)(T)$, ou encore de prouver que $Z(G) \cap (1-\theta)(T) = (1-\theta)(Z(G))$. Or, soit $t \in T$ tel que $(1-\theta)(t) \in Z(G)$. Alors $t_{ad} \in T_{ad}^{\theta}$. Puisque ce tore est connexe, l'application $T^{\theta} \to T_{ad}^{\theta}$ est surjective et on peut écrire $t = zt'$, avec $z \in Z(G)$ et $t' \in T^{\theta}$. Alors $(1-\theta)(t) = (1-\theta)(z) \in (1-\theta)(Z(G))$. $\square$

Soit $\eta \in \Theta_F$. On l'envoie sur un élément de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$, puis sur un élément $\epsilon \in \mathcal{Z}(\tilde{G}')$. On a $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$. Fixons un élément $\mathcal{E} \in E_{\eta,F}$ dont on note (B,T) la paire de Borel sous-jacente et fixons une paire de Borel (B',T') de G' définie sur F. Le sextuplet $(\epsilon,B',T',B,T,\eta)$

est un diagramme. A l'aide de la description des ensembles de racines de [W1] 3.3, on vérifie aisément que G_η et $G' = G'_\epsilon$ sont simplement connexes. La correspondance $\eta \mapsto \epsilon$ se quotiente en une bijection entre l'ensemble de classes de conjugaison stable $\Theta_F/st-conj$ et l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments de $\mathcal{Z}(\tilde{G}')^{\Gamma_F}$ (ces dernières classes étant réduites à un élément). Il est assez clair qu'inversement, une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}'(F)$ qui correspond à une classe dans $\Theta_F/st-conj$ est la classe définie par cette bijection.

Considérons un triplet endoscopique non standard quasi-élémentaire (G_1, G_2, j_*) déduit par restriction des scalaires de F' à F d'un triplet de type (2), (3), (4) ou (5). On lui associe un système de racines et un automorphisme θ^* de ce système :

- dans le cas (2), le système est D_{n+1} si $n \geq 3$ et A_3 si $n = 2$; θ^* est d'ordre 2 ;
- dans le cas (3), le système est A_{2n-1} et θ^* est d'ordre 2 ;
- dans le cas (4), le système est E_6 et θ^* est d'ordre 2 ;
- dans le cas (5), le système est D_4 et θ^* est d'ordre 3.

Par la construction ci-dessus, ce système, cet automorphisme et l'extension F' déterminent un couple $(G, \tilde{G})$, que l'on complète par le cocycle $\mathbf{a} = 1$. On introduit comme ci-dessus la donnée endoscopique maximale $\mathbf{G}' = (\hat{G}', \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F, \hat{\theta})$. Soit $\eta \in \Theta_F$ et ϵ son image dans $\tilde{G}'(F)$. On vérifie que le couple (ϵ, η) donne naissance comme en 5.1 au triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*). Les groupes G_1 et G_2 sont respectivement égaux à G_η et $G'_\epsilon = G'$, ces deux groupes étant simplement connexes.

Lemme. *Soient $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, η un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$ et ϵ un élément semi-simple de $G'(F)$ qui se correspondent. Notons (G'_1, G'_2, j'_*) le triplet endoscopique non standard auquel ils donnent naissance. Supposons que $\mathbf{G}'$ ne soit pas équivalente à la donnée maximale ou que η ne soit pas stablement conjugué à un élément de Θ_F. Alors on a l'inégalité $N(G'_1, G'_2, j'_*) < dim(G_{SC})$.*

Preuve. En vertu du lemme 6.1, il s'agit d'exclure l'égalité $N(G'_1, G'_2, j'_*) = dim(G_{SC})$. On reprend la démonstration de ce lemme en étudiant les cas où les inégalités de rang peuvent devenir des égalités. On s'aperçoit que, si on a égalité, l'élément t de cette démonstration est égal à 1 et le triplet (G'_1, G'_2, j'_*) est notre triplet (G_1, G_2, j_*) de départ. L'égalité $t = 1$ signifie que η appartient à Θ. Puisque η appartient à $\tilde{G}(F)$, son image e dans $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est fixe par Γ_F. D'après (2), il existe $\eta_0 \in \Theta_F$ qui a e pour image. D'après le lemme 6.2, η est stablement conjugué à η_0. On connaît le système de racines de G'_1 : c'est l'ensemble Σ_2 de [W1] 3.3. Comme on l'a dit, la description de cette référence se simplifie car notre groupe G n'a que des racines de type 1. En supposant $\tilde{s} = s\hat{\theta}$, avec $s \in \hat{T}$, on voit que l'égalité $G'_1 = G_1 = G_{\eta_0}$ entraîne que, pour toute racine $\hat{\alpha}$ de $\hat{T}$, on a $N\hat{\alpha}(s) = 1$. Par le même argument que dans la preuve de (3), et parce que le groupe $\hat{G}$ est adjoint, cette condition implique $s \in (1 - \hat{\theta})(\hat{T})$. Quitte à remplacer $\mathbf{G}'$ par une donnée équivalente, on peut supposer $s = 1$ et $\tilde{s} = \hat{\theta}$. Puisque $Z(\hat{G}) = \{1\}$, on a une relation $s\hat{\theta}(g)w(s)^{-1} = g$ pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$. Puisque $s = 1$, cette relation se simplifie en $g \in \hat{G}^{\hat{\theta}}$. Mais ce groupe est connexe ([KS] 1.1) donc $g \in \hat{G}_{\hat{\theta}}$ et $\mathcal{G}' = \hat{G}'_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$. Alors la donnée $\mathbf{G}'$ est équivalente à la donnée "maximale". Mais alors, on est dans la situation que l'énoncé exclut. $\square$

6.4 Mise en place des récurrences

On aura a prouver des assertions concernant soit un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ comme en [II] 1.1, soit un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*). Concernant les triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, on conserve les hypothèses de récurrence posées en [II] 1.1. Mais il nous faut intercaler les hypothèses concernant ces triplets et celles concernant les triplets endoscopiques non standard.

Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, on ne pose aucune hypothèse concernant les triplets endoscopiques non standard. Les seuls tels triplets intervenant dans ce cas sont triviaux (du cas (1) de 6.1) et leurs propriétés sont tautologiques.

Dans les autres cas, on raisonne par récurrence sur un entier $N \geq 0$.

Pour démontrer une assertion concernant l'un des triplets particuliers $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ définis en 6.3 tel que $dim(G_{SC}) = N$, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets endoscopiques non standard (G_1, G_2, j_*) tels que $N(G_1, G_2, j_*) < N$ (en plus, naturellement, des hypothèses posées en [II] 1.1). Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ tel que $dim(G_{SC}) = N$ et qui n'est pas l'un des triplets particuliers définis en 6.3, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets endoscopiques non standard (G_1, G_2, j_*) tels que $N(G_1, G_2, j_*) \leq N$.

Pour démontrer une assertion concernant un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*) tel que $N(G_1, G_2, j_*) = N$, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets endoscopiques non standard (G'_1, G'_2, j'_*) tels que $N(G'_1, G'_2, j'_*) < N$. On suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure tels que $dim(G'_{SC}) \leq N$. On suppose connues toutes les assertions concernant les triplets $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ définis en 6.3 tels que $dim(G'_{SC}) = N$. On suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ quelconques tels que $dim(G'_{SC}) < N$.

En raisonnant ainsi, on a les deux propriétés suivantes :

- quand on travaille avec un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, il y a au plus un nombre fini de classes de conjugaison stable d'éléments $\eta \in \tilde{G}(F)$ qui peuvent créer des triplets endoscopiques non-standard dont les propriétés ne sont pas connues ;

- quand on travaille avec un triplet (G_1, G_2, j_*), on peut le décomposer en produit de triplets équivalents à des triplets quasi- élémentaires qui, ou bien sont de type (1), auquel cas on démontrera directement les propriétés en vue, ou bien sont issus d'un couple (ϵ, η) provenant d'un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ dont les propriétés sont déjà connues.

6.5 Quelques définitions

On considère dans ce paragraphe un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*). On utilise les notations de 6.1. De j_* se déduit une correspondance bijective entre classes de conjugaison stables dans $\mathfrak{g}_1(F)$ et $\mathfrak{g}_2(F)$. Il s'en déduit un isomorphisme $SI(\mathfrak{g}_1(F)) \otimes Mes(G_1(F)) \simeq SI(\mathfrak{g}_2(F)) \otimes Mes(G_2(F))$, d'où, par dualité, un isomorphisme

$$(1) \qquad D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_1(F)) \otimes Mes(G_1(F))^* \simeq D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}_2(F)) \otimes Mes(G_2(F))^*.$$

L'application j_* induit une bijection entre Levi standard de G_1 et Levi standard de G_2. Soient M_1 et M_2 deux tels Levi qui se correspondent. On a comme ci-dessus un isomorphisme

$$(2) \qquad D^{st}_{géom}(\mathfrak{m}_1(F)) \otimes Mes(M_1(F))^* \simeq D^{st}_{géom}(\mathfrak{m}_2(F)) \otimes Mes(M_2(F))^*.$$

Ces isomorphismes se restreignent évidemment aux espaces de distributions à support nilpotent, notés $D^{st}_{nil}(\mathfrak{g}_1(F))$ etc...

Pour définir des intégrales pondérées, on doit fixer des mesures sur $\mathcal{A}_{M_i}$ pour $i = 1, 2$. De l'application j_* se déduit un isomorphisme $\mathcal{A}_{M_1} \simeq \mathcal{A}_{M_2}$ et on suppose que les mesures se correspondent par cet isomorphisme.

On doit encore définir une certaine constante. Fixons des paires de Borel invariantes par Γ_F des groupes duaux $\hat{G}_i$, pour $i = 1, 2$, dont on note les tores $\hat{T}_i$. Soit $n > 0$ un entier tel que nb prenne ses valeurs dans $\mathbb{N}_{>0}$. Alors nj^* envoie le réseau engendré par $\Sigma(T_2)$ dans celui engendré par $\Sigma(T_1)$. De nj^* se déduit dualement un homomorphisme de $\hat{T}_2$ dans $\hat{T}_1$. On vérifie qu'il envoie $Z(\hat{M}_2)$ dans $Z(\hat{M}_1)$. Il est équivariant et on obtient un homomorphisme

$$\hat{j}_n : Z(\hat{M}_2)^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_1)^{\Gamma_F}.$$

Puisque G_1 et G_2 sont simplement connexes, leurs groupes duaux sont adjoints et les groupes ci-dessus sont connexes. Cela entraîne que l'homomorphisme est surjectif. Son noyau est fini. On pose

$$c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} = n^{-a_{M_2}} |ker(\hat{j}_n)|,$$

où, comme toujours, a_{M_2} est la dimension de A_{M_2}. Cela ne dépend pas du choix de n. En effet, si l'on remplace n par nm, pour un entier $m \geq 1$, on a l'égalité $\hat{j}_{nm} = (\hat{j}_n)^m$, donc le nombre d'éléments du noyau est multiplié par m élevé à la puissance $dim(Z(\hat{M}_2)^{\Gamma_F})$. Or cette dimension est égale à a_{M_2} et le terme défini ci-dessus ne change pas.

Pour $i = 1, 2$ soit B_i une fonction sur $\Sigma(T_i)$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{Q}_{>0}$ des rationnels strictement positifs. On suppose ces fonctions reliées par la condition suivante :

- pour tout $\alpha_2 \in \Sigma(T_2)$, $B_1(\tau(\alpha_2)) = \frac{B_2(\alpha_2)}{b(\alpha_2)}$.

Remarquons que cette condition est symétrique en le sens suivant. Le triplet (G_2, G_1, j_*^{-1}) est encore endoscopique non standard. L'analogue de la bijection τ pour ce triplet est τ^{-1}. L'analogue de la fonction b est la fonction b' définie par $b'(\alpha_1) = b(\tau^{-1}(\alpha_1))^{-1}$. Alors le couple (B_2, B_1) vérifie encore l'hypothèse ci-dessus pour ce triplet.

Montrons que

(3) la fonction B_1 vérifie les hypothèses de [II] 1.8 si et seulement si B_2 les vérifie.

Preuve. D'après la symétrie remarquée ci-dessus, on peut supposer que B_2 vérifie ces hypothèses et on doit montrer que B_1 les vérifie aussi. Les conditions d'équivariance résultent de celles vérifiées par B_2 et par la correspondance entre racines. Il faut vérifier que, sur un sous-système irréductible de $\Sigma(T_1)$ sur lequel on fixe une norme euclidienne possédant les propriétés usuelles, B_1 est soit constante, soit proportionnelle à la fonction $\alpha_1 \mapsto (\alpha_1, \alpha_1)$. Fixons un tel sous-système. L'ensemble des $\alpha_2 \in \Sigma(T_2)$ tels que $\tau(\alpha_2)$ appartient à ce sous-système forme un sous-système irréductible de $\Sigma(T_2)$. On est ramené à ces deux sous-systèmes irréductibles. En oubliant les actions galoisiennes qui ne jouent plus de rôle ici, on peut aussi bien supposer $\Sigma(T_2)$ et $\Sigma(T_1)$ irréductibles. On a rappelé en 6.1 tous les cas possibles, à homothétie près (et il est clair que la question est insensible à une homothétie). Si j_* est l'identité, l'assertion est claire. Dans les quatre autres cas, on constate qu'en munissant nos systèmes de produits euclidiens comme ci-dessus, il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que, pour tout $\alpha_2 \in \Sigma(T_2)$, on a les égalités $b(\alpha_2) = c_2(\alpha_2, \alpha_2) = c_1(\alpha_1, \alpha_1)^{-1}$, où $\alpha_1 = \tau(\alpha_2)$. Si B_2 est constante, alors B_1 est proportionnelle à $\alpha_1 \mapsto (\alpha_1, \alpha_1)$. Si B_2 est proportionnelle à $\alpha_2 \mapsto (\alpha_2, \alpha_2)$, alors B_1 est constante. $\square$

Fixons un tel couple de fonctions vérifiant les hypothèses de [II] 1.8. Fixons deux Levi M_1 et M_2 qui se correspondent. L'isomorphisme j_* définit un isomorphisme encore

noté $j_* : \mathcal{A}_{M_1} \to \mathcal{A}_{M_2}$. Soit $\alpha_2 \in \Sigma(T_2)$, posons $\alpha_1 = \tau(\alpha_2)$ et, pour $i = 1, 2$, notons α'_i la restriction de $B_i(\alpha_i)^{-1}\alpha_i$ à $\mathcal{A}_{M_i}$. Il résulte des définitions que $\alpha'_2 \circ j_* = \alpha'_1$. Donc, par dualité, j_* détermine une bijection de $\Sigma(A_{M_2}, B_2)$ sur $\Sigma(A_{M_1}, B_1)$. Cette bijection est compatible aux équivalences sur chacun de ces ensembles. On a donc aussi une bijection de $\mathcal{J}_{M_2}^{G_2}(B_2)$ sur $\mathcal{J}_{M_1}^{G_1}(B_1)$. Pour $i = 1, 2$, soit $J_i \in \mathcal{J}_{M_i}^{G_i}(B_i)$. On suppose que J_1 et J_2 se correspondent par cette bijection. Soit $u \in U_{J_2}$. Via l'exponentielle, on considère que u est un germe de fonctions défini au voisinage de 0 dans $\mathfrak{a}_{M_2}(F)$. On vérifie que la fonction $X_1 \mapsto u(j_*(X_1))$ sur $\mathfrak{a}_{M_1}(F)$ appartient à U_{J_1}. En composant avec l'exponentielle la définition de [II] 3.5, on obtient une application linéaire

$$\sigma_{J_i}^{G_i} : D_{nil}^{st}(\mathfrak{m}_i(F)) \otimes Mes(M_i(F))^* \to U_{J_i} \otimes (D_{nil}^{st}(\mathfrak{m}_i(F)) \otimes Mes(M_i(F))^*)/Ann_{nil}^{G_i,st}.$$

En reprenant la preuve du lemme [II] 3.1 , on voit que l'isomorphisme (2) envoie $Ann_{nil}^{G_1,st}$ sur $Ann_{nil}^{G_2,st}$.

Remarquons que J_1 est l'élément maximal de $\Sigma(A_{M_1}, B_1)$ si et seulement si J_2 est l'élément maximal de $\Sigma(A_{M_2}, B_2)$.

6.6 Les termes σ_J

Soient (G_1, G_2, j_*) un triplet endoscopique non standard, B_1 et B_2 deux fonctions comme en 6.6 vérifiant toutes deux les hypothèses de [II] 1.8 et M_1 et M_2 deux Levi qui se correspondent.

Proposition (à prouver). *On suppose que B_1 est constante. Pour $i = 1, 2$, soient $J_i \in \mathcal{J}_{M_i}^{G_i}(B_i)$ et $\boldsymbol{\delta}_i \in D_{nil}^{st}(\mathfrak{m}_i(F)) \otimes Mes(M_i(F))^*$. On suppose que J_1 et J_2 se correspondent par la bijection entre les ensembles $\Sigma(A_{M_i}, B_i)$ et que $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$ se correspondent par l'isomorphisme 6.5(2). Alors, pour tout $X_1 \in \mathfrak{a}_{M_1}(F)$ en position générale et proche de 0, on a l'égalité*

$$\sigma_{J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, X_1) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} \sigma_{J_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, j_*(X_1)).$$

Montrons que

(1) cette assertion est vérifiée si, pour $i = 1, 2$, J_i n'est pas l'élément maximal de $\Sigma(A_{M_i}, B_i)$.

Preuve. Pour $i = 1, 2$, on construit le groupe G_{i,J_i}. D'après la proposition 1.2(i), on a l'égalité

$$\sigma_{J_i}^{G_i}(\boldsymbol{\delta}_i, X_i) = i_{J_i}^{G_i} \sigma_{J_i}^{G_{i,J_i}}(\boldsymbol{\delta}_i, X_i).$$

Notons $M_{i,sc}$ l'image réciproque de M_i dans $G_{i,J_i,SC}$. On peut fixer $\boldsymbol{\delta}'_i \in D_{nil}^{st}(\mathfrak{m}_{i,sc}(F)) \otimes Mes(M_{i,sc}(F))^*$ tel que

$$\boldsymbol{\delta}_i = \iota_{M_{i,sc},M_i}^*(\boldsymbol{\delta}'_i).$$

D'après le lemme 3.6, on a aussi

$$\sigma_{J_i}^{G_i}(\boldsymbol{\delta}_i, X_i) = i_{J_i}^{G_i} \iota_{M_{i,sc},M_i}^*(\sigma_{J_i}^{G_{i,J_i,SC}}(\boldsymbol{\delta}'_i, X_i)).$$

Notons $T_{i,sc}$ l'image réciproque de T_i dans $G_{i,J_i,SC}$. On vérifie que j_* se restreint en un isomorphisme de $X_*(T_{1,sc}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sur $X_*(T_{2,sc}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et que, en notant encore j_* cette restriction, le triplet $(G_{1,J_1,SC}, G_{1,J_2,SC}, j_*)$ est encore endoscopique non standard. Les

distributions $\boldsymbol{\delta}'_1$ et $\boldsymbol{\delta}'_2$ se correspondent. En supposant que les J_i ne sont pas maximaux, on a $dim(G_{i,J_i,SC}) < dim(G_i)$ et on peut appliquer le lemme ci-dessus :

$$\sigma_{J_1}^{G_{1,J_1,SC}}(\boldsymbol{\delta}'_1, X_1) = c_{M_{1,sc},M_{2,sc}}^{G_{1,J_1,SC},G_{2,J_2,SC}} \sigma_{J_2}^{G_{2,J_2,SC}}(\boldsymbol{\delta}'_2, X_2).$$

Toutes ces égalités conduisent à l'égalité de l'énoncé pourvu que l'on ait

$$(2) \qquad i_{J_1}^{G_1} c_{M_{1,sc},M_{2,sc}}^{G_{1,J_1,SC},G_{2,J_2,SC}} = i_{J_2}^{G_2} c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}.$$

Remarquons que, puisque G_i est simplement connexe pour $i = 1, 2$, on a simplement

$$i_{J_i}^{G_i} = |Z(\hat{G}_{i,J_i})^{\Gamma_F}|^{-1}.$$

Fixons un entier n assez grand. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & A & \to & Z(\hat{G}_{2,J_2})^{\Gamma_F} & \overset{\hat{j}_n}{\to} & Z(\hat{G}_{1,J_1})^{\Gamma_F} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & B & \to & Z(\hat{M}_2)^{\Gamma_F} & \overset{\hat{j}_n}{\to} & Z(\hat{M}_1)^{\Gamma_F} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & C & \to & Z(\hat{M}_{2,ad})^{\Gamma_F} & \overset{\hat{j}_n}{\to} & Z(\hat{M}_{1,ad})^{\Gamma_F} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

où A, B et C sont les noyaux des flèches horizontales de droite. Les lignes de ce diagramme sont exactes. Les deux dernières colonnes aussi. Il en résulte que la première colonne est exacte. D'où l'égalité $|B| = |A||C|$. On a

$$|B| = n^{a_{M_2}} c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2},$$

$$|C| = n^{a_{M_2}} c_{M_{1,sc},M_{2,sc}}^{G_{1,J_1,SC},G_{2,J_2,SC}},$$

et

$$|A| = |Z(\hat{G}_{2,J_2})^{\Gamma_F}| Z(\hat{G}_{1,J_1})^{\Gamma_F}|^{-1} = i_{J_1}^{G_1}(i_{J_2}^{G_2})^{-1}.$$

D'où (2), ce qui achève la preuve. □

6.7 Germes de Shalika

On conserve les mêmes données. Pour $i = 1, 2$, on sait définir le germe $Sg_{M_i,unip}^{G_i}(B_i)$ au voisinage de l'origine dans $M_i(F)$. Puisqu'il vit au voisinage de l'origine, on peut le descendre par l'exponentielle en un germe sur l'algèbre de Lie que l'on note $Sg_{M_i,nil}^{G_i}(B_i)$. C'est un germe d'application linéaire

$$D_{géom,G_i-équi}^{st}(\mathfrak{m}_i(F)) \otimes Mes(M_i(F))^* \to D_{nil}^{st}(\mathfrak{g}_i(F)) \otimes Mes(G_i(F))^*.$$

Remarquons que la notion d'élément G_i-équisingulier se définit dans les algèbres de Lie comme dans les groupes, cf. [II] 1.2.

Proposition (à prouver). *On suppose que B_1 est constante. Pour $i = 1, 2$, soit $\boldsymbol{\delta}_i \in D_{géom,G_i-équi}^{st}(\mathfrak{m}_i(F)) \otimes Mes(M_i(F))^*$. Supposons que $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$ se correspondent par l'isomorphisme 6.5(2). Alors, si $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$ sont assez voisins de l'origine, les termes $Sg_{M_1,nil}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, B_1)$ et $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} Sg_{M_2,nil}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, B_2)$ se correspondent par l'isomorphisme 6.5(1).*

6.8 Réduction des propositions 6.6 et 6.7

Lemme. *Supposons que la proposition 6.6, resp. la proposition 6.7, soit vérifiée dans le cas où (G_1, G_2, j_*) est quasi-élémentaire et B_1 est la fonction constante de valeur 1. Alors la proposition 6.6, resp. la proposition 6.7, est vérifiée.*

Preuve. On a besoin de quelques propriétés préliminaires. Considérons un seul groupe G réductif connexe et simplement connexe défini sur F, un Levi M de G et une fonction B comme en [II] 1.8. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,G-équi}(\mathfrak{m}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, $\boldsymbol{\delta}_{nil} \in D^{st}_{nil}(\mathfrak{m}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, $H \in \mathfrak{a}_M(F)$ en position générale et proche de 0 et soit $J \in \mathcal{J}^G_M(B)$. On a défini $\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}_{nil}, H)$ et $Sg^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B)$. Ces termes dépendent de la mesure que l'on a fixée en [II] 1.2 sur $\mathcal{A}^G_M$. Pour un instant, notons m cette mesure et introduisons-la dans la notation. Si on remplace m par cm, avec $c \in \mathbb{R}_{>0}$, il résulte immédiatement des définitions que

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \sigma^G_J \boldsymbol{\delta}_{nil}, H, cm) & = & c\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}_{nil}, H, m), \\ Sg^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B, cm) & = & cSg^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B, m). \end{array} \right.$$

Oublions cette parenthèse, la mesure m est maintenant fixée.

Soit $r \in F^\times$. On définit deux homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_c(\mathfrak{g}(F)) & \to & C^\infty_c(\mathfrak{g}(F)) \\ f & \mapsto & f[r] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} D_{géom}(\mathfrak{g}(F)) \otimes Mes(G(F))^* & \to & D_{géom}(\mathfrak{g}(F)) \otimes Mes(G(F))^* \\ \boldsymbol{\gamma} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma}[r] \end{array}$$

de la façon suivante. Rappelons que les données d'un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ et d'une mesure de Haar sur $G_X(F)$ définissent un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\mathfrak{g}(F)) \otimes Mes(G(F))^*$. Pour $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}(F))$ et une mesure de Haar dg sur $G(F)$, on a

$$I^G(\boldsymbol{\gamma}, f \otimes dg) = D^G(X)^{1/2} \int_{G_X(F)\backslash G(F)} f(ad_x^{-1}(X))\, dx,$$

où dx est le quotient de dg par la mesure fixée sur $G_X(F)$.Considérons d'abord un élément $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, posons $T = G_X$. Munissons $\mathfrak{t}(F)$ d'une mesure de Haar. On en déduit via l'exponentielle une mesure de Haar sur $T(F)$. Notons $\boldsymbol{\gamma}$ l'intégrale orbitale associée. La multiplication par r envoie X sur rX et transporte la mesure sur $\mathfrak{t}(F)$ sur cette mesure multipliée par $|r|_F^{-dim(T)}$. On note $\boldsymbol{\gamma}[r]$ l'intégrale orbitale associée à rX et cette nouvelle mesure. En posant $\delta(G) = dim(G) + dim(T)$ et en définissant $f[r]$ par l'égalité

$$f[r](Y) = |r|_F^{\delta(G)/2} f(rY)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(F)$, on voit que

$$(2) \qquad I^G(\boldsymbol{\gamma}[r], f \otimes dg) = I^G(\boldsymbol{\gamma}, f[r] \otimes dg).$$

Pour $\boldsymbol{\gamma}$ quelconque, $\boldsymbol{\gamma}[r]$ est défini par cette relation. Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$ quelconque, fixons une mesure sur $G_X(F)$ et notons $\boldsymbol{\gamma}$ l'intégrale orbitale associée. On vérifie que $\boldsymbol{\gamma}[r]$ est égale à $|r|_F^{\delta(G_{X_{ss}})/2}\boldsymbol{\gamma}'$, où X_{ss} est la partie semi-simple de X et $\boldsymbol{\gamma}'$ est l'intégrale orbitale associée à rX et à la même mesure sur $G_X(F)$. En tensorisant avec l'identité

de $Mes(G(F))$, on obtient des transformations de $I(\mathfrak{g}(F))\otimes Mes(G(F))$ ou $SI(\mathfrak{g}(F))\otimes Mes(G(F))$. Dualement, l'application $\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma}[r]$ préserve les distributions stables. Soit $s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$. De la donnée endoscopique maximale $\mathbf{M}$ de M et de s se déduit une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)=(G'(s),\mathcal{G}'(s),s)$. Notons que, puisqu'on travaille avec des algèbres de Lie, l'introduction de données auxiliaires pour la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ est inutile. Les facteurs de transfert sont normalisés de sorte qu'ils vaillent 1 sur la diagonale dans $\mathfrak{m}(F)\times\mathfrak{m}(F)$. Fixons s. On a donc un facteur de transfert $\Delta(s)$ sur un sous-ensemble de $\mathfrak{g}'(s;F)\times\mathfrak{g}(F)$. Le lemme 3.2.1 de [F] affirme qu'il existe un caractère χ de $F^\times$ tel que $\Delta(s)(\lambda Y,\lambda X)=\chi(\lambda)\Delta(s)(Y,X)$ pour tout couple (Y,X) et tout $\lambda\in F^\times$. En considérant un couple $Y=X\in\mathfrak{m}(F)$, on obtient $\chi=1$. Par un calcul simple, on en déduit

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ccc}(f[r])^{G'(s)} & = & (f^{G'(s)})[r]\\ transfert(\boldsymbol{\tau}[r]) & = & (transfert(\boldsymbol{\tau}))[r]\end{array}\right.$$

pour tout $f\in I(\mathfrak{g}(F))\otimes Mes(G(F))$ et tout $\boldsymbol{\tau}\in D^{st}_{géom}(\mathfrak{g}'(s;F))\otimes Mes(G'(s;F))^*$.

Soit maintenant $r\in\mathbb{Q}_{>0}$. On peut appliquer les constructions ci-dessus à cet élément. D'autre part, la fonction rB vérifie les mêmes hypothèses que B. L'ensemble $\Sigma(A_M,rB)$ est formé des α/r pour $\alpha\in\Sigma(A_M,B)$. On en déduit une biejction $\mathcal{J}^G_M(B)\simeq\mathcal{J}^G_M(rB)$. Notons J/r l'image de J dans ce dernier ensemble. Montrons que

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{ccc}\sigma^G_{J/r}(\boldsymbol{\delta}_{nil}[r],rH) & = & (\sigma^G_J(\boldsymbol{\delta}_{nil},H))[r],\\ Sg^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}[r],rB) & = & (Sg^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta},B))[r].\end{array}\right.$$

Pour la première égalité, la définition [II] 3.5(1) nous ramène par récurrence à prouver l'assertion analogue pour les termes ρ^G_J. On peut alors lever l'hypothèse que $\boldsymbol{\delta}_{nil}$ est stable. On peut supposer que $\boldsymbol{\delta}_{nil}$ est l'intégrale orbitale associée à un élément nilpotent $N\in\mathfrak{m}(F)$ et une mesure sur $M_N(F)$. Donc $\boldsymbol{\delta}_{nil}[r]$ est en tout cas une intégrale orbitale associée à rN. Alors, d'après [II] 3.2(5), on a l'égalité

$$\rho^G_{J/r}(\boldsymbol{\delta}_{nil}[r],rH)=\sum_{\underline{\alpha}'\in J/r}m(\underline{\alpha}',rN)sgn(\underline{\alpha}',rN)u_{\underline{\alpha}'}(rH)\boldsymbol{\delta}_{nil}[r].$$

Pour $\underline{\alpha}=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}\in J$, posons $\underline{\alpha}/r=\{\alpha_1/r,...,\alpha_n/r\}$. Alors $\underline{\alpha}/r\in J/r$ et la correspondance $\underline{\alpha}\mapsto\underline{\alpha}/r$ est bijective. Il est clair que $u_{\underline{\alpha}/r}(rH)=u_{\underline{\alpha}}(H)$. La formule ci-dessus se récrit

$$\rho^G_{J/r}(\boldsymbol{\delta}_{nil}[r],rH)=\sum_{\underline{\alpha}\in J}m(\underline{\alpha}/r,rN)sgn(\underline{\alpha}/r,rN)u_{\underline{\alpha}}(H)\boldsymbol{\delta}_{nil}[r].$$

Pour obtenir la première formule de (4), il reste à prouver que

$$m(\underline{\alpha}/r,rN)sgn(\underline{\alpha}/r,rN)=m(\underline{\alpha},N)sgn(\underline{\alpha},N).$$

En revenant à la définition de ces termes, cf. [II] 3.2, il suffit de prouver que, pour tout $\alpha\in\Sigma(A_M,B)$, on a $\rho(\alpha,N,B)=\rho(\alpha/r,rN,rB)$. Le groupe G_α associé à α en [II] 1.8 est le même que le groupe $G_{\alpha/r}$ associé à α/r. L'égalité précédente résulte de la même égalité pour ce groupe. Cela résout le problème si $G_\alpha\neq G$. Supposons $G_\alpha=G$, donc α est indivisible. On vient de prouver la relation requise pour $n\alpha$ pour tout $n\geq 2$. Alors la relation [II] 1.8(6) montre qu'il suffit de prouver l'égalité suivante où les fonctions B et rB ont disparu :

$$\rho(\alpha,rN)=\rho(\alpha,N)$$

pour tout $\alpha\in\Sigma(A_L)$. De nouveau, un dévissage des définitions nous ramène à prouver que les termes initiaux $\rho^{Art}(\beta,N)$ définis par Arthur sont insensibles au remplacement

de N par rN. Cela vient du fait qu'ils sont de nature géométrique et que, d'après la théorie des SL_2-triplets, rN est conjugué à N par un élément de $G(\bar{F})$. D'où la première assertion de (4).

Pour la deuxième assertion, la définition [II] 2.4(1) et la formule (3) ci-dessus nous ramène à prouver l'assertion analogue pour les germes $g^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B)$. On peut de nouveau lever l'hypothèse que $\boldsymbol{\delta}$ est stable. On a énoncé en [II] 2.3 la définition de ces germes pour des intégrales orbitales pondérées invariantes, mais les mêmes relations valent pour les intégrales orbitales pondérées non invariantes, cf. [A2] proposition 9.1. C'est-à-dire que pour $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)) \otimes Mes(G(F))$ et pour $\boldsymbol{\delta}$ assez proche de 0, on a l'égalité

$$(5) \qquad J^G_M(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} J^G_L(g^L_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f}).$$

Supposons prouvée l'assertion suivante :

(6) soient $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)) \otimes Mes(G(F)$ et $\boldsymbol{\tau} \in D_{géom}(\mathfrak{m}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$; supposons que les éléments du support de $\boldsymbol{\tau}$ sont G-équisinguliers ou nilpotents ; alors on a l'égalité

$$J^G_M(\boldsymbol{\tau}[r], rB, \mathbf{f}) = J^G_M(\boldsymbol{\tau}, B, f[r]).$$

En remplaçant $\mathbf{f}$ par $\mathbf{f}[r]$ dans (5) et en utilisant (6), on obtient

$$J^G_M(\boldsymbol{\delta}[r], \mathbf{f}) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} J^G_L(g^L_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B)[r], rB, \mathbf{f}).$$

Par récurrence, on peut utiliser la deuxième relation de (4) en y remplaçant G par tout Levi $L \neq G$. On obtient

$$J^G_M(\boldsymbol{\delta}[r], \mathbf{f}) = I^G((g^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B))[r], \mathbf{f}) + \sum_{L \in \mathcal{L}(M), L \neq G} J^G_L(g^L_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}[r], rB), rB, \mathbf{f}).$$

En comparant avec (5) appliquée à $\boldsymbol{\delta}[r]$ et à la fonction rB, on obtient

$$I^G((g^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}, B))[r], \mathbf{f}) = I^G(g^G_{M,nil}(\boldsymbol{\delta}[r], rB), \mathbf{f}),$$

ce qui prouve la deuxième assertion de (4). Il reste à prouver (6). Si $\boldsymbol{\tau}$ est à support G-équisingulier, les intégrales orbitales pondérées sont définies par une honnête intégrale et un simple calcul conduit à l'égalité cherchée (c'est essentiellement la même chose que pour (2), les fonctions poids ne perturbent pas le calcul). Supposons que $\boldsymbol{\tau}$ soit l'intégrale orbitale associée à un élément nilpotent $N \in \mathfrak{m}(F)$ et à une mesure sur $M_N(F)$. Considérons un élément $X \in \mathfrak{a}_M(F)$ en position générale, notons $\boldsymbol{\tau}_X$ l'intégrale orbitale (dans $\mathfrak{m}(F)$) associée à $X + N$ et à la même mesure sur $M_{X+N}(F) = M_N(F)$. On a alors pour tout $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)) \otimes Mes(G(F))$ une formule

$$(7) \qquad J^G_M(\boldsymbol{\tau}, B, \mathbf{f}) = lim_{X \to 0} \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(N, B, X) J^G_L(\boldsymbol{\tau}^L_X, \mathbf{f}).$$

Remplaçons $\boldsymbol{\tau}$ par $\boldsymbol{\tau}[r]$, B par rB et X par rX dans les constructions. On vérifie sur la description explicite que l'on a donnée plus haut que $\boldsymbol{\tau}_X$ est remplacé par $\boldsymbol{\tau}_X[r]$. On a aussi $(\boldsymbol{\tau}_X[r])^L = (\boldsymbol{\tau}^L_X)[r]$. La formule ci-dessus devient

$$J^G_M(\boldsymbol{\tau}[r], rB, \mathbf{f}) = lim_{X \to 0} \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(rN, rB, rX) J^G_L(\boldsymbol{\tau}^L_X[r], \mathbf{f}).$$

Par (6) appliqué au cas déjà prouvé des éléments à support G-équisingulier, c'est aussi

$$J_M^G(\boldsymbol{\tau}[r], rB, \mathbf{f}) = lim_{X\to 0} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r_M^L(rN, rB, rX) J_L^G(\boldsymbol{\tau}_X^L, \mathbf{f}[r]).$$

En comparant avec la formule (7) appliquée à $\mathbf{f}[r]$, on voit que, pour obtenir l'égalité (6), il suffit de prouver l'égalité

$$r_M^L(rN, rB, rX) = r_M^L(N, B, X)$$

pour tout L. Mais la preuve de cette égalité est exactement la même que celle de la première assertion de (4). Cela prouve la deuxième assertion de (4).

Venons-en à la preuve du lemme. Soit (G_1, G_2, j_*) un triplet endoscopique non standard pour lequel on veut prouver la proposition 6.6 ou 6.7. Il est clair que, si le triplet est produit de triplets $(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i})$ pour $i = 1, ..., m$, la proposition pour notre triplet résulte de la même proposition pour chaque triplet $(G_{1,i}, G_{2,i}, j_{*,i})$. On peut donc supposer que (G_1, G_2, j_*) est équivalent à un triplet quasi-élémentaire, autrement dit on peut fixer $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que (G_1, G_2, dj_*) soit quasi-élémentaire. On a fixé une mesure m_1 sur $\mathcal{A}_{M_1}^{G_1}$, dont se déduit via j_* une mesure m_2 sur $\mathcal{A}_{M_2}^{G_2}$. La mesure m_2' déduite via dj_* est égale à $d^{-a_M+a_G}m_2$, où on a posé $a_M = a_{M_i}$, $a_G = a_{G_i}$ pour $i = 1, 2$. On a fixé une fonction constante B_1. On note encore B_1 la valeur constante de cette fonction et on note $\mathbf{1}$ la fonction constante sur $\Sigma(A_{M_1})$ de valeur 1. Via j_*, on a déduit de B_1 une fonction B_2. Via dj_*, la fonction déduite de $\mathbf{1}$ est dB_2/B_1. On a construit à l'aide de j_* une constante $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}$, notons-la plus précisément $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}(j_*)$. On vérifie que la constante $c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}(dj_*)$ construite à l'aide de dj_* est $d^{a_M-a_G}c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}(j_*)$. Soient $J_1 \in \mathcal{J}_{M_1}^{G_1}(B_1)$, $\boldsymbol{\delta}_1 \in D_{nil}^{st}(\mathfrak{m}_1(F)) \otimes Mes(M_1(F))^*$ et $X_1 \in \mathfrak{a}_{M_1}(F)$ en position générale. Notons $J_2 \in \mathcal{J}_{M_2}^{G_2}(B_2)$ l'élément correspondant à J_1. Notons plus précisément $transfert_{j_*}$ les isomorphismes 6.5(1) et 6.5(2) relatifs à j_*. Posons $\boldsymbol{\delta}_2 = transfert_{j_*}(\boldsymbol{\delta}_1)$. Pour prouver la proposition 6.6, on doit prouver que

$$(8) \qquad transfert_{j_*}(\sigma_{J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, X_1, m_1)) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}(j_*)\sigma_{J_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, j_*(X_1), m_2).$$

Les termes B_1J_1 et B_1J_2/d appartiennent respectivement à $\mathcal{J}_{M_1}^{G_1}(\mathbf{1})$ et $\mathcal{J}_{M_2}^{G_2}(dB_2/B_1)$. Ils se correspondent. On vérifie sur les définitions que $transfert_{dj_*}$ est le composé de $transfert_{j_*}$ et de l'application $\boldsymbol{\delta} \mapsto \boldsymbol{\delta}[d]$. On peut d'ailleurs composer dans l'un ou l'autre sens car le transfert commute à l'application $\boldsymbol{\delta} \mapsto \boldsymbol{\delta}[r]$ pour tout $r \in F^\times$. Donc $transfert_{dj_*}(\boldsymbol{\delta}_1) = \boldsymbol{\delta}_2[d]$ et aussi $transfert_{dj_*}(\boldsymbol{\delta}_1[1/B_1]) = \boldsymbol{\delta}_2[d/B_1]$. Supposons la proposition 6.6 connue pour le triplet quasi-élémentaire (G_1, G_2, dj_*) et la fonction $\mathbf{1}$. Elle implique l'égalité

$$transfert_{dj_*}(\sigma_{B_1J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1[1/B_1], X_1/B_1, m_1)) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}(dj_*)\sigma_{B_1J_2/d}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2[d/B_1], dj_*(X_1/B_1), m_2').$$

D'après (4), on a l'égalité

$$\sigma_{B_1J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1[1/B_1], X_1/B_1, m_1) = \sigma_{J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, X_1, m_1)[1/B_1].$$

D'après (1) et (4), on a l'égalité

$$\sigma_{B_1J_2/d}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2[d/B_1], dj_*(X_1/B_1), m_2') = d^{-a_M+a_G}\sigma_{J_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, j_*(X_1), m_2)[d/B_1].$$

L'égalité précédente devient

$$transfert_{dj_*}(\sigma_{J_1}^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, X_1, m_1)[1/B_1]) = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2}(j_*)\sigma_{J_2}^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, j_*(X_1), m_2)[d/B_1].$$

En vertu des propriétés déjà signalées reliant le transfert aux applications $\boldsymbol{\delta} \mapsto \boldsymbol{\delta}[r]$, cette égalité est équivalente à (8) que l'on voulait prouver. Cela prouve la proposition 6.6 pour notre triplet (G_1, G_2, j_*) et nos fonctions B_1 et B_2.

L'assertion du lemme concernant la proposition 6.7 se prouve de façon analogue. □

7 Preuves des théorèmes [II] 1.10 et [II] 1.16(ii) et preuve conditionnelle du théorème [II] 1.16(i)

7.1 Les termes $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}$

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une donnée endoscopique elliptique et relevante $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$.

On suppose donné un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$ joignant un élément $\epsilon \in \tilde{M}'_{ss}(F)$ à un élément $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$. On suppose que M'_ϵ est quasi-déployé et que $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$. On note $\mathcal{O}'$ la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{M}'(F)$ et $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(F)$. Comme on l'a vu, tout élément $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ donne naissance à un triplet endoscopique non standard $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$. On a défini un système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}'(\tilde{s})$, dont on déduit une fonction $B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}$ sur le système de racines de $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$. Par la construction de 6.5, on en déduit une fonction sur le système de racines de $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$. On a

(1) cette foncton est constante de valeur 1.

Le système de racines $B^{\tilde{G}}$ a précisément été défini pour qu'il en soit ainsi. Pour vérifier cette propriété, il suffit de reprendre la définition de [II] 1.11 du système de fonctions $B^{\tilde{G}}$, celle de 6.5 de la fonction associée sur le système de racines de $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$ et d'utiliser les descriptions des systèmes de racines des groupes $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$ et $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$ donnée en [W1] 3.3.

Suppsons $A_{G'(\tilde{s})_\epsilon} = A_{\tilde{G}}$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{J}_{M'_\epsilon}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_\epsilon}(B_{\mathcal{O}'}) & \rightarrow & \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}) & & \\
 & & & \searrow & \\
\| & & & & \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} \\
 & & & \nearrow & \\
\mathcal{J}_{\bar{M}'}^{\bar{G}'(\bar{s})} & \rightarrow & \mathcal{J}_{\bar{M}}^{\bar{G}} & &
\end{array}$$

Les flèches se définissent par endoscopie ou descente, compte tenu du fait que les ensembles en question sont insensibles au remplacement d'un groupe par le revêtement simplement connexe de son groupe dérivé. On vérifie que ce diagramme est commutatif. Toutes les flèches sont injectives et, pour simplifier, on considère chacun des ensembles comme un sous-ensemble de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Fixons $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On considère l'hypothèse suivante

(2) pour chaque triplet $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'_{\epsilon,SC}, j_*)$ ci-dessus pour lequel $A_{G'(\tilde{s})_\epsilon} = A_{\tilde{G}}$ et $J \in \mathcal{J}_{\bar{M}'}^{\bar{G}'(\bar{s})}$, la proposition 6.6 est vérifiée pour cet élément J.

Rappelons la proposition [II] 3.8 que nous allons prouver sous ces hypothèses.

Proposition. *On suppose $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ tel que (2) soit vérifiée, tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{Géom}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité*

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a).$$

Preuve. Si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et si $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, l'énoncé est tautologique : le terme $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)$ est défini pour qu'il en soit ainsi. On exclut ce cas.

Rappelons la définition

$$(3) \qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) \sum_{J' \in \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}); J' \mapsto J}$$

$$transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, a)).$$

Expliquons la notation a du membre de droite. L'élément initial a appartient à $A_{\tilde{M}}(F)$. Il est proche de 1, on peut l'écrire $a = exp(H)$, où $H \in \mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ est proche de 0. Seules comptent les valeurs $u(a)$ pour $u \in U_J$, a fortiori seules comptent les valeurs $\alpha(H)$ pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$. Autrement dit, seule compte l'image de H dans $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)/\mathfrak{a}_{\tilde{G}}(F)$. Pour $\tilde{s}$ apparaissant ci-dessus, avec $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) \neq 0$ donc $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ elliptique, on a un isomorphisme naturel

$$\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)/\mathfrak{a}_{\tilde{G}}(F) \simeq \mathfrak{a}_{M'}(F)/\mathfrak{a}_{G'(\tilde{s})}(F).$$

On note encore H un élément de $\mathfrak{a}_{M'}(F)$ qui a même image que le H initial dans le quotient commun ci-dessus et on note encore a l'élément $exp(H) \in A_{M'}(F)$. Une convention analogue sera utilisée diverses fois dans la suite du calcul.

On reprend les constructions et notations de la section 5. Après avoir fixé des données auxiliaires $M'_1, ..., \Delta_1$, on identifie $\boldsymbol{\delta}$ à un élément $\boldsymbol{\delta}_1 \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}'_1(F))$ auquel on applique les considérations de 5.5. Ici, les parties semi-simples des éléments du support de notre élément $\boldsymbol{\delta}$ appartiennent à $\mathcal{O}'$. Donc les termes Z apparaissant en 5.5 sont nuls. Il existe donc $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC} \in D_{unip}^{st}(M'_{\epsilon,SC}(F))$ tel que

$$\boldsymbol{\delta}_1 = desc_{\epsilon_1}^{st,\tilde{M}'_1,*} \circ \iota_{M'_{\epsilon,SC},M'_{1,\epsilon_1}}^*(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC}).$$

Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. L'élément $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie aussi à un élément $\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}) \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}'_1(\tilde{s})(F))$. D'après 5.5, on peut supposer

$$\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}) = d(\tilde{s}) desc_{\epsilon_1(\tilde{s}}^{st,\tilde{M}'_1(\tilde{s}),*} \circ \iota_{M'_{\epsilon,SC},M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC}).$$

Introduisons le groupe intermédiaire $M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$, image réciproque de M'_ϵ dans $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$. L'égalité ci-dessus entraîne

$$\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}) = d(\tilde{s}) desc_{\epsilon_1}^{st,\tilde{M}'_1(\tilde{s}),*} \circ \iota_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}^*(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}),$$

où

$$\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc} = \iota_{M'_{\epsilon,SC},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^*(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC}).$$

Supposons que J provienne d'un élément de $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$. Celui-ci est alors unique et, conformément à ce que l'on a dit avant l'énoncé, on le note encore J. On a

$$\sigma_J^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, a) = \sigma_J^{\tilde{G}_1'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}), a).$$

Appliquons la proposition 4.3. C'est loisible car $dim(G'(s)_{SC}) < dim(G_{SC})$. En effet, le seul cas où cette inégalité n'est pas vérifiée est celui où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. Or on a exclu ce cas. Rappelons que l'hypothèse que $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$ implique que $A_{G_1'(\tilde{s})} = A_{G_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}$, ce qui équivaut à $A_{G'(\tilde{s})} = A_{G'(\tilde{s})_\epsilon}$, et que J provient d'un élément de $\mathcal{J}_{M_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}^{G_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$ que l'on note encore J. Alors, d'après la proposition 4.3, on a

$$\sigma_J^{\tilde{G}_1'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}), a) = e_{\tilde{M}_1'(\tilde{s})}^{\tilde{G}_1'(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))d(\tilde{s})desc_{\epsilon_1(\tilde{s})}^{st,\tilde{M}_1'(\tilde{s}),*}(\sigma_J^{G_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\iota_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}^*(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}), a)).$$

On a

(4) $e_{\tilde{M}_1'(\tilde{s})}^{\tilde{G}_1'(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s})) = e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} & \to & Z(\hat{G}_1'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} & \to & \hat{C}_1(\tilde{s})^{\Gamma_F} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \to & Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} & \to & Z(\hat{M}_1'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} & \to & \hat{C}_1(\tilde{s})^{\Gamma_F} & \to & 1
\end{array}$$

La tore $C_1(\tilde{s})$ est induit donc $\hat{C}_1(\tilde{s})^{\Gamma_F}$ est connexe. Les dernières flèches horizontales sont donc surjectives. Donc les lignes sont exactes. Les colonnes aussi, évidemment. Il en résulte l'égalité

$$Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} = Z(\hat{M}_1'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_1'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

De même

$$Z(\hat{M}_\epsilon')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s})_\epsilon)^{\Gamma_F} = Z(\hat{M}_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})})^{\Gamma_F}.$$

L'égalité (4) résulte alors de la définition de 4.3.

Appliquons (4) et le lemme 3.6. On obtient

$$\sigma_J^{\tilde{G}_1'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}), a) = e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)d(\tilde{s})desc_{\epsilon_1(\tilde{s})}^{st,\tilde{M}_1'(\tilde{s}),*} \circ \iota_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}^*(\sigma_J^{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}, a)).$$

Posons $\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})_{sc} = \sigma_J^{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}, a)$ appartient à $D_{unip}^{st}(M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}(F))$. Avec les notations de 5.4(3), l'égalité précédente devient

$$(5) \qquad \sigma_J^{\tilde{G}_1'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}), a) = e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)d(\tilde{s})\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})^{\tilde{M}_1'(\tilde{s})}.$$

Appliquons 5.4(3). On obtient

$$(6) \qquad transfert(\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})^{\tilde{M}_1'(\tilde{s})}) = \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y]d(\tilde{s}, y)\boldsymbol{\tau}[y]^{\tilde{M}}.$$

Reprenons la construction de $\boldsymbol{\tau}[y]^{\tilde{M}}$ pour $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M$. L'élément $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})_{sc}$ est le transfert non standard de $\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})_{sc}$, c'est-à-dire de $\sigma_J^{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}, a)$. De l'élément J de $\mathcal{J}_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$

se déduit un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc}}^{\bar{G}(\bar{s})_{SC}}$ que l'on note encore J. Notons $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC}$ l'image par transfert non standard de $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC}$. C'est un élément de $D_{unip}^{st}(\bar{M}'_{SC}(F))$. En utilisant l'analogue de 3.7(4) pour le transfert non standard, on obtient que le transfert non standard de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$ est $\iota^*_{\bar{M}'_{SC},\bar{M}'(\bar{s})_{sc}}(\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC})$. Notons $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc}$ cet élément. Utilisons l'hypothèse (2). Elle nous dit que le transfert non standard de $\sigma_J^{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc},a)$ est égal à $c\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC}}(\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc},a)$, où

$$c=(c_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}})^{-1}.$$

Autrement dit

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})_{sc}=c\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC}}(\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc},a).$$

On a $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})=\iota^*_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})_{sc})$. En utilisant le lemme 3.6, on obtient

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})=c\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})}(\bar{\boldsymbol{\delta}},a),$$

où

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}=\iota^*_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc}).$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}=\iota^*_{\bar{M}'_{SC},\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC}).$$

Cette distribution ne dépend pas de $\bar{s}$. Ensuite

$$\boldsymbol{\tau}[y]^{\tilde{M}}=desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}\circ\iota^*_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}\circ transfert_y(\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s}))$$

$$=c\,desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}\circ\iota^*_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}\circ transfert_y(\sigma_J^{\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\delta}},a)).$$

On a ajouté un indice y pour rappeler qu'il s'agit du transfert de $\bar{M}'$ vers $M_{\eta[y]}$. En utilisant (5) et (6), on obtient

$$(7)\qquad transfert(\sigma_J^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}),a))=\sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M}c^M[y]d(\tilde{s},y)e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)d(\tilde{s})(c_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}})^{-1}$$

$$desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*}\circ\iota^*_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}\circ transfert_y(\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})}(\bar{\boldsymbol{\delta}},a)).$$

Soit $Y\in\mathfrak{m}'_\epsilon(F)$ en position générale et elliptique. Il lui correspond par la construction de 5.1 des éléments $\bar{Y}$, $X[y]_{sc}$ et $X[y]$. Dans le cas $y=1$, on note ce dernier terme X. Normalisons le facteur $\Delta(\bar{s},y)$ par l'égalité

$$(8)\qquad \Delta(\bar{s},y)(exp(\bar{Y}),exp(X_{sc}[y]))=\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1,exp(X[y])\eta[y]).$$

On a

(9) $d(\tilde{s})d(\tilde{s},y)=1$ pour tout $y\in\dot{\mathcal{Y}}^M$.

Par 5.4(1), on a

$$d(\tilde{s},y)=\frac{\Delta(\tilde{s})_1(exp(Y)\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X[y])\eta[y])}{\Delta(\bar{s},y)(exp(\bar{Y}),exp(X_{sc}[y]))}=\frac{\Delta(\tilde{s})_1(exp(Y)\epsilon_1(\tilde{s}),exp(X[y])\eta[y])}{\Delta_1(exp(Y)\epsilon_1,exp(X[y])\eta[y])}.$$

C'est un rapport de facteurs de transfert pour deux séries de données auxiliaires relatives à la même donnée $\mathbf{M}'$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$. Ils se transforment de la même façon par conjugaison stable en la deuxième variable. On peut donc remplacer dans le dernier terme l'élément

$exp(X[y])\eta[y]$ par l'élément stablement conjugué $exp(X)\eta$. L'égalité (9) résulte alors de 5.5(2).

On se rappelle que l'on a supposé que J provenait d'un élément de $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$, ce qui entraîne qu'il provient d'un élément de $\mathcal{J}_{M_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}^{G_1'(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$. Il revient au même de dire qu'il provient d'un élément de $\mathcal{J}_{M_\epsilon'}^{G'(\tilde{s})_\epsilon}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$, ou encore, d'après ce que l'on a dit avant l'énoncé, qu'il provient d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}'}^{\bar{G}'(\bar{s})}$. Notons $\mathcal{S}_J$ l'ensemble des éléments $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ soit elliptique, que $A_{G'(\tilde{s})} = A_{G'(\tilde{s})_\epsilon}$ et que J provienne d'un élément de $\mathcal{J}_{M_\epsilon'}^{G'(\tilde{s})_\epsilon}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$. A l'aide de (7) et (9), l'expression (3) se transforme en

$$(10) \qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y] desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ \iota^*_{M_{\eta[y]},sc,M_{\eta[y]}} \circ transfert_y(\boldsymbol{\xi}),$$

où

$$(11) \qquad \boldsymbol{\xi} = \sum_{\tilde{s}\in\mathcal{S}_J} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)(c_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}})^{-1}\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})}(\bar{\boldsymbol{\delta}},a).$$

L'ensemble $\mathcal{S}_J$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}$ défini en 5.3. D'après 5.3(5), il est vide si $A_{\tilde{G}} \neq A_{G_\eta}$. Supposons $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$. Notons $\bar{\mathcal{S}}_J$ l'ensemble des $\bar{s} \in \bar{\zeta}Z(\hat{\bar{M}}_{ad})^{\Gamma_F}$ tels que la donnée associée $\bar{\mathbf{G}}'(\bar{s})$ soit elliptique et que J provienne d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}'}^{\bar{G}'(\bar{s})}$. D'après 5.3(6), $\mathcal{S}_J$ est l'ensemble des $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M},\hat{\theta})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que l'élément associé $\bar{s}$ appartienne à $\bar{\mathcal{S}}_J$. Il est clair que, si J ne provient pas d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}}^{\bar{G}}$, les deux ensembles $\mathcal{S}_J$ et $\bar{\mathcal{S}}_J$ sont vides. On obtient

(12) $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a) = 0$ si $A_{\tilde{G}} \neq A_{G_\eta}$ ou si $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$ et J ne provient pas d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}}^{\bar{G}}$.

Supposons que $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$ et que J provient d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}}^{\bar{G}}$. Alors la définition (11) se transforme en

$$(13) \qquad \boldsymbol{\xi} = \sum_{\bar{s}\in\bar{\mathcal{S}}_J} x(\bar{s})\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})}(\bar{\boldsymbol{\delta}},a),$$

où

$$x(\bar{s}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}};\tilde{s}\mapsto\bar{s}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)(c_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}})^{-1}.$$

Soit $\bar{s} \in \bar{\mathcal{S}}_J$. Montrons que

$$(14) \qquad x(\bar{s}) = i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s})).$$

Pour $\tilde{s}$ se projetant sur $\bar{s}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} & \\
\swarrow & & \searrow \\
Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} & & Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F} \\
\| & & \| \\
Z(\hat{M}'(\tilde{s})_{ad})^{\Gamma_F} & & Z(\hat{\bar{M}}_{ad})^{\Gamma_F} \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z(\hat{M}'(\tilde{s})_{\epsilon,ad})^{\Gamma_F} & & Z(\hat{\bar{M}}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}}'(\bar{s}))^{\Gamma_F} \\
\downarrow & & \| \\
Z(\hat{\bar{M}}'(\bar{s})_{ad})^{\Gamma_F} & = & Z(\hat{\bar{M}}'(\bar{s})_{ad})^{\Gamma_F}
\end{array}$$

La flèche du bas à gauche se déduit de l'homomorphisme $\hat{T}^{\hat{\theta},0} \to \hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. En utilisant la description des systèmes de racines de [W1] 3.3, on voit que l'image réciproque par cet homomorphisme d'une racine de $\hat{\bar{G}}'(\bar{s})$ ou de $\hat{\bar{M}}'$ est un multiple entier d'une racine de $\hat{G}'(\tilde{s})_\epsilon$ ou de $\hat{M}'_\epsilon$. Il en résulte que cet homomorphisme envoie $Z(\hat{G}'(\tilde{s})_\epsilon)^{\Gamma_F}$ dans $Z(\hat{\bar{G}}(\bar{s}))^{\Gamma_F}$ et $Z(\hat{M}'_\epsilon)^{\Gamma_F}$ dans $Z(\hat{\bar{M}}')^{\Gamma_F}$. Dans le diagramme ci-dessus, tous les quotients sont connexes, les flèches sont donc surjectives. Calculons le nombre d'éléments du noyau de la flèche composée

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{\bar{M}}'(\bar{s})_{ad})^{\Gamma_F}.$$

Si on utilise le chemin de gauche, on obtient le produit des nombres d'éléments des noyaux des trois flèches descendantes. Ces nombres sont respectivement égaux à $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))^{-1}$, $e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)^{-1}$ et $c_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}$. Si on utilise le chemin de droite, on obtient le produit des nombres d'éléments des noyaux des deux flèches descendantes. Ces nombres sont respectivement égaux au nombre d'éléments d de toute fibre de la projection $\tilde{s} \mapsto \bar{s}$ et à $i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s}))^{-1}$. On en déduit l'égalité

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))e_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\epsilon)(c_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}})^{-1} = d^{-1}i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s})),$$

puis

$$x(\bar{s}) = d^{-1} \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}};\tilde{s}\mapsto\bar{s}} i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s})).$$

Puisque l'ensemble de sommation a d éléments, on obtient (14).

Grâce à (14), l'égalité (13) se transforme en

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{\bar{s}\in\bar{\zeta}Z(\hat{\bar{M}}_{ad})^{\Gamma_F},J\in\mathcal{J}_{\bar{M}'}^{\bar{G}'(\bar{s})}} i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s}))\sigma_J^{\bar{G}'(\bar{s})}(\bar{\boldsymbol{\delta}},a).$$

Soit $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M$. En se rappelant la définition de [II] 3.8, on obtient

$$transfert_y(\boldsymbol{\xi}) = \rho_J^{G_{\eta[y],SC},\mathcal{E}}(\bar{\mathbf{M}}',\bar{\boldsymbol{\delta}},a).$$

Ici, les groupes ne sont pas tordus et on peut appliquer la proposition 1.4(ii). Le terme ci-dessus n'est autre que $\rho_J^{G_{\eta[y],SC}}(transfert_y(\bar{\boldsymbol{\delta}}),a)$. On se rappelle que l'on a supposé $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$. C'est équivalent à $A_{\tilde{G}} = A_{G_{\eta[y]}}$ puisque les deux groupes G_η et $G_{\eta[y]}$ sont formes intérieures l'un de l'autre. De même, on a supposé que J provenait d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}}^{\bar{G}}$, ce qui équivaut à ce qu'il provienne d'un élément de $\mathcal{J}_{M_{\eta[y]}}^{G_{\eta[y]}}$. On utilise 3.2(2) et le lemme 4.1. On obtient

$$desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ \iota_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}^*(\rho_J^{G_{\eta[y],SC}}(transfert_y(\bar{\boldsymbol{\delta}}),a)) = \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\tau}[y],a),$$

où

$$\boldsymbol{\tau}[y] = desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ \iota_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}^* \circ transfert_y(\bar{\boldsymbol{\delta}}).$$

L'égalité (10) devient

$$(15) \qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a) = \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\tau},a),$$

où

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y]\boldsymbol{\tau}[y].$$

A ce point, on peut lever l'hypothèse $A_{\tilde{G}} = A_{G_\eta}$ et que J provient d'un élément de $\mathcal{J}_{\bar{M}}^{\bar{G}}$. Si elle n'est pas vérifiée, le membre de gauche de (15) est nul d'après (12). Celui de droite l'est aussi d'après le lemme 4.1.

Des calculs analogues à ceux effectués ci-dessus permettent de déduire de 5.4(3) l'égalité $transfert(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\tau}$. On peut aussi plus simplement appliquer la relation (15) au cas $\tilde{G} = \tilde{M}$ et à $J = \emptyset$. Cette relation devient dans ce cas l'égalité précédente. Grâce à celle-ci, la relation (15) est l'égalité de l'énoncé. □

7.2 Les termes $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}$, variante

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un système de fonctions B, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une donnée endoscopique elliptique et relevante $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ de $(M, \tilde{M})$.

On suppose donné un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$ joignant un élément $\epsilon \in \tilde{M}'_{ss}(F)$ à un élément $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$. On suppose M'_ϵ quasi-déployé. On note $\mathcal{O}'$ la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{M}'(F)$ et $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(F)$.

Proposition. *On suppose que $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B)$, tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et tout $a \in A_M(F)$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité*

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a).$$

La preuve est identique. On n'a plus besoin de l'hypothèse (2) du paragraphe précédent car, dans la situation quasi-déployée et à torsion intérieure, les triplets endoscopiques non standard qui apparaissent sont triviaux. Ils vérifient évidemment la proposition 6.6.

7.3 Les termes σ_J

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un système de fonctions B, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On considère un élément $\eta \in \tilde{M}(F)$, semi-simple et tel que M_η soit quasi-déployé. On note $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(F)$.

Proposition. *On suppose $A_M = A_{M_\eta}$.*

(i) Soient $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, $\boldsymbol{\delta}' \in D_{unip}^{st}(M_\eta(F), \omega) \otimes Mes(M_\eta(F))^*$ et $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1. Posons $\boldsymbol{\delta} = desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\boldsymbol{\delta}')$. On a l'égalité

$$\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a) = \begin{cases} e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\sigma_J^{G_\eta}(\boldsymbol{\delta}', a)), & si\ A_G = A_{G_\eta}, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

(ii) Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, $\sigma_J^{\tilde{G}}$ prend ses valeurs dans

$$U_J \otimes (D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G},st}.$$

Preuve. On reprend la preuve de 7.1 dans le cas que l'on avait exclu, à savoir $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. On prend pour diagramme un diagramme "trivial" $(\eta, B^M, T, B^M, T, \eta)$. La relation 7.1(3) devient

$$(1) \qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, a) = \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B)} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \sigma_J^{\tilde{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, a).$$

Le seul point qui diffère de la situation de 7.1 est que l'on ne peut plus utiliser de relation de descente pour le terme $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)$ correspondant à $s = 1$. Mais on peut néanmoins appliquer cette relation de descente, à condition d'ajouter à l'expression obtenue la différence entre $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)$ et le terme obtenu par descente. C'est-à-dire, posons

$$x = \begin{cases} \sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a) - e_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\eta) desc_\eta^{st,\tilde{M},*}(\sigma_J^{G_\eta}(\boldsymbol{\delta}, a)), & \text{si } A_G = A_{G_\eta}, \\ \sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors le membre de droite de (1) est la somme de x et d'une expression qui se calcule comme en 7.1. Rappelons que l'hypothèse (2) de ce paragraphe est automatiquement vérifiée dans notre situation quasi-déployée et à torsion intérieure. On obtient finalement l'égalité

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, a) = x + \rho_J^{\tilde{G}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, a).$$

Mais, pour la donnée endoscopique maximale $\mathbf{M}$, on a tautologiquement l'égalité

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^{\tilde{G}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, a)$$

car le terme $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)$ est défini pour qu'il en soit ainsi. D'où $x = 0$, ce qu'affirme le (i) de l'énoncé.

Le membre de droite de l'égalité du (i) est par définition une distribution stable. Le (ii) en résulte. □

7.4 Preuve conditionnelle des propositions [II] 2.7, [II] 3.8 et du théorème [II] 1.16(i)

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque et un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On considère l'hypothèse

(1) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$ à support formé d'éléments $\tilde{G}$-fortement réguliers et pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}).$$

Proposition. *On suppose cette hypothèse vérifiée.*

(i) Soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$ et soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(F)$ se transférant en une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ de $\tilde{M}(F)$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a).$$

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$ *et pour tout* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$*, on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{a}).$$

(iii) Pour toute classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ *dans* $\tilde{M}(F)$*, on a l'égalité* $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}} = g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$.

Preuve. Considérons la situation de (i). Fixons un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$ reliant un élément $\epsilon \in \mathcal{O}'$ tel que M'_ϵ soit quasi-déployé à un élément $\eta \in \mathcal{O}$. Supposons d'abord que $A_{M'_\epsilon} \neq A_{M'}$. Introduisons le commutant $\tilde{R}'$ de $A_{M'_\epsilon}$ dans $\tilde{M}'$. C'est un espace de Levi propre. Du diagramme se déduit un homomorphisme $\xi : T^{\theta,0} \to T'$ qui est une isogénie et est équivariant pour les actions galoisiennes. On a $A_{M'_\epsilon} \subset T'$. La composante neutre de $\xi^{-1}(A_{M'_\epsilon})$ est un tore déployé. On note $\tilde{R}$ son commutant dans $\tilde{M}$. C'est un espace de Levi propre qui correspond à $\tilde{R}'$. En posant $B^{R'} = B^{M'} \cap R'$ et $B^R = B^M \cap R$, le sextuplet $(\epsilon, B^{R'}, T', B^R, T, \eta)$ est encore un diagramme, avec pour espaces ambiants $\tilde{R}$ et $\tilde{R}'$. Le Levi R' se complète en une donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $(R, \tilde{R}, \mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante. On a $M'_\epsilon = R'_\epsilon$ par construction. L'application $desc_\epsilon^{st,\tilde{M}',*}$ est la composée de $desc_\epsilon^{st,\tilde{R}',*}$ et de l'induction de $\tilde{R}'$ à $\tilde{M}'$. Puisque tout élément de $D_{géom}^{st}(\mathcal{O}') \otimes Mes(M'(F))^*$ appartient à l'image de $desc_\epsilon^{st,\tilde{M}',*}$, tout tel élément est l'induit d'un élément de $D_{géom}^{st}(\mathcal{O}_{\tilde{R}'}) \otimes Mes(R'(F))^*$, où $\mathcal{O}_{\tilde{R}'} = \mathcal{O}' \cap \tilde{R}'(F)$. Ceci s'adapte formellement aux données endoscopiques. Donc $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{M}'}$ pour un élément $\boldsymbol{\tau} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{R}', \mathcal{O}_{\tilde{R}'}) \otimes Mes(R'(F))^*$. On a alors

$$transfert(\boldsymbol{\delta}) = (transfert(\boldsymbol{\tau}))^{\tilde{M}}.$$

Les deux membres de l'égalité du (i) vérifient les formules de descente parallèles [II] 3.10 et [II] 3.12. On voit que cette égalité du (i) résulte d'égalités similaires où $\tilde{G}$ est remplacé par des espaces de Levi propres. En vertu de nos hypothèses de récurrence, ces égalités sont vérifiées, d'où (i) dans ce cas.

Supposons maintenant $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$. Comme on l'a expliqué en 6.4, si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ n'est pas l'un des triplets définis en 6.3, les données endoscopiques non standard qui apparaissent en 7.1 vérifient toutes les propriétés requises. Donc l'hypothèse (2) de 7.1 est vérifiée. L'assertion (i) résulte alors de cette proposition 7.1. Supposons que $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ soit l'un des triplets définis en 6.3. Rappelons que G est simplement connexe. Considérons un triplet endoscopique non standard $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ comme en 7.1. D'après le lemme 6.3, on sait dans quels cas les propriétés de ce triplet ne sont pas connues. Supposons que l'on soit dans un tel cas. Alors la donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est équivalente à la donnée maximale $\mathbf{G}' = (G', \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F, \hat{\theta})$ définie en 6.3, ad_η conserve une paire de Borel épinglée de G et ϵ est l'élément de $\mathcal{Z}(\tilde{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}$ qui correspond à η par l'application du lemme 6.2. Montrons que cela entraîne

(2) $\mathbf{M}'$ est équivalente à la donnée endoscopique maximale de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$, ad_η conserve une paire de Borel épinglée de M et ϵ est l'élement de $\mathcal{Z}(\tilde{M}')^{\Gamma_F}$ qui correspond à η.

Avec les notations habituelles, on peut supposer $\tilde{\zeta} = \zeta\hat{\theta}$, avec $\zeta \in \hat{T}$ et on écrit $\tilde{s} = z\zeta\hat{\theta}$, avec $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Puisque $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est équivalent à la donnée maximale $\mathbf{G}'$, on peut fixer $x \in \hat{G}$ tel que $x\mathcal{G}'(\tilde{s})x^{-1} = \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$ et $xz\zeta\hat{\theta}x^{-1} = \hat{\theta}$. En particulier, ad_x envoie $\hat{G}'(\tilde{s})$ sur $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. Quitte à multiplier x à gauche par un élément de $\hat{G}_{\hat{\theta}}$, on peut supposer que ad_x envoie la paire de Borel $(\hat{B} \cap \hat{G}'(\tilde{s}), \hat{T}^{\hat{\theta}})$ de $\hat{G}'(\tilde{s})$ sur la paire de Borel $(\hat{B} \cap \hat{G}_{\hat{\theta}}, \hat{T}^{\hat{\theta}})$

de $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. Alors x normalise $\hat{T}$ et son image dans W est fixe par $\hat{\theta}$. Or le groupe $W^{\hat{\theta}}$ est le groupe de Weyl de $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. Quitte à multiplier encore x à gauche par un élément de ce groupe, on peut supposer que l'image de x dans W est 1, autrement dit que $x \in \hat{T}$. Mais alors $x \in \hat{M}$ et la conjugaison par x conserve ${}^LM$. En prenant les intersections avec ce groupe, la relation $x\mathcal{G}'(\tilde{s})x^{-1} = \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$ entraîne que $x\mathcal{M}'x^{-1} = \hat{M}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$. On a aussi $x\zeta\hat{\theta}x^{-1} = s^{-1}\hat{\theta} \in Z(\hat{M})\hat{\theta}$. Donc $\mathbf{M}'$ est équivalente à la donnée maximale de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$. Soit $\mathcal{E}_0 = (B_0, T_0, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ une paire de Borel épinglée de G qui est conservée par ad_η. Puisque η est un élément semi-simple de $\tilde{M}$, on peut aussi fixer une paire de Borel (B, T) de G, pour laquelle M est standard et qui est conservée par ad_η. D'après la preuve de 6.2(3), il existe $x \in G_\eta$ tel que $ad_x(B_0, T_0) = (B, T)$. Alors $\mathcal{E} = ad_x(\mathcal{E}_0)$ est une paire de Borel épinglée de G qui est conservée par ad_η. Or M est standard pour cette paire. On peut donc "restreindre" celle-ci à M et on obtient une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^M$ de M qui est conservée par ad_η. De plus, il résulte des constructions que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z(\tilde{G}, \mathcal{E}) & \to & \mathcal{Z}(\tilde{G}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(\tilde{M}, \mathcal{E}^M) & \to & \mathcal{Z}(\tilde{M}') \end{array}$$

La dernière assertion de (2) en résulte. Cela prouve cette assertion.

On a alors $G'(\tilde{s})_\epsilon \simeq G'$ et $M'_\epsilon = M'$ et la classe de conjugaison stable de ϵ est réduite à ce point. On vérifie facilement que l'élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\{\epsilon\}}^{\tilde{G}})$ s'envoie sur l'élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. D'après la propriété 6.6(2), l'assertion de la proposition 6.6 est connue pour un élément non maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\{\epsilon\}}^{\tilde{G}})$. Il en résulte que l'hypothèse 7.1(2) est vérifiée si J n'est pas l'élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. La proposition 7.1 nous dit donc que l'égalité du (i) est vérifiée sauf pour cet élément maximal. On abandonne notre J initial et on note J_{max} l'élément maximal. Soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$ et $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale. Posons $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Les propositions [II] 3.2 et [II] 3.9 entraînent que le germe en 1 de la fonction

$$(3) \qquad a \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \xi(a)\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$$

est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{L}}, \mathbf{f}) - I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}, \mathbf{f}).$$

En vertu de nos hypothèses de récurrence, les termes indexés par $\tilde{L} \neq \tilde{M}$ et $\tilde{L} \neq \tilde{G}$ s'annulent. Ceux indexés par $\tilde{L} = \tilde{G}$ et un $J \neq J_{max}$ s'annulent aux-aussi. L'expression ci-dessus se réduit à

$$(4) \qquad I^{\tilde{G}}(\rho_{J_{max}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{G}} - \rho_{J_{max}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{G}}, \mathbf{f})$$

$$+ I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}).$$

D'après la proposition [II] 2.10, l'hypothèse (1) entraîne la même égalité que dans cette hypothèse pour les distributions à support $\tilde{G}$-équisingulier. C'est le cas de la distribution $a\boldsymbol{\gamma}$. Donc l'expression (3) est nulle. Considérons (4). Comme fonction de a, le premier terme appartient à $U_{J_{max}}$ et le second est constant. Leur somme est équivalente à 0.

En utilisant [II] 3.1(3), les deux termes sont nuls (en supposant $\tilde{M} \neq \tilde{G}$; si $\tilde{M} = \tilde{G}$, l'assertion à prouver est tautologique). La nullité du premier pour tout $\mathbf{f}$ signifie que

$$\rho_{J_{max}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) - \rho_{J_{max}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a)$$

modulo $Ann^{\tilde{G}}$. Cela achève la preuve de (i).

Prouvons (ii). Par linéarité, on peut supposer qu'il existe une donnée endoscopique $\mathbf{M}'$ de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$ elliptique et relevante et un élément $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ de sorte que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. Toujours par linéarité, on peut fixer une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}'$ dans $\tilde{M}'(F)$ telle que $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(F))^*$. On peut supposer que cette classe se transfère en une classe de $\tilde{M}(F)$, sinon $\boldsymbol{\gamma} = 0$ et l'égalité à prouver est triviale. On reprend alors le raisonnement ci-dessus. Pour $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$ et $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, on calcule le développement de (3). Maintenant que l'on a prouvé (i), ce développement se réduit à

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}),$$

ou encore à

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) - I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}).$$

Comme ci-dessus, l'hypothèse (1) entraîne que (3) est nul donc aussi cette différence. C'est la conclusion de (ii).

Comme on l'a vu ci-dessus, l'hypothèse (1) entraine que l'hypothèse du lemme [II] 2.8 est vérifiée pour l'ensemble $\mathcal{D} = D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Le (i) de ce lemme aussi d'après l'assertion (ii) du présent énoncé. Donc aussi le (ii) de ce lemme, qui n'est autre que la présente assertion (iii). □

7.5 Preuve du théorème [II] 1.16(ii)

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un système de fonctions B, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$.

Proposition. *(i) Soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M, \tilde{M})$ et soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(F)$ se transférant en une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}$ de $\tilde{M}(F)$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}', \mathcal{O}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et tout $a \in A_M(F)$ en position générale et proche de 1, on a l'égalité*

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a).$$

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$ et pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{a}).$$

La preuve est identique à celle de la proposition précédente, en plus simple puisque notre triplet ne saurait être l'un de ceux définis en 6.3. On n'a plus besoin de l'hypothèse (1) de ce paragraphe : elle est vérifiée d'après la proposition 2.9.

7.6 Preuve des propositions [II] 2.4, [II] 3.5 et du théorème [II] 1.10

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un système de fonctions B, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$.

Proposition. *(i) Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, le terme $\sigma_J^{\tilde{G}}$ prend ses valeurs dans*

$$U_J \otimes (D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{st,\tilde{G}}.$$

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, la distribution

$$\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$$

est stable.

(iii) Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$, notons $\mathcal{O}^{\tilde{G}}$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$ qui contient $\mathcal{O}$. Alors le germe $Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(., B)$ prend ses valeurs dans l'espace $D_{géom}^{st}(\mathcal{O}^{\tilde{G}}) \otimes Mes(G(F))^*$.

Preuve. Pour la preuve de (i), on utilise le même argument qu'en 7.4. On sait comment se comportent nos termes par induction, grâce à la proposition [II] 3.11. On se ramène alors au cas où la proposition 7.3 s'applique.

Prouvons (ii). Par linéarité, on peut fixer une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(F)$ et supposer que $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*$. Soit $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. Supposons que les intégrales orbitales stables fortement régulières de $\mathbf{f}$ sont nulles, autrement dit que l'image de $\mathbf{f}$ dans $SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ est nulle. Soit $a \in A_M(F)$ en position générale. Remarquons que le (i) déjà prouvé assure la validité de la proposition [II] 3.5. La proposition 3.7 (ii) calcule le germe en 1 de la fonction

$$(1) \qquad a \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}).$$

Il est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}, B, \mathbf{f}).$$

L'hypothèse sur $\mathbf{f}$ et nos hypothèses de recurrence assurent que tous les termes sont nuls sauf celui indexé par $\tilde{M}$. L'expression ci-dessus se réduit à $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$. Or (1) est nul d'après la proposition 2.8. Donc $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = 0$. Cette égalité pour tout $\mathbf{f}$ d'image nulle dans $SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$ est équivalente à l'assertion (ii).

Le (iii) s'en déduit comme en 7.4 en utilisant le lemme [II] 2.9. □

7.7 Preuve de la proposition 6.6

On se place sous les hypothèses de cette proposition, dont on utilise les notations. D'après le lemme 6.8, on peut supposer (G_1, G_2, j_*) quasi-élémentaire et B_1 constante de valeur 1. On introduit le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ associé à (G_1, G_2, j_*) comme en 6.3. On fixe

un élément $\eta \in \tilde{G}(F)$ qui conserve une paire de Borel épinglée $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G définie sur F. De cette paire se déduit une paire de Borel épinglée de G_η définie sur F. On peut identifier G_1 à G_η de sorte que le Levi M_1 devienne un Levi de G_η standard pour cette paire de Borel épinglée. On note $\tilde{M}$ le commutant dans $\tilde{G}$ du tore A_{M_1}. On a $\eta \in \tilde{M}(F)$ et M est standard pour $\mathcal{E}$. On introduit les données endoscopiques maximales $\mathbf{G}' = (G', \hat{G}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F, \hat{\theta})$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et $\mathbf{M}' = (M', \hat{M}_{\hat{\theta}} \rtimes W_F, \hat{\theta})$ de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$. Remarquons que $\mathbf{G}'$ est aussi la donnée $\mathbf{G}'(\hat{\theta})$ déduite de $\mathbf{M}'$ et de l'élément $\tilde{s} = \hat{\theta}$. Comme en 6.3, l'élément $\eta \in \tilde{G}(F)$ détermine un élément $\epsilon \in \mathcal{Z}(\tilde{G}')^{\Gamma_F}$. Si l'on remplace les espaces ambiants $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ par $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$, on obtient évidemment le même élément ϵ. On fixe un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$, où $B^M = B \cap M$. Reprenons les constructions et notations de 7.1. En particulier, on fixe des mesures pour simplifier. Remarquons que $\bar{G} = G_\eta = G_1$, $\bar{M} = M_\eta = M_1$, $G_2 = G'_\epsilon = G'$ et $M_2 = M'_\epsilon = M'$.

On dispose d'éléments $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$. On peut identifier $\boldsymbol{\delta}_2$ à un élément de $D^{st}_{unip}(M'_\epsilon(F))$. On pose

$$\boldsymbol{\delta} = desc^{st,M',*}_\epsilon(\boldsymbol{\delta}_2).$$

La fonction B_2 s'identifie à $B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'}$. L'élément J de l'énoncé de la proposition 6.6, vu comme un élément de $\mathcal{J}^{G_2}_{M_2}(B_2)$, s'identifie à un élément de $\mathcal{J}^{G'_\epsilon}_{M'_\epsilon}(B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'})$, qui s'envoie sur un élément de $\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ que l'on note encore J. On reprend la preuve de 7.1 pour ces éléments J et $\boldsymbol{\delta}$. Remarquons que l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F},$$

se simplifie en

$$(1) \qquad Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}$$

puisque G et $\bar{G}$ sont simplement connexes, donc leurs duaux sont adjoints. La preuve marche jusqu'au point où on avait utilisé l'hypothèse (2) du paragraphe 7.1. Pour un $\tilde{s} \in \hat{\theta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tel que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ n'est pas équivalent à $\mathbf{G}'$, le lemme 6.3 et nos hypothèses de récurrence assurent que cette hypothèse est vérifiée. Il reste les $\tilde{s}$ tels que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est équivalent à $\mathbf{G}'$. Notons $\mathcal{Z}$ le noyau de l'homomorphisme (1), c'est-à-dire $\mathcal{Z} = Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \cap (1-\hat{\theta})(\hat{T})$. Montrons que

(2) l'ensemble des $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ tels que $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ est équivalente à $\mathbf{G}'$ est égal à $\mathcal{Z}$.

Supposons $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ équivalente à $\mathbf{G}'$. Il existe alors $x \in \hat{G}$ tel que $x\mathcal{G}'(s\hat{\theta})x^{-1} = G_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$ et $xs\hat{\theta}x^{-1} = \hat{\theta}$. Le même argument que dans la preuve de 7.4(2) montre que l'on peut supposer $x \in \hat{T}$. Alors $s = (\hat{\theta}-1)(x) \in (1-\hat{\theta})(\hat{T})$. Donc $s \in \mathcal{Z}$. Inversement, supposons $s \in \mathcal{Z}$. Ecrivons $s = (\hat{\theta}-1)(x)$, avec $x \in \hat{T}$. On a $xs\hat{\theta}x^{-1} = \hat{\theta}$. Cela entraîne $x\hat{G}'(s\hat{\theta})x^{-1} = \hat{G}_{\hat{\theta}}$. Pour $g \in \hat{G}'(s\hat{\theta})$ et $w \in W_F$, on a $xgw(x)^{-1} = xgx^{-1}xw(x)^{-1}$. Le premier terme xgx^{-1} appartient à $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. L'égalité $s = (\hat{\theta}-1)(x)$ et le fait que s est invariant par Γ_F entraîne que $xw(x)^{-1}$ appartient à $\hat{T}^{\hat{\theta}}$, qui est contenu dans $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. Donc $xgw(x)^{-1} \in \hat{G}_{\hat{\theta}}$. Cela prouve que $x\mathcal{G}'(s\hat{\theta})x^{-1} = G_{\hat{\theta}} \rtimes W_F$, donc $\mathbf{G}'(s\hat{\theta})$ est équivalente à $\mathbf{G}'$. D'où (2).

Considérons un $\tilde{s}$ tel que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ soit équivalent à $\mathbf{G}'$. D'après (2), cela équivaut à $\bar{s} = 1$. Alors $G'(\tilde{s})_\epsilon$ est isomorphe à G_2, $M'(\tilde{s})_\epsilon$ est isomorphe à M_2, $\bar{G}'(\bar{s})$ est isomorphe à G_1 et $\bar{M}'$ est isomorphe à M_1. L'élément noté $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$ en 7.1 n'est autre que $\boldsymbol{\delta}_2$. L'élément $\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc}$ est égal à $\boldsymbol{\delta}_1$. L'élément $\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})_{sc}$ est égal à $\sigma^{G_2}_J(\boldsymbol{\delta}_2, a)$. On ne peut plus affirmer que son transfert $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})_{sc}$ est égal à $(c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2})^{-1}\sigma^{G_1}_J(\boldsymbol{\delta}_1, a)$. Mais on peut écrire ce transfert sous la forme

$$(c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2})^{-1}(\bar{\boldsymbol{\mu}} + \sigma^{G_1}_J(\boldsymbol{\delta}_1, a)),$$

où

$$(3) \qquad \bar{\boldsymbol{\mu}} = c_{M_1,M_2}^{G_1,G_2} transfert(\sigma_J^{G_2}(\boldsymbol{\delta}_2, a)) - \sigma_J^{G_1}(\boldsymbol{\delta}_1, a).$$

On peut alors poursuivre le calcul comme en 7.1. Il apparaît des termes supplémentaires provenant de $\boldsymbol{\mu}$. On obtient une égalité similaire à 7.1(10) :

$$(4) \qquad \rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \boldsymbol{\mu} + \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y] desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ transfert_y(\boldsymbol{\xi}),$$

où

$$\boldsymbol{\mu} = x(1) \sum_{y \in \dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y] desc_{\eta[y]}^{\tilde{M},*} \circ \circ transfert_y(\bar{\boldsymbol{\mu}}).$$

Les applications ι^* de 7.1(10) disparaissent ici car les groupes G_η et G'_ϵ sont simplement connexes. Le terme $x(1)$ est le $x(\bar{s})$ de 7.1 pour $\bar{s} = 1$. Le calcul de la somme du membre de droite de (4) se poursuit comme en 7.1. Cette somme vaut $\rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a)$. Mais, d'après nos hypothèses de récurrence, toutes les propriétés sont connues pour le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Donc

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, a) = \rho_J^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), a).$$

Il en résulte que $\boldsymbol{\mu} = 0$.

Soit $\bar{\varphi} \in SI(\mathfrak{m}_1(F))$ à support proche de 0. On l'identifie par l'exponentielle à une fonction sur $M_1(F) = \bar{M}'(F)$. On peut supposer que l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^M$ contient l'élément $y = 1$. Pour celui-ci, $M_{\eta[1]} = M_\eta$ est quasi-déployé et on a $\bar{M}' = M_{\eta[1]}$. Modulo cette identification, le transfert $transfert_1$ est l'identité. On peut donc considérer $\bar{\varphi}$ comme un élément de $SI(M_{\eta[1]}(F))$, que l'on relève en un élément $\varphi_1 \in I(M_{\eta[1]}(F))$. On peut évidemment supposer que φ_1 est à support proche de l'origine. L'application $desc_{\eta[1]}^{\tilde{M}}$ a pour image le sous-espace des éléments de $I(M_{\eta[1]}(F))$ qui sont invariants par l'action de $Z_M(\eta[1]; F)$. Mais, parce que $\eta[1] = \eta$ conserve une paire de Borel épinglée de M et que T^θ est connexe, on a $Z_M(\eta[1]) = M_{\eta[1]}$. L'application de descente est donc surjective et on peut relever φ_1 en un élément $\varphi \in I(\tilde{M}(F))$. Toujours parce que $Z_M(\eta)$ est connexe, l'ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^M$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $M(F)$ dans la classe de conjugaison stable de η. On peut modifier φ de sorte que $desc_{\eta[y]}^{\tilde{M}}(\varphi) = 0$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M$ tel que $y \neq 1$. Il résulte alors de la définition de φ que l'on a l'égalité

$$I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\mu}, \varphi) = S^{M_1}(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\varphi}).$$

Puisque $\boldsymbol{\mu} = 0$, ceci est nul. Puisque cela est vrai pour tout $\bar{\varphi}$, on conclut $\bar{\boldsymbol{\mu}} = 0$. D'après la définition (3), cette nullité est l'assertion de la proposition 6.6. □

Attention. On ne doit pas s'abuser : la démonstration ci-dessus s'appuie sur des hypothèses de récurrence. Elle ne deviendra une véritable démonstration que quand toutes les étapes de la récurrence auront été établies.

8 Descente des germes de Shalika endoscopiques

8.1 La proposition [II] 2.7 dans un cas particulier

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une donnée endoscopique elliptique et relevante $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$.

On suppose donné un diagramme $(\epsilon, B^{M'}, T', B^M, T, \eta)$ joignant un élément $\epsilon \in \tilde{M}'_{ss}(F)$ à un élément $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$. On suppose que M'_ϵ est quasi-déployé et que $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$. On note $\mathcal{O}'$ la classe de conjugaison stable de ϵ dans $\tilde{M}'(F)$ et $\mathcal{O}$ la classe de conjugaison stable de η dans $\tilde{M}(F)$. Comme on l'a vu, tout élément $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ donne naissance à un triplet endoscopique non standard $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$. Du système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}'(\tilde{s})$ se déduit une fonction $B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'}$ sur le système de racines de $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$, puis, par la construction de 6.5, une fonction sur le système de racines de $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$. C'est la fonction constante de valeur 1 d'après 7.1(1). Les groupes $G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}$ et $\bar{G}'(\bar{s})_{SC}$ contiennent des Levi $M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$ et $\bar{M}'(\bar{s})_{sc}$. On considère l'hypothèse

(1) pour chaque triplet $(\bar{G}'(\bar{s})_{SC}, G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}, j_*)$ comme ci-dessus tel que $A_{G'(\tilde{s})_\epsilon} = A_{\tilde{G}}$, la proposition 6.7 est vérifiée pour ces Levi.

Proposition. *On suppose que $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$ et que l'hypothèse (1) est vérifiée. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$, on a l'égalité*

$$g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(transfert(\boldsymbol{\delta})),$$

pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}'$.

La preuve occupe les trois paragraphes suivants.

8.2 Début de la preuve

Si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et si $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, l'énoncé est tautologique : le terme $Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$ est défini pour qu'il en soit ainsi. On exclut ce cas.

Rappelons la définition [II] 2.6(2) :

$$(1) \qquad g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) transfert(Sg^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}'}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}})).$$

On reprend les constructions et notations de la section 5. Après avoir fixé des données auxiliaires M'_1,...,Δ_1, on identifie $\boldsymbol{\delta}$ à un élément $\boldsymbol{\delta}_1 \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}'_1(F))$. Utilisons la description de 5.5. Par linéarité, on peut supposer qu'il existe $Z \in \mathfrak{z}(M'_\epsilon; F)$ et $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC} \in D^{st}_{géom}(M'_{\epsilon,SC}(F))$ tels que

$$\boldsymbol{\delta}_1 = desc^{st,\tilde{M}'_1,*}_{\epsilon_1}(exp(Z)\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_{1,\epsilon_1}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC})).$$

Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. D'après 5.5, l'élément $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie aussi à l'élément

$$\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}) = d(\tilde{s}) desc^{st,\tilde{M}'_1(\tilde{s}),*}_{\epsilon_1(\tilde{s})}(exp(Z)\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC})) \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}'_1(\tilde{s}; F))).$$

A l'aide de 5.3(4), on décompose Z en $Z_1 + Z_2(\bar{s}) + Z_3(\bar{s})$, où $Z_1 \in \mathfrak{z}(\bar{G}; F)$, $Z_2(\bar{s}) \in \mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s}); F)$, $Z_3(\bar{s}) \in \mathfrak{z}(\bar{M}'(\bar{s})_{sc}; F) \simeq \mathfrak{z}(\tilde{M}'(\tilde{s})_{sc}; F)$. Notons que $Z_1 + Z_2(\bar{s}) \in \mathfrak{z}(\tilde{G}'(\tilde{s})_\epsilon)$. On a alors

$$\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}) = d(\tilde{s}) desc^{st,\tilde{M}'_1(\tilde{s}),*}_{\epsilon_1(\tilde{s})}(exp(Z_1 + Z_2(\bar{s}))\iota^*_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc})),$$

où

$$\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc} = exp(Z_3(\bar{s}))\iota^*_{M'_{\epsilon,SC},M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}}(\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC}).$$

On a

$$Sg^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}'}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}) = Sg^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\mathcal{O}'}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}), B^{\tilde{G}}).$$

Nos hypothèses de récurrence autorisent à utiliser la proposition 4.4. Le terme ci-dessus est nul si $A_{G'_1(\tilde{s})} \neq A_{G'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}$. Cette condition équivaut à $A_{G'(\tilde{s})} \neq A_{G'(\tilde{s})_\epsilon}$. Supposons que $A_{G'(\tilde{s})} = A_{G'(\tilde{s})_\epsilon}$. Alors le terme précédent vaut

$$e^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))d(\tilde{s})desc^{st,\tilde{G}'_1(\tilde{s}),*}_{\epsilon}(Sg^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}_{M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})},unip}(exp(Z_1{+}Z_2(\bar{s}))\iota^*_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}), B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'})).$$

Comme en 7.1(4), on peut simplifier $e^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s})}(\epsilon_1(\tilde{s}))$ en $e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}(\epsilon)$. On applique la proposition 3.7 : on a

$$Sg^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}_{M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})},unip}(exp(Z_1{+}Z_2(\tilde{s}))\iota^*_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},M'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}), B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'}) = \iota^*_{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC},G'_1(\tilde{s})_{\epsilon_1(\tilde{s})}}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})_{sc}),$$

où

$$\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})_{sc} = Sg^{G'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}_{M'(\tilde{s})_{\epsilon,sc},unip}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}, B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'}).$$

Avec les notations de 5.4(2), on obtient

$$Sg^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\mathcal{O}'}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}), B^{\tilde{G}}) = e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}(\epsilon)d(\tilde{s})\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}.$$

Grâce à 5.4(2), on a

$$transfert(\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(\tilde{s},y)\boldsymbol{\tau}[y]^{\tilde{G}}.$$

Reprenons la construction des éléments $\boldsymbol{\tau}[y]$. Notons $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC}$ l'image par transfert non standard de $\boldsymbol{\delta}_{\epsilon,SC}$. C'est un élément de $D^{st}_{géom}(\bar{M}'_{SC}(F))$. En utilisant l'analogue de 3.7(4) pour le transfert non standard, on obtient que le transfert non standard de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_{\epsilon,sc}$ est

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc} = exp(Z_3(\bar{s}))\iota^*_{\bar{M}'_{SC},\bar{M}'(\bar{s})_{sc}}(\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC}).$$

Utilisons l'hypothèse (1). Elle nous dit que le transfert non standard $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})_{sc}$ de $\boldsymbol{\tau}(\tilde{s})_{sc}$ est $cSg^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC}}_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},unip}(\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc})$, où

$$c = (c^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},\tilde{G}'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\tilde{M}'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}})^{-1}.$$

En utilisant le lemme 3.7, l'élément $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s}) = \iota^*_{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},\bar{G}'(\bar{s})}(\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{s})_{sc})$ est égal à $cSg^{\bar{G}'(\bar{s})}_{\bar{M}',unip}(\bar{\boldsymbol{\delta}})$, où

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = exp(Z_2(\bar{s}))\iota^*_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\delta}}(\bar{s})_{sc}).$$

Remarquons que l'on a aussi $\bar{\boldsymbol{\delta}} = exp(Z_2)\iota^*_{\bar{M}'_{SC},\bar{M}'}(\bar{\boldsymbol{\delta}}_{SC})$, où $Z_2 = Z_2(\bar{s}){+}Z_3(\bar{s}) \in \mathfrak{z}(\bar{M}';F)$. Ces termes Z_2 et $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ sont indépendants de $\bar{s}$. Ensuite

$$\boldsymbol{\tau}[y]^{\tilde{G}} = desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]} \circ \iota^*_{G_{\eta[y]},SC,G_{\eta[y]}} \circ transfert_y(\bar{\tau}(\bar{s}))$$

$$= c\, desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]} \circ \iota^*_{G_{\eta[y]},SC,G_{\eta[y]}} \circ transfert_y(Sg^{\bar{G}'(\bar{s})}_{\bar{M}',unip}(\bar{\boldsymbol{\delta}})).$$

On obtient

$$transfert(Sg^{\tilde{G}'_1(\tilde{s})}_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}),\mathcal{O}'}(\boldsymbol{\delta}_1(\tilde{s}),B^{\tilde{G}})) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}} c[y]d(\tilde{s},y)e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}(\epsilon)d(\tilde{s})(c^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},\tilde{G}'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\tilde{M}'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}})^{-1}$$

$$desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]} \circ \iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}} \circ transfert_y(Sg^{\bar{G}'(\bar{s})}_{\bar{M}',unip}(\bar{\boldsymbol{\delta}})).$$

On se rappelle que l'on a supposé $A_{G'(\tilde{s})} = A_{G'(\tilde{s})_\epsilon}$. Comme en 5.3, notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\tilde{s}$ tels que $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ soit elliptique et que cette égalité soit vérifiée. Pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}$ et tout $\bar{s} \in Z(\hat{\bar{M}}_{ad})^{\Gamma_F}$, posons

$$x(\bar{s},y) = \sum_{\tilde{s}\in\mathcal{S},\tilde{s}\mapsto\bar{s}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))d(\tilde{s},y)e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}(\epsilon)d(\tilde{s})(c^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},\tilde{G}'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\tilde{M}'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}})^{-1}.$$

Posons

$$(2) \qquad \boldsymbol{\xi}[y] = \sum_{\bar{s}\in Z(\hat{\bar{M}}_{ad})^{\Gamma_F}} x(\bar{s},y)Sg^{\bar{G}'(\bar{s})}_{\bar{M}',unip}(\bar{\boldsymbol{\delta}}).$$

Alors les calculs ci-dessus transforment l'expression (1) en

$$(3) \qquad g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}} c[y]desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]} \circ \iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}} \circ transfert_y(\boldsymbol{\xi}[y]).$$

D'après 5.3(5), l'ensemble $\mathcal{S}$ est vide si $A_{G_\eta} \neq A_{\tilde{G}}$. Cela entraîne

(4) $g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}) = 0$ si $A_{G_\eta} \neq A_{\tilde{G}}$.

Dans la suite, on suppose $A_{G_\eta} = A_{\tilde{G}}$. Alors, d'après 5.3(6), $\mathcal{S}$ est l'image réciproque de l'ensemble des $\bar{s}$ tels que $\mathbf{G}'(\bar{s})$ soit elliptique. Notons $\mathcal{Z}$ le noyau de l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F}.$$

Pour $\tilde{s} \in \mathcal{S}$, on a l'égalité

$$e^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}(\epsilon)i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})) = |\mathcal{Z}|^{-1}c^{\bar{G}'(\bar{s})_{SC},\tilde{G}'(\tilde{s})_{\epsilon,SC}}_{\bar{M}'(\bar{s})_{sc},\tilde{M}'(\tilde{s})_{\epsilon,sc}} i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s})).$$

On a vu cette égalité dans la preuve de 7.1(14) (où $|\mathcal{Z}|$ était noté d). Grâce à elle et à la description de $\mathcal{S}$, on transforme la définition de $x(\bar{s},y)$ en

$$(5) \qquad x(\bar{s},y) = |\mathcal{Z}|^{-1}i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC},\bar{G}'(\bar{s})) \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}},\tilde{s}\mapsto\bar{s}} d(\tilde{s})d(y,\tilde{s}).$$

8.3 Calcul de $x(y,\bar{s})$

Rappelons que l'on note $\mathcal{Y}^M$ l'analogue de $\mathcal{Y}$ quand on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in M$ tels que $y\sigma(y)^{-1} \in I^M_\eta$, où $I^M_\eta = Z(M)^\theta M_\eta$. On a fixé un ensemble $\dot{\mathcal{Y}}$ de représentants du quotient $I_\eta\backslash\mathcal{Y}/G(F)$. On fixe de même un ensemble $\dot{\mathcal{Y}}^M$ du quotient $I^M_\eta\backslash\mathcal{Y}^M/M(F)$. Le lemme [I] 5.11 nous autorise à supposer que $\dot{\mathcal{Y}}^M$ est un sous-ensemble de $\dot{\mathcal{Y}}$.

Proposition. *Soient $\bar{s} \in \bar{\zeta} Z(\hat{\bar{M}}_{ad})^{\Gamma_F}$ et $y \in \dot{\mathcal{Y}}$. Alors on peut normaliser le facteur de transfert $\Delta(\bar{s}, y)$ de sorte que l'on ait l'égalité*

$$x(y, \bar{s}) = \begin{cases} i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC}, \bar{G}'(\bar{s})) & \text{si } y \in \dot{\mathcal{Y}}^M, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. On peut suppposer $\mathbf{G}'(\bar{s})$ elliptique, sinon les deux membres sont nuls. Supposons d'abord $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M$. On normalise le facteur $\Delta(\tilde{s}, y)$ par l'égalité 7.1(8). Cela entraîne $d(\tilde{s})d(\tilde{s}, y) = 1$ d'après 7.1(9). L'égalité de l'énoncé résulte alors directement de la formule 8.2(5).

Supposons maintenant $y \notin \dot{\mathcal{Y}}^M$. Fixons $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}} / Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$ se projetant sur $\bar{s}$. L'ensemble des éléments de $\tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}} / Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$ qui se projettent sur $\bar{s}$ est alors l'ensemble des $z\tilde{s}$ pour $z \in \mathcal{Z}$. On cherche à démontrer l'égalité

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}} d(z\tilde{s})d(z\tilde{s}, y) = 0.$$

On peut supposer que $\dot{\mathcal{Y}}^M$ contient l'élément 1. Comme on vient de le voir, la fonction $z \mapsto d(z\tilde{s})d(z\tilde{s}, 1)$ est constante de valeur 1. On peut donc aussi bien démontrer l'égalité

$$(1) \qquad \sum_{z \in \mathcal{Z}} d(z\tilde{s}, y)d(z\tilde{s}, 1)^{-1} = 0.$$

Effectuons les constructions de 5.2 dans un sens différent. On fixe un sous-tore maximal elliptique $\bar{R}'$ de $\bar{G}'(\bar{s})$. Parce qu'il est elliptique, il se transfère en un tore $R^\natural_{sc}$ de $G_{\eta,SC}$ et en un tore $R^\natural[y]_{sc}$ de $G_{\eta[y],SC}$. On note $R^\natural$, resp. $R^\natural[y]$, leurs tores associés dans G_η, resp. $G_{\eta[y]}$, et R, resp. $R[y]$, les commutants de ces tores dans G. Pour $z \in \mathcal{Z}$, le tore $\bar{R}'_{sc}$ se transfère par endoscopie non standard en un tore $R'(z)_{sc}$ de $G'(z\tilde{s})_{\epsilon,SC}$. On note $R'(z)$ le tore associé dans $G'(z\tilde{s})_\epsilon$, qui est aussi un sous-tore maximal de $G'(z\tilde{s})$. On fixe $X \in \mathfrak{r}^\theta(F) = \mathfrak{r}^\natural(F)$ en position générale et proche de 0, que l'on écrit $X = X_{sc} + Z_1$, avec $X_{sc} \in \mathfrak{r}^\natural_{sc}(F)$ et $Z_1 \in \mathfrak{z}(G_\eta; F) \simeq \mathfrak{z}(\bar{G}; F)$ (on oublie le temps de cette démonstration les termes Z_1 etc... de 8.2). On tranfère X_{sc} en un élément $\bar{Y} \in \bar{\mathfrak{r}}'(F)$ que l'on écrit $\bar{Y} = \bar{Y}_{sc} + Z_2$, avec $\bar{Y}_{sc} \in \bar{\mathfrak{r}}'_{sc}(F)$ et $Z_2 \in \mathfrak{z}(\bar{G}'(\bar{s}); F)$. On transfère $\bar{Y}_{sc}$ en un élément $Y_{sc}(z) \in \mathfrak{r}'(z)_{sc}(F)$. Modulo les mêmes identifications qu'en 5.2, on pose $Y(z) = Y_{sc}(z) + Z_1 + Z_2$. C'est un élément de $R'(z)(F)$. On transfère aussi $\bar{Y}$ en un élément $X[y]_{sc}$ de $\mathfrak{r}^\natural[y]_{sc}(F)$ et on pose $X[y] = X[y]_{sc} + Z_1$, modulo l'isomorphisme $\mathfrak{z}(\bar{G}; F) \simeq \mathfrak{z}(G_{\eta[y]}; F)$. La définition 5.4(1) donne

$$d(z\tilde{s}, y)\Delta(\bar{s}, y)(exp(\bar{Y}), exp(X[y]_{sc})) = \Delta_1(z\tilde{s})(exp(Y(z))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X'[y])\eta[y]),$$

$$d(z\tilde{s}, 1)\Delta(\bar{s}, 1)(exp(\bar{Y}), exp(X_{sc})) = \Delta_1(z\tilde{s})(exp(Y(z))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X)\eta).$$

Donc

$$d(z\tilde{s}, y)d(z\tilde{s}, 1)^{-1} = c\chi(z),$$

où

$$c = \Delta(\bar{s}, 1)(exp(\bar{Y}), exp(X_{sc}))\Delta(\bar{s}, y)(exp(\bar{Y}'), exp(X_{sc}[y]))^{-1},$$

$$\begin{aligned}\chi(z) &= \Delta(z\tilde{s})_1(exp(Y(z))\epsilon(\tilde{s})_1, exp(X[y])\eta[y])\Delta(z\tilde{s})_1(exp(Y(z))\epsilon(\tilde{s})_1, exp(X)\eta)^{-1} \\ &= \mathbf{\Delta}(z\tilde{s})_1(exp(Y(z))\epsilon(\tilde{s})_1, exp(X[y])\eta[y]; exp(Y(z))\epsilon(\tilde{s})_1, exp(X)\eta).\end{aligned}$$

L'égalité (1) est équivalente à

$$(2) \qquad \sum_{z\in\mathcal{Z}} \chi(z) = 0.$$

Fixons $z \in \mathcal{Z}$ et calculons $\chi(z)$. Le tore $R^\natural$ est un transfert de $R^\natural[y]$ par l'automorphisme intérieur ad_y. Quitte à multiplier y à gauche par un élément de I_η, ce qui ne change rien au problème, on peut supposer que $ad_y(R^\natural[y]) = R^\natural$ et que ad_y se restreint en un isomorphisme défini sur F de $R^\natural[y]$ sur $R^\natural$. Ces propriétés se prolongent automatiquement : ad_y se restreint en un isomorphisme défini sur F de $R[y]$ sur R. On calcule $\chi(z)$ en utilisant les formules de [I] 2.2. Les tores T et $\underline{T}$ sont remplacés par $R[y]$ et R. Du côté dual, on peut identifier les tores $\hat{R}[y]$ et $\hat{R}$. Les constructions sont les mêmes pour les deux tores. Le cocycle $\hat{V}_1$ de [I] 2.2 est donc de la forme $\hat{V}_1(w) = (\hat{V}_{\mathfrak{R}_1}(w), \hat{V}_{\mathfrak{R}_1}(w), 1)$ (on a remplacé la lettre $\mathfrak{T}$ de [I] 2.2 par $\mathfrak{R}$ par souci de cohérence) et l'élément de $H^{1,0}(W_F; \hat{S}_1 \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U})$ est $(\hat{V}_1, \mathbf{zs})$, où $\mathbf{zs} = (z_{sc}s_{sc}, z_{sc}s_{sc})$. Du côté des groupes sur F, on doit faire un peu attention. On peut identifier les tores R et $R[y]$ par l'automorphisme ad_y. Mais les cocycles ne s'identifient pas exactement. On a des cocycles $V_{R[y]}$ et V_R définis par des formules

$$V_{R[y]}(\sigma) = r_{R[y]}(\sigma)n_{\mathcal{E}}(\omega_{R[y]}(\sigma))u_{\mathcal{E}}(\sigma),$$

$$V_R(\sigma) = r_R(\sigma)n_{\underline{\mathcal{E}}}(\omega_R(\sigma))u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma),$$

en adaptant les notations de [I] 2.2 à la présente situation. Fixons une décomposition $y = y_{sc}d$, avec $y_{sc} \in G_{SC}$ et $d \in Z(G)$. On a défini $u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma)$ par $u_{\underline{\mathcal{E}}}(\sigma) = y_{sc}u_{\mathcal{E}}(\sigma)\sigma(y_{sc})^{-1}$. On vérifie alors que l'on a l'égalité

$$y^{-1}V_R(\sigma)y = V_{R[y]}(\sigma)\sigma(y_{sc})^{-1}y_{sc}.$$

De même, on a posé $exp(X'[y])\eta[y] = \nu e$ et $exp(X')\eta = \underline{\nu e}$. On a $exp(X')\eta = ad_y(exp(X'[y])\eta[y])$, mais $\underline{e} = ad_{y_{sc}}(e)$. On en déduit $\underline{\nu} = d\theta(d)^{-1}ad_y(\nu)$. En identifiant maintenant les deux tores via ad_y, on obtient que le cocycle V est de la forme $V(\sigma) = (V_{R[y]}(\sigma), V_{R[y]}(\sigma)^{-1}y_{sc}^{-1}\sigma(y_{sc}))$ et que l'élément $\boldsymbol{\nu}_1$ est de la forme $(\nu_1, \nu_1^{-1}\theta(d)d^{-1})$. Pour $\sigma \in \Gamma_F$, posons $\tau(\sigma) = \sigma(y_{sc})^{-1}y_{sc}$. Alors τ est un cocycle à valeurs dans $R[y]_{sc}$. On vérifie que le couple $(\tau, \theta(d)^{-1}d)$ est un cocycle qui définit un élément de $H^{1,0}(\Gamma_F; R[y]_{sc} \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(R[y]))$. On a un homomorphisme naturel

$$j : H^{1,0}(\Gamma_F; R[y]_{sc} \overset{1-\theta}{\to} (1-\theta)(R[y])) \to H^{1,0}(\Gamma_F; U \overset{1-\theta}{\to} S_1)$$

(via les secondes composantes, cf. les formules ci-dessus). On peut décomposer le cocycle $(V, \boldsymbol{\nu}_1) \in Z^{1,0}(\Gamma_F; U \overset{1-\theta}{\to} S_1)$ en le produit de l'image naturelle de l'inverse du cocycle précédent et du cocycle $(V_0, \boldsymbol{\nu}_0)$ défini par $V_0(\sigma) = (V_{R[y]}(\sigma), V_{R[y]}(\sigma)^{-1})$ et $\boldsymbol{\nu}_0 = (\nu_1, \nu_1^{-1})$. On a alors

$$\chi(z) =< (V, \boldsymbol{\nu}_1), (\hat{V}_1, \mathbf{zs}) >^{-1} =< (V_0, \boldsymbol{\nu}_0), (\hat{V}_1, \mathbf{zs}) >^{-1} < (\tau, \theta(d)^{-1}d), j^*(\hat{V}_1, \mathbf{zs}) >,$$

où j^* est l'homomorphisme dual de j. On reconnaît le premier terme du membre de droite : c'est

$$\boldsymbol{\Delta}_1(z\tilde{s})(exp(Y'(z))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X'[y])\eta[y]; exp(Y'(z))\epsilon_1(\tilde{s}), exp(X'[y])\eta[y]),$$

et on sait que ce facteur vaut 1. L'élément $j^*(\hat{V}_1, \mathbf{zs})$ appartient à $H^{1,0}(W_F; \hat{R}[y]/\hat{R}[y]^{\hat{\theta},0} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{R}[y]_{ad})$. On voit que c'est le couple $(Y(z), z_{ad}s_{ad})$, où $Y(z)$ est l'image dans $\hat{R}[y]/\hat{R}[y]^{\hat{\theta},0}$ du cocycle $t_{R[y]}$ construit en [I] 2.2 et z_{ad} et s_{ad} sont les images de z et s dans $\hat{G}_{AD}$. On a ajouté un z dans la notation $Y(z)$ parce qu'il dépend en effet de z et parce que cela va nous être utile. On obtient

$$\chi(z) =< (\tau, \theta(d)^{-1}d), (Y(z), z_{ad}s_{ad}) >,$$

d'où

$$(3) \qquad \chi(z) = \chi(1) < (\tau, \theta(d)^{-1}d), (Y(1)^{-1}Y(z), z_{ad}) > .$$

Calculons $Y(1)^{-1}Y(z)$. On ajoute des indices z ou 1 dans les notations pour distinguer les termes relatifs à $\mathbf{G}'(z\tilde{s})$ de ceux relatifs à $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. La définition de [I] 2.2 donne, pour $w \in W_F$,

$$t_{R[y],z}(w) = \hat{r}_{R[y]}(w)\hat{n}(\omega_{R[y]}(w))g_z(w)^{-1}\hat{n}_{G'(z\tilde{s})}(\omega_{R[y],G'(z\tilde{s})}(w))^{-1}\hat{r}_{R[y],G'(z\tilde{s})}(w)^{-1}.$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$\hat{u}_z(w) = \hat{r}_{R[y],G'(z\tilde{s})}(w)\hat{n}_{G'(z\tilde{s})}(\omega_{R[y],G'(z\tilde{s})}(w)).$$

Donc $Y(1)^{-1}(w)Y(z)(w)$ est la projection de

$$\hat{u}_1(w)g_1(w)g_z(w)^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}.$$

On se rappelle que $g_{z,w} = (g_z(w), w)$ est un élément de $\mathcal{G}'(z\tilde{s})$ tel que $ad_{g_{z,w}} \circ w_G$ agisse comme $w_{G'(z\tilde{s})}$ sur $\hat{G}'(z\tilde{s})$. On introduit de même un élément $m_w = (m(w), w) \in \mathcal{M}'$ tel que $ad_{m_w} \circ w_M$ agisse comme $w_{M'}$ sur $\hat{M}'$. Puisque $\mathcal{G}'(z\tilde{s}) = \hat{G}'(z\tilde{s})\mathcal{M}'$ par définition, les éléments $g_{z,w}$ et m_w appartiennent tous deux à $\mathcal{G}'(z\tilde{s})$ et conservent la même paire de Borel (celle que l'on a fixée pour laquelle $\hat{M}'$ est un Levi standard). Il en résulte que $g_z(w) \in \hat{T}^{\hat{\theta},0}m(w)$. Donc $g_1(w)g_z(w)^{-1} \in \hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Les éléments $\hat{u}_z(w)$ et $\hat{u}_1(w)$ normalisent ce tore. Puisqu'on projette dans $\hat{T}/\hat{T}^{\hat{\theta},0}$, on peut aussi bien supprimer le terme $g_1(w)g_z(w)^{-1}$ et on obtient que $Y(1)^{-1}(w)Y(z)(w)$ est la projection de $\hat{u}_1(w)\hat{u}_z(w)^{-1}$. Les deux éléments $\hat{u}_z(w)$ et $\hat{u}_1(w)$ se relèvent naturellement dans $\hat{G}_{SC}$. Définissons une cochaîne $\underline{Y} : W_F \to \hat{R}[y]_{sc}/\hat{R}[y]^{\hat{\theta}}_{sc}$ ainsi : $\underline{Y}(w)$ est la projection dans $\hat{R}[y]_{sc}/\hat{R}[y]^{\hat{\theta}}_{sc}$ de $\hat{u}_1(w)\hat{u}_z(w)^{-1}$, vu comme un élément de $\hat{R}[y]_{sc}$. L'élément z appartient par définition à $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On a déjà dit plusieurs fois que ce tore n'est autre que $Z(\hat{M}_{ad})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Il est connexe. On peut donc relever z_{ad} en un élément $z_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. Ce groupe est un sous-groupe de $\hat{R}[y]_{sc}$. Montrons que

(4) le couple $(\underline{Y}, z_{sc})$ appartient à $Z^{1,0}(W_F; \hat{R}[y]_{sc}/\hat{R}[y]^{\hat{\theta}}_{sc} \overset{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{R}[y]_{sc})$.

On note $w \mapsto w_R$ l'action galoisienne sur $\hat{R}[y]$ (ou les tores reliés tels que $\hat{R}[y]_{sc}$ etc...). On a les égalités $w_R = ad_{\hat{u}_z(w)} \circ w_{G'(z\tilde{s})} = ad_{\hat{u}_z(w)} \circ ad_{g_z(w)} \circ w_G$. Remarquons que w_R n'agit que sur $\hat{R}$ mais le dernier opérateur s'etend à tout $\hat{G}$. Pour $w, w' \in W_F$, on a

$$\underline{Y}(w)w_R(\underline{Y}(w')) = \underline{Y}(w)\hat{u}_z(w)g_z(w)w_G(\underline{Y}(w'))g_z(w)^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}.$$

C'est la projection dans $\hat{R}[y]_{sc}/\hat{R}[y]^{\hat{\theta}}_{sc}$ de

$$\hat{u}_1(w)g_z(w)w_G(\hat{u}_1(w'))w_G(\hat{u}_z(w'))^{-1}g_z(w)^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}$$

$$= \hat{u}_1(w)g_z(w)w_G(\hat{u}_1(w'))g_z(w)^{-1}g_z(w)w_G(\hat{u}_z(w'))^{-1}g_z(w)^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}$$
$$= \hat{u}_1(w)g_z(w)w_G(\hat{u}_1(w'))g_z(w)^{-1}w_{G'(z\tilde{s})}(\hat{u}_z(w'))^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}.$$

On a vu ci-dessus que $g_z(w)g_1(w)^{-1}$ appartenait à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. En relevant l'image de cet élément dans $\hat{G}_{AD}$ en un élément de $\hat{T}^{\hat{\theta}}_{sc}$, on obtient qu'il existe $t \in \hat{T}^{\hat{\theta}}_{sc}$ tel que $ad_{g_z(w)} = ad_t \circ ad_{g_1(w)}$. Donc

$$g_z(w)w_G(\hat{u}_1(w'))g_z(w)^{-1} = tg_1(w)w_G(\hat{u}_1(w'))g_1(w)^{-1}t^{-1} = tw_{G'(\tilde{s})}(\hat{u}_1(w'))t^{-1}.$$

On obtient que $\underline{Y}(w)w_R(\underline{Y}(w'))$ est la projection dans $\hat{R}[y]_{sc}/\hat{R}[y]^{\hat{\theta}}_{sc}$ de

$$\hat{u}_1(w)tw_{G'(\tilde{s})}(\hat{u}_1(w'))t^{-1}w_{G'(z\tilde{s})}(\hat{u}_z(w'))^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}.$$

Comme plus haut, les éléments $\hat{u}_z(w)$ etc... normalisent le tore $\hat{T}^{\hat{\theta}}_{sc}$, donc les éléments t de la formule ci-dessus disparaissent par projection. Il reste

$$\hat{u}_1(w)w_{G'(\tilde{s})}(\hat{u}_1(w'))w_{G'(z\tilde{s})}(\hat{u}_z(w'))^{-1}\hat{u}_z(w)^{-1}.$$

Or, d'après la construction de Langlands et Shelstad, les applications $\hat{u}_1$, resp. $\hat{u}_z$, sont des cocycles (à valeurs dans $\hat{G}'(\tilde{s})$, resp. $\hat{G}'(z\tilde{s})$). Le terme ci-dessus est donc égal à $\hat{u}_1(ww')\hat{u}_z(ww')^{-1}$. Sa projection est $\underline{Y}(ww')$. Cela prouve que $\underline{Y}$ est un cocycle. Pour $w \in W_F$, on a l'égalité

$$(1-\hat{\theta})(\underline{Y}(w)) = \hat{u}_1(w)\hat{u}_z(w)^{-1}\hat{\theta}(\hat{u}_z(w)\hat{u}_1(w)^{-1}).$$

Fixons un relèvement s_{sc} de s_{ad} dans $\hat{G}_{SC}$. On peut remplacer $\hat{\theta}$ par $ad_{z_{sc}s_{sc}} \circ \hat{\theta}$ puisque le terme auquel on applique cet opérateur commute à $z_{sc}s_{sc}$: il appartient à $\hat{T}_{sc}$. Parce que $\hat{u}_z(w) \in \hat{G}'(z\tilde{s})_{sc}$, ce terme est fixe par $ad_{z_{sc}s_{sc}} \circ \hat{\theta}$. La formule se simplifie en

$$(1-\hat{\theta})(\underline{Y}(w)) = \hat{u}_1(w)z_{sc}s_{sc}\hat{\theta}(\hat{u}_1(w)^{-1})s_{sc}^{-1}z_{sc}^{-1}.$$

Pour la même raison que ci-dessus, $\hat{u}_1(w)$ est fixe par $ad_{s_{sc}} \circ \hat{\theta}$. On obtient

$$(1-\hat{\theta})(\underline{Y}(w)) = \hat{u}_1(w)z_{sc}\hat{u}_1(w)^{-1}z_{sc}^{-1}.$$

L'élément z_{sc} appartient à $Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. A fortiori, $w_G(z_{sc}) = z_{sc}$. On a vu ci-dessus que $g_1(w) \in \hat{T}^{\hat{\theta},0}m(w)$, donc $g_1(w) \in \hat{M}$. Puisque $z_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})$, ces deux éléments commutent, d'où $ad_{g_1(w)}w_G(z_{sc}) = z_{sc}$, c'est-à-dire $w_{G'(\tilde{s})}(z_{sc}) = z_{sc}$. Mais alors

$$ad_{\hat{u}_1(w)}(z_{sc}) = w_R(z_{sc}).$$

On obtient

$$(1-\hat{\theta})(\underline{Y}(w)) = w_R(z_{sc})z_{sc}^{-1},$$

ce qui prouve que $(\underline{Y}, z_{sc}^{-1})$ est un cocycle. Cela démontre (4).

Il y a un homomorphisme naturel

$$H^{1,0}(W_F; \hat{R}[y]_{sc}/\hat{R}[y]^{\hat{\theta}}_{sc} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{R}[y]_{sc}) \to H^{1,0}(W_F; \hat{R}[y]/\hat{R}[y]^{\hat{\theta},0} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{R}[y]_{ad}).$$

Le cocycle $(Y(1)^{-1}Y(z), z_{ad})$ est l'image par cet homomorphisme de $(\underline{Y}, z_{sc})$. Notons τ_{ad} l'image de τ dans $R[y]_{ad}$. Puisque $d \in Z(G)$, l'image de $(\tau, \theta(d)^{-1}d)$ dans $H^{1,0}(\Gamma_F; R[y]_{ad} \stackrel{1-\theta}{\to}$

$(1-\theta)(R[y]_{ad}))$ par l'homomorphisme dual du précédent est $(\tau_{ad}, 1)$. Grâce à (3), on obtient

$$\chi(z) = \chi(1) < (\tau_{ad}, 1), (\underline{Y}, z_{sc}) > .$$

Rappelons que $R[y]^{\theta}_{ad}$ est connexe. Le fait que $(\tau_{ad}, 1)$ soit un cocycle implique que τ_{ad} prend ses valeurs dans ce tore. On a un homomorphisme naturel

$$H^{1,0}(\Gamma_F; R[y]^{\theta}_{ad} \to \{1\}) \to H^{1,0}(\Gamma_F; R[y]_{ad} \stackrel{1-\theta}{\to} (1-\theta)(R[y]_{ad}))$$

et $(\tau_{ad}, 1)$ est l'image du même cocycle, vu comme un élément du premier groupe. L'image de $(\underline{Y}, z_{sc}^{-1})$ dans $H^{1,0}(W_F; \{1\} \to \hat{R}[y]_{sc}/(1-\hat{\theta})(\hat{R}[y]_{sc}))$ par l'homomorphisme dual du précédent est $(1, \bar{z}_{sc})$, où $\bar{z}_{sc}$ est l'image de z_{sc} dans $\hat{R}[y]_{sc}/(1-\hat{\theta})(\hat{R}[y]_{sc})$. D'où

$$\chi(z) = \chi(1) < (\tau_{ad}, 1), (1, \bar{z}_{sc}) >,$$

le produit étant celui sur

$$H^{1,0}(\Gamma_F; R[y]^{\theta}_{ad} \to \{1\}) \times H^{1,0}(W_F; \{1\} \to \hat{R}[y]_{sc}/(1-\hat{\theta})(\hat{R}[y]_{sc})).$$

En appliquant [KS] A.3.14, cela se simplifie en

$$\chi(z) = \chi(1) < \tau_{ad}, \bar{z}_{sc} >,$$

le produit étant celui sur

$$H^1(\Gamma_F; R[y]^{\theta}_{ad}) \times H^0(W_F; \hat{R}[y]_{sc}/(1-\hat{\theta})(\hat{R}[y]_{sc})).$$

Transférons le tore $R[y]^{\theta,0}$ de $G_{\eta[y]}$ en le tore $R^{\theta,0}$ de G_η. Cela remplace τ_{ad} par τ'_{ad} défini par $\tau'_{ad}(\sigma) = ad_y(\tau_{ad}(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On note $\hat{\bar{R}}$ le tore dual de $R^{\theta,0}$. On peut considérer que c'est un sous-tore de $\hat{\bar{G}}$. On a une suite

$$G_\eta \to G_{\eta,ad} \to G_{\eta,AD},$$

où $G_{\eta,ad}$ est l'image de G_η dans G_{AD}. On a une suite similaire pour les formes quasi-déployées

$$\bar{G} \to \bar{G}_{ad} \to \bar{G}_{AD}$$

et une suite duale

$$\hat{\bar{G}}_{SC} \to \hat{\bar{G}}_{sc} \to \hat{\bar{G}}.$$

En notant $\hat{\bar{R}}_{sc}$ l'image réciproque de $\hat{\bar{R}}$ dans $\hat{\bar{G}}_{sc}$, le produit ci-dessus devient celui sur

$$H^1(\Gamma_F; R^{\theta}_{ad}) \times H^0(W_F; \hat{\bar{R}}_{sc}).$$

Puisque $z \in \mathcal{Z}$, l'image de z dans $\hat{\bar{R}}$ appartient à $Z(\hat{\bar{G}})$. Il en résulte que $\bar{z}_{sc} \in Z(\hat{\bar{G}}_{sc})$. On a une dualité sur

$$H^1(\Gamma_F; G_{\eta,ad}) \times Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F,0}$$

qui est compatible au produit précédent. Pour simplifier, nous ne changerons pas les notations : on a encore

$$(5) \qquad \chi(z) = \chi(1) < \tau'_{ad}, \bar{z}_{sc} >,$$

où cette fois, τ'_{ad} est vu comme un élément du premier groupe ci-dessus et $\bar{z}_{sc}$ comme un élément du second. On a choisi le relèvement z_{sc} mais la formule obtenue montre que le membre de droite ci-dessus ne dépend pas de ce choix. Pour deux éléments $z, z' \in \mathcal{Z}$, on peut choisir $z_{sc}z'_{sc}$ comme relèvement de zz'. On voit alors que, à la constante $\chi(1)$ près, $\chi(z)$ est la valeur en z d'un caractère de $\mathcal{Z}$. Pour obtenir la relation de nullité (2), il reste à prouver que ce caractère n'est pas trivial. On a un homomorphisme

$$(6) \qquad Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F,0} \to Z(\hat{\bar{M}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{M}}_{sc})^{\Gamma_F,0},$$

où $\hat{\bar{M}}_{sc}$ est ici l'image réciproque de $\hat{\bar{M}}$ dans $\hat{\bar{G}}_{sc}$. Montrons que

(7) tout élément du noyau de (6) est de la forme $\bar{z}_{sc}$ pour un choix convenable de $z \in \mathcal{Z}$ et de relèvement $z_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$.

Soit $x \in Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}$ relevant un élément du noyau. Alors $x \in Z(\hat{\bar{M}}_{sc})^{\Gamma_F,0}$. On a la même relation que 5.3(2) au niveau du groupe $\hat{G}_{SC}$, c'est-à-dire que l'homomorphisme

$$Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} \to Z(\hat{\bar{M}}_{sc})^{\Gamma_F,0}$$

est surjectif. On peut donc relever x en un élément $z_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. Notons z son image dans $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. L'image naturelle de z dans $Z(\hat{\bar{M}})^{\Gamma_F}$ est égale à celle de x. Or x appartient à $Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}$. Donc cette image appartient à $Z(\hat{\bar{G}})^{\Gamma_F}$. Par définition de $\mathcal{Z}$, cela entraîne que $z \in \mathcal{Z}$. Bien sûr, l'image de x dans $Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F,0}$ est $\bar{z}_{sc}$. Cela démontre (7).

D'après (5) et (7), χ ne peut être constant que si le caractère de $Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F,0}$ défini par τ'_{ad} annule le noyau de (6). On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma_F; G_{\eta,ad}) & \times & Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{G}}_{sc})^{\Gamma_F,0} \\ \uparrow & & \downarrow \\ H^1(\Gamma_F; M_{\eta,ad}) & \times & Z(\hat{\bar{M}}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{\bar{M}}_{sc})^{\Gamma_F,0} \end{array}$$

qui est compatible aux dualités. Alors τ_{ad} annule le noyau de (6) si et seulement s'il provient d'un élément de $H^1(\Gamma_F; M_{\eta,ad})$. Rappelons qu'au départ, on avait $\tau(\sigma) = \sigma(y_{sc})^{-1}y_{sc}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Puisque $y_{sc} \in yZ(G)$, on a simplement $\tau_{ad}(\sigma) = \sigma(y_{ad})^{-1}y_{ad}$. D'où $\tau'_{ad}(\sigma) = y_{ad}\sigma(y_{ad})^{-1}$. Autrement dit, c'est le cocycle provenant naturellement du torseur intérieur $ad_{y^{-1}} : G_\eta \to G_{\eta[y]}$. Si ce cocycle provient d'un élément de $H^1(\Gamma_F; M_{\eta,ad})$, alors le groupe de Levi M_η de G_η se transfère à $G_{\eta[y]}$. C'est interdit par notre hypothèse $y \notin \dot{\mathcal{Y}}^M$ et le lemme [I] 5.11. Cela achève la preuve de (2) et de la proposition. □

8.4 Fin de la preuve de la proposition 8.1

On normalise les facteurs $\Delta(\bar{s}, y)$ de sorte que la proposition précédente soit vérifiée. En utilisant cette proposition et la formule 8.2(3), on a $\boldsymbol{\xi}[y] = 0$ si $y \notin \dot{\mathcal{Y}}^M$. Supposons $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M$. Alors

$$\boldsymbol{\xi}[y] = \sum_{\bar{s} \in Z(\hat{\bar{M}}_{ad}^{\Gamma_F}} i_{\bar{M}'}(\bar{G}_{SC}, \bar{G}'(\bar{s}))Sg^{\bar{G}'(\bar{s})}_{\bar{M}',unip}(\bar{\boldsymbol{\delta}}).$$

Par définition

$$transfert_y(\boldsymbol{\xi}[y]) = g^{G_{\eta[y],SC},\mathcal{E}}_{M_{\eta[y],sc},unip}(\bar{\mathbf{M}}', \bar{\boldsymbol{\delta}}).$$

ici, les groupes ne sont pas tordus. On peut utiliser le corollaire 1.5 : le terme ci-dessus vaut $g^{G_{\eta[y],SC}}_{M_{\eta[y],sc},unip}(\boldsymbol{\delta}[y]_{sc})$, où

$$\boldsymbol{\delta}[y]_{sc} = transfert_y(\bar{\boldsymbol{\delta}}).$$

En utilisant la proposition 3.4, on a

$$\iota^*_{G_{\eta[y],SC},G_{\eta[y]}}(g^{G_{\eta[y],SC}}_{M_{\eta[y],sc},unip}(\boldsymbol{\delta}[y]_{sc})) = g^{G_{\eta[y]}}_{M_{\eta[y]},unip}(\boldsymbol{\delta}[y]),$$

où

$$\boldsymbol{\delta}[y] = exp(Z_1)\iota^*_{M_{\eta[y],sc},M_{\eta[y]}}(\boldsymbol{\delta}[y]_{sc}).$$

On a identifié ici Z_1 à un élément de $\mathfrak{z}(G_{\eta[y]};F)$. Enfin, on se rappelle que l'on a supposé $A_{G_\eta} = A_{\tilde{G}}$, ce qui équivaut à $A_{G_{\eta[y]}} = A_{\tilde{G}}$ puisque $G_{\eta[y]}$ est une forme intérieure de G_η. D'après la proposition 4.2, on a donc

$$desc^{\tilde{G},*}_{\eta[y]}(g^{G_{\eta[y]}}_{M_{\eta[y]},unip}(\boldsymbol{\delta}[y])) = g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(desc^{\tilde{M},*}_{\eta[y]}(\boldsymbol{\delta}[y])).$$

La formule 8.1(3) devient

$$(1) \qquad g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}) = g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\tau}),$$

où

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M} c[y]desc^{\tilde{M},*}_{\eta[y]}(\boldsymbol{\delta}[y]).$$

A ce point, on peut lever l'hypothèse que $A_{G_\eta} = A_{\tilde{G}}$. Si elle n'est pas vérifiée, le membre de gauche de (1) est nul d'après 8.2(4). Celui de droite l'est d'après la proposition 4.2.

Il est facile de reprendre tous ces calculs en remplaçant l'espace $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$ pour calculer $transfert(\boldsymbol{\delta})$. C'est d'ailleurs le même calcul qu'en 7.1, aux translations près par l'élément central Z qui est évidemmment inoffensif. On n'obtient pas tout-à-fait l'égalité $transfert(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\tau}$. Le remplacement de $\tilde{G}$ par $\tilde{M}$ conduit à l'égalité

$$transfert(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{y\in\dot{\mathcal{Y}}^M} c^M[y]desc^{\tilde{M},*}_{\eta[y]}(\boldsymbol{\delta}[y]).$$

Mais on a

(2) $c^M[y] = c[y]$ pour tout $y \in \dot{\mathcal{Y}}^M$.

Pour simplifier la notation, on peut supposer $y = 1$. On doit prouver que l'application naturelle

$$M_\eta(F)\backslash I^M_\eta(F) \to G_\eta(F)\backslash I_\eta(F)$$

est bijective. L'injectivité résulte de l'égalité $G_\eta \cap M = M_\eta$ (un élément de $G_\eta \cap M$ commute à $A_{\tilde{M}} = A_{M_\eta}$ donc appartient à M_η). Soit $u \in I_\eta(F)$. On écrit $u = gz$ avec $g \in G_\eta$ et $z \in Z(G)^\theta$. On définit un cocycle ξ sur Γ_F par $\xi(\sigma) = z^{-1}\sigma(z) = g\sigma(g)^{-1}$. Cette formule montre qu'il prend ses valeurs dans $Z(G_\eta)$ et qu'il est cohomologiquement trivial dans G_η. C'est donc un élément du noyau de $H^1(\Gamma_F;Z(G_\eta)) \to H^1(\Gamma_F;G_\eta)$. Cette application se factorise en

$$H^1(\Gamma_F;Z(G_\eta)) \to H^1(\Gamma_F;M_\eta) \to H^1(\Gamma_F;G_\eta).$$

La deuxième application est injective car M_η est un Levi de G_η. Donc ξ appartient au noyau de la première application. On peut donc trouver $m \in M_\eta$ tel que $\xi(\sigma) = m\sigma(m)^{-1}$

pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Posons $v = mz$. Alors $v \in I^M_{\eta[y]}$. On a $u = gm^{-1}v$ et les relations $\xi(\sigma) = m\sigma(m)^{-1} = g\sigma(g)^{-1}$ entraînent que gm^{-1} appartient à $G_\eta(F)$. Donc l'image de u dans $G_\eta(F)\backslash I_\eta(F)$ est égale à celle de v, ce qui démontre la surjectivité cherchée et (2).

Donc $transfert(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\tau}$ et la formule (1) devient

$$g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(transfert(\boldsymbol{\delta})).$$

Cela prouve la proposition 8.1. □

8.5 Egalité de germes et de germes endoscopiques

On considère un triplet quelconque $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, un espace de Levi $\tilde{M}$ et une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O} \subset \tilde{M}(F)$.

Il y un cas particulier que nous devons exclure. C'est celui où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est l'un des triplets définis en 6.3 et où $\mathcal{O}$ est la classe de conjugaison stable d'un élément $\eta \in \tilde{M}(F)$ qui conserve une paire de Borel épinglée de G définie sur F.

Proposition. *On suppose que l'on n'est pas dans le cas particulier ci-dessus. Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$. On suppose que les éléments du support de $\boldsymbol{\gamma}$ sont $\tilde{G}$-équisinguliers et proches de $\mathcal{O}$. Alors on a l'égalité*

$$g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}) = g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Preuve. Par linéarité, on peut fixer une donnée endoscopique $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a})$, elliptique et relevante, et un élément $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ de sorte que $\boldsymbol{\gamma} = transfert(\boldsymbol{\delta})$. On peut aussi fixer une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(F)$ se transférant sur $\mathcal{O}$ et supposer $\boldsymbol{\delta}$ proche de $\mathcal{O}'$. Soit $\epsilon \in \mathcal{O}'$. Supposons d'abord $A_{M'_\epsilon} \neq A_{M'}$. Alors, comme dans la preuve de 7.4, les deux membres de l'énoncé sont calculés par des formules de descente, à savoir celles des propositions [II] 2.11 et [II] 2.12. Par récurrence, on en déduit l'égalité de l'énoncé. Supposons $A_{M'_\epsilon} = A_{M'}$. D'après nos hypothèses de récurrence et le lemme 6.3, l'hypothèse (1) de 8.1 est vérifiée sauf dans le cas particulier que l'on a exclu. On peut donc appliquer la proposition 8.1 qui conclut. □

8.6 Preuve de la proposition 4.4

On renvoie à 4.4 pour l'énoncé de cette proposition. Ici, le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, muni d'un système de fonctions B. La preuve de la proposition est similaire à celle de la proposition 7.3. On reprend la preuve de 8.1 dans le cas $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ que l'on avait exclu. Elle conduit à une égalité

$$g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, B) = x + g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), B),$$

où x est la différence entre les deux membres de l'égalité que l'on veut prouver. Mais $g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\delta}, B)$ est ici tautologiquement égal à $g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(transfert(\boldsymbol{\delta}), B)$, ce qui entraîne $x = 0$.

8.7 Preuve de la proposition 6.7

L'argument est le même qu'en 7.7. Grâce au lemme 6.8, on peut supposer (G_1, G_2, j_*) quasi-élémentaire. On introduit le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui lui est associé comme en 6.3. On introduit les mêmes données η, $\tilde{M}$, $\mathbf{M}'$ et ϵ qu'en 7.7. On reprend la preuve de 8.1 pour ces données. On obtient une égalité

$$g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\mu} + g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(transfert(\boldsymbol{\delta})),$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est un cetain terme complémentaire. Par nos hypothèses de récurrence, on connaît l'égalité

$$g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}) = g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(transfert(\boldsymbol{\delta})).$$

D'où $\boldsymbol{\mu} = 0$. En choisissant convenablement $\boldsymbol{\delta}$, on en déduit l'assertion cherchée concernant notre triplet (G_1, G_2, j_*). On laisse les détails au lecteur.

Bibliographie

[A1] J. Arthur : *A stable trace formula I. General expansions* Journal of the Inst. of Math. Jussieu 1 (2002), p. 175-277

[A2] ——— : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. Journal 56 (1988), p. 223-293

[F] A. Ferrari : *Théorème de l'indice et formule des traces*, manuscripta math. 124 (2007), p. 363-390

[KS] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[L] J.-P. Labesse : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 3 (2004), p. 473-530

[S] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann 1968

[W1] J.-L. Waldspurger : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[W2] ——————— : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[I] ——————— :*Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local*, prépublication 2014

[II] ——————— : *Stabilisation de la formule des traces tordue II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien; définitions et énoncés des résultats*, prépublication 2014

Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS
2 place Jussieu 75005 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr