



**HAL**  
open science

# Points de concentration des solutions d'équations elliptiques avec non-linéarité critique

Olivier Rey

► **To cite this version:**

Olivier Rey. Points de concentration des solutions d'équations elliptiques avec non-linéarité critique. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1990, 311, pp.169-172. hal-00943432

**HAL Id: hal-00943432**

**<https://hal.science/hal-00943432v1>**

Submitted on 12 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

1990 — Tome 311

Série I : MATHÉMATIQUE

**gauthier-villars**

## Points de concentration des solutions d'équations elliptiques avec nonlinéarité critique

Olivier REY

**Résumé** – On considère le problème :  $-\Delta u = u^{p-\varepsilon}$ ,  $u > 0$  sur  $\Omega$ ;  $u_\varepsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \geq 4$ ,  $p = (N+2)/(N-2)$ , et on montre que si  $u_\varepsilon$  est une solution qui se concentre en deux points  $x_1$  et  $x_2$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x_1$  et  $x_2$  vérifient

$$\varphi(x_1, x_2) := H(x_1, x_1)^{1/2} H(x_2, x_2)^{1/2} - G(x_1, x_2) \geq 0, \quad \varphi'(x_1, x_2) = 0,$$

où  $G$  est la fonction de Green du Laplacien sur  $\Omega$  et  $H$  sa partie régulière. On démontre une réciproque dans le cas d'un point critique non dégénéré de  $\varphi$ .

### Concentration points of solutions of elliptic equations with limiting nonlinearity

**Abstract** – Considering the problem:  $-\Delta u = u^{p-\varepsilon}$ ,  $u > 0$  in  $\Omega$ ;  $u_\varepsilon = 0$  on  $\partial\Omega$ , where  $\Omega$  is a smooth bounded domain in  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \geq 4$ ,  $p = (N+2)/(N-2)$ , we show that if  $u_\varepsilon$  is a solution which concentrates at two points  $x_1$  and  $x_2$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x_1$  and  $x_2$  satisfy

$$\varphi(x_1, x_2) := H(x_1, x_1)^{1/2} H(x_2, x_2)^{1/2} - G(x_1, x_2) \geq 0, \quad \varphi'(x_1, x_2) = 0,$$

where  $G$  is the Green's function of the Laplacian on  $\Omega$  and  $H$  its regular part. We prove a converse in the case of non degenerate critical point of  $\varphi$ .

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS. – Lorsqu'on étudie d'un point de vue variationnel le problème

$$(P) \quad -\Delta u = u^p, \quad u > 0 \text{ sur } \Omega; \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \geq 3$  et  $p = (N+2)/(N-2)$ , il apparaît que la fonctionnelle associée  $J(u) = 1/2 \int_\Omega |\nabla u|^2 - (1/(p+1)) \int_\Omega |u|^{p+1}$  ne vérifie pas la condition de Palais-Smale, celle-ci étant violée pour tous les niveaux  $k S_N^{N/2}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  [2], où  $S_N$  est la constante d'injection de Sobolev, indépendante de  $\Omega$  [3] :

$$S_N = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 \right) \left( \int_\Omega |u|^{p+1} \right)^{-2/(p+1)}.$$

Chacun de ces défauts de compacité correspond respectivement à une concentration en  $k$  points (éventuellement confondus) de  $\bar{\Omega}$  de suites  $(u_n)$  de  $H_0^1(\Omega)$  :

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup S_N^{N/2} \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \text{ au sens des mesures, où } \delta_{x_i} \text{ est la masse de Dirac au point } x_i.$$

On sait qu'on peut alors écrire ([1], [2], [8]) :

$$(1) \quad u_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i^n P \delta_{\lambda_i^n, x_i^n} + v^n \text{ avec } \alpha_i^n \in \mathbf{R}, \quad \alpha_i^n \rightarrow c_N = (N(N-2))^{(N-2)/4};$$

$$x_i^n \in \Omega, \quad x_i^n \rightarrow x_i; \quad \lambda_i \in \mathbf{R}_+^*, \quad \lambda_i \rightarrow +\infty; \quad v^n \rightarrow 0$$

dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $P \delta_{\lambda, x}$  désignant la projection sur  $H_0^1(\Omega)$  de la fonction

$$(2) \quad \delta_{\lambda, x} : y \in \mathbf{R}^N \mapsto \lambda^{(N-2)/2} (1 + \lambda^2 |y-x|^2)^{-(N-2)/2}$$

c'est-à-dire l'unique élément de  $H_0^1(\Omega)$  tel que  $\Delta P \delta_{\lambda, x} = \Delta \delta_{\lambda, x}$  sur  $\Omega$ .

Note présentée par Haïm BREZIS.

De plus, on a

$$\lambda_i^n d(x_i^n, \partial\Omega) \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_i^n}{\lambda_j^n} + \frac{\lambda_j^n}{\lambda_i^n} + \lambda_i^n \lambda_j^n |x_i^n - x_j^n|^2 \rightarrow +\infty, \quad \forall i \neq j,$$

et l'on peut supposer que  $v^n \in E_{(\lambda_i^n)(x_i^n)}$ , avec

$$(3) \quad E_{(\lambda_i)(x_i)} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \mid \langle v, P\delta_i \rangle_{H_0^1} = \left\langle v, \frac{\partial P\delta_i}{\partial \lambda_i} \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle v, \frac{\partial P\delta_i}{\partial x_i} \right\rangle_{H_0^1} = 0, 1 \leq i \leq k \right\}$$

où l'on note  $P\delta_i = P\delta_{\lambda_i, x_i}$ . On s'intéresse dans cette Note aux problèmes sous-critiques

$$(P_\varepsilon) \quad -\Delta u = u^{p-\varepsilon}, \quad u > 0 \quad \text{sur } \Omega; \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

qui admettent effectivement des solutions se concentrant quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  en certains points du domaine  $\Omega$ . Dans le cas où la concentration a lieu en un seul point  $x_0$ , il a été établi ([4], [5], [7]) que ce point était critique pour la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = H(x, x)$ ,  $H$  étant la partie régulière de la fonction de Green  $G$  du laplacien sur  $\Omega$ , *i. e.*

$$(4) \quad H(x, y) = |x - y|^{2-N} - G(x, y) \quad \text{sur } \Omega \times \Omega,$$

l'indice de la solution par rapport à la fonctionnelle

$$(5) \quad J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1-\varepsilon} \int_\Omega |u|^{p+1-\varepsilon}$$

étant  $l+1$ , où  $l$  est l'indice de  $x_0$  en tant que point critique de  $\varphi$ .

Nous analysons ici ce qu'il advient dans le cas d'une concentration multiple. Plus précisément, dans le cas d'une concentration double, nous obtenons le résultat :

**THÉORÈME.** — *Supposons  $N \geq 4$ , et soit  $(u_\varepsilon)$  une famille de solutions de  $(P_\varepsilon)$  telle que  $|\nabla u_\varepsilon|^2 \rightarrow S_N^{N/2} (\delta_{x_1} + \delta_{x_2})$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ . Alors :*

(i)  $(x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega$ .

(ii)  $\varphi(x_1, x_2) := H(x_1, x_1)^{1/2} H(x_2, x_2)^{1/2} - G(x_1, x_2) \geq 0$  (et donc  $x_1 \neq x_2$ ).

(iii)  $\varphi'(x_1, x_2) = 0$ .

*L'indice de ces solutions en tant que points critiques de  $J_\varepsilon$  est  $l+2$ , où  $l$  est l'indice de  $(x_1, x_2)$  en tant que point critique de  $\varphi$ . On démontre aussi que si  $(x_1, x_2)$  est un point critique non dégénéré de  $\varphi$ , tel que  $\varphi(x_1, x_2) > 0$ , il existe une famille  $(u_\varepsilon)$  de solutions de  $(P_\varepsilon)$  qui se concentrent en  $x_1$  et  $x_2$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**2. ÉTAPES DE LA DÉMONSTRATION.** — Si les hypothèses du théorème sont vérifiées,  $u_\varepsilon$  s'écrit de manière unique sous la forme (1), avec  $k=2$ . De plus, en reprenant l'argument de Z. C. Han dans [5], on démontre que  $x_1^\varepsilon$  et  $x_2^\varepsilon$  ne peuvent pas s'approcher du bord de  $\Omega$ . Si l'on note  $K_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, v)$  la fonctionnelle qui vaut  $J_\varepsilon(\alpha_1 P\delta_1 + \alpha_2 P\delta_2 + v)$  sur la variété définie par

$$(6) \quad |\alpha_i - c_N| < \eta_0, \quad \lambda_i > \frac{1}{\eta_0}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 |x_1 - x_2|^2 > \frac{1}{\eta_0}, \quad d(x_i, \partial\Omega) > d_0$$

$$(7) \quad v \in E_{(\lambda_i)(x_i)}, \quad |v| < v_0$$

où  $\eta_0, d_0, v_0$  sont des constantes strictement positives et petites, on a la proposition suivante :

**PROPOSITION.** —  *$u = \alpha_1 P\delta_1 + \alpha_2 P\delta_2 + v$  est un point critique de  $J_\varepsilon$  si et seulement si  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, v)$  est un point critique de  $K_\varepsilon$ , c'est-à-dire si, et seulement si, il*

existe des réels  $(A_i, B_i, C_i) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, i=1, 2$ , tel que

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} (E_{\alpha_i}) \quad \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \alpha_i} = 0 \\ (E_{\lambda_i}) \quad \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \lambda_i} = B_i \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P \delta_i}{\partial \lambda_i^2} \nabla v + C_i \cdot \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P \delta_i}{\partial \lambda_i \partial x_i} \nabla v \\ (E_{x_i}) \quad \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial x_i} = B_i \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P \delta_i}{\partial x_i \partial \lambda_i} \nabla v + C_i \cdot \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P \delta_i}{\partial x_i^2} \nabla v \\ (E_v) \quad \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial v} = \sum_{i=1}^2 \left( A_i P \delta_i + B_i \frac{\partial P \delta_i}{\partial \lambda_i} + C_i \cdot \frac{\partial P \delta_i}{\partial x_i} \right). \end{array} \right.$$

En multipliant scalairement dans  $H_0^1(\Omega)$  l'équation  $(E_v)$  par  $v$  on obtient une estimation de la norme de  $v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , puis en la multipliant respectivement par  $P \delta_i, \partial P \delta_i / \partial \lambda_i, \partial P \delta_i / \partial x_i$  des estimations des réels  $A_i, B_i, C_i$ .

Avec ces estimations, en utilisant des calculs effectués dans [1] et les notations

$$\alpha_i = c_N - \rho_i, \quad \mu = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 |x_1 - x_2|^2 \right)^{-(N-2)/2}$$

les équations  $(E_{\lambda_i})$  de  $(E)$  nous donnent :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{H(x_i^\varepsilon, x_i^\varepsilon)}{(\lambda_i^\varepsilon)^{N-1}} (1 + o(1)) + \frac{2}{N-2} \frac{\partial \mu^\varepsilon}{\partial \lambda_i} (1 + o(1)) + \frac{H(x_i^\varepsilon, x_j^\varepsilon)}{(\lambda_i^\varepsilon)^{N/2} (\lambda_j^\varepsilon)^{(N-2)/2}} (1 + o(1)) = \omega \frac{\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon}, \\ i=1, 2 \end{array} \right.$$

où  $o(1)$  désigne une quantité qui tend vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\omega$  est une constante strictement positive. On en déduit que nécessairement  $\mu^\varepsilon \sim (\lambda_1^\varepsilon \lambda_2^\varepsilon |x_1^\varepsilon - x_2^\varepsilon|^2)^{-(N-2)/2}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et alors (8) se réécrit, si l'on note  $(\lambda_i^\varepsilon)^{-(N-2)/2} = \omega^{1/2} \varepsilon^{1/2} \Lambda_i^\varepsilon$

$$(9) \quad H(x_i^\varepsilon, x_i^\varepsilon) (\Lambda_i^\varepsilon)^2 (1 + o(1)) - G(x_i^\varepsilon, x_j^\varepsilon) \Lambda_i^\varepsilon \Lambda_j^\varepsilon (1 + o(1)) = 1$$

d'où l'on tire

$$(\Lambda_i^\varepsilon)^2 = H(x_i^\varepsilon, x_i^\varepsilon)^{-1/2} H(x_j^\varepsilon, x_j^\varepsilon)^{1/2} [H(x_i^\varepsilon, \alpha_i^\varepsilon)^{1/2} H(x_j^\varepsilon, x_j^\varepsilon)^{1/2} (1 + o(1)) - G(x_i^\varepsilon, x_j^\varepsilon) (1 + o(1))]^{-1}$$

et à la limite

$$\varphi(x_1, x_2) = H(x_1, x_1)^{1/2} H(x_2, x_2)^{1/2} - G(x_1, x_2) \geq 0 \quad (\text{et donc } x_1 \neq x_2).$$

Tenant compte de ces résultats, les équations  $(E_{x_i})$  se ramènent après calcul à  $\partial \varphi / \partial x_i(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = 0$ , ce qui nous donne bien à la limite  $\varphi'(x_1, x_2) = 0$  et la première partie du théorème.

Pour la seconde, on procède comme dans [6]. On commence par démontrer en utilisant le théorème des fonctions implicites qu'il existe  $\eta_0, d_0, v_0 > 0$  tels que pour  $\varepsilon$  assez petit et  $\alpha_i, \lambda_i, x_i, i=1, 2$  vérifient (6), il existe un unique  $\bar{v} \in E_{(\alpha_i)(x_i)}, |\bar{v}|_{H_0^1} < v_0$ , tel que  $(E_v)$  soit satisfaite pour certains réels  $A_i, B_i, C_i$ . Soit  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega \times \Omega$  un point critique non dégénéré de  $\varphi$ , tel que  $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$ . On note  $(\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2)$  la solution dans  $(\mathbf{R}_+^*)^2$  du système

$$H(\bar{x}_i, \bar{x}_i) \bar{\Lambda}_i^2 - G(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \bar{\Lambda}_i \bar{\Lambda}_j = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2$$

correspondant au minimum sur  $(\mathbf{R}_+^*)^2$  de la fonction

$$(\Lambda_1, \Lambda_2) \mapsto \frac{1}{2} (H(\bar{x}_1, \bar{x}_1) \Lambda_1^2 + H(\bar{x}_2, \bar{x}_2) \Lambda_2^2 - 2 G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Lambda_1 \Lambda_2) - \text{Log } \Lambda_1 \Lambda_2.$$

Avec les changements de variables

$$\alpha_i = c_N - \rho_i; \quad \lambda_i^{-(N-2)/2} = \omega^{1/2} \varepsilon^{1/2} (\bar{\Lambda}_i + \zeta_i); \quad x_i = \bar{x}_i + \xi_i$$

le système formé par les équations  $(E_{\alpha_i})$ ,  $(E_{\lambda_i})$  et  $(E_{x_i})$  avec  $v = \bar{v}$  se ramène, compte tenu des estimations dont on dispose sur  $|\bar{v}|_{H_0^1}$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , à

$$(E') \quad \rho_i = V_i(\rho, \zeta, \xi, \varepsilon); \quad M(\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2) = W(\rho, \zeta, \xi, \varepsilon)$$

où  $V_i$ ,  $W$  sont des fonctions  $C^1$  qui vérifient les estimations

$$V_i(\rho, \zeta, \xi, \varepsilon) = O(\varepsilon |\log \varepsilon| + \rho_i^2),$$

$W_i(\rho, \zeta, \xi, \varepsilon) = O[|\rho| + |\zeta|^2 + |\xi|^2 + (\varepsilon^{1/2} \text{ si } N=4; \varepsilon^{2/(N+2)} |\log \varepsilon| \text{ si } N>4)]$ , et  $M$  est une matrice  $4 \times 4$ , inversible puisque son déterminant est égal à

$$4 \frac{H(\bar{x}_1, \bar{x}_1)^{1/2} H(\bar{x}_2, \bar{x}_2)^{1/2}}{\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \det \varphi''(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

On déduit alors du théorème du point fixe de Brouwer l'existence d'une solution au système  $(E')$ , avec  $\rho_i^\varepsilon$ ,  $\zeta_i^\varepsilon$ ,  $\xi_i^\varepsilon$  qui tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ . On vérifie comme dans [6] que la fonction  $u_\varepsilon$  correspondante, point critique de  $J_\varepsilon$  sur  $H_0^1(\Omega)$  est bien strictement positive, et donc solution de  $(P_\varepsilon)$ . Par construction, elle se concentre en  $x_1$  et  $x_2$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Son indice par rapport à  $J_\varepsilon$  est  $l+2$  où  $l$  est l'indice de  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  comme point critique de  $\varphi$ , ainsi qu'on s'en aperçoit en calculant la dérivée seconde de  $J_\varepsilon$  en  $u_\varepsilon$ . Cela correspond à ce que l'on a minimisé la fonctionnelle par rapport à  $v$ , puis maximisé par rapport aux  $\alpha_i$  (indice 2) et minimisé par rapport aux  $\lambda_i$ , tandis que le problème pour les  $x_i$  s'est ramené à prendre un point critique au voisinage de  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  d'une perturbation de  $\varphi$  (indice  $l$ ) — ceci valant aussi pour les solutions  $u_\varepsilon$  de  $(P_\varepsilon)$  considérées dans la première partie du théorème.

Note remise le 7 juin 1990, acceptée le 11 juin 1990.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. BAHRI, *Critical points at infinity in some variational problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 182, Longman, 1989.
- [2] A. BAHRI et J.-M. CORON, On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain, *Comm. Pure Applied Math.*, 41, 1988, p. 255-294.
- [3] H. BREZIS, Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology, *Comm. Pure Applied Math.*, 39, 1986, p. 517-539.
- [4] H. BREZIS et L. A. PELETIER, Asymptotics for elliptic equations involving the critical growth, in *Partial differential equations and the calculus of variations*, F. COLOMBINI, A. MARINO, L. MODICA et S. SPAGNOLO éd., Birkhäuser, 1989.
- [5] Z. C. HAN, *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent* (à paraître).
- [6] O. REY, The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent, *Journal of Functional Analysis*, 89, 1990, p. 1-52.
- [7] O. REY, Proof of two conjectures of H. Brezis and L. A. Peletier, *Manuscripta Math.*, 65, 1989, p. 19-37.
- [8] M. STRUWE, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, *Math. Z.*, 1987, 1984, p. 511-517.