HAL
open science

Un calcul d'anneaux de déformations potentiellement Barsotti–Tate

Xavier Caruso, Agnès David, Ariane Mézard

To cite this version:

Xavier Caruso, Agnès David, Ariane Mézard. Un calcul d'anneaux de déformations potentiellement Barsotti–Tate. Transactions of the American Mathematical Society, 2018, 370 (9), pp.6041-6096. 10.1090/tran/6973 . hal-00944666

HAL Id: hal-00944666

https://hal.science/hal-00944666v1

Submitted on 11 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN CALCUL D'ANNEAUX DE DÉFORMATIONS POTENTIELLEMENT BARSOTTI–TATE

par

Xavier Caruso, Agnès David & Ariane Mézard

Résumé. — Soit F une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ incluse dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ fixée. Le premier objectif de ce travail est de présenter une méthode purement locale pour calculer les anneaux de déformations potentiellement Barsotti–Tate de type galoisien modéré des représentations irréductibles de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$. Nous appliquons ensuite cette méthode dans le cas particulier où F est de degré 2 sur $\mathbb{Q}_p$, ce qui nous conduit, dans ce cas, à la détermination presque exhaustive de ces anneaux de déformations. Notre approche met en évidence un lien, apparemment ténu, entre la structure de ces anneaux de déformations et la géométrie de la variété de Kisin correspondante.

En guise de corollaire, nous vérifions, toujours dans le cas où F est de degré 2 sur $\mathbb{Q}_p$ et à l'exception de deux cas très particuliers, une conjecture de Kisin qui prédit que les multiplicités galoisiennes intrinsèques valent toutes 0 ou 1.

Table des matières

Introduction 1
1. Motivations : la conjecture de Breuil–Mézard 3
2. Outils de théorie de Hodge p-adique 9
3. Méthode de calcul des déformations potentiellement Barsotti–Tate . 22
4. Mise en œuvre de la méthode en degré 2 44
Références 55

Introduction

Les anneaux de déformations universelles jouent un rôle central dans le cadre des développements récents autour de la correspondance de Langlands p-adique. En effet, une étude fine de ces anneaux de déformations locales et globales ([**Ki3**], [**Ki4**],[**TW**],[**Wil**]) est nécessaire pour démontrer les théorèmes de relèvements modulaires. Si la détermination générale de ces anneaux semble actuellement hors de portée, la conjecture de multiplicités modulaires, dite de Breuil–Mézard ([**BM1**]), donne des informations précises sur la structure des anneaux de déformations

géométriques locales en général. Cette conjecture prédit une formule, en termes de théorie des représentations, pour la multiplicité de Hilbert–Samuel μ_{gal} de la fibre en caractéristique p des anneaux de déformations potentiellement semi-stables d'une représentation galoisienne fixée $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k_E)$ où k_E est un corps fini suffisamment grand de caractéristique p. La multiplicité de ces anneaux de déformations a deux origines : si leur spectre est la réunion de n composantes irréductibles, chacune de multiplicité μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, alors, la multiplicité de l'anneau entier est $\sum_i \mu_i$. Par ailleurs, la multiplicité d'une composante est liée à sa géométrie et mesure son degré de nilpotence. D'après la version raffinée de la conjecture de Breuil–Mézard ([**BM2**],[**Ki3**],[**EG**]), il existerait des entiers naturels $m_{\bar{\rho}}(\sigma)$, dits multiplicités intrinsèques, ne dépendant que de la représentation galoisienne $\bar{\rho}$ et des poids de Serre σ, permettant d'écrire une formule explicite $\mu_{\mathrm{gal}} = \sum_\sigma m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma) m_{\bar{\rho}}(\sigma)$ où la somme porte sur les poids de Serre et les termes $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma)$ s'obtiennent facilement en fonction des contraintes notées $(\mathbf{v}, \mathrm{t})$ (voir §1.2) sur les déformations. Cette version raffinée s'étend aux représentations galoisiennes de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ pour F extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de dimension n ([**EG**]). Malheureusement, tant la détermination numérique que l'interprétation géométrique des multiplicités intrinsèques sont à ce jour mystérieuses. Elles ne sont connues que pour les représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 ([**BM1**],[**Ki3**]). Dans le cas des représentations génériques de dimension 2 sur des extensions F non ramifiées de degré fini de $\mathbb{Q}_p$, elles sont déterminées conjecturalement à 0 ou 1 dans [**BM2**]. Dans le cas des représentations irréductibles, Kisin conjecture que leurs valeurs sont aussi 0 ou 1 (Conj. 2.3.5 [**Ki5**]). F. Sander a exhibé le premier cas de multiplicité 4 pour un anneau de déformations d'une représentation réductible de $G_{\mathbb{Q}_p}$ ([**San**]). Enfin Gee et Kisin déterminent les multiplicités intrinsèques associés à des poids de Serre dits Fontaine–Laffaille réguliers ([**GK**]).

L'objet de ce travail est la mise en œuvre d'une stratégie pour déterminer les multiplicités intrinsèques pour les représentations irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ pour F non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, en lien avec la géométrie des anneaux de déformations. D'une part, nous programmons sous SAGE [1] le calcul des multiplicités $(m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma))_\sigma$ via la décomposition de Jordan–Hölder de certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^f})$ suivants les algorithmes théoriques de [**BP**],[**Dav**]. D'autre part, nous calculons explicitement certains anneaux de déformations universelles via la théorie de Hodge p-adique.

Nous en déduisons les valeurs des multiplicités μ_{gal} et $(m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma))_\sigma$ pour différents paramètres $(\mathbf{v}, \mathrm{t})$ de déformations. Nos méthodes conduisent à des résultats explicites en accord avec la conjecture de Kisin, tels que

Théorème 1 **(*cf* Corollaire 4.3.3)**. — *Soient F l'extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\rho}$ une représentation de dimension 2 continue irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, non totalement non générique, et σ un poids de Serre de $\overline{\rho}$ qui n'est pas totalement irrégulier. Alors la multiplicité intrinsèque de σ dans $\overline{\rho}$ est* 1.

Toujours dans la situation du théorème 1, notre approche nous permet en outre d'établir un lien entre la géométrie des espaces de déformations potentiellement

1. Voir https://cethop.math.cnrs.fr:8443/home/pub/14 pour une démonstration.

Barsotti–Tate considérés et celle de la variété de Kisin $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v},\mathrm{t}}$ introduite, dans un contexte légèrement différent, dans [**Ki2**] (voir aussi [**Ki5**]).

Théorème 2 (***cf*** **Théorème 4.3.1**). — *Soient F l'extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ et $\overline{\rho}$ une représentation de dimension 2 continue irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$, non totalement non générique. Soient $\mathbf{v}_0 = (0,2)_{\tau\in\mathcal{S}}$ et t un type galoisien modéré de niveau 2. Nous avons alors la trichotomie suivante :*

- *soit $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ est vide et $R^{\psi}(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho}) = \{0\}$;*
- *soit $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ est un point et $R^{\psi}(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho}) \simeq \mathcal{O}_E[[X,Y,T]]/(XY+p)$;*
- *soit $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k_E}$ et $R^{\psi}(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho}) \simeq \mathcal{O}_E[[X,Y,T]]/(XY+p^2)$.*

Nous énonçons en réalité un résultat plus précis dans le corps de l'article (voir Théorème 4.3.1), où nous déterminons entièrement et de façon complètement explicite lequel des trois cas précédents se produit en fonction de $\overline{\rho}$, $\mathbf{v}_0$, t et ψ. Pour une représentation $\overline{\rho}$ irréductible générique, ces résultats figurent déjà dans [**BM2**] et le troisième cas du théorème 2 ne se produit pas. Nous renvoyons également à la partie 4 pour des énoncés additionnels dans les situations totalement non génériques.

Plus généralement, la stratégie mise en place est valable pour les représentations réductibles ou irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ en tout degré $f = [F:\mathbb{Q}_p]$. Les résultats en degré 2 révèlent une nouvelle forme d'anneaux de déformations qu'il conviendra d'interpréter en termes modulaires. L'étude en tout degré fera l'objet d'un article ultérieur s'appuyant sur les résultats en degré 2.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la partie 1, nous donnons un énoncé précis de la conjecture de multiplicités modulaires en rappelant toutes les notations utiles dans ce contexte. La partie 2 est consacrée à des rappels et des compléments généraux de théorie de Hodge p-adique portant principalement sur les modules de Breuil–Kisin et ses applications au calcul d'espaces de déformations galoisiennes. Avec la partie 3 commence l'étude plus détaillée du cas des représentations potentiellement Barsotti–Tate sur un corps p-adique absolument non ramifié. Nous démontrons un théorème de classification des modules de Breuil–Kisin et donnons une méthode générale, basée sur ce théorème, pour déterminer les espaces de déformations qui nous préoccupent. Dans la partie 4, enfin, nous mettons en œuvre cette méthode dans le cas d'une représentation galoisienne irréductible sur une extension non ramifiée de degré 2 ; ceci nous conduit notamment aux théorèmes 1 et 2 énoncés précédemment.

Les auteurs remercient Christophe Breuil pour de nombreuses discussions lors de la genèse de ce travail et Gabor Wiese pour son accueil à l'université du Luxembourg. Les auteurs ont bénéficié du soutien financier des ANR Cethop et ThéHopaD et du FNR Luxembourg.

1. Motivations : la conjecture de Breuil–Mézard

1.1. Conjecture de multiplicités modulaires. —

1.1.1. Notations. — Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Pour toute extension finie E de $\mathbb{Q}_p$, nous notons $\mathcal{O}_E$ son anneau des entiers, ϖ_E une uniformisante et $k_E = \mathcal{O}_E/\varpi_E$ son corps résiduel. Nous supposons également que E est plongée dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ fixée de $\mathbb{Q}_p$ et nous notons $G_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/E)$. Ces notations sont valables pour toutes les extensions algébriques (notées E, F, K ou L) de $\mathbb{Q}_p$ considérées dans cet article.

Soient E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et F une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f. Posons $q = p^f$. Quitte à agrandir E, nous supposons que E contient l'extension quadratique non ramifiée de F, ou de manière équivalente que k_E contient l'extension de degré 2 de $\mathbb{F}_q$. L'extension maximale non ramifiée de F dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est notée F^{nr}.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des plongements de F dans E (de cardinal f), qui s'identifie à l'ensemble des plongements de $\mathbb{F}_q$ dans k_E puisque F est non ramifiée. Par abus, nous considérerons les éléments $\tau \in \mathcal{S}$ aussi bien comme des plongements de F dans E que de $\mathbb{F}_q$ dans k_E. Soit F' l'unique extension quadratique non ramifiée de F dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Notons $\mathcal{S}'$ l'ensemble des plongements de F' dans E, identifié à l'ensemble des plongements de $\mathbb{F}_{q^2}$ dans k_E. Nous fixons τ_0 un plongement de $\mathcal{S}$ et τ_0' dans $\mathcal{S}'$ un relèvement de τ_0. Nous notons également φ le Frobenius de $\mathbb{F}_q$ et de $\mathbb{F}_{q^2}$.

Si $\widehat{F}^\times$ désigne le complété profini de $F^\times$, la théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme $G_F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \widehat{F}^\times$ qui envoie les éléments de Frobenius géométriques sur les uniformisantes et l'image du sous-groupe d'inertie sur $\mathcal{O}_F^\times$. Par cet isomorphisme, nous voyons implicitement tout caractère de G_F (resp. de $I_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}})$) comme un caractère de $F^\times$ (resp. de $\mathcal{O}_F^\times$). De plus, la projection à gauche sur $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F)$ et à droite sur les représentants multiplicatifs $[\mathbb{F}_q^\times] \cong \mathbb{F}_q^\times$ (en envoyant $p^{\mathbb{Z}}(1+p\mathcal{O}_F)$ sur 1) induit l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \omega_F : \mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{O}_F/p)^\times = \mathbb{F}_q^\times \\ g & \longmapsto & \dfrac{\overline{g(\sqrt[q-1]{-p})}}{\sqrt[q-1]{-p}} \end{array} \tag{1}$$

par lequel nous voyons tout caractère de $\mathbb{F}_q^\times$ comme un caractère de $\mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F)$ et réciproquement. Nous notons ε_f le relèvement de Teichmüller de ω_f. Pour τ dans $\mathcal{S}$, notons ω_τ le caractère fondamental de niveau f, induit sur G_F par (1) et le plongement $\tau|_{\mathbb{F}_q^\times}$; notons ε_τ son relèvement de Teichmüller. Notons $\varepsilon : G_F \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique et ω sa réduction modulo p.

Fixons enfin une représentation continue $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ telle que $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)]}(\overline{\rho}) = k_E$.

1.1.2. Déformations et multiplicité galoisiennes. — Fixons $\mathbf{v}$ la donnée de f couples d'entiers $(w_\tau, k_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$ avec w_τ dans $\mathbb{Z}$, k_τ dans $\mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ et t la donnée d'une représentation de noyau ouvert $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{GL}_2(E)$ qui admet un prolongement au groupe de Weil de F. Fixons également un caractère continu $\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathcal{O}_E^\times$ tel que :

$$\psi|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}})} = (\det \mathrm{t}) \prod_{\tau\in\mathcal{S}} \varepsilon_\tau^{2w_\tau+k_\tau-2}. \tag{2}$$

Une représentation linéaire continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ sur un E'-espace vectoriel de dimension 2 (où E' est une extension finie de E) est dite de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ si elle est potentiellement semi-stable, si son déterminant est $\psi\varepsilon$, ses poids de Hodge–Tate $(w_\tau, w_\tau + k_\tau - 1)_{\tau\in\mathcal{S}}$ et si la représentation de Weil–Deligne qui lui est attachée par [**Fo1**] est isomorphe à t en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}})$.

Notons $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ le quotient réduit de l'anneau local paramétrant les déformations de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$ introduits dans [**Ki3**, § 1.4.1]. Plus précisément, si $R^\psi(\overline{\rho})$ est la $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noetherienne de corps résiduel k_E paramétrant les déformations de $\overline{\rho}$ sur de telles $\mathcal{O}_E$-algèbres de déterminant $\psi\varepsilon$, alors $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est l'image de $R^\psi(\overline{\rho})$ dans $R^\psi(\overline{\rho})[1/p]/\cap\mathfrak{p}$, l'intersection étant prise sur les idéaux maximaux $\mathfrak{p}$ de $R^\psi(\overline{\rho})[1/p]$ tels que la représentation :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2\left(R^\psi(\overline{\rho})[1/p]\right) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2\left(R^\psi(\overline{\rho})[1/p]/\mathfrak{p}\right)$$

est de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$. Notons que cette dernière représentation est à coefficients dans une extension finie de E. Les anneaux de déformations que nous venons d'introduire se comportent agréablement lorsque le corps E change : plus précisément, si E' est une extension finie de E, les $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres $R^\psi(\overline{\rho})$ et $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ calculées à partir de E' s'obtiennent par extension des scalaires de $\mathcal{O}_E$ à $\mathcal{O}_{E'}$ à partir de leurs analogues calculés à partir de E (voir lemme 2.2.2.3 de [**BM1**]).

Remarque 1.1.1. — Nous pouvons également définir $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ comme le quotient de $R^\psi(\overline{\rho})$ par l'intersection des idéaux noyaux des morphismes de $\mathcal{O}_E$-algèbres $f : R^\psi(\overline{\rho}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ pour lesquels la représentation :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2\left(R^\psi(\overline{\rho})\right) \to \mathrm{GL}_2\left(\overline{\mathbb{Z}}_p\right) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \psi)$.

Soient A un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$, de dimension d et M un A-module de type fini. Il existe un polynôme $P_M^A(X)$ de degré au plus d, appelé *polynôme de Hilbert–Samuel* de M, uniquement déterminé par l'hypothèse $P_M^A(n) = \mathrm{long}_A\, M/\mathfrak{m}^{n+1}M$ pour n assez grand (voit [**Mat**], §14). La *multiplicité d'Hilbert–Samuel* $e(M, A)$ de M relativement à A est par définition $d!$ fois le coefficient de X^d dans le polynôme $P_M^A(X)$. Lorsque l'anneau A est sous-entendu, par exemple si $M = A$, nous notons simplement $e(M)$. Dans la suite, nous posons

$$\mu_{\mathrm{gal}}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) = e(R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})/\varpi_E). \tag{3}$$

1.1.3. Poids de Serre et multiplicité automorphe. — Un *poids de Serre* de F est une représentation lisse absolument irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, ou de manière équivalente de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur k_E. Un poids de Serre est de la forme :

$$\bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} \left((\mathrm{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau \otimes_{k_E} \tau \circ \det{}^{s_\tau}\right) \tag{4}$$

avec des entiers r_τ et s_τ dans $\{0, \ldots, p-1\}$ et où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau$ par le plongement τ de $\mathbb{F}_q$ dans k_E et l'action sur la base canonique de k_E^2. Avec la condition supplémentaire que tous les s_τ ne sont pas égaux à $p-1$, cette écriture est unique. Si σ est un poids de Serre comme en (4), nous notons $\sigma^s = \bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} \left((\mathrm{Sym}^{p-1-r_\tau} k_E^2)^\tau \otimes_{k_E} \tau \circ \det{}^{r_\tau+s_\tau}\right)$ le symétrique de σ. Nous identifions le poids de Serre σ avec les f-uplets

$(r_\tau, s_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$ qui le définissent. Quand l'action du caractère central est imposée, le f-uplet $(s_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$ s'obtient à partir des $(r_\tau)_{\tau\in f}$. Le poids σ est alors identifié au f-uplet $(r_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}}$.

Un poids de Serre pour lequel aucun r_τ n'est égal à $p-1$ est dit *régulier* ; il est dit *totalement irrégulier* si tous les r_τ sont égaux à $p-1$.

Notons $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ l'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ défini dans [**BDJ**, § 3] (voir la partie 1.2.1 pour une définition et des méthodes de calcul de $\mathcal{D}(\overline{\rho})$).

Nous associons à $\mathbf{v}$ la représentation continue de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur E :

$$\bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} \left((\mathrm{Sym}^{k_\tau-2} E^2)^\tau \otimes_E \tau\circ\det{}^{w_\tau}\right)$$

où $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ agit sur $(\mathrm{Sym}^{k_\tau-2} E^2)^\tau$ via $\tau : \mathcal{O}_F \hookrightarrow E$. Par [**Hen**], nous pouvons également associer à t une représentation lisse absolument irréductible $\sigma(\mathrm{t})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur E (quitte à agrandir E) de caractère central $\det \mathrm{t}$. Notons $\mathcal{D}(\mathbf{v},\mathrm{t})$ l'ensemble des poids de Serre à multiplicité près qui sont des constituants du semi-simplifié sur k_E de $\sigma(\mathbf{v})\otimes_E\sigma(\mathrm{t})$ et $m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma)$ la multiplicité (dans $\mathbb{N}$) avec laquelle un poids de Serre σ (quelconque) apparaît dans ce semi-simplifié.

1.1.4. Conjecture de multiplicités modulaires. — L'énoncé de la conjecture suivante résume les conjectures de [**BM2**], [**EG**], [**GK**], [**Ki3**], [**Ki5**] :

Conjecture 1.1.2. — *Soit* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ *une représentation telle que* $\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)]}(\overline{\rho}) = k_E$.

Pour tout poids de Serre σ de F, il existe un entier naturel $m_{\bar\rho}(\sigma)$, dit multiplicité intrinsèque de σ dans $\overline{\rho}$, qui ne dépend que de $\bar\rho$ et σ, tel que pour tout $\mathbf{v}$ et tout t *comme précédemment :*

$$\mu_{gal}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) = \sum_\sigma m_{\overline{\rho}}(\sigma) m_{\mathbf{v},\mathrm{t}}(\sigma)$$

De plus $m_{\bar\rho}(\sigma)$ est non nul si et seulement si σ est dans $\mathcal{D}(\bar\rho)$.

Remarque 1.1.3. — Si $\overline{\rho}$ est une représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension deux avec $\overline{\rho} \not\simeq \begin{pmatrix} \omega\chi & * \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$ pour tout caractère χ, alors la conjecture 1.1.2 est vraie. Les multiplicités intrinsèques sont inférieures à deux et sont explicitement connues. En particulier, si $\overline{\rho}$ est irréductible, elles valent 0 ou 1 ([**BM1**], [**Ki3**], [**EG**] Théorème 1.1.5).

Remarque 1.1.4. — Si $F/\mathbb{Q}_p$ est une extension finie non ramifiée et la représentation $\overline{\rho}$ est générique au sens de [**BP**], la conjecture de multiplicités raffinées ([**BM2**]) implique que les multiplicités intrinsèques sont majorées par 1. Plus généralement, Kisin demande si ces multiplicités intrinsèques sont majorées par 1 si $\overline{\rho}$ est une représentation irréductible de G_F ([**Ki5**], Conjecture 2.3.2).

Remarque 1.1.5. — Nous avons ici énoncé la conjecture de multiplicités modulaires pour des déformations semi-stables. Il en existe également une version cristalline, qui ne diffère de celle-ci que pour les types galoisiens scalaires. Il est de plus conjecturé que les deux versions de la conjecture sont satisfaites par les mêmes valeurs des multiplicités intrinsèques ([**Ki5**], conjecture 2.2.3)

1.2. Calculs de poids de Serre. — Dans cette partie, nous expliquons comme déterminer l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ et, pour certains types de déformations $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t})$, l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t})$ et les multiplicités $m_{\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}(\sigma)$.

1.2.1. Poids de Serre d'une représentation irréductible. — Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue irréductible fixée. L'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ des poids de Serre de $\overline{\rho}$ défini dans [**BDJ**, § 3] (voir aussi Proposition A.3 de [**Br3**]) est l'ensemble des poids de Serre (la puissance du déterminant fixée est sous-entendue, pour des précisions voir [**BP**]) :

$$\bigotimes_{\tau\in\mathcal{S}} (\mathrm{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau$$

avec $(r_\tau)_{\tau\in\mathcal{S}} \in \{0,\dots,p-1\}^f$ pour lesquels il existe $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}'$ tel que $|\mathcal{S}_1| = f$, $\mathcal{S} = \{\tau'_{|F}, \tau' \in \mathcal{S}_1\}$ et χ' un caractère de l'inertie qui s'étend à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ tels que

$$\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \prod_{\tau'\in\mathcal{S}_1} \omega_{\tau'}^{(r_{\tau'_{|F}}+1)} & 0 \\ 0 & \prod_{\tau'\in\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}_1} \omega_{\tau'}^{(r_{\tau'_{|F}}+1)} \end{pmatrix} \otimes \chi'.$$

Explicitons un algorithme pratique pour obtenir $\mathcal{D}(\overline{\rho})$. Soit $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue irréductible telle que

$$\overline{\rho}_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}})} \cong \left(\omega_{\tau'_0}^{\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j} \oplus \omega_{\tau'_0}^{p^f\sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j}\right) \otimes \chi'$$

pour un plongement $\tau'_0 \in \mathcal{S}'$ fixé avec la famille $(r_j)_{0\leqslant j\leqslant f-1}$ dans $\{0,\dots,p-1\} \times \{-1,\dots,p-2\}^{f-1}$. L'ensemble des poids de Serre de $\overline{\rho}$ est l'ensemble des f-uplets $(r'_j)_{0\leqslant j\leqslant f-1}\{0,\dots,p-1\}^f$ satisfaisant une congruence de la forme

$$\sum_{j=0}^{f-1} \pm(r'_j+1)p^j \equiv \sum_{j=0}^{f-1}(r_j+1)p^j \mod (p^f+1) \tag{5}$$

pour un des 2^f choix de signes possibles dans le membre de gauche. Si $\overline{\rho}$ est générique ([**BP**], Définition 11.7), autrement dit si la famille $(r_j)_{0\leqslant j\leqslant f-1}$ est dans $\{1,\dots,p-2\} \times \{0\dots,p-3\}^{f-1}$, nous obtenons ainsi 2^f f-uplets distincts (correspondants aux 2^f choix de signes dans la congruence (5)) qui s'expriment formellement en fonction des $(r_j)_{0\leqslant j\leqslant f-1}$ ([**BP**], Lemma 11.4). Si $\overline{\rho}$ n'est pas générique, il est possible que les formules donnant les 2^f f-uplets dans le cas générique donnent des f-uplets n'appartenant pas à $\{0,\dots,p-1\}^f$. Il faut alors revenir à la congruence (5) pour modifier convenablement le f-uplet pour déterminer le poids de Serre, élément de $\{0,\dots,p-1\}^f$ associé à $\overline{\rho}$ correspondant à ce f-uplet. Dans [**Dav**], A. David donne une description plus directe de l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\rho})$ et une formule explicite pour la modification à apporter dans le cas non générique.

Définition 1.2.1. — Soit $\overline{\rho} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation continue irréductible non générique. Les poids de Serre de $\overline{\rho}$ qui s'obtiennent après modification des formules donnant les poids de Serre dans le cas générique sont dits *modifiés*.

Pour $f=2$, notons $\omega_4=\omega_{\tau_0'}$ le caractère fondamental de niveau 4. Il y a quatre cas possibles de représentations irréductibles non génériques. Nous indiquons pour chacune ses poids de Serre, en commençant par l'unique poids modifié et continuant par son symétrique (voir [**Dav**]). Dans tous les cas ci-dessous, s est un entier dans $\mathbb{Z}$ et θ un élément de $k_E^\times$.

(i) $\overline{\rho}\simeq \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_4^{1+r_0}\cdot \mathrm{nr}'(\theta)\right)\otimes\omega_2^s$ avec $1\leqslant r_0\leqslant p-2$;

$$\mathcal{D}(\overline{\rho})=\left\{\begin{array}{lll}(r_0+1,p-1)\otimes\det^{-1} & , & (p-2-r_0,0)\otimes\det^{-(p-1-r_0)},\\ (p-1-r_0,p-2)\otimes\det^{r_0} & , & (r_0-1,p-1)\otimes\mathbb{1})\end{array}\right\}\otimes\det{}^s\,.$$

(ii) $\overline{\rho}=\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_4\cdot\mathrm{nr}'(\theta)\right)\otimes\omega_2^s$;

$$\mathcal{D}(\overline{\rho})=\left\{(1,p-1)\otimes\det{}^{-1},(p-2,0)\otimes\det{}^{-(p-1)},(p-1,p-2)\otimes\mathbb{1}\right\}\otimes\det{}^s.$$

(iii) $\overline{\rho}\simeq \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_4^{p(2+r_1)}\cdot \mathrm{nr}'(\theta)\right)\otimes\omega_2^s$ avec $0\leqslant r_1\leqslant p-3$;

$$\mathcal{D}(\overline{\rho})=\left\{\begin{array}{lll}(p-1,r_1+2)\otimes\det{}^{-p} & , & (0,p-3-r_1)\otimes\det{}^{p-1+p(1+r_1)},\\ (p-2,p-2-r_1)\otimes\det{}^{p(1+r_1)} & , & (p-1,r_1)\otimes\mathbb{1}\end{array}\right\}\otimes\det{}^s.$$

(iv) $\overline{\rho}\simeq \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_4^{p}\cdot \mathrm{nr}'(\theta)\right)\otimes\omega_2^s$;

$$\mathcal{D}(\overline{\rho})=\left\{(p-1,1)\otimes\det{}^{-p},(0,p-2)\otimes\det{}^{p-1},(p-2,p-1)\otimes\mathbb{1}\right\}\otimes\det{}^s.$$

Dans les cas (i) et (iii) de la liste ci-dessus, un seul des deux entiers (r_0,r_1) prend une valeur non générique, à savoir 0 ou $p-1$ pour r_0 et -1 ou $p-2$ pour r_1. Dans les cas (ii) et (iv), les entiers r_0 et r_1 sont tous les deux non génériques et nous appelons *totalement non génériques* les représentations associées.

1.2.2. Poids du type. — Fixons deux caractères distincts modérément ramifiés η,η' : $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F^{\mathrm{nr}})\to\mathcal{O}_E^\times$ qui s'étendent à G_F et considérons le type galoisien $\mathrm{t}=\eta\oplus\eta'$. Les conditions sur η,η' impliquent qu'ils se factorisent par $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}[\sqrt[q-1]{-p}]/F^{\mathrm{nr}})=\mathrm{Gal}(F[\sqrt[q-1]{-p}]/F)\simeq\mathbb{F}_q^\times$ (cf. (1)) et qu'il y a donc une manière naturelle de les étendre à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ (*via* la théorie du corps de classes local, cela revient juste à envoyer $p\in\widehat{F}^\times$ vers 1). Notons $\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)$ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ des matrices triangulaires supérieures modulo p.

Le type $\sigma(\mathrm{t})$ associé par [**Hen**] à t est alors $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\eta'\otimes\eta)$ où $\eta'\otimes\eta:\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)\to\mathcal{O}_E^\times$ est le caractère :

$$\begin{pmatrix}a & b\\ pc & d\end{pmatrix}\mapsto\eta'(\overline{a})\eta(\overline{d})$$

et $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\eta'\otimes\eta)$ est le E-espace vectoriel des fonctions $f:\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)\to E$ telles que :

$$\forall k\in\mathrm{I}(\mathcal{O}_F),\ k'\in\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F),\quad f(kk')=(\eta'\otimes\eta)(k)f(k')$$

muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ par translation à droite sur les fonctions. Cette action se factorise par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Notons de même $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\overline{\eta}'\otimes\overline{\eta})$ le k_E-espace vectoriel des fonctions f : $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)\to k_E$ telles que $f(kk')=(\overline{\eta}'\otimes\overline{\eta})(k)f(k')$ muni de la même action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. C'est la réduction modulo ϖ_E du $\mathcal{O}_E$-réseau de $\sigma(t)$ des fonctions à valeurs dans $\mathcal{O}_E$. Nous notons $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ l'ensemble des poids de Serre de F qui sont des constituants

irréductibles de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\overline{\eta}' \otimes \overline{\eta})$. Là encore, nous disposons d'une détermination de $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ dûe à Breuil et Paškūnas ([**BP**] §2 lemme 2.2) et d'un algorithme combinatoire dû à David ([**Dav**]). Notamment pour $f = 2$, l'ensemble des poids de Serre qui sont des constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{I}(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \overline{\eta}' \otimes \overline{\eta}$ avec $\overline{\eta} = \omega_{\tau_0}^{c_0+pc_1}\overline{\eta}'$ $(0 \leqslant c_0, c_1 \leqslant p-1)$ sont les couples de $\{0, \ldots, p-1\}^2$ apparaissant dans la liste de couples suivante :

$$(6)\quad (c_0, c_1)\otimes\overline{\eta}',\ \begin{array}{c}(p-2-c_0, c_1-1)\otimes \det{}^{c_0+1}\overline{\eta}' \\ (c_0-1, p-2-c_1)\otimes \det{}^{p(c_1+1)}\overline{\eta}'\end{array},\ (p-1-c_0, p-1-c_1)\otimes \det{}^{c_0+pc_1}\overline{\eta}'.$$

Dans la partie 4, nous considérons des contraintes de déformations $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t})$, avec $\mathbf{v}_0 = ((0,2))_{\tau\in\mathcal{S}}$ et t comme ci-dessus. Dans ce cadre, la représentation $\sigma(\mathbf{v}_0)$ est triviale. L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t})$ est donc l'ensemble $\mathcal{D}(\mathrm{t})$; la multiplicité $m_{\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}(\sigma)$ est 1 pour tout σ dans $\mathcal{D}(\mathrm{t})$, 0 sinon.

2. Outils de théorie de Hodge p-adique

Les méthodes que nous allons utiliser par la suite pour déterminer explicitement certains espaces de déformations $R^{\psi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ sont purement locales. Elles sont basées essentiellement sur la théorie des modules de Breuil–Kisin ([**Br1**], [**Ki1**], [**Ki2**], [**Ki4**], [**Ki5**]). Cette seconde partie est consacrée à présenter succintement et à compléter sur certains points les résultats principaux de la théorie de Breuil–Kisin que nous serons amenés à utiliser couramment dans la suite.

2.1. Rappels sur la théorie de Breuil–Kisin. — Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ [(2)]. La théorie de Breuil–Kisin permet d'étudier les représentations semi-stables de G_K. Pour l'exposer, nous avons besoin d'introduire quelques notations supplémentaires :

- K_0, l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ incluse dans K ;
- $f = [K_0 : \mathbb{Q}_p]$ le degré résiduel de K ;
- φ, l'endomorphisme de Frobenius agissant sur K_0 ;
- W, l'anneau des entiers de K_0 ;
- $E(u)$, le polynôme minimal de ϖ_K (une uniformisante fixée de K) sur K_0 ;
- $(\pi_s)_{s\in\mathbb{N}}$, un système compatible de racines p^s-ièmes de ϖ_K dans $\overline{K}$;
- K_∞, l'extension de K engendrée par les π_s pour s dans $\mathbb{N}$;
- $G_\infty = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$;
- les anneaux $\mathfrak{S} = W[[u]]$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ défini comme le complété p-adique de $\mathfrak{S}[1/u]$,
$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i u^i \;\middle|\; a_i \in W, \lim_{i\to-\infty} a_i = 0 \right\};$$
nous les munissons d'un endomorphisme de Frobenius, que par abus nous notons encore φ, défini par :
$$\varphi\Big(\sum a_i u^i\Big) = \sum \varphi(a_i) u^{pi}.$$

2. Plus généralement, le contenu de cette partie §2 s'étend sans modification à un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique mixte et de corps résiduel parfait.

Remarquons que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ contient $\mathfrak{S}$ et que le Frobenius défini ci-dessus est compatible à cette inclusion. Notons également que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un anneau de valuation discrète (pour la valuation p-adique) complet et que son corps résiduel s'identifie canoniquement à $k_K((u))$.

2.1.1. Classification des représentations de G_∞. — D'après la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger (voir [**Win**]), le groupe de Galois G_∞ s'identifie au groupe de Galois absolu d'un corps de séries de Laurent en une variable à coefficients dans le corps résiduel k_K. Autrement dit, nous avons un isomorphisme (qui peut être rendu canonique)

$$G_\infty \simeq \mathrm{Gal}(k_K((u))^{\mathrm{sep}}/k_K((u))) \tag{7}$$

où $k_K((u))^{\mathrm{sep}}$ désigne une clôture séparable de $k_K((u))$. Notons $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ l'extension étale (infinie) de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ correspondant à l'extension résiduelle $k_K((u))^{\mathrm{sep}}/k_K((u))$. Le groupe de Galois absolu de $k_K((u))$ agit naturellement sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$. Il en va donc de même de G_∞ grâce à l'isomorphisme (7).

Définition 2.1.1. — Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale complète.

Un *φ-module* sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$-module M libre de rang fini muni d'une application $\varphi_M : M \to M$ qui est linéaire par rapport à R et φ-semi-linéaire par rapport à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Le φ-module M est dit *étale* si l'image de φ_M engendre M comme $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$-module.

Remarque 2.1.2. — Étant donné φ_M comme dans la définition 2.1.1, il est souvent pratique de travailler avec son « linéarisé » :

$$\mathrm{Id}\otimes\varphi_M : (R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \otimes_{\varphi, R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M \longrightarrow M$$

où l'endomorphisme φ de $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ qui apparaît ci-dessus agit sur R par l'identité et sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ par le Frobenius. L'application $\mathrm{Id}\otimes\varphi_M$ est alors $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$-linéaire et le φ-module M est étale si et seulement si $\mathrm{Id}\otimes\varphi_M$ est un isomorphisme.

Nous avons le résultat suivant qui est une variante à coefficients d'un théorème classique de Fontaine (voir [**Fo2**]) :

Théorème 2.1.3. — *Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale complète noetherienne R, le foncteur*

$$V \mapsto \mathbb{M}^\star(V) = (V^\star\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}})^{G_\infty}$$

réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des R-représentations libres de rang fini de G_∞ et celle des φ-modules[3] *étales sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.*

Remarque 2.1.4. — Le foncteur $\mathbb{M}^\star$, comme toutes les constructions présentées dans ce paragraphe, commute au changement de base.

3. La structure de φ-module sur $(V^\star\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}})^{G_\infty}$ est donnée par l'application $\mathrm{Id}\otimes\varphi$.

Le cas d'une W-algèbre. — Si l'anneau des coefficients R est une W-algèbre, nous disposons d'une variante du théorème 2.1.3 obtenue essentiellement en remplaçant φ par φ^f.

Définition 2.1.5. — Soit R une W-algèbre locale complète.

Un *φ^f-module* sur $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un $(R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$-module M libre de rang fini muni d'une application $\varphi_M^{(f)} : M \to M$ qui est linéaire par rapport à R et φ^f-semi-linéaire par rapport $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Le *φ^f-module* M est dit *étale* si l'image de $\varphi_M^{(f)}$ engendre M comme $(R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$-module.

Théorème 2.1.6. — *Pour toute W-algèbre locale complète noetherienne R, le foncteur*

$$V \mapsto \mathbb{M}_W^\star(V) = (V^\star\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}})^{G_\infty}$$

réalise une équivalence de catégories entre la catégories des R-représentations libres de rang fini de G_∞ et celle des φ^f-modules[4] *étales sur $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.*

Si R est une W-algèbre et V est une R-représentation libre de rang fini de G_∞, nous disposons donc simultanément des deux objets $\mathbb{M}^\star(V)$ et $\mathbb{M}_W^\star(V)$ que nous allons comparer. Comme R est une W-algèbre, nous avons une décomposition canonique de l'anneau $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}W$:

$$\begin{array}{rcl} R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}W & \simeq & \prod_{i=0}^{f-1} R \\ y\otimes x & \mapsto & (\varphi^{-i}(x)\cdot y)_{0\leqslant i\leqslant f-1}. \end{array}$$

En tensorisant par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sur W, nous en déduisons un isomorphisme canonique :

$$R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \simeq \prod_{i\in 0}^{f-1} R\hat{\otimes}_{\iota\circ\varphi^{-i},W}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}. \tag{8}$$

où ι désigne le morphisme structurel de R comme W-algèbre. Concrètement, le i-ième facteur $R\hat{\otimes}_{\iota\circ\varphi^{-i},W}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ admet la description explicite suivante :

$$R\hat{\otimes}_{\iota\circ\varphi^{-i},W}\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \simeq \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j u^j \;\middle|\; a_j\in R, \lim_{j\to-\infty} a_j = 0 \right\} \tag{9}$$

l'identification faisant correspondre le tenseur pur $\lambda\otimes(\sum a_j u^j)$ avec la série $\lambda\sum\varphi^{-i}(a_j)\,u^j$. Avec ce choix, l'isomorphisme (9) est compatible à la fois à la multiplication par les éléments de W agissant sur le facteur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et à la multiplication par les éléments de R agissant sur le facteur R.

Soit e_i l'idempotent de $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ correspondant au i-ième facteur de la décomposition (8). Si M est un module sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, en posant $M^{(i)} = e_iM$, nous avons une décomposition canonique de M :

$$M = M^{(0)}\oplus M^{(1)}\oplus\cdots\oplus M^{(f-1)}. \tag{10}$$

Examinons à présent le comportement du Frobenius. En revenant aux définitions, nous nous apercevons que l'action de $\mathrm{Id}\otimes\varphi$ sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ correspond à l'endomorphisme

4. La structure de φ^f-module sur $(V^\star\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}})^{G_\infty}$ est donnée par l'application $\mathrm{Id}\otimes\varphi^f$.

de $\prod_{i=0}^{f-1} R\hat{\otimes}_{W,\iota\circ\varphi^{-i}}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ suivant :

$$(s_0(u), s_1(u), \dots, s_{f-1}(u)) \mapsto (s_{f-1}(u^p), s_0(u^p), s_1(u^p), \dots, s_{f-2}(u^p))$$

où les $s_i(u)$ désignent des séries à coefficients dans R, éléments du membre de droite de l'isomorphisme (9). Nous en déduisons que, si M est un φ-module sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, l'endomorphisme φ_M envoie $M^{(i)}$ sur $M^{(i+1 \bmod f)}$ pour i compris entre 0 et $f-1$. Notons en particulier que la f-ième puissance de φ_M stabilise chacun des $M^{(i)}$. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 2.1.7. — *Soient R une W-algèbre locale complète et V une R-représentation libre de rang fini de G_∞. Alors, avec les notations introduites précédemment, nous avons un isomorphisme canonique de φ^f-modules sur $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$:*

$$\mathbb{M}^\star_W(V) = \mathbb{M}^\star(V)^{(0)}$$

où $\mathbb{M}^\star(V)^{(0)}$ est muni d'une structure de φ^f-module sur $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ via *l'endomorphisme $\varphi_{\mathbb{M}^\star(V)} \circ \varphi_{\mathbb{M}^\star(V)} \circ \cdots \circ \varphi_{\mathbb{M}^\star(V)}$ (f fois).*

2.1.2. Modules de Breuil–Kisin. — Lorsque V est une représentation semi-stable de G_K à coefficients dans l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le φ-module $\mathbb{M}^\star(V)$ associé à la restriction de V à G_∞ par le théorème 2.1.3 a une forme particulière qui rend son étude plus facile. Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de module de Breuil–Kisin qui rend compte de cette forme particulière agréable.

Définition 2.1.8. — Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale noetherienne complète.

Un *module de Breuil–Kisin* sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ est la donnée d'un $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S})$-module de type fini $\mathfrak{M}$ et d'un endomorphisme $\varphi_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) le module $\mathfrak{M}$ n'a pas de u-torsion ;

(ii) l'application $\varphi_{\mathfrak{M}}$ est linéaire par rapport à R et φ-semi-linéaire par rapport à $\mathfrak{S}$;

(iii) le $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S})$-module engendré par l'image de $\varphi_{\mathfrak{M}}$ contient $E(u)^r\mathfrak{M}$ pour un certain entier r positif ou nul.

Le plus petit entier r vérifiant la condition (iii) est appelé la $E(u)$-*hauteur* de $\mathfrak{M}$.

Remarque 2.1.9. — De même que pour un φ-module, il est souvent commode, lorsque $\mathfrak{M}$ est un module de Breuil–Kisin, de considérer le linéarisé de $\varphi_{\mathfrak{M}}$:

$$\mathrm{Id}\otimes\varphi_{\mathfrak{M}} : (R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}) \otimes_{\mathrm{Id}\otimes\varphi, R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}.$$

qui est une application $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S})$-linéaire. La condition (iii) de la définition 2.1.8 est alors équivalente au fait que le conoyau de $\mathrm{Id}\otimes\varphi_{\mathfrak{M}}$ est annulé par $E(u)^r$.

Lorsque R est de plus une W-algèbre, la décomposition de $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S})$ analogue à (8) induit une décomposition

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(0)} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{M}^{(f-1)} \tag{11}$$

analogue à (10).

Définition 2.1.10. — Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale noetherienne complète et h un entier naturel. Une R-représentation V de G_K libre de rang fini est dite de $E(u)$-*hauteur inférieure ou égale à h* s'il existe un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}$ sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ de hauteur inférieure ou égale à h tel que nous ayons un isomorphisme de φ-modules :

$$\mathbb{M}^\star(V) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M},$$

la structure de φ-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ étant donnée par $\varphi \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$.

***Théorème 2.1.11* (Kisin).** — *Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale noetherienne complète que nous supposons de plus plate sur $\mathbb{Z}_p$. Soit V une représentation de G_K à coefficients dans R qui est libre de rang fini. Nous supposons que pour tout morphisme d'anneaux $R \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, la représentation $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_R V$ est semi-stable à poids de Hodge–Tate compris entre 0 et h. Alors :*

(i) le φ-module associé à $V_{|G_\infty}$ par le théorème 2.1.3 est de $E(u)$-hauteur $\leqslant h$;

(ii) si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont deux modules de Breuil–Kisin tels que :

$$\mathbb{M}^\star(V_{|G_\infty}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_1 \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_2$$

alors le second isomorphisme ci-dessus identifie $\mathfrak{M}_1$ à $\mathfrak{M}_2$ à l'intérieur de $\mathbb{M}^\star(V_{|G_\infty})$.

Démonstration. — En reprenant les notations de [**Ki5**], les hypothèses du théorème assurent que $R = R^{\leqslant h}$. La première assertion suit ainsi du corollaire 1.7 de *loc. cit.*

La seconde assertion, quant à elle, suit de la proposition 2.1.12 de [**Ki1**]. □

Les représentations cristallines étant en particulier semi-stables, le théorème 2.1.11 vaut *a fortiori* si les représentations $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_R V$ sont cristallines pour tout morphisme d'anneaux $R \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. Dans ce cas, la situation est encore meilleure car le théorème de pleine fidélité de Kisin (voir corollaire 2.1.14 de [**Ki1**]) implique que la représentation V de G_K est entièrement caractérisée par sa restriction à G_∞. Par ailleurs, soulignons qu'il n'est pas vrai, en général, qu'une représentation de $E(u)$-hauteur finie de G_∞ se prolonge en une représentation cristalline de G_K. Toutefois, ceci se produit dans le cas particulier notable des représentations de $E(u)$-hauteur inférieure ou égale à 1, comme le précise le théorème suivant.

Théorème 2.1.12. — *Toute R-représentation libre de rang fini de G_∞ de $E(u)$-hauteur inférieure ou égale à 1 se prolonge de manière canonique à G_K. Ce prolongement est fonctoriel et commute aux changements de base.*

De plus, si R est l'anneau des entiers d'une extension finie de E, ce prolongement est caractérisé par le fait qu'il soit cristallin.

Démonstration. — L'existence du prolongement et son caractère « canonique » découlent d'une variante à coefficients du lemme 5.1.2 de [**BCDT**] après une traduction entre le langage des modules de Breuil–Kisin et celui des modules fortement divisibles de Breuil.

La caractérisation par le caractère cristallin est, quant à elle, une conséquence du corollaire 2.1.14 de [**Ki1**]. □

2.1.3. Données de descente. — Une représentation de G_K est dite *potentiellement semi-stable* si elle devient semi-stable après restriction à un sous-groupe d'indice fini, c'est-à-dire après restriction à un sous-groupe de la forme $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, où L est une extension finie de K. Une approche usuelle pour étudier une telle représentation V à l'aide de la théorie de Kisin est de munir le module de Breuil–Kisin de $V_{|G_L}$ (qui est semi-stable) d'une donnée supplémentaire, appelée *donnée de descente*, qui rend compte du prolongement de l'action à G_K.

À partir de maintenant, nous nous restreignons au cas où L est de la forme $L = K(\sqrt[n]{\varpi_K})$ pour un certain entier n premier à p. Nous supposons de plus que K contient une racine primitive n-ième de l'unité. L'extension L/K est alors galoisienne et son groupe de Galois est canoniquement isomorphe au groupe $\mu_n(K)$ des racines n-ièmes de l'unité dans K. Notons $\eta_n : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mu_n(K)$ cet isomorphisme.

Dans la partie 3, nous considérerons notamment la situation suivante : F est l'extension non ramifiée de degré f de $\mathbb{Q}_p$; l'uniformisante ϖ_F choisie est $-p$; n est $p^f - 1$. Le caractère η_n est alors le caractère ε_f introduit dans la partie 1.1.1.

Nous ajoutons un indice K ou L à toutes les données associées aux corps de base K et L respectivement. Par exemple, nous notons u_K et u_L les deux versions de la variable que nous notions u jusqu'alors et nous utilisons les notations $\mathfrak{S}_K$ et $\mathfrak{S}_L$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E},K}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}$) pour les deux versions de l'anneau $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$). En particulier, nous avons $\mathfrak{S}_K = W[[u_K]]$ et $\mathfrak{S}_L = W[[u_L]]$. Remarquons, qu'étant donné que l'extension L/K est totalement ramifiée, l'anneau W est le même que nous travaillions avec K ou L ; il est donc inutile de le décorer d'un indice supplémentaire.

Nous supposons de plus, à partir de maintenant, que les uniformisantes π_K et π_L, ainsi que leurs racines p^s-ièmes $\pi_{s,K}$ et $\pi_{s,L}$ sont choisies de façon à ce que $\pi_{s,L}^n$ soit $\pi_{s,K}$ pour tout entier s. Le polynôme minimal $E_L(u_L)$ de ϖ_L sur K_0 est donc égal à $E_K(u_L^n)$. Nous identifions $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E},K}$) à un sous-anneau de $\mathfrak{S}_L$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}$) en envoyant la variable u_K sur u_L^n. *Via* cette identification, les polynômes $E_K(u_K)$ et $E_L(u_L)$ se correspondent. Par ailleurs, l'extension L_∞ (obtenue en ajoutant à L tous les $\pi_{s,L}$) est galoisienne sur K_∞ et son groupe de Galois s'identifie à celui de L/K et donc encore à $\mu_n(K)$ en suivant l'homomorphisme ω.

Définissons une action de $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}$ en faisant agir un élément g de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur la variable u_L par multiplication par $\eta_n(g)$ considéré comme un élément de W. Concrètement, nous avons :

$$g \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i u_L^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \eta_n(g)^i a_i u_L^i.$$

Clairement, cette action stabilise $\mathfrak{S}_L$. De plus, en utilisant que η_n est d'ordre exactement n, il est facile de déterminer les points fixes :

$$H^0(\mathrm{Gal}(L/K), \mathcal{O}_{\mathcal{E},L}) = \mathcal{O}_{\mathcal{E},K} \quad \text{et} \quad H^0(\mathrm{Gal}(L/K), \mathfrak{S}_L) = \mathfrak{S}_K.$$

Si R est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale noetherienne complète, nous prolongeons l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ au produit tensoriel $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}$ en convenant que $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit trivialement sur R. Si R est, de surcroît, une W-algèbre, nous disposons de l'isomorphisme (8) :

$$R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E},L} \simeq \textstyle\prod_{i=0}^{f-1} R\hat{\otimes}_{\iota\circ\varphi^{-i},W}\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}.$$

Via cette identification, l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ se fait composante par composante et, sur le i-ième facteur vu à travers l'isomorphisme (9), elle est donnée par la formule :

$$g \cdot \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j u_L^j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\varphi^{-i} \circ \eta_n)(g)^j \; a_j \; u_L^j.$$

Si V une R-représentation de $G_{\infty,K}$ qui est libre de rang fini, nous nous apercevons en revenant aux définitions que $\mathbb{M}^\star(V_{|G_{\infty,L}})$ (qui est un φ-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}R$) hérite

d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L/K)$ et que :

$$\mathbb{M}^\star(V) = H^0(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{M}^\star(V_{|G_{\infty,L}})). \tag{12}$$

Nous en déduisons, en particulier, que le foncteur qui à V comme précédemment associe le φ-module $\mathbb{M}^\star(V_{|G_{\infty,L}})$ muni de l'action supplémentaire de $\mathrm{Gal}(L/K)$ établit une équivalence de catégorie entre la catégories des R-représentations libres de rang fini de $G_{\infty,K}$ et celle des φ-modules sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E},L}$ équipés d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Examinons maintenant plus attentivement le cas où la représentation $V_{|G_{\infty,L}}$ est de $E_L(u_L)$-hauteur finie. Par définition, il existe alors un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}_L$ tel que

$$\mathbb{M}^\star(V_{|G_L}) = \mathcal{O}_{\mathcal{E},L} \otimes_{\mathfrak{S}_L} \mathfrak{M}_L.$$

Si nous supposons de plus que R est plat sur $\mathbb{Z}_p$, ce module est unique d'après l'alinéa (ii) du théorème 2.1.11. Nous en déduisons qu'il hérite par restriction d'une action de $\mathrm{Gal}(L/K)$. Toutefois, l'espace des points fixes $H^0(\mathrm{Gal}(L/K), \mathfrak{M}_L)$ ne jouit généralement pas de bonnes propriétés [5]. Pour conserver la trace de la semi-stabilité de V, il est donc nécessaire de travailler avec des modules de Breuil–Kisin munis de données de descente.

2.2. Sur la restriction à G_∞. — La théorie de Breuil–Kisin permet de contrôler de manière efficace l'action de G_∞ sur une représentation (potentiellement) semi-stable. Dans sa version la plus simple — telle que nous venons de la présenter — elle ne dit toutefois pas grand chose sur l'action complète du groupe G_K. L'objectif de cette partie est d'étudier, dans les situations qui nous intéresserons par la suite, dans quelle mesure nous pouvons nous contenter de travailler uniquement avec l'action du sous-groupe G_∞.

Fixons une suite compatible $(\zeta_s)_{s\geqslant 0}$ de racines primitives p^s-ièmes de l'unité dans $\overline{K}$, c'est-à-dire, une suite vérifiant $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 \neq 1$ et $\zeta_{s+1}^p = \zeta_s$ pour tout entier $s \geqslant 0$. Ce choix étant fait, pour tout $g \in G_K$, il existe un unique élément $c(g)$ de $\mathbb{Z}_p$ tel que :

$$g(\pi_s) = \zeta_s^{c(g)}\pi_s \quad \text{pour tout } s \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Cette association définit une application $c : G_K \to \mathbb{Z}_p$ vérifiant, pour tous g et g' dans G_K, la relation de cocycle $c(gg') = c(g) + \varepsilon(g)c(g')$ (où nous rappelons que ε désigne le caractère cyclotomique).

Notons $K(\zeta_\infty)$ l'extension de K engendrée par tous les ζ_s ; il s'agit d'une extension galoisienne dont le groupe de Galois, noté Γ, s'identifie à un sous-groupe ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$ *via* ε. Le groupe de Galois de l'extension $K_\infty(\zeta_\infty)/K(\zeta_\infty)$ s'identifie, quant à lui, à $\mathbb{Z}_p$ *via* le cocycle c (qui, bien sûr, en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\zeta_\infty))$ est un morphisme de groupes). Enfin, le lemme 5.1.2 de [**Liu**] affirme que les extensions K_∞ et $K(\zeta_\infty)$ sont linéairement disjointes au-dessus de K (rappellons que p est choisi différent de 2). Nous en déduisons que le groupe de Galois de l'extension $K_\infty(\zeta_\infty)/K$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}_p \rtimes \Gamma$, où $\gamma \in \Gamma$ agit sur $\mathbb{Z}_p$ par multiplication par $\varepsilon(\gamma)$. Soit τ

5. Typiquement, ce n'est pas en général un module de Breuil–Kisin et, de fait, la représentation V n'a pas de raison d'être de $E_K(u_K)$-hauteur finie.

un élément du sous-groupe d'inertie sauvage de G_K dont l'image dans $\mathbb{Z}_p \rtimes \Gamma$ est $(1,1)$. En particulier, nous avons $\varepsilon(\tau) = 1$, $c(\tau) = 1$ et la suite des τ^{p^s} converge vers l'identité lorsque s tend vers l'infini. Ce dernier fait permet de définir τ^a pour tout élément a dans $\mathbb{Z}_p$.

2.2.1. Une suite exacte de type inflation-restriction. — Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m}_R$ supposée noetherienne, séparée et complète pour la topologie définie par $\mathfrak{m}_R$. Soit encore V une R-représentation de G_K qui est de type fini comme R-module. Appellons τ_V l'automorphisme de V donné par l'action de τ et, pour tout entier n positif ou nul, posons :

$$[n]_{\tau,V} = \mathrm{Id}_V + \tau_V + \tau_V^2 + \cdots + \tau_V^{n-1} \in \mathrm{End}(V)$$

Nous avons la relation :

$$[a+b]_{\tau,V} = [a]_{\tau,V} + \tau_V^a \circ [b]_{\tau,V} \tag{13}$$

pour tous entiers a et b.

Lemme 2.2.1. — *L'application*

$$\mathbb{N} \to \mathrm{End}(V),\ n \mapsto [n]_{\tau,V}$$

s'étend de manière unique en une application continue $\mathbb{Z}_p \to \mathrm{End}(V)$.

Démonstration. — L'unicité du prolongement résulte de la densité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_p$ et de la séparation de R.

Montrons à présent l'existence. Considérons un élément a de $\mathbb{Z}_p$ ainsi qu'une suite (a_s) de nombres entiers positifs ou nuls tels que $a_s \equiv a \pmod{p^s}$. Nous devons démontrer que la suite des $[a_s]_{\tau,V}$ converge. Or, en écrivant $a_{s+1} = a_s + p^s b$ pour un certain entier b, nous vérifions que nous avons la relation :

$$[a_{s+1}]_{\tau,V} = [a_s]_{\tau,V} + \tau^{a_s} \circ \left(\mathrm{Id} + \tau^{p^s} + \cdots + \tau^{(b-1)p^s}\right) \circ [p^s]_{\tau,V}. \tag{14}$$

Il suffit donc de montrer que la suite des $[p^s]_{\tau,V}$ converge vers l'endomorphisme nul de V. Or, par continuité de l'action de G_K, il existe un entier n tel que l'endomorphisme $[p^n]_{\tau,V}$ soit congru à l'identité modulo $\mathfrak{m}_R$. Comme le corps résiduel de R est de caractéristique p, nous en déduisons que pour tout $s \geqslant n$, l'endomorphisme

$$f_s = \mathrm{Id} + [p^s]_{\tau,V} + ([p^s]_{\tau,V})^2 + \cdots + ([p^s]_{\tau,V})^{p-1}$$

prend ses valeurs dans $\mathfrak{m}_R \cdot V$. De la relation $[p^{s+1}]_{\tau,V} = [p^s]_{\tau,V} \circ f_s$, nous déduisons par récurrence sur s que, pour $s \geqslant n$, l'image de $[p^s]_{\tau,V}$ est incluse dans $\mathfrak{m}_R^{s-n} \cdot V$. Nous concluons en reportant cette information dans (14). □

Remarque 2.2.2. — Si a est un élément de $\mathbb{Z}_p$, nous utilisons encore la notation $[a]_{\tau,V}$ pour désigner l'image de a par l'unique prolongement promis par le lemme 2.2.1. De plus, avec cette notation, la relation (13) s'étend par continuité à tout couple (a,b) d'éléments de $\mathbb{Z}_p$.

Introduisons l'espace V_τ défini par :

$$V_\tau = \left\{ x \in V \ \middle|\ g(x) = [\varepsilon(g)]_{\tau,V}(x),\ \forall g \in G_\infty \right\}.$$

Nous vérifions immédiatement que l'application $\tau - 1$ induit par restriction et corestriction un morphisme de $H^0(G_\infty, V)$ dans V_τ.

Lemme 2.2.3. — *Pour tout élément x de V_τ, l'application*

$$\gamma_x : G_K \to V,\ g \mapsto [c(g)]_{\tau,V}(x)$$

est un 1*-cocycle.*

Démonstration. — Soient g et g' deux éléments de G_K. Calculons :

$$\begin{aligned} \gamma_x(gg') &= [c(gg')]_{\tau,V}(x) \\ &= [c(g)+\varepsilon(g)c(g')]_{\tau,V}(x) \\ &= \big([c(g)]_{\tau,V} + \tau_V^{c(g)} \circ [\varepsilon(g)c(g')]_{\tau,V}\big)(x) \\ &= \gamma_x(g) + \tau_V^{c(g)} \circ [\varepsilon(g)c(g')]_{\tau,V}(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Posons $g_0 = \tau^{-c(g)}g$. Un calcul immédiat donne $\varepsilon(g_0) = \varepsilon(g)$ et $c(g_0) = 0$. Cette dernière égalité signifie que g_0 est dans le sous-groupe G_∞. Nous en déduisons la relation de commutation $g_0\tau = \tau^{\varepsilon(g_0)}g_0 = \tau^{\varepsilon(g)}g_0$. Ainsi, en supposant en outre pour commencer que $c(g')$ et $\varepsilon(g)$ sont des entiers positifs ou nuls, nous obtenons :

$$\begin{aligned} g_0 \cdot \gamma_x(g') &= \sum_{i=0}^{c(g')-1} g_0\tau^i x = \sum_{i=0}^{c(g')-1} \tau^{i\varepsilon(g)} g_0 x \\ &= \sum_{i=0}^{c(g')-1} \tau^{i\varepsilon(g)} \sum_{j=0}^{\varepsilon(g)-1} \tau^j x \\ &= \sum_{i=0}^{\varepsilon(g)c(g')-1} \tau^i x = [\varepsilon(g)c(g')]_{\tau,V}(x), \end{aligned}$$

la troisième égalité résultant de l'appartenance de x à V_τ. Par continuité, l'égalité que nous venons d'établir vaut encore lorsque $c(g')$ et $\varepsilon(g)$ sont, plus généralement, des éléments de $\mathbb{Z}_p$. En appliquant $\tau^{c(g)}$ à cette égalité, nous obtenons :

$$g \cdot [c(g')]_{\tau,V}(x) = \tau_V^{c(g)} \circ [\varepsilon(g)c(g')]_{\tau,V}(x).$$

En combinant ceci avec (15), nous trouvons finalement $\gamma_x(gg') = \gamma_x(g) + g \cdot \gamma_x(g')$, c'est-à-dire la relation de cocycle que nous devions établir. □

Notons δ l'application de V_τ dans $H^1(G_K, V)$ qui à x associe le 1-cocycle γ_x. Nous vérifions immédiatement que δ est R-linéaire.

Proposition 2.2.4. — *Soit V une représentation de G_K à coefficients dans R. La suite de R-modules :*

$$0 \longrightarrow H^0(G_K, V) \longrightarrow H^0(G_\infty, V) \xrightarrow{\tau-1} V_\tau \xrightarrow{\delta} H^1(G_K, V) \longrightarrow H^1(G_\infty, V)$$

est exacte.

Démonstration. — Le fait que la composée de deux flèches successives soit nulle se vérifie immédiatement. Il en va de même de l'injectivité de la flèche $H^0(G_K, V) \to H^0(G_\infty, V)$. L'exactitude en $H^0(G_\infty, V)$ ne pose guère plus de difficulté en remarquant que G_K est topologiquement engendré par G_∞ et τ.

Vérifions l'exactitude en V_τ. Nous considérons pour cela un élément x de V_τ tel que le cocycle associé γ_x soit trivial en cohomologie. Cela signifie que γ_x est un cobord, c'est-à-dire qu'il existe un élément y dans V tel que

$$\gamma_x(g) = g(y) - y, \quad \forall g \in G_K.$$

En particulier, pour $g = \tau$, nous obtenons $x = \tau(y) - y$ et pour $g \in G_\infty$, nous trouvons $g(y) = y$. L'élément y appartient donc à $H^0(G_\infty, V)$ et s'envoie sur x par l'application $\tau - 1$. Ceci est exactement ce qu'il fallait démontrer.

Il ne reste plus qu'à démontrer l'exactitude en $H^1(G_K, V)$. Soit $\gamma : G_K \to V$ un 1-cocycle dont la restriction à G_∞ est triviale en cohomologie. Quitte à modifier γ par un cobord — ce qui ne change pas son image dans $H^1(G_K, V)$ — nous pouvons supposer que γ s'annule sur G_∞. Posons $x = \gamma(\tau)$. Nous nous proposons de démontrer que $\gamma = \gamma_x$. Une récurrence immédiate sur n montre que :

$$\gamma(\tau^n) = [n]_{\tau,V}(x)$$

pour tout entier naturel n et, par continuité, l'égalité précédente vaut encore si n est un entier p-adique. Soit g un élement de G_K. Posons $g_0 = \tau^{-c(g)}g$. Nous avons ainsi $c(g_0) = 0$, ce qui signifie que g_0 appartient à G_∞. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\gamma(g) = \gamma(\tau^{c(g)}g_0) = [c(g)]_{\tau,V}(x)$$

puisque $\gamma(g_0) = 0$. Nous en déduisons que $\gamma(g) = \gamma_x(g)$ comme annoncé. Au final, γ est dans l'image de l'application δ et l'exactitude en $H^1(G_K, V)$ est démontrée. □

Corollaire 2.2.5. — *Soit $\overline{\rho}$ une k_E-représentation de G_K sur laquelle τ agit trivialement. Alors nous avons une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow H^0(G_K, V(-1)) \longrightarrow H^1(G_K, V) \longrightarrow H^1(G_\infty, V)$$

et le premier terme non nul de cette suite s'identifie encore à $H^0(G_\infty, V(-1))$.

Démonstration. — En revenant aux définitions, nous déduisons de l'hypothèse, d'une part, que $H^0(G_\infty, V(-1)) = H^0(G_K, V(-1)) \simeq V_\tau$ et, d'autre part, que l'application $\tau - 1$ de $H^0(G_\infty, V)$ dans V_τ est nulle. Le corollaire 2.2.5 en découle. □

Remarque 2.2.6. — L'hypothèse du corollaire 2.2.5 est satisfaite pour les représentations *irréductibles* de G_K. En effet, nous savons que le sous-groupe d'inertie sauvage — et donc, en particulier τ — agit trivialement sur une telle représentation. Par extension, l'hypothèse du corollaire est aussi vérifiée si $\overline{\rho}$ est une représentation semi-simple ou un produit tensoriel de représentations semi-simples.

2.2.2. Application aux anneaux de déformations. — Soient R_1 et R_2 deux $\mathcal{O}_E$-algèbres locales noetheriennes complètes, d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$. Pour $i = 1, 2$, supposons que le morphisme structurel de R_i induit un isomorphisme de k_E sur le corps résiduel de R_i. Considérons en outre un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres f de R_1 dans R_2 qui, sur les corps résiduels, induit l'identité de k_E.

Notons $k_E[\varepsilon]$ l'anneau des nombres duaux sur k_E (nous avons donc $\varepsilon^2 = 0$). Pour $i = 1, 2$, l'espace tangent $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R_i, k_E[\varepsilon])$ est naturellement isomorphe au dual du k_E-espace vectoriel $\frac{\mathfrak{m}_i}{\varpi_E R_i + \mathfrak{m}_i^2}$. En particulier, il hérite ainsi d'une structure de k_E-espace vectoriel. Notons

$$f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R_2, k_E[\varepsilon]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R_1, k_E[\varepsilon])$$

l'application k_E-linéaire induite par f sur les espaces tangents. Rappelons le lemme classique suivant.

Lemme 2.2.7. — *Le morphisme f est surjectif si et seulement si l'application tangente f^* est injective.*

Démonstration. — Par dualité, l'application f^* est injective si, et seulement si son application duale :

$$\frac{\mathfrak{m}_1}{\varpi_E R_1 + \mathfrak{m}_1^2} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_2}{\varpi_E R_2 + \mathfrak{m}_2^2}$$

est surjective. Le lemme en résulte par un argument classique. □

Supposons donnés à présent une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noetherienne R, de corps résiduel k_E, ainsi qu'un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres f de $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ dans R. La théorie des espaces de déformations permet d'identifier l'espace tangent de $R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ à un sous-k_E-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$. Nous pouvons ainsi considérer que l'application tangente f^* prend ses valeurs dans $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$.

Notons $f^\sharp$ l'application composée :

$$f^\sharp : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R, k_E[\varepsilon]) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho}),$$

où la deuxième flèche est induite par la restriction à G_∞ sur les représentations.

Remarque 2.2.8. — Nous verrons au paragraphe 3.2.2 qu'au moins dans les cas traités dans cet article, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ et la composée $f^\sharp$ se décrivent explicitement en termes de φ-modules.

Nous déduisons du lemme 2.2.7 que l'injectivité de $f^\sharp$ implique la surjectivité de f et que la réciproque est vraie sous l'hypothèse supplémentaire que l'application naturelle de $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ est injective. Le lemme ci-après donne une condition suffisante pour que cette hypothèse soit satisfaite.

Lemme 2.2.9. — *Soit $\overline{\rho}$ une k_E-représentation absolument irréductible de G_K de dimension d.*

1. *Si $\overline{\rho}$ n'est pas isomorphe à $\overline{\rho}(1)$, alors l'application :*

$$r : \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$$

   est injective.

2. *Si $\overline{\rho}$ est isomorphe à $\overline{\rho}(1)$, alors $p-1$ divise de_K, où e_K désigne l'indice de ramification absolue de K.*

Remarque 2.2.10. — En combinant les deux assertions du lemme, nous obtenons l'injectivité de r sous l'hypothèse que $p-1$ ne divise pas le produit de l'indice de ramification absolue de K et de la dimension de $\overline{\rho}$.

Démonstration. — Nous démontrons d'abord la première assertion. Posons $V = \overline{\rho}^* \otimes \overline{\rho}$. L'espace $\mathrm{Ext}^1_G(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ s'identifie canoniquement à $H^1(G, V)$ lorsque G désigne l'un des deux groupes G_K ou G_∞. Ainsi, d'après le corollaire 2.2.5, le noyau de r s'identifie à $H^0(G_K, V(-1))$, soit encore à $\mathrm{Hom}_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho}(-1))$. Comme $\overline{\rho}$ est irréductible et non isomorphe à $\overline{\rho}(-1)$ d'après l'hypothèse, cet espace s'annule et le morphisme r est injectif.

Pour la deuxième assertion, notons e (resp. f) l'indice de ramification (resp. le degré résiduel) de l'extension $K/\mathbb{Q}_p$. Considérons K_d l'unique extension non ramifiée de K de degré d vivant à l'intérieur de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. D'après la classification des représentations absolument irréductibles de G_K, nous savons que :

$$\overline{\rho} \simeq \mathrm{Ind}_{G_{K_d}}^{G_K}(\omega_{df}^h \otimes \chi_{\mathrm{nr}})$$

où ω_{df} désigne un caractère fondamental de Serre de niveau df, h est un entier et χ_{nr} est un caractère non ramifié. À partir de là, la condition d'isomorphisme entre $\overline{\rho}$ et $\overline{\rho}(1)$ implique l'existence d'un entier n vérifiant la congruence :

$$p^n h \equiv h + e \cdot \frac{p^d - 1}{p - 1} \pmod{p^d - 1}.$$

Il résulte de ceci que $p-1$ divise $e \cdot \frac{p^d-1}{p-1}$, ce qui ne peut se produire que si $p-1$ divise de. □

Nous en arrivons au résultat principal de cette partie. Pour l'énoncer, considérons une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ et une représentation galoisienne $\overline{\rho}$ de G_K de dimension finie d à coefficients dans le corps résiduel k_E de E. Nous supposons que $\overline{\rho}$ n'a pas d'endomorphisme autre que les multiplications par les éléments de $k_E^\times$. Soient encore $\mathbf{v}$ un type de Hodge–Tate, t un type galoisien ainsi que $\chi : G_K \to \mathcal{O}_E^\star$ un caractère relevant le déterminant de $\overline{\rho}$. L'anneau $R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ qui paramètre les déformations potentiellement cristallines [6] de $\overline{\rho}$ de type $(\mathbf{v}, \mathrm{t})$ et de déterminant χ a alors un sens.

Proposition 2.2.11. — *Nous reprenons les notations ci-dessus. Nous supposons en outre que $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, n'est pas isomorphe à $\overline{\rho}(1)$ et que le type t se factorise par le groupe de Weil d'une extension modérément ramifiée de K.*

Soient R une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noetherienne de corps résiduel k_E et f un morphisme de $R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ dans R. Soient V la $R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$-représentation universelle de G_K et $V_R = R \otimes_{R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})} V$. Nous supposons que la restriction de V_R à G_∞ est définie sur un sous-$\mathcal{O}_E$-algèbre R' de R, c'est-à-dire qu'il existe une R'-représentation $V_{R'}$ de G_∞ qui est libre comme R'-module et telle que $V_R \simeq R \otimes_{R'} V_{R'}$. Alors, le morphisme f prend ses valeurs dans R'.

Remarque 2.2.12. — Par l'équivalence de catégories du théorème 2.1.3, dire que la restriction de V_R à G_∞ est définie sur R' revient à dire que le φ-module associé M_R à V_R s'écrit sous la forme $(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \otimes_{R'\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M_{R'}$ pour un certain φ-module $M_{R'}$ *libre* sur $R'\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Démonstration. — Quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique, nous pouvons supposer que tous les poids de Hodge–Tate qui interviennent dans $\mathbf{v}$ sont positifs ou nuls. Notons h le plus grand d'entre eux. Soit L une extension finie modérément

6. La proposition 2.2.11 ci-après vaudrait encore si nous remplacions « cristalline » par « semi-stable ».

ramifiée de K par laquelle t se factorise. Pour simplifier l'exposition [7], nous supposons que L s'obtient à partir de K en ajoutant une racine n-ième π_L de π pour un entier n, premier avec p, tel que K contienne une racine primitive n-ième de l'unité. Nous sommes ainsi dans la situation du §2.1.3 (dont nous reprenons les notations) et pouvons décrire les représentations de G_K qui deviennent semi-stables en restriction à G_L à l'aide de modules de Breuil–Kisin munis de données de descente.

Notons par ailleurs que les représentations paramétrées par $R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ sont cristallines et de $E_L(u_L)$-hauteur inférieure ou égale à h en restriction à $G_{\infty,L}$. Soit $\overline{\rho}_\infty$ la restriction de $\overline{\rho}$ à G_∞. En copiant la démonstration du théorème 3.2 de [**Kim**], nous construisons une $\mathcal{O}_E$-algèbre complète locale noetherienne $R^{\det=\chi}(h, \star, \overline{\rho}_\infty)$ qui paramètre les déformations de $\overline{\rho}_\infty$ qui sont des représentations de déterminant χ dont la restriction à $G_{\infty,L}$ est de $E_L(u_L)$-hauteur inférieure ou égale à h. Nous avons un morphisme canonique

$$g : R^{\det=\chi}(h, \star, \overline{\rho}_\infty) \longrightarrow R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}).$$

L'application tangente de g s'identifie à l'application canonique

$$r : \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\overline{\rho}, \overline{\rho}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$$

convenable restreinte et corestreinte. Elle est donc injective d'après le lemme 2.2.9. Nous en déduisons, par le lemme 2.2.7, que g est surjective.

Par ailleurs, comme la restriction de V_R à $G_{\infty,L}$ est de $E_L(u_L)$-hauteur inférieure ou égale à h ; il en va de même de $V_{R'}$. Par la propriété universelle définissant l'anneau $R^{\det=\chi}(h, \star, \overline{\rho}_\infty)$, la représentation $V_{R'}$ correspond à un morphisme d'anneaux

$$f'_\infty : R^{\det=\chi}(h, \star, \overline{\rho}_\infty) \longrightarrow R'.$$

En outre, en notant ι l'inclusion canonique de R' dans R, nous déduisons du fait que $V_{R'}$ redonne V_R après extension des scalaires que $\iota \circ f'_\infty = f \circ g$. Pour conclure, il suffit de construire un morphisme d'anneaux f' de $R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ dans R' rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dotted, "f'"] & \\
R^{\det=\chi}(h, \star, \overline{\rho}_\infty) \arrow[ur, two heads, "g"] \arrow[dr, "f'_\infty"'] & & R \\
 & R' \arrow[ur, hook, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous construisons f' par une chasse au diagramme élémentaire. Soit x un élément de $R_{\mathrm{cr}}^{\det=\chi}(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho})$. Par surjectivité de g, il s'écrit sous la forme $g(y)$ pour un certain y dans $R^{\det=\chi}(h, \star, \overline{\rho}_\infty)$. En outre, si y' est un autre antécédent de x par g, les images de y et y' par $\iota \circ f'_\infty$ coïncident dans R par commutativité du diagramme. Comme ι est injectif, cela implique que $f'_\infty(y) = f'_\infty(y')$. Nous pouvons ainsi définir $f'(x)$ sans ambiguïté en posant $f'(x) = f'_\infty(y)$. Nous concluons enfin en vérifiant que f' est un morphisme d'anneaux et fait commuter le diagramme. □

7. Quitte à agrandir L, dans le cas général, nous pouvons toujours supposer que L s'écrit comme la composée d'une extension non ramifiée et d'une extension du type que nous considérons ici. Pour éténdre la démonstration au cas général, il s'agit de prendre en compte la partie non ramifiée dans la donnée de descente, ce qui est standard et ne pose pas de difficultés particulières.

Remarque 2.2.13. — Dans cet article, nous appliquerons la proposition 2.2.11 uniquement pour des types $\mathbf{v}$ correspondant à des poids de Hodge–Tate dans $\{0,1\}$. Or, pour de telles représentations, une autre approche basée sur le théorème 2.1.12 serait possible. L'approche que nous allons suivre, bien que probablement moins directe, nous paraît toutefois plus intéressante car susceptible de s'étendre à des espaces de déformations qui ne sont pas (potentiellement) Barsotti–Tate, mais peuvent avoir des poids de Hodge–Tate plus élevés.

3. Méthode de calcul des déformations potentiellement Barsotti–Tate

Nous reprenons à présent les notations de la partie 1. Notamment, la lettre F (resp. F') désigne l'unique extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f (resp. $2f$), nous posons $q = p^f$ et notons L le corps obtenu en adjoignant à F une racine $(q-1)$-ième de $(-p)$, notée π_L. Afin de pouvoir appliquer la théorie de Breuil–Kisin, nous choisissons en outre un système compatible $(\pi_{L,n})$ de racines p^n-ièmes de π_L et posons $\pi_{F,n} = \pi_{L,n}^{q-1}$ pour tout n. La famille des $\pi_{F,n}$ forme alors un système compatible de racines p^n-ièmes de $(-p)$. Nous notons F_∞ (resp. L_∞) l'extension de F (resp. de L) engendrée par tous les $\pi_{F,n}$ (resp. tous les $\pi_{L,n}$). Enfin, nous posons $G_\infty = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\infty)$.

Le but de cette partie est de présenter une méthode pour déterminer les anneaux de déformations $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ pour des valeurs particulières de $\mathbf{v}_0$, t et ψ :

- pour tout plongement τ de F dans E, $\mathbf{v}_{0\tau} = (0,2)$ (cas potentiellement Barsotti–Tate) ;
- le type galoisien t s'écrit sous la forme $(\eta \oplus \eta')_{|I_F}$, où η et η' sont deux caractères distincts de $\mathrm{Gal}(L/F)$ dans $\mathcal{O}_E^\times$;
- le choix de ψ est compatible avec les t et $\mathbf{v}_0$ ci-dessus (voir relation (2), §1.1.2).

Cette méthode est largement inspirée de précédents travaux de Breuil et Mézard ([**BM1**], [**BM2**]). Ces deux approches présentent cependant une différence notable : alors que Breuil et Mézard emploient des modules fortement divisibles, nous travaillons avec les modules de Breuil–Kisin, dont la manipulation nous paraît plus aisée et nous permet d'affaiblir les hypothèses.

Remarque 3.1. — Les types galoisiens t considérés ci-dessus étant non scalaires, les déformations potentiellement semi-stables paramétrées par $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ sont en fait potentiellement cristallines.

Afin de rester plus proche de [**BM2**], nous allons utiliser dans la suite la version covariante du foncteur de Breuil–Kisin au lieu de sa version contravariante définie au §2. Précisément, si V est une représentation de G_∞ ou de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L_\infty)$, nous posons :

$$\mathbb{M}(V) = \mathbb{M}^\star(V^\star(1)),$$

où $V^\star$ désigne la représentation duale de V. Le foncteur $\mathbb{M}$ ainsi obtenu est alors covariant. À partir de maintenant, lorsque nous parlerons du φ-module ou du φ^f-module associé à V, ou, réciproquement, de la représentation associée à un φ-module, un φ^f-module ou un module de Breuil–Kisin, ce sera toujours au sens du foncteur *covariant* $\mathbb{M}$.

Le plan de cette partie est le suivant. Nous classifions au §3.1 les modules de Breuil–Kisin associés à des représentations potentiellement Barsotti–Tate de type galoisien comme ci-dessus. Nous expliquons ensuite au §3.2 comment déduire de cette classification une méthode de calcul des espaces de déformations correspondants. Cela nous amène notamment à déterminer la réduction modulo p des représentations associées à des modules de Breuil–Kisin (§3.2.1) et à calculer une base explicite de $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho},\overline{\rho})$, groupe qui nous permet de contrôler l'espace tangent aux déformations de la représentation $\overline{\rho}$ (§3.2.2).

3.1. Un théorème de classification des modules de Breuil–Kisin. — Dans ce paragraphe, nous énonçons et démontrons un raffinement de la proposition 5.2 de [**Br3**]. Hormis le fait que nous l'exprimons dans le langage des modules de Breuil–Kisin (et non dans celui des modules fortement divisibles), notre résultat se distingue de celui de *loc. cit.* par deux aspects essentiels : premièrement, nous traitons le cas d'un anneau de coefficients R qui est une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noetherienne complète *plate* quelconque (et non pas uniquement le cas $R=\mathcal{O}_E$) et, deuxièmement, nous affaiblissons l'hypothèse de généricité sur le type galoisien. Ce cadre plus général est indispensable pour une application aux représentations non génériques.

3.1.1. Type des modules de Breuil–Kisin. — Afin de pouvoir démontrer notre résultat de classification dans la généralité énoncée ci-dessus, nous avons besoin, en guise de préalable, d'étendre les notions de type de Hodge et de type galoisien à n'importe quel module de Breuil–Kisin à coefficients. C'est l'objet de ce paragraphe.

Définition 3.1.1. — Soient R une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale, complète, noetherienne, de corps résiduel k_E et $\mathfrak{M}$ un module de Breuil–Kisin *libre* de rang 2 sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ avec donnée de descente de L à F. Le module $\mathfrak{M}$ est dit :

- *de type de Hodge* $\mathbf{v}_0$ si pour tout i dans $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, l'idéal déterminant du frobenius φ de $\mathfrak{M}^{(i)}$ dans $\mathfrak{M}^{(i+1)}$ est l'idéal principal engendré par u^e+p ;
- *de type galoisien* t si pour tout i dans $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, il existe une base $\left(e^{(i)}_\eta, e^{(i)}_{\eta'}\right)$ de $\mathfrak{M}^{(i)}$ comme $R[[u]]$-module telle que $\mathrm{Gal}(L/F)$ agit sur $e^{(i)}_\eta$ par η et sur $e^{(i)}_{\eta'}$ par η' ;
- *de déterminant* $\psi\varepsilon$ si le déterminant de la représentation de G_∞ qui lui est associée est $(\psi\varepsilon)_{|G_\infty}$.

Il est dit de type $(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\psi)$ s'il satisfait aux trois propriétés ci-dessus.

Remarque 3.1.2. — Dans la définition ci-dessus, nous avons supposé que $\mathfrak{M}$ est libre en tant que module sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$. La raison en est, d'une part, que la définition est plus simple à écrire sous cette hypothèse additionnelle et, d'autre part, que dans le théorème de classification que nous allons énoncer (voir proposition 3.1.9), l'hypothèse de liberté est absolument nécessaire. Il nous est donc paru opportun de restreindre la définition 3.1.1 à cette situation.

Remarque 3.1.3. — Soit $\mathfrak{M}$ un module de Breuil–Kisin comme dans la définition 3.1.1. Supposons que $\mathfrak{M}$ soit de type de Hodge $\mathbf{v}_0$ et de type galoisien t. Il existe alors un élément δ de $R^\times$ ainsi qu'une base w de $(\det\mathfrak{M})^{(0)}$ telle que

$$\varphi^f(w)=\delta\cdot(u^e+p)\cdot\varphi(u^e+p)\cdots\varphi^{f-1}(u^e+p)\cdot w.$$

De plus, le prolongement canonique de la représentation galoisienne associée à $\mathfrak{M}$ donné par le théorème 2.1.12 (et après la renormalisation du début de la partie 3) a pour déterminant $\eta\eta' \cdot \mathrm{nr}(\delta^{-1}) \cdot \varepsilon$.

La proposition suivante, qui est une conséquence simple des résultats de Kisin, fait le lien entre être de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ pour une représentation et pour un module de Breuil–Kisin.

Proposition 3.1.4. — *Supposons que R soit l'anneau des entiers d'une extension finie de E. Soit V une représentation de G_F de dimension 2, libre sur R. Alors, V est de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ si et seulement s'il existe un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}$ de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ dont la représentation de G_F associée* via *le foncteur $\mathbb{M}$ est V.*

Remarque 3.1.5. — *A priori*, la représentation associée à $\mathfrak{M}$ *via* le foncteur $\mathbb{M}$ n'est qu'une représentation de G_∞. Toutefois, d'après le théorème 2.1.12, celle-ci se prolonge de façon canonique au groupe G_F tout entier. L'énoncé de la proposition 3.1.4 a donc bien un sens.

Remarque 3.1.6. — Si, comme dans la proposition 3.1.4, R est l'anneau des entiers d'une extension finie de E, tout module de Breuil–Kisin sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ est automatiquement libre. Il n'y a donc ici aucune subtilité à l'hypothèse de liberté.

Démonstration. — Supposons d'abord l'existence de $\mathfrak{M}$. Le fait que la représentation V soit de déterminant $\psi\varepsilon$ est alors immédiat. Elle est de type galoisien t car la représentation de Weil–Deligne associée à V est donnée par l'action de la donnée de descente sur $(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})[1/p]$. Enfin, en ce qui concerne la condition sur le type de Hodge, remarquons que, d'après le lemme 1.2.2 de [**Ki1**], les poids de Hodge–Tate de V sont tous positifs ou nuls et, pour tout $i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, l'idéal déterminant de $\varphi : \mathfrak{M}^{(i)} \to \mathfrak{M}^{(i+1)}$ est engendré par $(u^e + p)^{h_i}$ où h_i est la somme des poids de Hodge–Tate pour le plongement τ_i. Notre hypothèse s'écrit donc $h_i = 1$. Nous en déduisons que, pour chaque plongement τ, les poids de Hodge–Tate de V sont 0 et 1, ce qui signifie bien que V est de type de Hodge $\mathbf{v}_0$.

La réciproque se traite de manière similaire. □

Par le théorème 2.1.11, le module $\mathfrak{M}$ de la proposition 3.1.4, s'il existe, est unique à isomorphisme près. Nous obtenons ainsi une bijection canonique entre les représentations V de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ et les modules de Breuil–Kisin de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$.

3.1.2. Genre d'un module de Breuil–Kisin. — Rappelons que $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et que nous avons fixé un élément privilégié τ_0 dans $\mathcal{S}$. Les autres éléments de $\mathcal{S}$ s'obtiennent alors en composant τ_0 par les puissances successives du Frobenius agissant sur F. Nous pouvons écrire :

$$\eta \cdot (\eta')^{-1} = (\tau_0 \circ \varepsilon_f)^{\sum_{i=0}^{f-1} c_i p^i} = \prod_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} (\tau_0 \circ \varphi^i \circ \varepsilon_f)^{c_i}$$

et de même

$$\eta' = (\tau_0 \circ \varepsilon_f)^{\sum_{i=0}^{f-1} b_i p^i} = \prod_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} (\tau_0 \circ \varphi^i \circ \varepsilon_f)^{b_i}$$

où les c_i et b_i sont des entiers compris entre 0 et $p-1$. Il est commode, et nous le ferons, de considérer que les indices des b_i et des c_i vivent dans $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Posons également

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{i-1} c_{f-(i-j)} p^j + \sum_{j=i}^{f-1} c_{j-i} p^j$$

et β_i l'équivalent pour les b_i. Pour tout i, ces entiers satisfont aux congruences $p^i \gamma_0 \equiv \gamma_i \pmod{p^f - 1}$ et $p^i \beta_0 \equiv \beta_i \pmod{p^f - 1}$ de sorte que nous avons $\eta' = \tau_0 \circ \varphi^{-i} \circ \varepsilon_f^{\beta_i}$ et $\eta = \tau_0 \circ \varphi^{-i} \circ \varepsilon_f^{\gamma_i + \beta_i}$. Notons que l'hypothèse $\eta \neq \eta'$ assure que tous les entiers γ_i sont compris entre 1 et $e-1$, ou de manière équivalente que le f-uplet $(c_0, \ldots, c_{f-1})$ n'est ni $(0, \ldots, 0)$ ni $(p-1, \ldots, p-1)$.

Considérons à présent une $\mathcal{O}_E$-algèbre R que nous supposons comme habituellement locale, complète, noetherienne et de corps résiduel k_E. Nous notons $\mathfrak{m}_R$ l'idéal maximal de R. Soit $\mathfrak{M}$ un module de Breuil–Kisin sur $R \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{S}$ de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$. D'après la définition, il existe pour tout i dans $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, une base $\left(e_\eta^{(i)}, e_{\eta'}^{(i)}\right)$ de $\mathfrak{M}^{(i)}$ dans laquelle l'action de la donnée de descente est diagonale et donnée par les caractères η et η'. Il en résulte que la matrice du Frobenius dans ces mêmes bases est de la forme

$$G^{(i)} = \begin{pmatrix} s_1^{(i)} & u^{e-\gamma_{i+1}} s_2^{(i)} \\ u^{\gamma_{i+1}} s_3^{(i)} & s_4^{(i)} \end{pmatrix} \tag{16}$$

avec $s_j^{(i)} \in R[[u^e]]$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$ et $\det G^{(i)} = (u^e + p)\alpha$ avec $\alpha \in R[[u]]$ inversible. Un changement de base de $\mathfrak{M}^{(i)}$ compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(L/F)$ a pour matrice

$$P^{(i)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(i)} & u^{e-\gamma_i} \sigma_2^{(i)} \\ u^{\gamma_i} \sigma_3^{(i)} & \sigma_4^{(i)} \end{pmatrix} \tag{17}$$

avec $\sigma_j^{(i)} \in R[[u^e]]$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$. La matrice de $\varphi : \mathfrak{M}^{(i)} \to \mathfrak{M}^{(i+1)}$ après changement de base s'écrit

$$H^{(i)} = \left(P^{(i+1)}\right)^{-1} G^{(i)} \varphi(P^{(i)}) \tag{18}$$

Réciproquement, une famille $(G^{(i)})_{0 \leqslant i \leqslant f-1}$ de matrices de cette forme définit un module de Breuil–Kisin et deux telles familles définissent le même module de Breuil–Kisin de type $\eta \oplus \eta'$ à isomorphisme près si et seulement si elles s'obtiennent par des changements de base de la forme (18) pour $0 \leqslant i \leqslant f-1$. Le lemme suivant nous permet de définir la notion de genre d'un module de Breuil–Kisin :

Lemme 3.1.7. — *Soit*

$$G = \begin{pmatrix} s_1 & u^{e-\gamma} s_2 \\ u^{\gamma} s_3 & s_4 \end{pmatrix}$$

avec $s_j \in R[[u^e]]$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, γ un entier entre 0 et e et $\det G = \alpha(u^e + p)$ pour α dans $R[[u^e]]$ inversible. Notons $\bar{s}_i \equiv s_i \pmod{u^e}$.

(i) Si $\bar{s}_4$ est inversible dans R, notons $\mathcal{G}(G) = \mathrm{I}_\eta$,

(ii) Si $\bar{s}_1$ est inversible dans R, notons $\mathcal{G}(G) = \mathrm{I}_{\eta'}$,

(iii) Sinon, notons $\mathcal{G}(G) = \mathrm{II}$.

Soit $\mathfrak{M}$ un module de Breuil–Kisin sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ et $(G^{(i)})_{0\leqslant i\leqslant f-1}$ une famille de matrices de Frobenius pour un choix de bases de $\mathfrak{M}^{(i)}$. Alors la suite des genres $(\mathcal{G}(G^{(i)}))_{0\leqslant i\leqslant f-1}$ est uniquement déterminée par le module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}$ et est dite genre de $\mathfrak{M}$.

Démonstration. — Il suffit de constater que la définition de $\mathcal{G}(G)$ est compatible au changement de base (18). □

Dans la suite, nous allons énoncer un théorème de classification (Proposition 3.1.9 des modules de Breuil–Kisin excluant certains genres très particuliers dont l'étude fera l'objet d'un article ultérieur.

Définition 3.1.8. — Un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}$ sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ est dit de mauvais genre s'il n'a aucun facteur de genre II et si pour tout $0 \leqslant i \leqslant f-1$

$$c_{f-1-i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathcal{G}(G^{(i-1)}) = \mathcal{G}(G^{(i)}) = \mathrm{I}_\eta, \\ 0 & \text{si} \quad \mathcal{G}(G^{(i-1)}) = \mathrm{I}_\eta \text{ et } \mathcal{G}(G^{(i)}) = I_{\eta'}, \\ p-2 & \text{si} \quad \mathcal{G}(G^{(i-1)}) = \mathcal{G}(G^{(i)}) = \mathrm{I}_{\eta'}, \\ p-1 & \text{si} \quad \mathcal{G}(G^{(i-1)}) = \mathrm{I}_{\eta'} \text{ et } \mathcal{G}(G^{(i)}) = I_\eta. \end{cases}$$

3.1.3. Énoncé du théorème de classification. — L'objectif du paragraphe 3.1 est de démontrer les propositions 3.1.9 et 3.1.12 ci-dessous.

Proposition 3.1.9. — *Nous supposons soit que R est plate sur $\mathcal{O}_E$, soit que $R = k_E$.*

Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(0)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}^{(f-1)}$ un module de Breuil–Kisin libre *de rang 2 sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ de type galoisien $\eta \oplus \eta'$ et de type de Hodge $\mathbf{v}_0$.*

Alors il existe des éléments α, α' dans $R^\times$ ainsi que, pour tout $i \in \{0, \dots, f-1\}$, une base $e_\eta^{(i)}, e_{\eta'}^{(i)}$ de $\mathfrak{M}^{(i)}$ et des paramètres a_i, a_i' (vivant dans un espace précisé ci-après) tels que :

(1) pour tout i, la donnée de descente agit sur $e_\eta^{(i)}$ (resp. $e_{\eta'}^{(i)}$) par le caractère η (resp. η') ;

(2) la matrice $G^{(i)}$ pour $0 \leqslant i \leqslant f-2$ (resp. $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{pmatrix} G^{(f-1)}$ pour $i = f-1$) de $\varphi : \mathfrak{M}^{(i)} \to \mathfrak{M}^{(i+1)}$ est de l'une des formes suivantes :

- **Genre** I_η *:* $\begin{pmatrix} u^e + p & 0 \\ a_i u^{\gamma_{i+1}} & 1 \end{pmatrix}$ *pour a_i dans $R + Ru^e$ et, par convention, $a_i' = 0$;*
- **Genre** $\mathrm{I}_{\eta'}$ *:* $\begin{pmatrix} 1 & a_i' u^{e-\gamma_{i+1}} \\ 0 & u^e + p \end{pmatrix}$ *pour a_i' dans $R + Ru^e$ et, par convention, $a_i = 0$;*
- **Genre** II *:* $\begin{pmatrix} a_i & u^{e-\gamma_{i+1}} \\ u^{\gamma_{i+1}} & a_i' \end{pmatrix}$ *avec a_i, a_i' dans $\mathfrak{m}_R$ et $a_i a_i' = -p$.*

De plus, si le module $\mathfrak{M}$ n'a pas mauvais genre, on peut choisir a_i et a_i' dans R pour tout i.

Remarque 3.1.10. — Réciproquement, la donnée d'une suite de genres $(g_0, \dots, g_{f-1})$ et de paramètres $(\alpha, \alpha', a_0, a'_0, \dots, a_{f-1}, a'_{f-1})$ satisfaisant aux conditions de la proposition 3.1.9 définit un module de Breuil–Kisin de type de Hodge $\mathbf{v}_0$, de type galoisien $\eta \oplus \eta'$ et de déterminant $\eta\eta' \cdot \mathrm{nr}\left((-1)^{|\mathrm{II}|}(\alpha\alpha')^{-1}\right) \cdot \varepsilon$, où $|\mathrm{II}|$ désigne le nombre de g_i égaux à II.

Remarque 3.1.11. — Le résultat de la proposition 3.1.9 pour $R = k_E$ se déduit du cas $R = \mathcal{O}_E$. En effet, il suffit de constater que tout module de Breuil–Kisin de type galoisien $\eta \oplus \eta'$ et de type de Hodge $\mathbf{v}_0$ sur k_E se relève en un module de Breuil–Kisin sur $\mathcal{O}_E$ de mêmes types puis de réduire modulo ϖ_E la matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_E$ obtenue par la proposition 3.1.9.

Proposition 3.1.12. — *Nous conservons les hypothèses de la proposition 3.1.9 et supposons de plus que $\mathfrak{M}$ n'a pas mauvais genre. Nous nous donnons deux écritures de $\mathfrak{M}$ correspondant à une suite de genres $(g_0, \dots, g_{f-1})$ et à des paramètres $(\alpha, \alpha', a_0, a'_0, \dots, a_{f-1}, a'_{f-1})$ et $(\beta, \beta', b_0, b'_0, \dots, b_{f-1}, b'_{f-1})$ respectivement.*

En notant n_i le nombre de genres II *parmi $g_0, \dots, g_{i-1}$, il existe un élément λ de $R^\times$ vérifiant :*

$$\text{pour tout } i \in \{0, \dots, f-1\}, \quad b_i = \lambda^{(-1)^{n_i}} a_i \text{ et } b'_i = \lambda^{-(-1)^{n_i}} a'_i$$

et, de plus :
- *si n_f est pair, $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, tandis que*
- *si n_f est impair, $\alpha\alpha' = \beta\beta'$ et $\lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta'}{\alpha'}$.*

Il est alors immédiat de déduire le résultat suivant :

Corollaire 3.1.13. — *Dans le cadre de la proposition 3.1.12, nous avons les résultats suivants :*

1. *si le genre de $\mathfrak{M}$ possède un nombre impair de facteurs* II*, alors $\mathfrak{M}$ admet une unique écriture avec le paramètre α égal à* 1 *;*
2. *si le genre de $\mathfrak{M}$ possède un nombre pair de facteurs* II *et s'il existe un paramètre a_i ou a'_i qui est inversible dans R (*i.e. *non nul dans le corps résiduel k_E), alors $\mathfrak{M}$ admet une unique écriture où ce paramètre est égal à* 1.

3.1.4. Polygones de Newton des éléments de $R[[u]]$. — Avant d'entamer la démonstration de la proposition 3.1.9, nous regroupons dans ce numéro quelques résultats (classiques) sur les polygones de Newton que nous utilisons constamment dans la suite.

L'hypothèse de platitude que nous avons faite sur R implique que l'uniformisante ϖ_E n'est pas diviseur de 0 dans R. Nous pouvons ainsi définir une fonction $v_R : R \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ comme suit : pour x dans R, $v_R(x)$ désigne le plus grand entier n tel que ϖ_E^n divise x avec la convention $v_R(0) = +\infty$. Pour x et y dans R, nous avons :
- $v_R(xy) \geqslant v_R(x) + v_R(y)$ avec égalité dès que x ou y est dans $\mathcal{O}_E$, et
- $v_R(x+y) \geqslant \min(v_R(x), v_R(y))$ avec égalité dès que $v_R(x) \neq v_R(y)$.

Définition 3.1.14. — Soit $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i$ un élément de $R[[u]]$. Le *polygone de Newton* $\mathrm{NP}(a)$ de a est l'enveloppe convexe dans le plan des points de coordonnées $(i, v_R(a_i))$ pour i variant dans $\mathbb{N}$ et d'un point supplémentaire situé à l'infini dans la direction des ordonnées positives.

Lemme 3.1.15. — *Soit $a, b \in R[[u]]$. Le polygone de Newton* $\mathrm{NP}(ab)$ *est inclus dans la somme de Minkowski* $\mathrm{NP}(a) + \mathrm{NP}(b)$.

Si en outre a ou b est dans $\mathcal{O}_E[[u]]$, alors l'inclusion précédente est une égalité.

Démonstration. — Écrivons $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i$, $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i u^i$ et $ab = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u^i$ où les a_i, les b_i et les c_i sont des éléments de R. Pour tout entier s, nous avons $c_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j$ et donc

$$v_R(c_s) \geqslant \min_{i+j=s} v_R(a_i) + v_R(b_j). \tag{19}$$

L'inclusion $\mathrm{NP}(ab) \subset \mathrm{NP}(a) + \mathrm{NP}(b)$ en résulte directement.

Supposons maintenant que tous les a_i appartiennent à $\mathcal{O}_E$. Pour démontrer l'égalité souhaitée, il suffit de vérifier que tout point extrémal de $\mathrm{NP}(a)+\mathrm{NP}(b)$ est dans $\mathrm{NP}(ab)$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas et notons (s, v) les coordonnées d'un point M qui est un contre-exemple. Par définition des polygones de Newton, notre supposition implique en particulier que l'inégalité (19) est stricte. Ainsi, il existe deux couples distincts (i_1, j_1) et (i_2, j_2) avec $i_1 + j_1 = i_2 + j_2 = s$ et

$$\begin{array}{rclclcl} v & = & v_R(a_{i_1} b_{j_1}) & = & v_R(a_{i_1}) + v_R(b_{j_1}) & & \\ & = & v_R(a_{i_2} b_{j_2}) & = & v_R(a_{i_2}) + v_R(b_{j_2}) & < & v_R(c_s). \end{array}$$

Les points $\big(i_1 + j_2, v_R(a_{i_1}) + v_R(b_{j_2})\big), \big(i_2 + j_1, v_R(a_{i_2}) + v_R(b_{j_1})\big)$ sont distincts et appartiennent à $\mathrm{NP}(a)+\mathrm{NP}(b)$ par construction. De plus, par ce qui précède, le milieu du segment qui les joint est (s, v). Ainsi (s, v) n'est pas un point extrémal de $\mathrm{NP}(a)+\mathrm{NP}(b)$, ce qui constitue une contradiction. □

3.1.5. Démonstration de la proposition 3.1.9. — Nous ne traitons que le cas d'un module n'ayant pas mauvais genre, le cas général étant similaire. Nous commençons par plusieurs lemmes préparatoires.

Lemme 3.1.16. — *Soit*

$$G = \begin{pmatrix} s_1 & u^{e-\gamma} s_2 \\ u^{\gamma} s_3 & s_4 \end{pmatrix}$$

avec $s_j \in R[[u^e]]$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, γ un entier entre 0 et e et $\det G = \alpha(u^e + p)$ pour α dans $R[[u^e]]$ inversible. Notons $\bar{s}_i \equiv s_i \pmod{u^e}$.

(i) Si $\bar{s}_4$ est inversible dans R i.e. $\mathcal{G}(G) = \mathrm{I}_\eta$, posons

$$\mathcal{B}(G) = \begin{pmatrix} \frac{s_1 - u^e a s_2}{u^e + p} & u^{e-\gamma} s_2 \\ u^{\gamma} \frac{s_3 - a s_4}{u^e + p} & s_4 \end{pmatrix}$$

où a dans R est défini par $a \equiv s_3/s_4 \pmod{u^e + p}$. Alors

$$G = \mathcal{B}(G) \begin{pmatrix} u^e + p & 0 \\ a u^{\gamma} & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\bar{s}_1$ est inversible dans R i.e. $\mathcal{G}(G) = \mathrm{I}_{\eta'}$, posons

$$\mathcal{B}(G) = \begin{pmatrix} s_1 & u^{e-\gamma} \frac{s_2 - a' s_1}{u^e + p} \\ u^{\gamma} s_3 & \frac{s_4 - u^e a' s_3}{u^e + p} \end{pmatrix}$$

où a' dans R est défini par $a' \equiv s_2/s_1 = u^{-e}s_4/s_3 \pmod{u^e+p}$. Alors

$$G = \mathcal{B}(G)\begin{pmatrix} 1 & a'u^{e-\gamma} \\ 0 & u^e+p \end{pmatrix}.$$

(iii) Sinon $\mathcal{G}(G) = \mathrm{II}$ et posons

$$\mathcal{B}(G) = \begin{pmatrix} \frac{u^e s_2 - a's_1}{u^e+p} & u^{e-\gamma}\frac{s_1 - as_2}{u^e+p} \\ u^\gamma \frac{s_4 - a's_3}{u^e+p} & \frac{u^e s_3 - as_4}{u^e+p} \end{pmatrix}$$

où a, a' dans R sont définis par $a \equiv s_1/s_2 \pmod{u^e+p}$ et $a' \equiv s_4/s_3 \pmod{u^e+p}$. Alors

$$G = \mathcal{B}(G)\begin{pmatrix} a & u^{e-\gamma} \\ u^\gamma & a' \end{pmatrix},$$

et $aa' = -p$.

De plus, dans tous les cas, $\mathcal{B}(G) \in \mathrm{GL}_2(R[[u]])$.

Démonstration. — (i) Commençons par montrer que la matrice $\mathcal{B}(G)$ est bien définie. D'une part, comme $\bar{s}_4$ est inversible dans R, s_4 est inversible modulo u^e+p, ce qui montre que l'élément a est bien défini. D'autre part, comme $\det G \equiv 0 \pmod{u^e+p}$, nous avons encore $a \equiv u^{-e}s_1/s_2$. Nous en déduisons que $\mathcal{B}(G)$ est à coefficients dans $R[[u]]$ et même, plus précisément, que la matrice $\mathcal{B}(G)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma}\sigma_2 \\ u^\gamma\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_i \in R[[u^e]].$$

Le cas (ii) est analogue.

(iii) Supposons que $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_4$ ne sont pas inversibles dans R. Rappelons que $\det G = \alpha(u^e+p)$ avec α dans $R[[u]]$ inversible. Ainsi $u^e s_2 s_3 \equiv -u^e\alpha \pmod{\varpi_E R[[u]]}$ et comme u^e n'est pas diviseur de zéro dans $R[[u^e]]/\varpi_E R[[u^e]]$, nous obtenons $s_2 s_3 \equiv -\alpha \pmod{\varpi_E R}$. Ainsi s_2 et s_3 sont inversibles dans $R[[u^e]]$, ce qui suffit à entraîner que la matrice $\mathcal{B}(G)$ est bien définie et à coefficients dans $R[[u]]$.

Enfin, de l'égalité $\det(G) = \alpha(u^e+p)$ avec α inversible dans R, nous déduisons que le déterminant de $\mathcal{B}(G)$ est inversible dans $R[[u]]$ dans chacun des cas. □

Pour $t \in \mathbb{N}$, définissons les idéaux de $R[[u^e]]$

$$I_t = \left\{ \textstyle\sum_{i=0}^\infty a_i u^{ei}, a_i \in R, v_R(a_i) \geqslant t - \frac{pi}{p-1} \right\},$$

$$I_t^\varphi = \left\{ \textstyle\sum_{i=0}^\infty a_i u^{ei}, a_i \in R, v_R(a_i) \geqslant t - \frac{i}{p-1} \right\}.$$

En particulier, nous avons $\varphi(I_t) \subset I_t^\varphi$.

Lemme 3.1.17. — *Supposons $t \in \mathbb{N}$. Soit $x \in R[[u^p]]$ tel que $(u^e+p)x \in I_t^\varphi$. Alors $x \in I_t$.*

Démonstration. — Si $(u^e+p)x \in I_t^\varphi$, son polygone de Newton est inclus dans la région du plan $D = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2, b \geqslant t - \frac{a}{p-1}\right\}$. D'après le lemme 3.1.15, le polygone de Newton de x est inclus dans le translaté $(-1,0)+D$, donc en notant $x = \sum_{i=0}^\infty a_i u^{ei}$, nous avons $v_R(a_i) \geqslant t - \frac{i+1}{p-1}$ pour tout $i \geqslant 0$. Nous en tirons $v_R(a_i) > t - \frac{pi}{p-1}$ pour tout $i \geqslant 0$ et, par suite, $x \in I_t$. □

Lemme 3.1.18. — *Supposons $t \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in R[[u^e]]$ tel que*

$$(u^e + p)x \in u^e I_t^{\varphi} + \varphi(I_t \cap u^e R[[u^e]]) + p\varpi_E^{t+1} R[[u^e]].$$

Alors $x \in I_{t+1}$.

Démonstration. — Remarquons que, d'après le lemme 3.1.15 :

– le polygone de Newton d'un élément de $u^e I_t^{\varphi}$ est inclus dans

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geqslant 1,\, b \geqslant 0,\, b \geqslant t - \tfrac{a-1}{p-1}\right\},$$

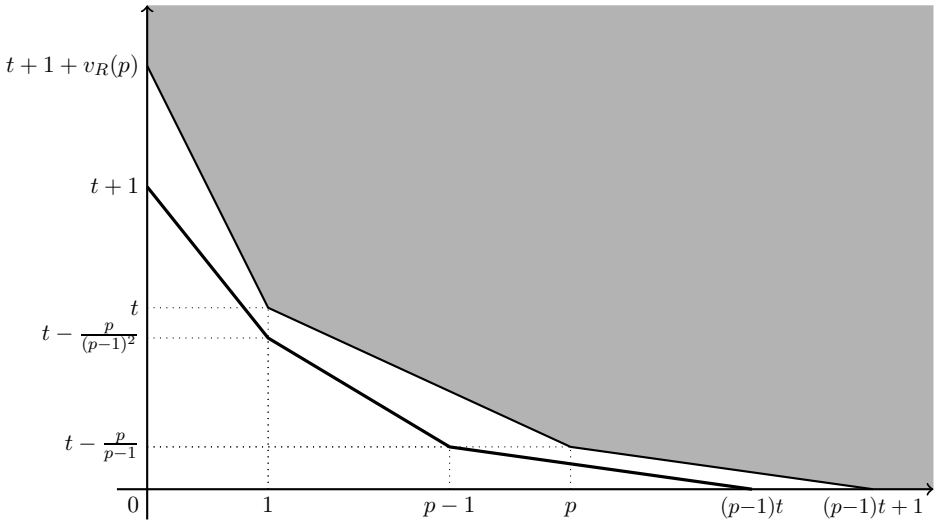
– le polygone de Newton d'un élément de $\varphi(I_t \cap u^e R[[u^e]])$ est inclus dans

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geqslant p,\, b \geqslant 0,\, b \geqslant t - \tfrac{a}{p-1}\right\},$$

– le polygone de Newton d'un élément de $p\varpi_E^{t+1} R[[u^e]]$ est inclus dans

$$\{0\} \times [t + 1 + v_R(p), \infty[.$$

Ainsi le polygone de Newton de $(u^e + p)x$ est inclus dans l'enveloppe convexe des trois régions précédentes, représentées en gris sur la figure ci-après.



Il suit alors du lemme 3.1.15 que le polygone de Newton de x est inclus dans la région délimitée par le trait en gras. Le lemme s'en déduit. □

Lemme 3.1.19. — *Soit $t \in \mathbb{N}$ et*

$$P' = \begin{pmatrix} \sigma_1' & u^{e-\gamma'}\sigma_2' \\ u^{\gamma'}\sigma_3' & \sigma_4' \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R[[u]])$$

avec $0 \leqslant \gamma' \leqslant e$, $\sigma_j' \in R[[u^e]]$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$ et

$$\begin{cases} \sigma_1' \equiv \sigma_4' \equiv 1 \pmod{u^e, I_t}, \\ \sigma_2' \equiv \sigma_3' \equiv 0 \pmod{I_t}. \end{cases}$$

Soit $c \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $0 \leqslant \gamma = p\gamma' - ec \leqslant e$. Alors

(i) Si $G = \begin{pmatrix} u^e+p & 0 \\ au^\gamma & 1 \end{pmatrix}$ *avec* $a \in R$, *alors* $\mathcal{G}(G) = \mathrm{I}_\eta = \mathcal{G}(G\varphi(P'))$ *et la matrice* $\mathcal{B}(G\varphi(P'))$ *est de la forme*

$$\mathcal{B}(G\varphi(P')) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma}\sigma_2 \\ u^\gamma\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_1 \equiv \sigma_4 \equiv 1 \pmod{u^e, I_{t+1}}, \\ \sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \pmod{\varpi_E, u^e}, \\ \sigma_2 \equiv 0 \pmod{I_{t+1}}, \\ \sigma_3 \equiv 0 \pmod{I_t}. \end{cases} \tag{20}$$

De plus,

$$\sigma_3 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I_{t+1}} & \text{si } c \notin \{1, p-1\}, \\ \varphi(\sigma_3') \pmod{I_{t+1}} & \text{si } c = 1, \\ -a^2\varphi(\sigma_2') \pmod{I_{t+1}} & \text{si } c = p-1. \end{cases}$$

(ii) Si $G = \begin{pmatrix} 1 & a'u^{e-\gamma} \\ 0 & u^e+p \end{pmatrix}$, *avec* $a' \in R$, *alors* $\mathcal{G}(G) = \mathrm{I}_{\eta'} = \mathcal{G}(G\varphi(P'))$ *et la matrice* $\mathcal{B}(G\varphi(P'))$ *est de la forme*

$$\mathcal{B}(G\varphi(P')) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma}\sigma_2 \\ u^\gamma\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_1 \equiv \sigma_4 \equiv 1 \pmod{u^e, I_{t+1}}, \\ \sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \pmod{\varpi_E, u^e}, \\ \sigma_3 \equiv 0 \pmod{I_{t+1}}, \\ \sigma_2 \equiv 0 \pmod{I_t}. \end{cases} \tag{21}$$

De plus,

$$\sigma_2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{I_{t+1}} & \text{si } c \notin \{0, p-2\}, \\ \varphi(\sigma_2') \pmod{I_{t+1}} & \text{si } c = p-2, \\ -a'^2\varphi(\sigma_3') \pmod{I_{t+1}} & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

(iii) Si $G = \begin{pmatrix} a & u^{e-\gamma} \\ u^\gamma & a' \end{pmatrix}$, *avec* $a, a' \in R$ *et* $aa' = -p$ *alors* $\mathcal{G}(G) = \mathrm{II} = \mathcal{G}(G\varphi(P'))$ *et la matrice* $\mathcal{B}(G\varphi(P'))$ *est de la forme*

$$\mathcal{B}(G\varphi(P')) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma}\sigma_2 \\ u^\gamma\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_1 \equiv \sigma_4 \equiv 1 \pmod{u^e, I_{t+1}}, \\ \sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \pmod{\varpi_E, u^e}, \\ \sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \pmod{I_{t+1}}. \end{cases} \tag{22}$$

Démonstration. — Nous traitons en détails le cas (i), le cas (ii) est similaire. Un premier calcul donne

$$G\varphi(P') = \begin{pmatrix} (u^e+p)\varphi(\sigma_1') & u^{e-\gamma}(u^e+p)u^{e(p-1-c)}\varphi(\sigma_2') \\ u^\gamma(a\varphi(\sigma_1') + u^{ec}\varphi(\sigma_3')) & au^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4') \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $au^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4') \equiv \sigma_4' \pmod{\mathfrak{m}_{R[[u^e]]}}$ et $\det P' \equiv \sigma_1'\sigma_4' \pmod{\mathfrak{m}_{R[[u^e]]}}$ est inversible car $P' \in \mathrm{GL}_2(R[[u]])$. Donc $\bar{\sigma}_4'$ est inversible dans R et $\mathcal{G}(G\varphi(P')) = I_\eta$. Il reste à montrer que $\mathcal{B}(G\varphi(P'))$ satisfait (20). Soit $b \in R$ tel que

$$b \equiv \frac{a\varphi(\sigma_1') + u^{ec}\varphi(\sigma_3')}{au^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')} \pmod{u^e+p}.$$

Ainsi $\mathcal{B}(G\varphi(P')) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma}\sigma_2 \\ u^\gamma\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}$ pour

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & \varphi(\sigma_1') - u^{e(p-c)}b\varphi(\sigma_2'), \\ \sigma_2 & = & (u^e+p)u^{e(p-1-c)}\varphi(\sigma_2'), \\ (u^e+p)\,\sigma_3 & = & a\varphi(\sigma_1') + u^{ec}\varphi(\sigma_3') - abu^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') - b\varphi(\sigma_4'), \\ \sigma_4 & = & au^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4'). \end{array}\right.$$

Des hypothèses sur σ_j', $1 \leqslant j \leqslant 4$ découle le résultat souhaité pour σ_1, σ_4. Pour σ_2, il suffit d'appliquer le lemme 3.1.17. Pour σ_3, nous avons

$$(u^e+p)\sigma_3 = (a-b) + a\varphi(\sigma_1'-1) - b\varphi(\sigma_4'-1) + u^{ce}\varphi(\sigma_3') - abu^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2').$$

Or

$$\frac{a\varphi(\sigma_1') + u^{ce}\varphi(\sigma_3')}{au^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')} \equiv a \pmod{I_t^\varphi}$$

Comme $I_t^\varphi \pmod{u^e+p} = \varpi_E^t R$, nous avons $a \equiv b \pmod{\varpi_E^t R}$. Donc $(u^e+p)\varphi(\sigma_3) \in I_t^\varphi$. Le lemme 3.1.17 implique $\sigma_3 \in I_t$. Enfin

$$\frac{a\varphi(\sigma_1') + u^{ce}\varphi(\sigma_3')}{au^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')} = a\frac{\varphi(\sigma_1')}{\varphi(\sigma_4')} + u^{ce}\frac{\varphi(\sigma_3')}{\varphi(\sigma_4')} - a^2u^{e(p-c)}\frac{\varphi(\sigma_1')\varphi(\sigma_2')}{\varphi(\sigma_4')^2} \pmod{u^{2e}}.$$

Nous en déduisons que, si $c \notin \{1, p-1\}$, alors :

$$(u^e+p)\sigma_3 \in u^eI_t^\varphi + \varphi(I_t \cap u^eR[[u^e]]) + p\varpi_E^{t+1}R[[u^e]].$$

Si $c = 1$,

$$(u^e+p)(\sigma_3 - \varphi(\sigma_3')) \in u^eI_t^\varphi + \varphi(I_t \cap u^eR[[u^e]]) + p\varpi_E^{t+1}R[[u^e]].$$

Si $c = p-1$,

$$(u^e+p)(\sigma_3 + a^2\varphi(\sigma_2')) \in u^eI_t^\varphi + \varphi(I_t \cap u^eR[[u^e]]) + p\varpi_E^{t+1}R[[u^e]].$$

Le lemme 3.1.18 conclut.
Dans le cas (iii), la stratégie est analogue. D'abord les termes diagonaux modulo u^e de

$$G\varphi(P') = \begin{pmatrix} a\varphi(\sigma_1') + u^{e(c+1)}\varphi(\sigma_3') & u^{e-\gamma}(au^{e(p-1-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')) \\ u^\gamma(\varphi(\sigma_1') + a'u^{ec}\varphi(\sigma_3')) & u^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + a'\varphi(\sigma_4') \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles dans R, donc $\mathcal{G}(G\varphi(P')) = \mathrm{II}$. Ensuite nous définissons $b, b' \in R$ tels que

$$b \equiv \frac{a\varphi(\sigma_1') + u^{e(c+1)}\varphi(\sigma_3')}{au^{e(p-1-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')} \pmod{u^e+p}$$

$$b' \equiv \frac{u^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + a'\varphi(\sigma_4')}{\varphi(\sigma_1') + a'u^{ec}\varphi(\sigma_3')} \pmod{u^e+p}.$$

La matrice $\mathcal{B}(G\varphi(P'))$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma}\sigma_2 \\ u^\gamma\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}$ pour

$$\left\{\begin{array}{rcl} (u^e+p)\sigma_1 & = & u^e(au^{e(p-1-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')) - b'(a\varphi(\sigma_1') + u^{e(c+1)}\varphi(\sigma_3')) \\ (u^e+p)\sigma_2 & = & a\varphi(\sigma_1') + u^{e(c+1)}\varphi(\sigma_3') - b(au^{e(p-1-c)}\varphi(\sigma_2') + \varphi(\sigma_4')) \\ (u^e+p)\sigma_3 & = & u^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + a'\varphi(\sigma_4') - b'(\varphi(\sigma_1') + a'u^{ec}\varphi(\sigma_3')) \\ (u^e+p)\sigma_4 & = & u^e(\varphi(\sigma_1') + a'u^{ec}\varphi(\sigma_3')) - b(u^{e(p-c)}\varphi(\sigma_2') + a'\varphi(\sigma_4')) \end{array}\right.$$

Nous avons ainsi $(u^e+p)\sigma_i \equiv 0 \pmod{I_f^{\varphi}}$ pour $i=2,3$. Comme dans le cas (i), nous obtenons $b \equiv a \pmod{\varpi_E^t R}$ et $b' \equiv a' \pmod{\varpi_E^t R}$ et $ab' \equiv a'b \equiv -p \pmod{\varpi_E^t R}$. Donc $(u^e+p)(\sigma_i - 1) \equiv 0 \pmod{I_t^{\varphi}}$ pour $i=1,4$. Le lemme 3.1.17 donne alors

$$\begin{cases} \sigma_1 \equiv \sigma_4 \equiv 1 \pmod{I_{t+1}}, \\ \sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \pmod{I_{t+1}}. \end{cases}$$

Les définitions de b et b' permettent d'obtenir les autres congruences annoncées. □

Soit $\mathfrak{M}$ un module de Breuil–Kisin de rang 2 de genre $\eta \oplus \eta'$ et de Frobenius donné par la famille fixée des matrices $\underline{G} = (G^{(0)}, \ldots, G^{(f-1)})$. Convenons d'étendre les suites (γ_s) et $(G^{(s)})$ en des suites périodiques de période f définies sur $\mathbb{N}$ tout entier. Soit la suite de matrices $(P^{(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ définies par

$$P^{(0)} = \mathrm{Id}, \quad \mathcal{B}(G^{(s)}\varphi(P^{(s)})) = \Delta^{(s)} P^{(s+1)}$$

avec

$$P^{(s+1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(s+1)} & u^{e-\gamma_{s+1}}\sigma_2^{(s+1)} \\ u^{\gamma_{s+1}}\sigma_3^{(s+1)} & \sigma_4^{(s+1)} \end{pmatrix},$$

où $\sigma_j^{(s+1)} \in R[[u^e]]$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$, $\sigma_1^{(s+1)} \equiv \sigma_4^{(s+1)} \equiv 1 \pmod{u^e}$ et $\Delta^{(s)}$ est une matrice diagonale à coefficients dans R.

Lemme 3.1.20. — *Supposons que $\mathfrak{M}$ n'ait pas mauvais genre. Alors, pour tout $0 \leqslant j \leqslant f-1$ la suite des $P^{(j+fn)}$ converge vers une matrice $R^{(j)}$ dans $GL_2(R[[u]])$ quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. — Étant donné deux nombres entiers s et t ainsi qu'une matrice M prenant la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1 & u^{e-\gamma_s}\sigma_2 \\ u^{\gamma_s}\sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}$$

convenons de dire que M est *t-proche de l'identité* si :

$$\sigma_1 \equiv \sigma_4 \equiv 1 \pmod{I_t, u^e} \quad \text{et} \quad \sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0 \pmod{I_t}.$$

Une récurrence sur s, à partir du lemme 3.1.19, montre que, pour tout entier s, la matrice $Q^{(s)} = P^{(s+f)} \cdot (P^{(s)})^{-1}$ est t-proche de l'identité pour t égal à la partie entière de $\frac{s}{f}$. Ceci permet clairement de conclure.

□

Sous les hypothèses du lemme 3.1.20, nous obtenons par passage à la limite des matrices $R^{(i)} = \lim_{n\to\infty} P^{(i+fn)}$, $0 \leqslant i \leqslant f-1$ qui définissent un module de Breuil–Kisin isomorphe à $\mathfrak{M}$ de Frobenius donné par la famille de matrices :

$$H^{(i)} = (R^{(i+1)})^{-1} \cdot G^{(i)} \cdot \varphi(R^{(i)}) \quad (0 \leqslant i \leqslant f-1)$$

qui prennent toutes l'une des trois formes suivantes :

- $\Delta^{(i)} \begin{pmatrix} u^e+p & 0 \\ au^{\gamma_{i+1}} & 1 \end{pmatrix}$
- $\Delta^{(i)} \begin{pmatrix} a & u^{e-\gamma_{i+1}} \\ u^{\gamma_{i+1}} & b \end{pmatrix}$

– $\Delta^{(i)}\begin{pmatrix}1 & u^{e-\gamma_{i+1}}\\ 0 & u^e+p\end{pmatrix}$

où $\Delta^{(i)}$ est une matrice diagonale à coefficients dans R. Une dernière normalisation des vecteurs de base pour éliminer ces matrices diagonales $0 \leqslant i < f-2$ permet d'obtenir l'écriture canonique suivante :

Proposition 3.1.21. — *Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(0)} \times \ldots \times \mathfrak{M}^{(f-1)}$ un module de Breuil–Kisin libre de rang 2 sur $R\hat{\otimes}\mathfrak{S}$ de type galoisien $\eta\otimes\eta'$ et de type de Hodge $\mathbf{v}_0$ satisfaisant les hypothèses du lemme 3.1.19. Alors il existe α, α' inversibles dans R et pour tout $i \in \{0,\ldots,f-1\}$, il existe une base $e_\eta^{(i)}, e_{\eta'}^{(i)}$ de $\mathfrak{M}^{(i)}$ compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(K/F)$ telle que si $0 \leqslant i \leqslant f-2$ la matrice $G^{(i)}$ (resp. si $i = f-1$, la matrice $\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & \alpha'^{-1}\end{pmatrix}$ $G^{(i)}$) de $\varphi : \mathfrak{M}^{(i)} \to \mathfrak{M}^{(i+1)}$ soit de l'une des trois formes suivantes :*

– **Genre** I_η *:* $\begin{pmatrix}u^e+p & 0\\ a_i u^{\gamma_{i+1}} & 1\end{pmatrix}$ *pour* $a_i \in R$,

– **Genre** $\mathrm{I}_{\eta'}$ *:* $\begin{pmatrix}1 & a'_i u^{e-\gamma_{i+1}}\\ 0 & u^e+p\end{pmatrix}$ *pour* $a'_i \in R$,

– **Genre** II *:* $\begin{pmatrix}a_i & u^{e-\gamma_{i+1}}\\ u^{\gamma_{i+1}} & a'_i\end{pmatrix}$ *avec* $a_i, a'_i \in \mathfrak{m}_R$ *et* $a_i a'_i = -p$.

Comparons enfin deux écritures obtenues via la proposition 3.1.9 d'un même module $\mathfrak{M}$. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici l'énoncé (proposition 3.1.12) qu'il nous faut montrer.

Proposition 3.1.22. — *Nous conservons les hypothèses de la proposition 3.1.21 et nous supposons données deux écritures de $\mathfrak{M}$ correspondant à une suite de genres $(g_0,\ldots,g_{f-1})$ et à des paramètres $(\alpha,\alpha',a_0,a'_0,\ldots,a_{f-1},a'_{f-1})$ et $(\beta,\beta',b_0,b'_0,\ldots,b_{f-1},b'_{f-1})$ respectivement.*

En notant n_i le nombre de II *parmi $g_0,\ldots,g_{i-1}$, il existe un élément λ de $R^\times$ vérifiant :*

$$\textit{pour tout } i \in \{0,\ldots,f-1\}, \quad b_i = \lambda^{(-1)^{n_i}} a_i \textit{ et } b'_i = \lambda^{-(-1)^{n_i}} a'_i$$

et, de plus :

– *si n_f est pair, $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$,*
  tandis que

– *si n_f est impair, $\alpha\alpha' = \beta\beta'$ et $\lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta'}{\alpha'}$.*

Démonstration. — Soit $(G^{(i)})_{0\leqslant i\leqslant f-1}$ et $(H^{(i)})_{0\leqslant i\leqslant f-1}$ les matrices correspondant aux deux écritures de $\mathfrak{M}$. Il existe une famille $(P^{(i)})_{0\leqslant i\leqslant f-1}$ de matrices de passage qui préservent la donnée de descente et vérifient :

$$(P^{(i+1)})^{-1} G^{(i)} \varphi(P^{(i)}) = H^{(i)} \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant f-1. \tag{23}$$

Un examen attentif de l'algorithme de réduction de la preuve de la proposition 3.1.21, montre que les $P^{(i)}$ sont nécessairement de la forme

$$P^{(i)} = \begin{pmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \mu_i\end{pmatrix} \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant f-1.$$

Les égalités (23) conduisent pour $0 \leqslant i \leqslant f-1$:

– si $g_i = h_i = \mathrm{I}_\eta$ ou $\mathrm{I}_{\eta'}$,

$$\text{si } 0 \leqslant i \leqslant f-2 : \quad \begin{cases} a_i = \mu_{i+1} b_i / \lambda_i,\ a'_i = \lambda_{i+1} b'_i / \mu_i, \\ \lambda_i = \lambda_{i+1},\ \mu_i = \mu_{i+1}, \end{cases}$$

$$\text{si } i = f-1 : \quad \begin{cases} a_{f-1} = \beta' \mu_0 b_{f-1} / (\alpha' \lambda_{f-1}),\ a'_{f-1} = \beta \lambda_0 b'_{f-1} / (\alpha \mu_{f-1}) \\ \mu_0 = \alpha' \mu_{f-1} / \beta',\ \lambda_0 = \alpha \lambda_{f-1} / \beta. \end{cases}$$

– si $g_i = h_i = \mathrm{II}$,

$$\text{si } 0 \leqslant i \leqslant f-2 : \quad \begin{cases} a_i = \lambda_{i+1} b_i / \lambda_i,\ a'_i = \mu_{i+1} b'_i / \mu_i, \\ \lambda_i = \mu_{i+1},\ \mu_i = \lambda_{i+1}, \end{cases}$$

$$\text{si } i = f-1 : \quad \begin{cases} a_{f-1} = \beta \lambda_0 b_{f-1} / (\alpha \lambda_{f-1}),\ a'_{f-1} = \beta' \mu_0 b'_{f-1} / (\alpha' \mu_{f-1}) \\ \mu_0 = \alpha' \lambda_{f-1} / \beta',\ \lambda_0 = \alpha \mu_{f-1} / \beta \end{cases}$$

En posant $\lambda = \lambda_0 / \mu_0 \in R^\times$, nous obtenons le résultat annoncé. □

3.2. Application au calcul d'espaces de déformations. — Adaptant les idées de [**BM2**] à notre situation plus générale, nous expliquons, dans ce numéro, comment utiliser les résultats de la partie précédente pour déterminer les espaces de déformations $R^\psi(\mathbf{v}_0, \eta \oplus \eta', \overline{\rho})$ avec $\overline{\rho}$ absolument irréductible et $\mathbf{v}_0$, t fixés comme au début de la partie 3.

Nous commençons par rappeler ou établir quelques résultats préparatoires concernant, d'une part, le calcul de la représentation résiduelle d'une représentation donnée par un module de Breuil–Kisin et, d'autre part, le calcul explicite de certains groupes d'extensions de représentations de G_∞.

3.2.1. Calcul de la représentation résiduelle. — Soient R une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale complète noetherienne de corps résiduel k_E et $\mathfrak{M}$ un module de Breuil–Kisin sur $R \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{S}$ libre de rang 2, avec donnée de descente de L à F. Comme R est en particulier une W-algèbre, rappelons la décomposition (11)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(0)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}^{(f-1)}.$$

Nous supposons de plus que chaque $\mathfrak{M}^{(i)}$ (pour i entre 0 et $f-1$) est muni d'une base $(e_\eta^{(i)}, e_{\eta'}^{(i)})$ sur laquelle la donnée de descente agit par $\eta \oplus \eta'$ et telle que la matrice $G^{(i)}$ du Frobenius $\varphi : \mathfrak{M}^{(i)} \longrightarrow \mathfrak{M}^{(i+1)}$ est donnée par l'une des trois formes de la proposition 3.1.21.

Notons $\rho_{\mathfrak{M}}$ la R-représentation libre de rang 2 de G_∞ associée à $\mathfrak{M}$ et $\overline{\rho}_{\mathfrak{M}}$ sa réduction modulo l'idéal maximal de R. Dans cette partie, nous expliquons comment s'assurer que la k_E-représentation résiduelle $\overline{\rho}_{\mathfrak{M}}$ est irréductible et, lorsqu'elle l'est, comment la déterminer complètement. À partir de maintenant, pour alléger les notations, nous noterons ϕ à la place de φ^f.

Soit $\mathbb{M}_L = \mathcal{O}_{\mathcal{E},L} \otimes_{\mathfrak{S}_L} \mathfrak{M}$ le φ-module sur $R \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E},L}$ (avec action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L/F)$) associé à $\rho_{\mathfrak{M}|G_{L_\infty}}$ et soit $\mathbb{M}_F$ le φ-module sur $R \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E},F}$ associé à $\rho_{\mathfrak{M}}$. D'après la partie 2.1.3 (relation (12)), $\mathbb{M}_F$ est l'ensemble des points fixes de $\mathbb{M}_L$ par l'action de $\mathrm{Gal}(L/F)$: pour tout i entre 0 et $f-1$, nous avons $\mathbb{M}_F^{(i)} = H^0(\mathrm{Gal}(L/F), \mathbb{M}_L^{(i)})$. De l'écriture de $\mathfrak{M}$, nous déduisons

Proposition 3.2.1. — *Pour tout i entre 0 et $f-1$, la famille*

$$(1\otimes u^{e-\gamma_i-\beta_i}e_\eta^{(i)}, 1\otimes u^{e-\beta_i}e_{\eta'}^{(i)})$$

est une base de $\mathbb{M}_F^{(i)}$ comme $R\hat{\otimes}_{W,\iota\circ\varphi^{-i}}\mathcal{O}_{\mathcal{E},F}$-module. Dans ces bases, la matrice $B^{(i)}$ (resp., si $i=f-1$, la matrice $\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & \alpha'^{-1}\end{pmatrix}B^{(i)}$) du Frobenius de $\mathbb{M}_F^{(i)}$ dans $\mathbb{M}_F^{(i+1)}$ est :

- Genre I_η : $\begin{pmatrix}v^{d_i}(v+p) & 0\\ a_iv^{d_i} & v^{p-1}\end{pmatrix}v^{-b_{f-1-i}}$;
- Genre $\mathrm{I}_{\eta'}$: $\begin{pmatrix}v^{d_i} & a_i'v^p\\ 0 & v^{p-1}(v+p)\end{pmatrix}v^{-b_{f-1-i}}$;
- Genre II : $\begin{pmatrix}a_iv^{d_i} & v^p\\ v^{d_i} & a_i'v^{p-1}\end{pmatrix}v^{-b_{f-1-i}}$.

où $v=u^e$ et $d_i=p-1-c_{f-1-i}$ pour tout i dans $\{0,\dots,f-1\}$.

Démonstration. — Soit i un indice entre 0 et $f-1$. Tout élément de $\mathbb{M}_L^{(i)}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda e_\eta^{(i)}+\lambda' e_{\eta'}^{(i)}$ où λ et λ' s'écrivent eux-mêmes respectivement

$$\lambda=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_ju^j \quad\text{et}\quad \lambda'=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_j'u^j$$

avec a_j,a_j' dans R et $\lim\limits_{j\to-\infty}a_j=\lim\limits_{j\to-\infty}a_j'=0$. Avec ces notations, un calcul immédiat montre que, pour tout $g\in\mathrm{Gal}(L/K)$, nous avons $g\big(\lambda e_\eta^{(i)}+\lambda' e_{\eta'}^{(i)}\big)=\mu e_\eta^{(i)}+\mu' e_{\eta'}^{(i)}$ avec

$$\mu=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_j\cdot\varphi^{-i}\big(\varepsilon_f(g)^{j+\beta_i+\gamma_i}\big)\cdot u^j \quad\text{et}\quad \mu'=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_j'\cdot\varphi^{-i}\big(\varepsilon_f(g)^{j+\beta_i}\big)\cdot u^j.$$

Ainsi $\lambda e_\eta^{(i)}+\lambda' e_{\eta'}^{(i)}$ est fixe par $\mathrm{Gal}(L/F)$ si, et seulement si les seuls coefficients non nuls dans λ (resp. λ') sont ceux pour lesquels $j+\beta_i+\gamma_i$ (resp. $j+\beta_i$) est divisible par e. Ceci démontre que la famille indiquée est une base de $\mathbb{M}_F^{(i)}$.

Les matrices du Frobenius dans ces nouvelles bases sont obtenues en multipliant les matrices de la proposition 3.1.9 à gauche par $\begin{pmatrix}u^{\gamma_{i+1}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}u^{\beta_{i+1}-e}$ et à droite par $\begin{pmatrix}u^{-p\gamma_i} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}u^{-p(\beta_i-e)}$ puis en utilisant la formule $\gamma_{i+1}-p\gamma_i=-ec_{f-1-i}$ et son équivalent pour les b_i. □

Par le théorème 2.1.6 et la proposition 2.1.7, $\rho_{\mathfrak{M}}$ est aussi la R-représentation associée à $\mathbb{M}_F^{(0)}$ muni d'une structure de ϕ-module sur $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E},F}$ par l'endomorphisme $\varphi^f_{\mathbb{M}_F}$ que, par un léger abus de notations, nous notons encore ϕ. Avec les notations de la proposition 3.2.1, pour tout i entre 0 et $f-1$, $B^{(i)}$ désigne la matrice associée à φ de $\mathbb{M}_F^{(i)}$ dans $\mathbb{M}_F^{(i+1)}$. Ainsi, dans la base de $\mathbb{M}_F^{(0)}$ donnée par la proposition 3.2.1, la matrice à coefficients dans $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E},F}$ de l'endomorphisme ϕ est :

$$B=B^{(f-1)}\cdot\varphi(B^{(f-2)})\cdots\varphi^{f-2}(B^{(1)})\cdot\varphi^{f-1}(B^{(0)}). \tag{24}$$

Remarquons que, d'après la forme des matrices $B^{(i)}$ dans la proposition 3.2.1, les coefficients de la matrice B obtenue par la formule (24) sont en fait dans $R\hat{\otimes}_W\mathfrak{S}_F=R[[v]]$.

Par construction (voir §2.1.1), la k_E-représentation $\overline{\rho}_{\mathfrak{M}}$ est la k_E-représentation de G_∞ associée à $k_E \otimes_R \mathbb{M}_F^{(0)}$, vu comme ϕ-module sur $k_E((v))$. Notons $\overline{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la réduction, à coefficients dans $k_E((v))$, de la matrice B. Nous définissons la trace et le déterminant tordus :

$$T(\overline{B}) = \phi(a) + d \cdot \tfrac{\phi(c)}{c}, \quad \Delta(\overline{B}) = \tfrac{\phi(c)}{c} \cdot (ad - bc),$$

avec la convention $\frac{\phi(c)}{c} = 0$ si $c = 0$. Avec ces notations et en notant en plus $\mathrm{nr}'(\delta)$ le caractère non ramifié de $G_{F'}$ dans $k_E^\times$ qui envoie le Frobenius arithmétique sur un élément δ de $k_E^\times$, le corollaire III.1.4.8 de [**LB**] s'énonce ainsi :

Proposition 3.2.2. — *La représentation $\overline{\rho}_{\mathfrak{M}}$ est absolument irréductible si et seulement si c est non nul et les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(i) $(p^f + 1)(\mathrm{val}_v(T(\overline{B})) > p^f \,\mathrm{val}_v(\Delta(\overline{B}))$ *;*

(ii) $\mathrm{val}_v(\Delta(\overline{B})) \not\equiv 0 \pmod{p^f + 1}$.

*Lorsque c'est le cas, notons h et δ les éléments respectifs de $\mathbb{Z}$ et $k_E^\times$ définis par la congruence $\Delta(\overline{B}) \equiv -\delta v^h \pmod{v^{h+1}}$ (*i.e. *$-\delta v^h$ est le terme de plus bas degré de $\Delta(\overline{B})$). Alors, il existe une base de $k_E \otimes_R \mathbb{M}_F^{(0)}$ dans laquelle la matrice de ϕ est :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta v^h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la représentation $\overline{\rho}_{\mathfrak{M}}$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_{2f}^{-h} \cdot \mathrm{nr}'(\delta^{-1})\right) \otimes \omega$ (rappelons que ω désigne le caractère cyclotomique).

Remarque 3.2.3. — Supposons que les paramètres a_i et a_i' correspondant à $\mathfrak{M}$ introduits dans la proposition 3.1.21 sont tous dans l'idéal maximal de R et que le genre de $\mathfrak{M}$ fait intervenir un nombre pair de composantes II. Alors, la matrice $\overline{B}$ est le produit de matrices diagonales et d'un nombre pair de matrices anti-diagonales. Par conséquent, elle est diagonale et la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{\mathfrak{M}}$ est réductible.

3.2.2. Calcul de $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$. — Nous fixons dans ce paragraphe $\overline{\rho}$ une k_E-représentation irréductible de dimension 2 de G_F. Une telle représentation est de la forme $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_{2f}^{-h} \otimes \mathrm{nr}'(\delta^{-1})\right) \otimes \omega$, pour un certain entier h non nul modulo $p^f + 1$ et δ un élément de $k_E^\times$.

L'objectif de cette partie est de décrire l'espace $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ des extensions de $\overline{\rho}$ par elle-même dans la catégorie des représentations de G_∞. D'après le lemme 2.2.9 et la remarque qui le suit (avec $d = 2$ et $p \geqslant 5$), cet espace contient (canoniquement) celui des extensions de $\overline{\rho}$ par elle-même comme représentation de G_F.

D'après le théorème 2.1.6 (pour $R = k_E$), la catégorie des k_E-représentations de G_∞ de dimension finie est équivalente à celle des ϕ-modules étales sur $k_E((v))$. Soit $D(\overline{\rho})$ le ϕ-module étale sur $k_E((v))$, de dimension 2, associé à $\overline{\rho}$. Ainsi l'espace $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ que nous voulons décrire est isomorphe à l'espace $\mathrm{Ext}^1(D(\overline{\rho}), D(\overline{\rho}))$ des extensions de $D(\overline{\rho})$ par lui-même dans la catégorie des ϕ-modules étales sur $k_E((v))$. Fixons une base $\mathcal{B}$ de $D(\overline{\rho})$ et notons B la matrice de ϕ dans cette base. Pour toute matrice A dans $\mathrm{M}_2(k_E((v)))$, nous notons D_A le ϕ-module dont l'espace vectoriel sous-jacent est

$D(\overline{\rho}) \oplus D(\overline{\rho})$ et de Frobenius dans la base $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{M}_2(k_E((v)))}{\mathrm{Im}(X \mapsto B\phi(X) - XB)} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(D(\overline{\rho}), D(\overline{\rho})) \\ A & \longmapsto & \text{classe de } D_A \end{array}$$

est alors un isomorphisme de k_E-espaces vectoriels.

Il s'agit maintenant de déterminer l'image de l'application de $\mathrm{M}_2(k_E((v)))$ dans lui-même qui envoie une matrice X sur la matrice $B\phi(X) - XB$. Nous pouvons supposer que la base $\mathcal{B}$ a été choisie de façon à ce que la matrice B du Frobenius ϕ dans $\mathcal{B}$ soit de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \delta v^h \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec δ dans $k_E^\times$, $0 \leqslant h \leqslant q^2 - 2$ et $h \not\equiv 0 \pmod{q+1}$.

Proposition 3.2.4. — *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{M}_2(k_E((v)))}{\mathrm{Im}(X \mapsto B\phi(X) - XB)} & \longrightarrow & \frac{k_E((v))}{\mathrm{Im}(v^{(q-1)h}\phi^2 - \mathrm{Id})} \oplus \frac{k_E((v))}{\mathrm{Im}(\phi^2 - \mathrm{Id})} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(\frac{1}{\delta v^h}\left(\phi(a) + d\right), \frac{1}{\delta v^h} b + \phi(c)\right) \end{array}$$

est un isomorphisme de k_E-espaces vectoriels.

Lemme 3.2.5. —

(i) Le quotient $\frac{k_E((v))}{\mathrm{Im}(v^{(q-1)h}\phi^2 - \mathrm{Id})}$ a pour base

$$\left\{v^n,\ n < -\tfrac{h}{q+1} \text{ et } n \not\equiv (q-1)h \pmod{q^2}\right\}.$$

(ii) Le quotient $\frac{k_E((v))}{\mathrm{Im}(\phi^2 - \mathrm{Id})}$ a pour base

$$\left\{v^n,\ n < 0 \text{ et } n \not\equiv 0 \pmod{q^2}\right\} \cup \{1\}.$$

Démonstration. — Soit m un entier relatif. Notons f_m l'application k_E-linéaire de $k_E((v))$ dans lui-même qui envoie x sur $v^m\phi(x) - x$. Notons M le rationnel $\frac{-m}{q^2-1}$, point fixe de $z \mapsto q^2 z + m$. Nous traitons simultanément les deux cas du lemme en démontrant que le quotient $k_E((v))/\mathrm{Im} f_m$ a pour base l'ensemble

$$\mathcal{B}_m = \left\{v^n,\ n < M \text{ et } n \not\equiv m \pmod{q^2}\right\} \cup \left\{v^M,\ \text{ si } M \text{ est entier}\right\}.$$

Remarquons que dans le point (i), M ne peut être un entier à cause de l'hypothèse $h \not\equiv 0 \pmod{q+1}$.

Les égalités et inégalités

$$\forall x \in k_E((v)) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{val}(x) > M & \Longrightarrow & \mathrm{val}_v(f_m(x)) = \mathrm{val}_v(x) > M \\ \mathrm{val}(x) < M & \Longrightarrow & \mathrm{val}_v(f_m(x)) = m + q^2\,\mathrm{val}_v(x) < M \end{array} \right. \tag{25}$$

assurent la continuité de f_m et que l'image de f_m est fermée. Notons que, comme v^M est dans le noyau de f_m, tout élément de l'image de f_m est de valuation différente de M et a un antécédent de valuation différente de M.

Nous affirmons que, pour tout entier n strictement supérieur à M, v^n est dans l'image de f_m. En effet, la suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par $n_0 = n$ et $n_{i+1} = q^2 n_i + m$ tend vers $+\infty$ et la série $-\sum_{i\geqslant 0} v^{n_i}$ ainsi définie a pour image v^n par f_m. Ainsi, toute classe dans

$k_E((v))/\mathrm{Im} f_m$ a un représentant qui est un polynôme de Laurent de degré inférieur ou égal à M.

De plus, pour tout entier n, l'élément $v^{m+q^2n} - v^n$ est dans l'image de f_m. Soit n un entier strictement inférieur à M et congru à m modulo q^2. Alors l'entier $n' = \frac{n-m}{q^2}$ est strictement compris entre n et M et les puissances v^n et $v^{n'}$ coïncident dans $k_E((v))/\mathrm{Im} f_m$. Ceci implique que l'ensemble $\mathcal{B}_m$ engendre $k_E((v))/\mathrm{Im} f_m$.

Pour démontrer enfin que la famille $\mathcal{B}_m$ est libre, il nous suffit enfin de remarquer que tout élement de $\mathrm{Im} f_m$ de valuation inférieure ou égale à M est en fait de valuation strictement inférieure à M et congrue à m modulo q^2.

□

Remarque 3.2.6. — Avec les notations de la démonstration précédente, nous pouvons déterminer pratiquement l'image d'une série $\sum a_i v^i$ dans $k_E((v))/\mathrm{Im} f_m$ en procédant comme suit :

(1) nous tronquons les puissances strictement supérieures à $\frac{-m}{q^2-1}$;

(2) pour tout n strictement inférieur à $\frac{-m}{q^2-1}$, nous remplaçons v^{m+q^2n} par v^n, jusqu'à avoir fait disparaître toutes les puissances congrues à m modulo q^2.

3.2.3. Exposé sommaire de la stratégie. — Soient $\overline{\rho}$ une représentation irréductible de G_F dans $\mathrm{GL}_2(k_E)$, t un type galoisien de la forme $\eta \oplus \eta'$ et $\mathbf{v}_0$ le type de Hodge $((0,2))_{\tau\in\mathcal{S}}$ choisis comme au début de la partie 3. Dans cette partie, nous présentons une méthode générale de détermination de l'anneau de déformations $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$. Nous appliquons notamment cette méthode dans la partie 4 lorsque F est de degré 2 sur $\mathbb{Q}_p$.

Rappelons que le caractère ψ est fixé et satisfait une relation de compatibilité (2) avec $\mathbf{v}_0$ et t. Pour nos choix de $\mathbf{v}_0$ et t, ψ est donc de la forme

$$\psi = \eta\eta' \cdot \mathrm{nr}(-\delta^{-1}) \tag{26}$$

où δ est un élément dans $\mathcal{O}_E^\times$, fixé.

3.2.3.1. Première étape : les engeances. — Dans [**Ki2**] puis dans [**Ki5**], Kisin démontre qu'il existe des variétés définies sur $\mathcal{O}_E$ qui paramètrent les modules de Breuil–Kisin de hauteur $\leqslant h$ (pour un certain entier h fixé) à coefficients dans des $\mathcal{O}_E$-algèbres locales complètes et noetheriennes variables qui sont munis éventuellement de structures supplémentaires. Les fibres spéciales de ces variétés sont des variétés algébriques quasi-projectives réduites définies sur k_E que Pappas et Rapoport appelent *variétés de Kisin* dans [**PR**].

Étant donnés une représentation irréductible $\overline{\rho} : G_F \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ et un type galoisien $t = \eta \oplus \eta'$, notons $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ la [8] variété de Kisin dont les k-points s'identifient, pour toute extension finie k de k_E, à l'ensemble des modules de Breuil–Kisin sur $k \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{S}$ de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$ qui sont inclus dans $k \otimes_{k_E} \mathbb{M}(\overline{\rho}_{|G_{\infty,L}})$ muni de sa donnée de descente.

8. Les variétés de Kisin apparaissant naturellement comme des sous-schémas localement fermés et réduits d'espaces projectifs, la donnée de leurs ensembles de points dans toutes les extensions finies de k_E suffit à les déterminer entièrement.

Définition 3.2.7. — Soient $\overline{\rho} : G_F \to \mathrm{GL}_2(k_E)$ une représentation irréductible de G_F et $t = \eta \oplus \eta'$ un type galoisien. Si E' est une extension finie de E, un $k_{E'}$-point de la variété de Kisin $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ est appelé une E'-*engeance* de type t de $\overline{\rho}$.

Remarque 3.2.8. — Lorsque E' est E et que la situation ne prête pas à confusion, nous dirons simplement *engeance* à la place de E-engeance.

De la proposition 3.1.9 appliquée à $R = k_E$ et du fait que $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, nous déduisons que la donnée d'une engeance est équivalente à la donnée d'un genre $(g_0, \dots, g_{f-1})$ et d'une famille de paramètres $(\alpha, \alpha', a_0, a'_0, \dots, a_{f-1}, a'_{f-1})$ vivant dans k_E, satisfaisant aux conditions de la proposition 3.1.9 et considérés modulo la relation d'équivalence décrite par la proposition 3.1.12.

La première étape consiste à déterminer la liste des engeances de type t de la représentation $\overline{\rho}$. Pour y parvenir, une possibilité consiste à parcourir tous les genres et paramètres possibles puis, en utilisant la proposition 3.2.2, à sélectionner ceux donnant lieu à une représentation résiduelle isomorphe à $\overline{\rho}$. Cette étape est entièrement algorithmique et nous l'avons implémentée en `sage`. Nous renvoyons le lecteur à la page web

`https://cethop.math.cnrs.fr:8443/home/pub/14`

pour une présentation rapide de notre logiciel `sage` ainsi que des exemples de calculs.

Remarquons toutefois qu'il devrait être également possible de déterminer la liste des engeances en revenant à la définition et en calculant la variété de Kisin $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$. Cette approche sera développée dans un travail ultérieur.

3.2.3.2. Deuxième étape : construction d'une famille de morphismes. — Soit E' une extension finie de E. Pour chaque E'-engeance $\xi' = ((g_i)_i, (\alpha, \alpha'), (a_i, a'_i)_i)$ de type t de $\overline{\rho}$, nous définissons une $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre locale complète noetherienne $R_{\xi',E'}$, de corps résiduel $k_{E'}$, ainsi qu'un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}_{\xi',E'}$ sur $R_{\xi',E'}$ comme suit :

(a) Supposons que le genre de ξ' comporte un nombre impair de facteurs II. Nous posons :
$$R_{\xi',E'} = \frac{\mathcal{O}_{E'}[[X_i, Y_i, i \in \mathrm{II}, T_i, i \notin \mathrm{II}]]}{(X_i Y_i + p, i \in \mathrm{II})}.$$
Par la remarque 3.1.10, nous obtenons un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}_{\xi',E'}$ sur $R_{\xi',E'}$ en remplaçant dans les formules de la proposition 3.1.9 :
- α par 1 et α' par δ ;
- pour les indices i de genre I_η, a_i par $[a_i] + T_i$;
- pour les indices i de genre $\mathrm{I}_{\eta'}$, a'_i par $[a'_i] + T_i$;
- pour les indices i de genre II, a_i par X_i et a'_i par Y_i.

(b) Supposons que le genre de ξ' comporte un nombre pair de facteurs II. Alors, d'après la remarque 3.2.3, le genre de ξ' possède aussi un facteur (de genre I_η ou $I_{\eta'}$) avec un paramètre non nul dans k_E. Fixons i_0 l'indice d'un tel facteur. Nous posons :
$$R_{\xi',E'} = \frac{\mathcal{O}_{E'}[[X_i, Y_i, i \in \mathrm{II}, T_i, i \notin \mathrm{II} \cup \{i_0\}, Z]]}{(X_i Y_i + p, i \in \mathrm{II})}.$$

Par la remarque 3.1.10, nous obtenons un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}_{\xi',E'}$ sur $R_{\xi',E'}$ en remplaçant dans les formules de la proposition 3.1.21 :

- α par $[\alpha]+Z$ et α' par $-\delta([\alpha]+Z)^{-1}$;
- a_{i_0} (si i_0 est de genre I_η) ou a'_{i_0} (si i_0 est de genre $\mathrm{I}_{\eta'}$) par 1 ;
- pour les indices $i \neq i_0$ de genre I_η, a_i par $[a_i]+T_i$;
- pour les indices $i \neq i_0$ de genre $\mathrm{I}_{\eta'}$, a'_i par $[a'_i]+T_i$;
- pour les indices i de genre II, a_i par X_i et a'_i par Y_i.

Dans les deux cas (a) et (b) ci-dessus, la $R_{\xi',E'}$-représentation de G_F associé à $\mathfrak{M}_{\xi',E'}$ est de déterminant $\psi\varepsilon$ et se réduit sur $\overline{\rho}$ modulo l'idéal maximal. Nous obtenons donc un morphisme de $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres (locales) $f_{\xi',E'}$ de $\mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\overline{\rho})$ dans $R_{\xi',E'}$, qui induit l'identité sur les corps résiduels $k_{E'}$.

Lemme 3.2.9. — *Pour tout E'-engeance ξ', le morphisme $f_{\xi',E'}$ se factorise par $\mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho})$.*

Démonstration. — Convenons de dire qu'un morphisme de $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres $\alpha : \mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\overline{\rho}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ est de type $(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\psi)$ si la $\overline{\mathbb{Q}}_p$-représentation de G_F qu'il définit est de type $(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\psi)$. La $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre $\mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho})$ est alors égale au quotient de $\mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\overline{\rho})$ par l'idéal $I=\cap\ker f$ où l'intersection est étendue à tous les morphismes f de type $(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\psi)$ (voir la remarque 1.1.1).

Pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer que tout élément x dans I s'envoie sur 0 par $f_{\xi',E'}$. Considérons un élément x dans I et posons $y=f_{\xi',E'}(x)$. Soit également $g : R_{\xi',E'}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ un morphisme de $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres. La composée $g\circ f_{\xi',E'}$ est alors de type $(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\psi)$. Nous déduisons qu'elle s'annule sur x, ce qui revient à dire que $g(y)=0$. Ainsi y appartient à l'idéal $J=\cap\ker g$ où l'intersection est étendue à tous les morphismes g comme ci-dessus. Or, à partir de la forme explicite de $R_{\xi',E'}$, nous déduisons aisément que l'idéal J est nul. Ainsi nous avons bien démontré que $y=f_{\xi',E'}(x)=0$ comme annoncé. □

Notons $\tilde{f}_{\xi',E'} : \mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho})\to R_{\xi',E'}$ l'application correspondant à la factorisation du lemme précédent. Soit aussi $f_{E'}$ l'application produit $\prod_{\xi'} f_{\xi',E'}$ où le produit est étendu à toutes les E'-engeances ξ' de type t de $\overline{\rho}$. Elle prend ses valeurs dans le « produit local »

$$R_{\mathrm{expl},E'}=\prod_{\xi'}{}_{k_{E'}} R_{\xi',E'}$$

défini comme le sous-anneau du produit $\prod_{\xi'} R_{\xi',E'}$ formé des familles $(x_{\xi'})$ dont toutes les composantes se réduisent sur le même élément dans le corps résiduel $k_{E'}$. Par ce qui précède, le morphisme f se factorise par un morphisme

$$\tilde{f}_{E'} : \mathcal{O}_{E'}\otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho})\longrightarrow R_{\mathrm{expl},E'}$$

qui n'est autre que le produit des $\tilde{f}_{\xi',E'}$.

Les morphismes $\tilde{f}_{E'}$ que nous venons de construire vérifient en outre des conditions de compatibilité. Pour les énoncer, considérons E'' une extension finie de E'. L'ensemble des E'-engeances est alors naturellement inclus dans celui des E''-engeances. De plus, si

ξ' est une E'-engeance, il est clair d'après les définitions que $\mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} R_{\xi',E'} \simeq R_{\xi',E''}$. Nous pouvons ainsi définir un morphisme de $\mathcal{O}_{E''}$-algèbres :

$$\psi_{E'',E'} : R_{\mathrm{expl},E''} \to \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} R_{\mathrm{expl},E'}$$

en envoyant une famille $(x_{\xi''})$ sur la restriction de cette famille aux E'-engeances. Ces morphismes font commuter les diagrammes suivants :

(27)
$$\begin{tikzcd} & R_{\mathrm{expl},E''} \arrow[d, "\psi_{E'',E'}"] \\ \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\psi}(\mathbf{v},\mathrm{t},\overline{\rho}) \arrow[ur, "\tilde{f}_{E''}"] \arrow[r, "\tilde{f}_{E'}"'] & \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} R_{\mathrm{expl},E'}. \end{tikzcd}$$

3.2.3.3. Interlude : calcul de l'image d'un morphisme de source $R^{\psi}(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho})$. — Nous mettons de côté momentanément les algèbres $R_{\mathrm{expl},E'}$ et nous intéressons au problème suivant (qui apparaîtra à plusieurs reprises dans la suite) :

> Soient R une $\mathcal{O}_E$-algèbre et M_R un ϕ-module [9] sur $R\hat{\otimes}_W\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ tous deux explicites. Nous supposons que M_R correspond à un morphisme $f : R^{\psi}(\mathbf{v}_0,\mathrm{t},\overline{\rho}) \to R$. Comment déterminer l'image de f ?

Dans la suite, nous supposerons pour simplifier que la représentation $\overline{\rho}$ est telle qu'il existe une base de son ϕ-module sur $k_E((v))$ dans laquelle l'action de ϕ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta v^h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une première étape vers la résolution de la question ci-dessus consiste à remarquer que, d'après le lemme 2.2.7, l'application f est surjective si et seulement si l'application tangente $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R, k_E[\varepsilon]) \to \mathrm{Ext}^1_{G_F}(\overline{\rho},\overline{\rho})$ est injective. De plus, la condition $p \geqslant 5$ assure, par le lemme 2.2.9, que l'application restriction de $\mathrm{Ext}^1_{G_F}(\overline{\rho},\overline{\rho})$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho},\overline{\rho})$ est injective. Ainsi, f est surjective si et seulement si l'application

$$f^{\sharp} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R, k_E[\varepsilon]) \to \mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho},\overline{\rho})$$

est injective.

Or le fait que R et M_R soient explicites permet de décrire entièrement $f^{\sharp}$. Expliquons à présent comment procéder concrètement pour y parvenir. L'algèbre R étant explicite, nous pouvons déterminer une base $(f_1,\ldots,f_n)$ du k_E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E-\mathrm{alg}}(R, k_E[\varepsilon])$. Pour chaque f_i, considérons le ϕ-module M_i sur $k_E[\varepsilon]((v))$ déduit de M_R par extension des scalaires *via* f_i. Étant donné que f_i correspond à une déformation de $\overline{\rho}$, il existe une base de M_i dans laquelle la matrice de ϕ prend la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta v^h \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon A_i,$$

avec A_i dans $\mathrm{M}_2(k_E((v)))$. Avec ces conventions, l'image de f_i dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho},\overline{\rho})$ s'identifie à celle de A_i par l'application de la proposition 3.2.4, que nous pouvons calculer de façon entièrement explicite à l'aide du lemme 3.2.5 et de la remarque 3.2.6.

9. Nous rappelons que $\phi = \varphi^f$.

Maintenant que nous avons déterminé l'application $f^\sharp$, nous pouvons vérifier si, oui ou non, elle est injective. Si elle l'est, le morphisme f est surjectif et son image est déterminée : c'est R tout entier. Si, au contraire, elle ne l'est pas, notons N son noyau. Pour tout α dans N, le morphisme composé $\alpha \circ f$ prend alors ses valeurs dans $k_E \subset k_E[\varepsilon]$. Ceci signifie que l'image de f est incluse dans la sous-$\mathcal{O}_E$-algèbre de R :

$$R_1 = \bigcap_{\alpha \in N} \alpha^{-1}(k_E).$$

En outre, une lecture attentive de la démonstration du lemme 3.2.5 fournit une nouvelle base de M_R dans laquelle la matrice de ϕ est à coefficients dans R_1.

Nous nous ramenons, de cette manière, au même problème que précédemment où R est remplacée par R_1. En appliquant à nouveau la même méthode, nous pouvons déterminer si l'application $f : R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_1$ est surjective. Si elle l'est, nous avons déterminé son image tandis que si elle ne l'est pas, nous pouvons exhiber une sous-algèbre explicite R_2 de R_1 dans laquelle f prend ses valeurs et poursuivre ainsi notre recherche...

Malheureusement, le processus que nous venons de décrire peut ne pas prendre fin après un nombre fini d'étapes ; nous entendons par là qu'il est possible qu'aucun des R_n (pour n dans $\mathbb{N}$) ne soit l'image de f. Usuellement, ce problème peut être résolu en définissant R_ω comme l'intersection de tous les R_n puis en continuant la construction sur les ordinaux. Toutefois, nous ne pouvons alors plus vraiment parler de « construction explicite ». En pratique, nous retiendrons donc que la méthode présentée ci-dessus est efficace si f est « presque » surjective mais qu'elle ne l'est plus dès lors que l'image de f est très petite dans R.

3.2.3.4. Troisième étape : recollement des $R_{\mathrm{expl},E'}$. — Nous revenons à présent à la situation exposée à la fin de la seconde étape (§3.2.3.2). Rappelons que nous avons construit des algèbres $R_{\mathrm{expl},E'}$ (où E' désigne une extension finie variable de E) munies de morphismes $\tilde{f}_{E'} : \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_{\mathrm{expl},E'}$ vérifiant des conditions de compatibilité (27). Le but de cette troisième et dernière étape — qui est, de loin, la plus délicate — est de mettre ensemble toutes les $R_{\mathrm{expl},E'}$ afin de déterminer $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$.

Pour ce faire, notre méthode consiste à exhiber une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noetherienne complète R_{expl} munie d'un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $\tilde{g} : R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_{\mathrm{expl}}$ et, pour toute extension E' de E, d'un morphisme de $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres $\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_{\mathrm{expl}} \to R_{\mathrm{expl},E'}$ de sorte que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
 & & R_{\mathrm{expl},E''} \arrow[d, "\psi_{E'',E'}"] \\
\mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^\psi(\mathbf{v}, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\tilde{g}"] \arrow[urr, bend left, "\tilde{f}_{E''}"] \arrow[drr, bend right, "\tilde{f}_{E'}"'] & \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_{\mathrm{expl}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} R_{\mathrm{expl},E'}
\end{tikzcd}$$

pour E' et E'' deux extensions finies de E avec $E' \subset E''$.

Remarque 3.2.10. — Il existe, à vrai dire, une formule qui fournit une algèbre R_{expl} convenable, à savoir :

$$R_{\mathrm{expl}} = \varprojlim_{E'} \tilde{f}_{E'}(R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})) \tag{28}$$

où la limite projective est étendue à toutes les extensions finies E' de E et où les morphismes de transition sont induits par les $\psi_{E'',E'}$. Toutefois, il est généralement difficile d'appliquer la méthode du §3.2.3.3 pour déterminer $\tilde{f}_{E'}(R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}))$ car le morphisme $\tilde{f}_{E'}$ est souvent loin d'être surjectif. En conséquence, la formule (28) est rarement exploitable.

Remarque 3.2.11. — Il existe toutefois un cas où déterminer un anneau R_{expl} convenable est simple ; c'est celui où la variété de Kisin $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ est de dimension nulle. En effet, sous cette hypothèse additionnelle, les morphismes $\psi_{E'',E'}$ sont des isomorphismes dès que E' et E'' sont assez grands. Nous en déduisons que, quitte à agrandir E, nous pouvons choisir dans ce cas $R_{\mathrm{expl}} = R_{\mathrm{expl},E}$.

Lemme 3.2.12. — *Avec les notations précédentes, le morphisme* $\tilde{g} : R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_{\mathrm{expl}}$ *est injectif.*

Démonstration. — Il suit de la définition de $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ que, pour élément x non nul dans $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$, il existe un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $\alpha : R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ tel que $\alpha(x)$ est non nul. Pour démontrer que $\tilde{g}$ est injectif, il suffit donc de montrer que tout morphisme α comme ci-dessus se factorise par $\tilde{g}$.

Soit donc $\alpha : R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres. Remarquons, d'une part, qu'il prend ses valeurs dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{E'}$ d'une extension finie E' de E et, d'autre part, que, par définition, la E'-représentation de G_F qu'il définit, est de type $(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \psi)$. D'après la proposition 3.1.4, le théorème de classification des modules de Kisin (*cf* Proposition 3.1.9) et la construction de $R_{\mathrm{expl},E'}$, il existe un morphisme de $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres $\beta : R_{\mathrm{expl},E'} \to \mathcal{O}_{E'}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \tilde{g}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_{\mathrm{expl}} \arrow[r] & R_{\mathrm{expl},E'} \arrow[dll, "\beta"] \\
\mathcal{O}_{E'} & &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte directement que α se factorise par $\tilde{g}$ comme nous le souhaitions. □

D'après le lemme 3.2.12 ci-dessus, l'anneau de déformations $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ que nous cherchons à déterminer s'identifie à l'image du morphisme $\tilde{g}$. Or, au moins si nous avons été adroits dans le choix de R_{expl} afin que $\tilde{g}$ soit « presque » surjectif, nous pouvons déterminer l'image de $\tilde{g}$ à l'aide de la méthode expliquée au §3.2.3.3.

4. Mise en œuvre de la méthode en degré 2

Nous mettons en œuvre dans cette partie la méthode du paragraphe §3.2 dans le cas où $\overline{\rho}$ est une représentation irréductible de $F = \mathbb{Q}_{p^2}$. De telles représentations $\overline{\rho}$ sont

de la forme :

$$\overline{\rho} \simeq \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\left(\omega_4^{1+r_0+p(1+r_1)} \cdot \mathrm{nr}'(\theta)\right) \otimes \omega_2^s$$

où $G_{F'}$ est le groupe de Galois absolu de l'extension non ramifiée F' de degré 2 de F, ω_4 (resp. ω_2) est le caractère fondamental de niveau 4 (resp. 2) associé au plongement fixé τ_0' de F' dans E (resp. $\tau_0 = \tau_{0|F}'$ de F dans E), s est dans $\mathbb{Z}$, r_0 est un entier entre 0 et $p-1$ et r_1 est un entier entre -1 et $p-2$.

Les cas génériques, *i.e.* pour lesquels $1 \leqslant r_0 \leqslant p-2$ et $0 \leqslant r_1 \leqslant p-3$, ont déjà été traités dans [**BM2**], Théorème 5.2.1. Les auteurs obtiennent une description explicite des anneaux $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$, pour les types galoisiens t comme dans la partie 3 :

$$\begin{array}{rcll} R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) & \simeq & \{0\} & \text{si } \mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \emptyset, \\ & \simeq & \mathcal{O}_E[[X,Y,T]]/(XY+p) & \text{sinon.} \end{array}$$

Nous traitons donc dans cette partie les cas restants. Nous renvoyons à la partie 1.2.1 pour la forme des représentations non génériques et la liste de leurs poids de Serre.

Dans la suite du texte, nous traitons le cas des représentations pour lesquelles l'entier s est nul ; le cas général s'en déduit par torsion par un caractère de G_F. Rappelons également que nous avons fixé le caractère ψ d'une manière compatible avec le type galoisien t (relations (2) et (26)) en choisissant un élément δ dans $\mathcal{O}_E^\times$. La compatibilité entre ψ et le déterminant de $\overline{\rho}$ impose de plus que δ se réduise sur θ^{-1} dans k_E.

Dans toute la fin du texte, t désigne un type galoisien choisi comme au début de la partie 3 : $\mathrm{t} = (\eta \oplus \eta')_{|I_F}$, où η et η' sont deux caractères distincts de $\mathrm{Gal}(L/F)$ dans $\mathcal{O}_E^\times$.

Dans [**GK**] (théorème A), Gee et Kisin démontrent l'existence de multiplicités intrinsèques satisfaisant la version cristalline de la conjecture de Breuil–Mézard pour le type $\mathbf{v}_0$ et tout type galoisien t. Nos calculs permettent de déterminer presque toutes les valeurs de ces multiplicités intrinsèques, confirmant ainsi une conjecture de Kisin ([**Ki5**], conjecture 2.3.2).

4.1. Liste des engeances de type t **de** $\overline{\rho}$**.** — Un type galoisien t étant fixé, la première étape de la stratégie expliquée au §3.2.3 pour le calcul de l'anneau $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ consiste à établir la liste des engeances de type t de la représentation $\overline{\rho}$.

Pour cela, nous listons les genres un par un et, pour chacun d'eux, en utilisant la méthode du §3.2.1, nous calculons en fonction des paramètres $(\alpha, \alpha', (a_i, a_i')_{i=0,\ldots,f-1})$ la représentation résiduelle associée. Nous ne conservons enfin que les engeances pour lesquelles la représentation résiduelle correspondante est irréductible et isomorphe à $\overline{\rho}$.

Il convient de remarquer que, pour f égal à 2, les mauvais genres exclus par la définition 3.1.8 donnent toujours lieu à des représentations résiduelles réductibles. Cela se vérifie en appliquant les techniques de calcul de la représentation résiduelle de la partie 3.2.1. Pour les bons genres, le calcul est facile et ne présente pas d'intérêt majeur. Afin de ne pas allonger démesurément la taille de l'article, nous ne le présentons pas ici mais regroupons simplement les résultats que nous avons obtenus dans le tableau de la figure 1 (page 46) : pour chaque représentation $\overline{\rho}$, nous indiquons les types galoisiens t

Représentation $\overline{\rho} = \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\chi \cdot \mathrm{nr}'(\theta))$		Type t			Engeances		
		η	η'	d	Genre	(α, α')	(a_0, a_1)
$\chi = \omega_4^{1+r_0}$	$0 \leqslant r_0 \leqslant p-2$	$\omega_2^{r_0}$	ω_2^{-p}	$(p-2, p-1-r_0)$	$\mathrm{I}_\eta \times \mathrm{II}$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
	$1 \leqslant r_0 \leqslant p-2$	$\omega_2^{r_0-p}$	$\mathbb{1}$	$(0, p-r_0)$	$\mathrm{II} \times \mathrm{I}_{\eta'}$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
	$0 \leqslant r_0 \leqslant p-3$	$\omega_2^{1+r_0-p}$	ω_2^{-1}	$(0, p-2-r_0)$	$\mathrm{I}_{\eta'} \times \mathrm{II}$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
					$\mathrm{II} \times \mathrm{I}_\eta$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
					$\mathrm{I}_{\eta'} \times \mathrm{I}_\eta$	$(\alpha, \frac{-1}{\theta\alpha})$	$(1, \theta\alpha^2)$
$\chi = \omega_4^{p(2+r_1)}$	$-1 \leqslant r_1 \leqslant p-3$	$\omega_2^{p(1+r_1)}$	ω_2^{-1}	$(p-2-r_1, p-2)$	$\mathrm{II} \times \mathrm{I}_\eta$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
	$0 \leqslant r_1 \leqslant p-3$	$\omega_2^{-1+p(1+r_1)}$	$\mathbb{1}$	$(p-1-r_1, 0)$	$\mathrm{I}_{\eta'} \times \mathrm{II}$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
	$-1 \leqslant r_1 \leqslant p-4$	$\omega_2^{-1+p(r_1+2)}$	ω_2^{-p}	$(p-3-r_1, 0)$	$\mathrm{I}_\eta \times \mathrm{II}$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
					$\mathrm{II} \times \mathrm{I}_{\eta'}$	$(1, \theta^{-1})$	$(0,0)$
					$\mathrm{I}_\eta \times \mathrm{I}_{\eta'}$	$(\alpha, \frac{-1}{\theta\alpha})$	$(1, -1)$

FIGURE 1. Liste des engeances de type t de la représentation $\overline{\rho}$

pour lesquels la variété de Kisin $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ est non vide et les engeances qui la décrivent (les paramètres a_i, a_i', α et α' vivent dans k_E). Nous renvoyons également au §3.2 de [**Dav**] pour la présentation d'un calcul analogue.

Nous remarquons que, pour chaque couple $(\mathrm{t}, \overline{\rho})$ correspondant aux lignes du tableau qui apparaissent en noir, il n'y a qu'une seule engeance. La variété de Kisin correspondante est donc réduite à un point. Au contraire, dans les autres situations, celles qui apparaissent en bleu dans le tableau, nous sommes en présence de trois possibilités pour le genre, les deux premiers conduisant à une unique engeance et la troisième conduisant à une famille d'engeances paramétrée par $k_E^\times$. Il se trouve que, dans ces cas, la variété de Kisin est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k_E}$: les engeances paramétrées par le troisième genre correspondent naturellement à l'ouvert Zariski $k_E^\times$ dans $\mathbb{P}^1(k_E)$ tandis que les deux autres genres correspondent respectivement aux points 0 et ∞ de $\mathbb{P}^1(k_E)$.

4.2. Détermination de l'anneau de déformations. — Nous continuons d'appliquer la méthode du §3.2.3, sachant que nous arrivons à la deuxième étape. Dans la suite, nous traitons uniquement le cas où $\overline{\rho} = \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\big(\omega_4^{1+r_0} \cdot \mathrm{nr}'(\theta)\big)$, avec r_0 entre 0 et $p-2$, l'autre étant absolument identique.

4.2.1. Cas d'une variété de Kisin de dimension nulle. — Supposons que la variété de Kisin $\mathcal{GR}_{\overline{\rho},\psi,\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}$ soit réduite à un point (c'est-à-dire que nous sommes dans une ligne noire du tableau de la figure 1). Notons ξ l'unique engeance correspondante et appelons R_ξ l'anneau qui lui est associé par la construction du §3.2.3.2 : nous avons

$$R_\xi \simeq \mathcal{O}_E[[T, X, Y]]/(XY + p).$$

La troisième étape de notre stratégie consiste à exhiber une $\mathcal{O}_E$-algèbre R_{expl} vérifiant un certain nombre de propriétés (§3.2.3.4). Toutefois, nous sommes ici dans le cas simple où la variété de Kisin est de dimension nulle. D'après la remarque 3.2.11, nous

pouvons donc simplement choisir $R_{\mathrm{expl}} = R_\xi$. Le lemme 3.2.12 entraîne alors que nous avons une injection $\tilde{g} : R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_\xi$.

Proposition 4.2.1. — *Nous conservons les notations et les hypothèses précédentes et supposons de plus que la représentation $\overline{\rho}$ n'est pas totalement non générique. Alors le morphisme $\tilde{g}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Nous traitons d'abord le cas du type galoisien $\omega_2^{r_0} \oplus \omega_2^{-p}$, correspondant à $d = (p-2, p-1-r_0)$, avec r_0 entre 1 et $p-2$ (l'hypothèse sur $\overline{\rho}$ revient à exclure le cas $r_0 = 0$). La matrice du ϕ-module $\mathbb{M}_\xi$ sur $R_\xi \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E}$ associé est, d'après la partie 3.2.1 :

$$B = \begin{pmatrix} v^{p(p-1)}\left(X_1 v^{d_1}(v^p+p) + T_0 v^p\right) & v^{p^2+p} \\ \alpha' v^{p(p-1)}\left(v^{d_1}(v^p+p) + T_0 Y_1 v^{p-1}\right) & \alpha' Y_1 v^{p^2+p-1} \end{pmatrix}.$$

Après un changement de base correspondant à multiplier le deuxième vecteur de base par $\alpha' v^{d_1+p^2}$, nous obtenons la nouvelle matrice

$$B' = \begin{pmatrix} v^{p(p-1)}\left(X_1 v^{d_1}(v^p+p) + T_0 v^p\right) & \delta v^{p^2(d_1+1)+p+p^4} \\ v^{-d_1-p}\left(v^{d_1}(v^p+p) + T_0 Y_1 v^{p-1}\right) & \delta Y_1 v^{p+p^4-1+(p^2-1)d_1} \end{pmatrix}$$

qui, réduite dans $k_E[[v]]$, donne $\begin{pmatrix} 0 & \overline{\delta} v^h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $h = p^4 + p + p^2(d_1+1)$.

Pour une variable Z dans $\{T_0, X_1, Y_1\}$, désignons par $Z^\star$ le morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres de R_ξ dans les nombres duaux $k_E[\varepsilon]$ qui envoie Z sur ε et les autres variables sur 0. D'après la partie 3.2.2, les images de $T_0^\star$, $X_1^\star$ et $Y_1^\star$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ (décrit par la proposition 3.2.4) sont respectivement $(\theta v^{-p-p^2(d_1+1)}, 0)$, $(\theta v^{-p-p^2}, 0)$ et $(v^{-p^2-d_1-1}, 0)$. Par le lemme 3.2.5, ces trois vecteurs forment une famille libre. L'application $\tilde{g}$ est donc surjective, ce qui démontre que l'anneau $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est isomorphe à $\frac{\mathcal{O}_E[[T_0, X_1, Y_1]]}{X_1 Y_1 + p}$.

Nous traitons maintenant le cas du type galoisien $\omega_2^{r_0-p} \oplus \mathbb{1}$, avec $d = (0, p-r_0)$ et r_0 entre 1 et $p-2$. L'anneau explicite est dans ce cas $\frac{\mathcal{O}_E[[X_0, Y_0, T_1']]}{X_0 Y_0 + p}$ et la matrice du ϕ-module associé peut être mise sous la forme

$$\begin{pmatrix} X_0 v^{d_1} + T_1' v^p & \delta v^{p^3+p^2}(v^{d_1} + Y_0 T_1') \\ v^{-1}(v+p) & \delta Y_0 v^{(p+1)(p^2-1)}(v+p) \end{pmatrix}.$$

Les images de $X_0^\star$, $Y_0^\star$ et $T_1'^\star$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ sont respectivement $(\theta v^{-1-p}, 0)$, $(v^{-d_1-p}, 0)$ et $(\theta v^{-d_1-p^2}, 0)$, qui forment une famille libre. Nous concluons enfin de la même manière que précédemment. □

Remarque 4.2.2. — Le résultat de la proposition 4.2.1 n'était connu auparavant que pour les représentations génériques [**BM2**].

Remarque 4.2.3. — L'hypothèse « $\overline{\rho}$ non totalement non générique » de la proposition 4.2.1 n'exclut qu'un seul cas dans les deux premières lignes du tableau : $r_0 = 0$ et $\mathrm{t} = \omega_2^{r_0} \oplus \omega_2^{-p}$, soit $d = (p-2, p-1)$. Dans ce cas, le début de la démonstration de la proposition reste valable, mais nous observons que les images de $X_1^\star$ et $Y_1^\star$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ sont toutes les deux égales à $(\delta^{-1} v^{-p-p^2}, 0)$. L'injection $\tilde{g}$ n'est donc pas surjective.

Engeance	Anneau	Paramètres	Matrice $B_{\xi'}$ de ϕ sur $M_{\xi'}$
$\mathrm{I}_{\eta'} \times \mathrm{I}_{\eta}$ $\xi' \in k_{E'}^{\times}$	$\mathcal{O}_{E'}[[T_{\xi'}, Z_{\xi'}]]$	$\alpha = [\xi'] + Z_{\xi'}$ $\alpha' = -\delta\alpha^{-1}$ $a_0' = 1$ $a_1 = [\theta\xi'^2] + T_{\xi'}$	$\begin{pmatrix} \alpha v^{d_1+1}(v+p) & \alpha a_0' v^{p^2+d_1+1}(v+p) \\ \alpha' a_1 v^{d_1+1} & \alpha' a_0' a_1 v^{p^2+d_1+1} + \alpha' v^{p^2}(v^p+p) \end{pmatrix}$
$\mathrm{I}_{\eta'} \times \mathrm{II}$ $\xi' = 0$	$\frac{\mathcal{O}_{E'}[[T_0', X_0, Y_0]]}{X_0 Y_0 + p}$	$\alpha = 1,\ \alpha' = \delta$ $a_0' = T_0'$ $a_1 = X_0$ $a_1' = Y_0$	$\begin{pmatrix} \alpha a_1 v^{d_1+1} & \alpha a_0' a_1 v^{p^2+d_1+1} + \alpha v^{p^2+1}(v^p+p) \\ \alpha' v^{d_1+1} & \alpha' a_0' v^{p^2+d_1+1} + \alpha' a_1' v^{p^2}(v^p+p) \end{pmatrix}$
$\mathrm{II} \times \mathrm{I}_{\eta}$ $\xi' = \infty$	$\frac{\mathcal{O}_{E'}[[X_\infty, Y_\infty, T_\infty]]}{X_\infty Y_\infty + p}$	$\alpha = 1,\ \alpha' = \delta$ $a_0 = X_\infty$ $a_0' = Y_\infty$ $a_1 = T_\infty$	$\begin{pmatrix} \alpha a_0 v^{d_1+1}(v+p) & \alpha v^{p^2+d_1+1}(v+p) \\ \alpha' a_0 a_1 v^{d_1+1} + \alpha' v^p & \alpha' a_1 v^{p^2+d_1+1} + \alpha' a_0' v^{p^2} \end{pmatrix}$

FIGURE 2. Matrices du Frobenius sur les ϕ-modules $M_{\xi'}$

4.2.2. Cas d'une variété de Kisin de dimension supérieure. — Nous traitons, dans ce paragraphe, le cas de la représentation $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}\big(\omega_4^{1+r_0}\cdot \mathrm{nr}'(\theta)\big)$, avec r_0 dans $\{0,\dots,p-3\}$, et du type galoisien donné par $\eta = \omega_2^{1+r_0-p}$ et $\eta' = \omega_2^{-1}$; d est alors $(0, p-2-r_0)$, avec $p-2-r_0$ dans $\{1,\dots,p-2\}$.

Pour ces données, les E'-engeances sont en bijection naturelle avec $\mathbb{P}^1(k_{E'})$ pour toute extension E' de E. En suivant à nouveau la stratégie expliquée dans la partie 3.2.3, nous considérons une extension E' de E et nous associons à chaque E'-engeance ξ', la $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre explicite $R_{\xi'}$ ainsi qu'un module de Breuil–Kisin $\mathfrak{M}_{\xi'}$ sur $R_{\xi'}\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{S}$ définis dans le §3.2.3. Pour tout ξ', posons

$$M_{\xi'} = H^0\big(\mathrm{Gal}(L/F), \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_{\xi'}^{(0)}\big).$$

D'après les résultats de la partie 2.1.3, l'espace $M_{\xi'}$ muni du Frobenius $\phi = \varphi^2$ s'identifie canoniquement au ϕ-module associé à la restriction à G_∞ de la représentation de G_F correspondant à $\mathfrak{M}_{\xi'}$. De plus, la proposition 3.2.1 et la formule (24) fournissent un moyen explicite pour calculer la matrice de ϕ agissant sur $M_{\xi'}$.

Dans le cas qui nous intéresse, nous trouvons, après calcul, les résultats regroupés dans le tableau de la figure 2 (page 48). Au niveau des anneaux de déformations, nous obtenons un morphisme de $\mathcal{O}_{E'}$-algèbres $f_{E'}$ de $\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\psi}(\overline{\rho})$ dans l'anneau explicite

$$R_{\mathrm{expl},E'} = \prod_{\xi'}{}_{k_{E'}} R_{\xi'}$$

où la notation ci-dessus désigne le « produit local ». D'après le lemme 3.2.9, ce morphisme se factorise en un morphisme $\tilde{f}_{E'} : \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_{\mathrm{expl},E'}$. De plus, si E'' désigne une extension finie de E', nous avons un morphisme $\psi_{E'',E'} : R_{\mathrm{expl},E''} \to \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} R_{\mathrm{expl},E'}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & R_{\mathrm{expl},E''} \arrow[d, "\psi_{E'',E'}"] \\
\mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \arrow[ur, "\tilde{f}_{E''}"] \arrow[r, "\tilde{f}_{E'}"'] & \mathcal{O}_{E''} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} R_{\mathrm{expl},E'}.
\end{tikzcd}$$

Notons $V_{E'}$ la $R_{\mathrm{expl},E'}$-représentation de G_F correspondant à $f_{E'}$. L'action de ϕ sur le ϕ-module $M_{E'}$ associé à $(V_{E'})_{|G_\infty}$ s'obtient en mettant ensemble les matrices qui apparaissent dans le tableau ci-dessus.

Suivant la stratégie de détermination de l'espace de déformations expliquée dans le §3.2, nous devons maintenant exhiber une $\mathcal{O}_E$-algèbre explicite R_{expl} telle que, pour tout E' comme précédemment, le morphisme $\tilde{f}_{E'}$ se factorise par $\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_{\mathrm{expl}}$. Pour construire R_{expl}, nous cherchons pour chaque engeance $\xi' \in \mathbb{P}^1(k_{E'})$ une nouvelle base de $M_{\xi'}$, de façon à ce que les matrices des ϕ-modules exprimées dans ces nouvelles bases « se ressemblent » davantage. Une première tentative conduit à considérer les changements de base que voici :

ξ'	Changement de base P	Matrice $P^{-1}B_{\xi'}\phi(P)$ de ϕ dans la nouvelle base
$\xi' \in k_{E'}^\times$	$\begin{pmatrix} -a_0' & 0 \\ v^{-1} & \alpha' v^{-1} \end{pmatrix}$	$v \cdot \begin{pmatrix} 0 & \delta v^{d_1}(v+p) \\ v^p+p & p\alpha' + p\alpha v^{d_1} + (\alpha' a_0' a_1 + \alpha) v^{d_1+1} + \alpha' v^p \end{pmatrix}$
$\xi' = 0$	$\begin{pmatrix} -a_0' & \alpha \\ v^{-1} & \alpha' a_1' v^{-1} \end{pmatrix}$	$v \cdot \begin{pmatrix} 0 & \delta v^{d_1}(v+p) \\ v^p+p & p\alpha' a_1' + \alpha a_1 v^{d_1} + \alpha' a_0' v^{d_1+1} + \alpha' a_1' v^p \end{pmatrix}$
$\xi' = \infty$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_0 v^{-1} & \alpha' v^{-1} \end{pmatrix}$	$v \cdot \begin{pmatrix} 0 & \delta v^{d_1}(v+p) \\ v^p+p & \alpha' a_0' + p\alpha a_0 v^{d_1} + (\alpha a_0 + \alpha' a_1) v^{d_1+1} \end{pmatrix}$

Nous observons que les matrices sont analogues à la différence près qu'aucun terme en v^p n'apparaît sur le coefficient en bas à droite dans le cas $\xi' = \infty$. Le but du lemme suivant est d'unifier définitivement ces écritures.

Lemme 4.2.4. — *Soit R une $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre locale noetherienne complète de corps résiduel $k_{E'}$ et soient δ, a, b, c et d des éléments de R. Nous supposons que p divise a, que δ est inversible dans R et que $ab = -\delta p^2$. Alors il existe un élément $c' \in R$ tel que les matrices*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \delta v^{d_1}(v+p) \\ v^p+p & a + bv^{d_1} + cv^{d_1+1} + dv^p \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & \delta v^{d_1}(v+p) \\ v^p+p & a + bv^{d_1} + c'v^{d_1+1} \end{pmatrix}$$

définissent des ϕ-modules isomorphes sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

De plus, nous pouvons choisir c' congru à c modulo p et dépendant de façon analytique de δ, a, b, c, d.

Remarque 4.2.5. — La dépendance analytique énoncée dans le lemme 4.2.4 signifie qu'il existe une série $\mathcal{F}(\Delta, A, B, C, D)$ à coefficients dans R telle que $c' = \mathcal{F}(\delta, a, b, c, d)$.

Démonstration. — Tout au long de la démonstration, nous posons :

$$A = a + bv^{d_1} + cv^{d_1+1} + dv^p,\ B = a + bv^{d_1} + c'v^{d_1+1},\ S = v^p + p \ \text{ et } \ T = \delta v^{d_1}(v+p).$$

Les matrices M et M' définissent des ϕ-modules sur $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ isomorphes entre eux si et seulement s'il existe une matrice

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$$

telle que $M'\phi(P) = PM$. Si tel est le cas, les éléments x, y, z, t de $R\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ satisfont le système suivant

$$\begin{cases} Sy = T\phi(z) \\ Tx + Ay = T\phi(t) \\ St = S\phi(x) + B\phi(z) \\ Tz + At = S\phi(y) + B\phi(t) \end{cases} \tag{29}$$

Nous allons donc exhiber un élément c' dans R, analytique en δ, a, b, c, d tel que les matrices M et M' soient équivalentes, *i.e.* que le système (29) ait une solution. Nous cherchons z sous la forme $z = (v + p^p)(\xi + z')$ avec ξ dans R et z' dans $vR[[v]]$. Le système (29) se réécrit

$$\begin{cases} Sy = T(v^{p^2} + p^p)(\xi + \phi(z')) \\ Tx + Ay = T\phi(t) \\ St = S\phi(x) + B(v^{p^2} + p^p)(\xi + \phi(z')) \\ T(v + p^p)(\xi + z') = S\phi(y) + B\phi(t) - At \end{cases} \tag{30}$$

En posant $U = \frac{v^{p^2}+p^p}{v^p+p} = v^{p(p-1)} - pv^{p(p-2)} + \cdots + (-p)^{p-1}$, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} y &= TU(\xi + \phi(z')) \\ \phi(t) - x &= AU(\xi + \phi(z')) \\ t - \phi(x) &= BU(\xi + \phi(z')) \end{aligned}$$

En éliminant x, nous trouvons :

$$(\mathrm{Id} - \phi^2)(t) = BU(\xi + \phi(z')) - \phi(AU)(\xi + \phi^2(z')).$$

Nous en déduisons une expression en t en fonction de z' :

$$t = \tau + \xi \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i}(BU - \phi(AU)) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i}(BU\phi(z') - \phi(AU)\phi^2(z')).$$

pour un certain élément τ de R. Nous allons démontrer que, pour $\tau = 1$, le système (30) a une solution. En remplaçant y et t par leurs valeurs dans la dernière équation de (30), ceci revient à montrer qu'il existe c', ξ et z' solutions de

$$T(v + p^p)(\xi + z') = g(c', \xi, z') \tag{31}$$

avec :

$$\begin{aligned} g(c', \xi, z') = {} & S\phi(TU)(\xi + \phi^2(z')) \\ & + B + B\xi \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i+1}(BU - \phi(AU)) + B \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i+1}(BU\phi(z') - \phi(AU)\phi^2(z')) \\ & - A - A\xi \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i}(BU - \phi(AU)) - A \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i}(BU\phi(z') - \phi(AU)\phi^2(z')). \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, nous procédons par approximations successives. Nous allons construire par récurrence des suites convergentes $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$, $(c'_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans R et $(z'_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $vR[[v]]$ qui convergent vers une solution de (31). Posons pour initialiser la construction $\xi_0 = 0$, $z'_0 = 0$, $c'_0 = c$. Supposons à présent que ξ_n, c'_n et z'_n sont construits pour un certain entier n. Nous allons déterminer ξ_{n+1} et c'_{n+1} de façon à ce que $g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n)$ soit divisible par $T(v + p^p)$.

Nous remarquons que tous les termes de $g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n)$ sont divisibles par v^{d_1}. Comme $T = \delta v^{d_1}(v+p)$, la divisibilité par $T(v+p^p)$ est équivalente à ce que $g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n)$ s'annule en $v = -p$ et en $v = -p^p$. En isolant les termes

$$(c'_{n+1} - c)v^{d_1+1} \quad ; \quad dv^p \quad \text{et} \quad \xi_{n+1}\delta p^{p+1}v^{d_1}$$

dans l'expression de $g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n)$, nous voyons (après calcul) que ces conditions d'annulation se réécrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} c'_{n+1} - c - d(-p)^{p-d_1-1} - \delta p \xi_{n+1} &= p^{p-1} \cdot S_2(c'_{n+1} - c - d(-p)^{p-d_1-1}, \xi_{n+1}), \\ c'_{n+1} - c - d(-p)^{p-d_1-1} &= p^p \cdot S_1(c'_{n+1} - c - d(-p)^{p-d_1-1}, \xi_{n+1}), \end{aligned}$$

où S_1 et S_2 sont des séries formelles en deux variables à coefficients dans R. Nous en déduisons que $(c'_{n+1} - c - d(-p)^{p-d_1-1}, \xi_{n+1})$ est un point fixe de l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_{n+1}: & R^2 & \longrightarrow & R^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \big(p^p S_1(x,y),\, p^{p-1}\delta^{-1}S_1(x,y) - p^{p-2}\delta^{-1}S_2(x,y)\big). \end{array}$$

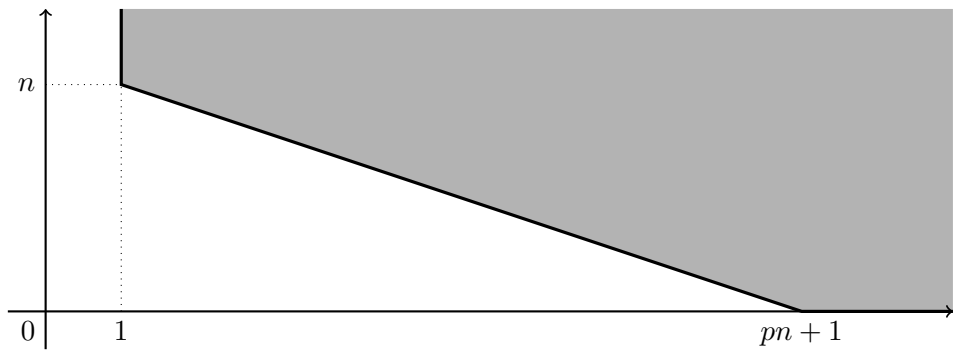
Or cette application est manifestement contractante. L'existence des éléments c_{n+1} et ξ_{n+1} s'ensuit. À partir de là, nous définissons z'_{n+1} par

$$z'_{n+1} = -\xi_{n+1} + \frac{g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n)}{\delta v^{d_1}(v+p)(v+p^p)}$$

et vérifions que z'_{n+1} est multiple de v en regardant le coefficient en v^{d_1} dans $g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n)$.

Il s'agit à présent de montrer que les suites ainsi définies (ξ_n), (z'_n) et (c'_n) convergent. Pour cela, montrons par récurrence sur n que

- p^n divise $c'_n - c'_{n-1}$ et $\xi_n - \xi_{n-1}$,
- le polygone de Newton $\mathrm{NP}(z'_n - z'_{n-1})$ est situé dans la zone grisée $\mathcal{P}_n$ définie dans le graphe ci-dessous.



Par un abus de notation limité à la fin de cette démonstration, notons $\phi : (x,y) \mapsto (p^2x, y)$. Supposons que les hypothèses de récurrence sont satisfaites pour un entier $n \geqslant 1$. Alors

$$\mathrm{NP}(\phi(z'_n) - \phi(z'_{n-1})) \subset \phi(\mathcal{P}_n)$$

d'où nous déduisons

$$\mathrm{NP}(U\phi(z'_n) - U\phi(z'_{n-1})) \subset \phi(\mathcal{P}_n) + (0, p-1)$$

car $\mathrm{NP}(U)$ a une seule pente qui vaut $-1/p$ comme celle de $\phi(\mathcal{P}_n)$. Un calcul montre que $f_n \equiv f_{n-1} \pmod{p^{n+p^2+p-1}}$. Ainsi, si t_n et t_{n-1} sont respectivement les points fixes de f_n et f_{n-1}, nous avons

$$f_n(t_{n-1}) \equiv f_{n-1}(t_{n-1}) \equiv t_{n-1} \pmod{p^{n+p^2+p-1}}$$

Donc $f_n^k(t_{n-1}) \equiv t_{n-1} \pmod{p^{n+p^2+p-1}}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Comme f_n est contractante, en passant à la limite sur k, nous trouvons $t_n \equiv t_{n-1} \pmod{p^{n+p^2+p-1}}$ et, par suite :

$$c'_n \equiv c'_{n-1} \pmod{p^{n+1}} \quad \text{et} \quad \xi_n \equiv \xi_{n+1} \pmod{p^{n+1}}. \tag{32}$$

Enfin :

$$z'_{n+1} - z'_n = \xi_n - \xi_{n+1} + \frac{g(c'_{n+1}, \xi_{n+1}, z'_n) - g(c'_n, \xi_n, z'_{n-1})}{\delta v^{d_1}(v+p)(v+p^p)}$$

Les calculs précédents garantissent que le polygone de Newton du numérateur de la fraction ci-dessus est situé au dessus de la droite reliant les points $(0, n+p^2-1)$ et $(p^2(n+p^2-p-1), 0)$. Or, la division par $\delta v^{d_1}(v+p)(v+p^p)$ translate le polygone de Newton d'au maximum $(-d_1-2, 0)$. Nous concluons alors la récurrence en remarquant que $z'_{n+1} - z'_n$ n'a pas de terme constant.

De (32), nous déduisons que $c' \equiv c \pmod{p}$. Et, enfin, en reprenant point par point les étapes de la démonstration, nous constatons que le c' que nous avons construit dépend effectivement de façon analytique de a, b, c, d et δ (sachant que le point fixe d'une application contractante s'obtient comme la limite des itérés successifs d'un point initial quelconque). □

Posons à présent $R_{\mathrm{expl}} = \mathcal{O}_E[[X,Y,Z]]/(XY+\delta p^2)$ et considérons le ϕ-module libre de rang 2 sur $R_{\mathrm{expl}} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sur lequel l'action de ϕ dans une base est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta v^{d_1+1}(v+p) \\ v(v^p+p) & Xv + Yv^{d_1+1} + Zv^{d_1+2} \end{pmatrix}.$$

Pour tout ξ' dans E', considérons le morphisme

$$h_{\xi'} : \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_{\mathrm{expl}} \simeq \mathcal{O}_{E'}[[X,Y,Z]]/(XY+\delta p^2) \longrightarrow R_{\xi'}$$

défini par :

- si $\xi' \in k_{E'}^{\times}$: $\begin{cases} X \mapsto p\alpha' \\ Y \mapsto p\alpha \\ Z \mapsto \mathcal{F}(\delta,\, p\alpha',\, p\alpha,\, \alpha' a'_0 a_1 + \alpha,\, \alpha') \end{cases}$
- si $\xi' = 0$: $\begin{cases} X \mapsto p\alpha' a'_1 \\ Y \mapsto \alpha a_1 \\ Z \mapsto \mathcal{F}(\delta,\, p\alpha' a'_1,\, \alpha a_1,\, \alpha' a'_0,\, \alpha' a'_1) \end{cases}$
- si $\xi' = \infty$: $\begin{cases} X \mapsto \alpha' a'_0 \\ Y \mapsto p\alpha a_0 \\ Z \mapsto \alpha a_0 + \alpha' a_1 \end{cases}$

où $\alpha, \alpha', a_0, a'_0, a_1, a'_1$ s'expriment en fonction des variables de $R_{\xi'}$ comme indiqué dans le tableau du début de la partie 4.2.2 et où $\mathcal{F}(\Delta, A, B, C, D)$ est la série dont il est question dans la remarque 4.2.5. Le produit des flèches $h_{\xi'}$ définit un morphisme $h_{E'}$: $\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R_{\mathrm{expl}} \to R_{\mathrm{expl},E'}$. En outre, les applications $h_{\xi'}$ sont définies de façon à ce que $R_{\mathrm{expl},E'} \hat{\otimes}_{R_{\mathrm{expl}}} M_{\mathrm{expl}}$ soit isomorphe à $M_{E'}$. D'autre part, nous remarquons que

$h_{E'}$ est injective pour tout E'. La proposition 2.2.11 entraîne alors l'existence d'une factorisation de $\tilde{f}_{E'}$:

$$\tilde{f}_{E'} : \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \xrightarrow{\tilde{g}_{E'}} \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R^{\mathrm{expl}} \xrightarrow{\tilde{h}_{E'}} R_{E'}.$$

De plus, ces factorisations commutent aux changements de base, dans le sens où l'application $\tilde{g}_{E'}$ s'identifie à $\mathrm{Id} \otimes \tilde{g}_E$ pour toute extension finie E' de E. Le lemme 3.2.12 s'applique ainsi et assure que le morphisme $\tilde{g}_E : R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \to R_{\mathrm{expl}}$ est injectif. À ce stade, il reste à déterminer son image par la méthode du §3.2.3.3. Pour cela, nous remarquons que la matrice de ϕ agissant sur $k_E \otimes_{R_{\mathrm{expl}}} M_{\mathrm{expl}}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{\delta} v^{d_1+2} \\ v^{p+1} & Xv + Yv^{d_1+1} + Zv^{d_1+2} \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base où le second vecteur a été multiplié par v^{p+1}, elle prend la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta^{-1} v^{p^3+p^2+d_1+2} \\ 1 & Xv^{p^3+p^2-p} + Yv^{p^3+p^2-p+d_1} + Zv^{p^3+p^2-p+d_1+1} \end{pmatrix}$$

qui a été considérée dans la partie 3.2.2. Notons $X^{\star} : R_{\mathrm{expl}} \to k_E[\varepsilon]$ (avec, rappelons-le, $\varepsilon^2 = 0$) le morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres qui envoie la variable X sur ε et les autres variables Y et Z sur 0. Définissons également $Y^{\star}$ et $Z^{\star}$ de manière analogue. Un calcul élémentaire montre que les images de $X^{\star}$, $Y^{\star}$ et $Z^{\star}$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ sont respectivement

$$(\theta v^{-p-d_1-2}, 0), \quad (\theta v^{-p-2}, 0), \quad (\theta v^{-p-1}, 0)$$

où, ici, nous avons identifié $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ avec sa description explicite donnée par la proposition 3.2.4. Il résulte du lemme 3.2.5 que ces images sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{Ext}^1_{G_\infty}(\overline{\rho}, \overline{\rho})$ et, par suite, que l'application tangente à $\tilde{g}_E$ est injective. Nous en déduisons que $\tilde{g}_E$ est surjectif ; c'est donc un isomorphisme.

Au final, nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 4.2.6. — *Soit* $\overline{\rho} = \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4^{1+r_0} \cdot \mathrm{nr}'(\theta))$ *pour un entier* r_0 *dans* $\{0, \ldots, p-3\}$. *Alors l'anneau de déformations* $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ *s'identifie à* $\frac{\mathcal{O}_E[[X,Y,Z]]}{(XY+p^2)}$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, l'application $\tilde{g}_E$ réalise un isomorphisme entre $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ et $\frac{\mathcal{O}_E[[X,Y,Z]]}{(XY+\delta p^2)}$. Or cette dernière $\mathcal{O}_E$-algèbre est isomorphe à $\frac{\mathcal{O}_E[[X,Y,Z]]}{(XY+p^2)}$, l'isomorphisme étant obtenu par exemple en envoyant X sur $\delta^{-1}X$, Y sur Y et Z sur Z. □

4.3. Calcul des multiplicités intrinsèques. —

Dans cette dernière partie, nous appliquons les résultats précédents aux calculs des multiplicités intrinsèques $(m_{\overline{\rho}}(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{D}(\overline{\rho})}$ des poids de Serre de $\overline{\rho}$. Le théorème A de [**GK**] fournit la conjecture 1.1.2 pour $\mathbf{v}_0$ et tout type galoisien t. Il assure également que $m_{\overline{\rho}}(\sigma)$ est non nulle si et seulement si σ est un poids de $\overline{\rho}$. Le théorème s'écrit donc ici

$$\mu_{\mathrm{Gal}}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}(\overline{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t})} m_{\mathbf{v}_0, \mathrm{t}}(\sigma) m_{\overline{\rho}}(\sigma).$$

Représentation $\overline{\rho} = \mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\chi \cdot \mathrm{nr}'(\theta))$		Type $\mathrm{t} = \eta \oplus \eta'$	Poids de Serre dans $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})$
$\chi = \omega_4^{1+r_0}$	$0 \leqslant r_0 \leqslant p-2$	$\omega_2^{r_0} \oplus \omega_2^{-p}$	$(p-2-r_0, 0) \otimes \det^{1+r_0-p}$ $(p-1-r_0, p-2) \otimes \det^{r_0}$
	$1 \leqslant r_0 \leqslant p-2$	$\omega_2^{r_0-p} \oplus \mathbb{1}$	$(p-1-r_0, p-2) \otimes \det^{r_0}$ $(r_0-1, p-1) \otimes \mathbb{1}$
	$0 \leqslant r_0 \leqslant p-3$	$\omega_2^{1+r_0-p} \oplus \omega_2^{-1}$	$(r_0+1, p-1) \otimes \det^{-1}$ $(p-2-r_0, 0) \otimes \det^{1+r_0-p}$
$\chi = \omega_4^{p(2+r_1)}$	$-1 \leqslant r_1 \leqslant p-3$	$\omega_2^{p(1+r_1)} \oplus \omega_2^{-1}$	$(0, p-3-r_1) \otimes \det^{-1+p(2+r_1)}$ $(p-2, p-2-r_1) \otimes \det^{p(1+r_1)}$
	$0 \leqslant r_1 \leqslant p-3$	$\omega_2^{-1+p(1+r_1)} \oplus \mathbb{1}$	$(p-2, p-2-r_1) \otimes \det^{p(1+r_1)}$ $(p-1, r_1) \otimes \mathbb{1}$
	$-1 \leqslant r_1 \leqslant p-4$	$\omega_2^{-1+p(r_1+2)} \oplus \omega_2^{-p}$	$(p-1, r_1+2) \otimes \det^{-p}$ $(0, p-3-r_1) \otimes \det^{-1+p(2+r_1)}$

FIGURE 3. Poids de Serre communs à la représentation $\overline{\rho}$ et au type t

Pour les types t considérés ici, nous avons $\mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}) = \mathcal{D}(\mathrm{t})$, la multiplicité $m_{\mathbf{v}_0,\mathrm{t}}(\sigma)$ vaut 1 pour tout σ dans $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ est décrit par une formule combinatoire rappelée dans la partie 1.2.2 (voir [**BP**] et [**Dav**]). Nous obtenons donc l'équation

$$\mu_{\mathrm{Gal}}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}(\overline{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{t})} m_{\overline{\rho}}(\sigma),$$

avec $m_{\overline{\rho}}(\sigma)$ dans $\mathbb{N}^*$ pour tout σ dans $\mathcal{D}(\overline{\rho})$. Le tableau de la figure 3 (page 54) rassemble, pour les représentations $\overline{\rho}$ non génériques, les types t ayant des poids de Serre en commun avec $\overline{\rho}$ et l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathrm{t})$ de ces poids communs. Le code couleur utilisé dans ce tableau est le même que celui que nous avions introduit pour le tableau de la figure 1 : le bleu correspond aux couples $(\overline{\rho}, \mathrm{t})$ pour lesquels la variété de Kisin est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k_E}$. Nous nous apercevons que les lignes bleues sont exactement celles qui contiennent un poids modifié de $\overline{\rho}$. Les résultats de la partie 4.2 se résument donc comme suit.

Théorème 4.3.1. — *Soit $\overline{\rho}$ une représentation irréductible et* t *un type galoisien comme dans la partie 3.*

(i) Supposons $\overline{\rho}$ non totalement non générique. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) &\simeq \{0\} && \textit{si } \mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) = \emptyset\,; \\ &\simeq \frac{\mathcal{O}_E[[X,Y,T]]}{(XY+p^2)} && \textit{si } \mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho}) \textit{ contient un poids modifié de } \overline{\rho}\,; \\ &\simeq \frac{\mathcal{O}_E[[X,Y,T]]}{(XY+p)} && \textit{sinon.} \end{aligned}$$

(ii) Supposons $\overline{\rho}$ totalement non générique, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4 \cdot \mathrm{nr}'(\theta))$ ou $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4^p \cdot \mathrm{nr}'(\theta))$. Soit t *un type galoisien tel que $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ contient le poids modifié*

de $\overline{\rho}$ *; alors nous avons*

$$R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho}) \simeq \frac{\mathcal{O}_E[[X, Y, T]]}{(XY + p^2)}.$$

Remarque 4.3.2. — Le seul cas du tableau de la figure 3 (page 54) qui n'est pas traité par le théorème précédent est celui où la représentation $\overline{\rho}$ est totalement non générique et où les poids communs à t et $\overline{\rho}$ sont exactement les deux poids non modifiés de $\overline{\rho}$ (rappelons que $\overline{\rho}$ a alors trois poids, dont un seul modifié, voir le début de la partie 4). D'après la remarque 4.2.3, l'anneau $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ s'identifie alors à un sous-anneau strict de $\dfrac{\mathcal{O}_E[[X, Y, T]]}{(XY + p)}$.

Nous observons que, dans tous les cas du théorème 4.3.1 pour lesquels l'anneau $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ n'est pas nul, la multiplicité galoisienne $\mu_{\mathrm{Gal}}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est 2 et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathrm{t}) \cap \mathcal{D}(\overline{\rho})$ est composé d'exactement deux poids. Ainsi pour tout poids de Serre σ de $\overline{\rho}$, nous avons : si σ est contenu dans un $\mathcal{D}(\mathrm{t})$ pour un t tel que $R^{\psi}(\mathbf{v}_0, \mathrm{t}, \overline{\rho})$ est prédit par le théorème 4.3.1 et est non nul, alors σ a multiplicité intrinsèque 1 dans $\overline{\rho}$.

Or, tout poids de Serre de $\overline{\rho}$ est dans un tel $\mathcal{D}(\mathrm{t})$, sauf :

- si $\overline{\rho}$ est de la forme $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4^{p-1} \cdot \mathrm{nr}'(\theta)) \otimes \omega_2^s$ ou $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4^{p(p-1)} \cdot \mathrm{nr}'(\theta)) \otimes \omega_2^s$, le poids de Serre (modifié) totalement irrégulier $(p-1, p-1) \otimes \det^{s'}$ (avec $s' = s - 1$ ou $s' = s - p$) ;
- si $\overline{\rho}$ est totalement non générique, l'unique poids de $\overline{\rho}$ qui est non modifié et qui n'est pas le symétrique du poids modifié, c'est-à-dire le poids $(p-1, p-2) \otimes \det^s$ (resp. $(p-2, p-1) \otimes \det^s$) pour la représentation $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4 \cdot \mathrm{nr}'(\theta)) \otimes \omega_2^s$ (resp. $\mathrm{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_4^p \cdot \mathrm{nr}'(\theta)) \otimes \omega_2^s$).

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.3. — *Soit* $\overline{\rho}$ *une représentation continue irréductible de* $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ *dans* $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$

(i) Supposons que $\overline{\rho}$ *n'est pas totalement non générique et n'a pas de poids totalement irrégulier. Alors les quatre poids de* $\overline{\rho}$ *ont pour multiplicité intrinsèque* 1.

(ii) Supposons que $\overline{\rho}$ *possède un poids totalement irrégulier. Alors* $\overline{\rho}$ *n'est pas totalement non générique et les trois poids de* $\overline{\rho}$ *qui ne sont pas totalement irréguliers ont pour multiplicité intrinsèque* 1.

(iii) Supposons que $\overline{\rho}$ *est totalement non générique. Alors le poids modifié de* $\overline{\rho}$ *et son symétrique ont pour multiplicité intrinsèque* 1.

Références

[BL] Barthel L., Livné R., *Irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$ *of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261–292.

[Ber] Berger L., *La correspondance de Langlands locale p-adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Séminaire Bourbaki 1017, 2010, Astérisque 339, 157–180.

[Br1] Breuil C., *Une application du corps des normes*, Compositio Math. 117, 1999, 189–203

[Br2] Breuil C, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. 138, 2003, 165–188.

[Br3] Breuil C., *Sur un problème de compatibilité local-global modulo p pour* GL_2, A paraître dans J. Reine Angew. Math. 2013.

[Br4] Breuil C., *Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications*, Séminaire Bourbaki 1031, 2011, Astérisque.

[BCDT] Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R., *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$ *: wild* 3*-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc. 14, 2001, 843–939.

[BM1] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ *en* $\ell = p$, Duke Math. J. 115, 2002, 205–298.

[BM2] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires raffinées*, A paraître dans Bull. SMF 2013.

[BP] Breuil C., Paškūnas V., *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Memoirs of A.M.S 216, 2012.

[BDJ] Buzzard K., Diamond F., Jarvis F., *On Serre's conjecture for mod* ℓ *Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. 155, 2010, 105–161.

[CD] Chang S., Diamond F., *Extensions of* (φ, Γ)*-modules and crystalline representations*, Compositio Math. 147, 2011, 375–427.

[CHT] Clozel L., Harris M., Taylor R., *Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l representations.*, Pub. Math. IHES 108, 2008, 1–181.

[Col] Colmez P., *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ, Γ)*-modules*, Astérisque 330, 2010, 281–509.

[Dav] David A., *Calculs de multiplicités dans la conjecture de Breuil-Mézard*, Prépublication, 2013.

[Eme] Emerton M., *Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, prépublication, 2010.

[EG] Emerton M., Gee T., *A geometric perspective on the Breuil-Mézard conjecture*, J. Math. Jussieu, 2013.

[Fo1] Fontaine J.-M., *Représentations* ℓ*-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 321–347.

[Fo2] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques des corps locaux. I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 249–309.

[FL] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S. 15, 1982, 547–608.

[GK] Gee T., Kisin M., *The Breuil-Mézard conjecture for potentially Barsotti-Tate representations*, prépublication, 2011.

[Hen] Henniart G., *Sur l'unicité des types pour* GL_2 (appendice à [**BM1**]), Duke Math. J. 115, 2002, 298–305.

[Kim] Kim W., *Galois deformation theory for norm fields and flat deformation rings*, J. Number Theory 131, 2011, 1258–1275.

[Ki1] Kisin M., *Crystalline representations and F-crystals*, Progr. Math. 253, 2006, 459–496.

[Ki2] Kisin M., *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, Ann. of Math. 170, 2009, 1085–1180.

[Ki3] Kisin M., *The Fontaine-Mazur conjecture for* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 22, 2009, 641–690.

[Ki4] Kisin M., *Deformations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *and* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *representations*, Astérisque 330, 2010, 513–529.

[Ki5] Kisin M., *The structure of potentially semi-stable deformation rings*, Actes du Congrès International des Mathématiciens vol. II, 2010, 294–311.

[LB] Le Borgne J., *Représentations galoisiennes et φ-modules : aspects algorithmiques*, Thèse de doctorat, Université Rennes 1, 2012.

[Liu] liu T., *On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil*, Compositio Math. 144, 2008,61–88.

[Mat] Matsumura H., *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Maths 8, Cambridge University Press, 1986.

[Maz] Mazur B., *Deforming Galois representations*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 16, 1989, 385–437.

[PR] Pappas G., Rapoport M., *Φ-modules and coefficient spaces*, Mosc. Math. J. 9, 2009, 625–663.

[Pa1] Paškūnas V., *Extensions for supersingular representations*, Astérisque 331, 2010, 317–353.

[Pa2] Paškūnas V., *The image of Colmez's Montréal functor*, Publ. Math. IHES, 2013.

[Sav] Savitt D., *On a conjecture of Conrad, Diamond and Taylor*, Duke Math. J. 128, 2005, 141–197.

[San] Sander F., *Hilbert-Samuel multiplicies of certain deformation rings*, prépublication 201.2

[TW] Taylor R., Wiles A., *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 553–572.

[Wil] Wiles A. *Modular elliptic curves and Fermat ?s last theorem*, Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

[Win] Wintenberger J.-P., *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 16, 1983, 59–89.

X. Caruso, IRMAR Université de Rennes I Campus de Beaulieu 35042 Rennes Cedex, France
E-mail : `xavier.caruso@normalesup.org`

A. David, Unité de recherche mathématique, Université du Luxembourg, 6 rue Coudenhove-Kalergi, L-1359 Luxembourg, Grand-Duché de Luxembourg • *E-mail :* `Agnes.David@ens-lyon.org`

A. Mézard, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586 Université Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, France • *E-mail :* `ariane.mezard@upmc.fr`