



**HAL**  
open science

## Sur un problème variationnel non compact : l'effet de petits trous dans le domaine

Olivier Rey

► **To cite this version:**

Olivier Rey. Sur un problème variationnel non compact : l'effet de petits trous dans le domaine. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1989, 308 (12), pp.349-352. hal-00943428

**HAL Id: hal-00943428**

**<https://hal.science/hal-00943428v1>**

Submitted on 12 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES



TOME 308 SÉRIE I N° 12 — 23 MARS 1989

Série I  
MATHÉMATIQUE

BIBLIOTHEQUE NATIONALE DE FRANCE



3 753102322079 2

**gauthier-villars**

## Sur un problème variationnel non compact: l'effet de petits trous dans le domaine

Olivier REY

**Résumé** — On s'intéresse dans cette Note au problème :  $-\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)}$ ,  $u > 0$  sur  $\Omega_d$ ;  $u = 0$  sur  $\partial\Omega_d$ , où  $\Omega_d$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , privé de  $p$  disques de rayon  $d$ . On montre que pour  $d$  suffisamment petit, l'équation admet au moins  $p$  solutions, et que, sous des conditions supplémentaires, elle en admet au moins  $2^p - 1$ .

### On a variational problem with lack of compactness: the effect of small holes in the domain

**Abstract** — We are interested in the problem:  $-\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)}$ ,  $u > 0$  on  $\Omega_d$ ;  $u = 0$  on  $\partial\Omega_d$ , where  $\Omega_d$  is a smooth and bounded domain  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , deleted from  $p$  discs of radius  $d$ . We show that, for  $d$  small enough, the equation has at least  $p$  solutions, and that, under some further conditions, it has at least  $2^p - 1$  solutions.

1. INTRODUCTION. — Soient  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ ;  $X_1, \dots, X_p$   $p$  points distincts de  $\Omega$  et  $d$  un réel strictement positif. On note :

$$\Omega_d = \Omega \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq p} B(X_i, d)$$

où  $B(X_i, d) \subset \Omega$  désigne la boule fermée de centre  $X_i$  et de rayon  $d$ .

On s'intéresse au problème :

$$(1) \quad -\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)}, \quad u > 0 \text{ sur } \Omega_d; \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d.$$

Si l'on suppose  $d$  suffisamment petit, on sait déjà d'après [4], que (1) admet toujours au moins une solution. Sans restriction sur  $d$ , l'existence d'une solution a été établie dans [2].

On note, dans la suite,  $\delta_X$  la masse de Dirac au point  $X$ , et on pose :

$$(2) \quad \mu = S^{N/2}$$

où  $S$  est la constante d'injection de Sobolev-indépendante de  $\Omega$  [3] :

$$(3) \quad S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \left( \int_{\Omega} |u|^{2N/(N-2)} \right)^{-(N-2)/N} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right).$$

Nous montrons le théorème suivant :

**THÉORÈME 1** (1). — Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , il existe  $d_0 > 0$  tel que (1) admette pour  $d < d_0$  une solution  $u$  qui se concentre autour de  $X_i$ , c'est-à-dire :

$$|\nabla u|^2 \rightarrow \mu \delta_{X_i} \text{ quand } d \rightarrow 0, \text{ au sens des mesures sur } \Omega.$$

Pour  $d$  assez petit, (1) admet donc au moins  $p$  solutions.

Notons maintenant  $M(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$  la matrice  $(a_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq k}$ , définie par :

$$(4) \quad a_{\alpha\alpha} = H(X_{i_\alpha}, X_{i_\alpha}), \quad a_{\alpha\beta} = -G(X_{i_\alpha}, X_{i_\beta}) \text{ si } \alpha \neq \beta, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p.$$

$G$  étant la fonction de Green du Laplacien sur  $\Omega$ ,  $H$  sa partie régulière. On a donc :

$$G(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|^{2-N} - H(x_1, x_2) \text{ sur } \Omega \times \Omega$$

Note présentée par Haïm BRÉZIS.

avec  $H$  harmonique par rapport à chacune des variables et  $G$  nulle sur le bord de  $\Omega \times \Omega$ . Le théorème 1 se généralise comme suit :

**THÉORÈME 2.** — (i) Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq p$ . On suppose que la matrice symétrique  $M(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$  est définie positive. Il existe alors  $d_0 > 0$  tel que (1) admet pour  $d < d_0$  une solution  $u$  qui se concentre autour des  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ , c'est-à-dire :

$$|\nabla u|^2 \rightarrow \mu \sum_{j=1}^k \delta_{x_{i_j}} \quad \text{quand } d \rightarrow 0, \quad \text{au sens des mesures sur } \Omega.$$

(ii) Si  $M(X_1, \dots, X_p)$  est définie positive, (1) admet, pour  $d$  assez petit, au moins  $2^p - 1$  solutions.

*Remarque 1.* — Le théorème 1 correspond au cas  $k = 1$  dans le théorème 2.

*Remarque 2.* — L'ouvert  $\Omega$  et un nombre  $\delta > 0$  étant donnés, il existe  $\delta' > 0$  tel que si  $|X_i - X_j| \geq \delta$ ,  $\forall i \neq j$ , et  $d(X_i, \partial\Omega) \leq \delta'$ ,  $\forall i$ , alors  $M(X_1, \dots, X_p)$  est définie positive. En effet, quand  $\delta'$  tend vers 0,  $G(X_i, X_j)$ ,  $i \neq j$ , reste uniformément borné, tandis que  $H(X_i, X_j)$  tend uniformément vers  $+\infty$  pour tout  $i$ .

*Remarque 3.* — Si  $M(X_1, \dots, X_p)$  est définie positive, alors  $M(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$  est définie positive pour tout  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, p\}$ . Le nombre des parties non vides de  $\{1, \dots, p\}$  est  $2^p - 1$ . (ii) est donc une conséquence de (i).

**2. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES.** — D'après les remarques précédentes, il suffit de démontrer (i) du théorème 2. On introduit sur  $H_0^1(\Omega_d)$  la fonctionnelle

$$(6) \quad K(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_d} |u|^{2N/(N-2)}.$$

Les points critiques  $u > 0$  de  $K$  sont solutions de (1).

Si  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $Y \in \mathbb{R}^N$ , nous désignons par  $U_{\lambda, Y}$  la fonction

$$(7) \quad U_{\lambda, Y}(y) = \lambda^{(N-2)/2} (1 + \lambda^2 |y - Y|^2)^{(2-N)/2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^N$$

et par  $PU_{\lambda, Y}$  sa projection sur  $H_0^1(\Omega_d)$ , c'est-à-dire l'unique élément de  $H_0^1(\Omega_d)$  qui vérifie  $\Delta PU_{\lambda, Y} = \Delta U_{\lambda, Y}$  sur  $\Omega_d$ .  $(N(N-2))^{(N-2)/4} U_{\lambda, Y}$  est solution de (1) sur  $\mathbb{R}^N$ . De plus :

$$(8) \quad \left( \int_{\mathbb{R}^N} U_{\lambda, Y}^{2N/(N-2)} \right)^{(2-N)/N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\lambda, Y}|^2 \right) = S.$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq p$ . Sans restreindre la généralité, on peut supposer que  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) = (X_1, \dots, X_k)$ . De la même manière que dans [6], nous allons chercher un point critique de  $K$  sous la forme :

$$(9) \quad u = \sum_{i=1}^k \alpha_i PU_i + v,$$

où  $PU_i = PU_{\lambda_i, Y_i}$  avec  $\lambda_i$  grand et  $Y_i$  proche de  $X_i$ ,  $\alpha_i$  est un réel proche de  $(N(N-2))^{(N-2)/4}$ ,  $v$  est petit en norme  $H_0^1(\Omega_d)$  et appartient à l'espace  $E_{(\lambda_i)(Y_i)}$  défini par :

$$(10) \quad \left\{ E_{(\lambda_i)(Y_i)} = \left\{ w \in H_0^1(\Omega_d) \left| \begin{array}{l} \langle w, PU_i \rangle_{H_0^1} = \left\langle w, \frac{\partial PU_i}{\partial Y_i} \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle w, \frac{\partial PU_i}{\partial Y_j} \right\rangle_{H_0^1} = 0 \right. \right. \\ \left. \left. 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq N. \right. \right. \end{array} \right\},$$

On note :

$$(11) \quad J(\alpha, \lambda, Y, v) = J(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k; Y_1, \dots, Y_k; v)$$

la fonctionnelle  $K\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i PU_i + v\right)$ . On démontre alors la proposition :

PROPOSITION. —  $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i PU_i + v$  est un point critique de  $K$  si, et seulement si, il existe des réels  $A_i, B_i, C_{il}, i=1, \dots, k; l=1, \dots, N$  tels que  $(\alpha, \lambda, Y, v)$  satisfait les équations suivantes :

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} (E1) \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_i}(\alpha, \lambda, Y, v) = 0 \\ (E2) \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda_i}(\alpha, \lambda, Y, v) = B_i \left\langle v, \frac{\partial^2 PU_i}{\partial \lambda_i^2} \right\rangle_{H_0^1} + \sum_{l=1}^N C_{il} \left\langle v, \frac{\partial^2 PU_i}{\partial Y_{il} \partial \lambda_i} \right\rangle_{H_0^1} \\ (E3) \quad \frac{\partial J}{\partial Y_{ij}}(\alpha, \lambda, Y, v) = B_i \left\langle v, \frac{\partial^2 PU_i}{\partial \lambda_i \partial Y_{ij}} \right\rangle_{H_0^1} + \sum_{l=1}^N C_{il} \left\langle v, \frac{\partial^2 PU_i}{\partial Y_{il} \partial Y_{ij}} \right\rangle_{H_0^1} \\ (E4) \quad \frac{\partial J}{\partial v}(\alpha, \lambda, Y, v) = \sum_{i=1}^k \left( A_i PU_i + B_i \frac{\partial PU_i}{\partial \lambda_i} + \sum_{l=1}^N C_{il} \frac{\partial PU_i}{\partial Y_{il}} \right) \\ \qquad \qquad \qquad i=1, \dots, k, \quad j=1, \dots, N. \end{array} \right.$$

On fait le changement de variables :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = (N(N-2))^{(N-2)/4} (1 + \eta_i), \quad \eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq k} \\ \lambda_i = \Lambda_i^{2/(2-N)} d^{-1/2}, \quad \Lambda = (\Lambda_i)_{1 \leq i \leq k} \\ x_i = Y_i - X_i, \quad x = (x_i)_{1 \leq i \leq k} \end{array} \right.$$

avec les hypothèses

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_i \text{ varie dans un compact } C \text{ de } \mathbf{R}_+^* \\ |\eta_i| < \eta_0 \\ |x_i| d^{-a} < v_a, \quad \forall a \in ]0, 1[ \end{array} \right.$$

où  $C$  et les constantes  $\eta_0, v_a$  seront fixées par la suite.

On a alors le lemme suivant, dont la démonstration est très similaire à celle de la proposition 4 de [6] (voir aussi [1]) :

LEMME. — Soit  $C$  fixé. Il existe  $d_0, \eta_0, v_a > 0$  tels que si  $(\eta, \Lambda, x)$  vérifie (H) et si  $d < d_0$ , il existe  $\bar{v} \in E_{(\lambda_i)(Y_i)}$ ,  $A_i, B_i, C_{il} \in \mathbf{R}$  tels que  $(\alpha, \lambda, Y, \bar{v})$  satisfait (E4) avec les coefficients  $A_i, B_i, C_{il}$ .

De plus, les estimations de la norme  $H_0^1(\Omega_d)$  de  $\bar{v}$  et des coefficients  $A_i, B_i, C_{il}$  permettent après calcul de réécrire le système formé par les équations restantes de (E) sous la forme :

$$(E') \left\{ \begin{array}{l} (E'1) \quad \eta_i = V_i(d, \eta, \Lambda, x) \\ (E'2) \quad H(X_i, X_i) \Lambda_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k G(X_i, X_j) \Lambda_j - \frac{1}{\Lambda_i^3} = W_i(d, \eta, \Lambda, x) \\ (E'3) \quad x_{il} = Z_{il}(d, \eta, \Lambda, x) \\ \qquad \qquad \qquad i=1, \dots, k, \quad l=1, \dots, N \end{array} \right.$$

où  $V_i, W_i, Z_{ii}$  sont des fonctions continues qui vérifient

$$(13) \quad \begin{cases} V_i = O[d^{(N-2)/2} + |\eta|^2] \\ W_i = O\left[\frac{|x|^2}{d} + |\eta| + |d|^{1/2} \cdot (1 \text{ si } N \neq 4; |\text{Log } d| \text{ si } N = 4)\right] \\ Z_{ii} = O[d]. \end{cases}$$

Supposons maintenant que  $M(X_1, \dots, X_k)$  soit définie positive (ce qui est toujours vrai si  $k=1$ ). La fonction définie par :

$$(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) \mapsto (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) M^t (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\Lambda_i^2}$$

admet sur  $(\mathbf{R}_+^*)^k$  un minimum atteint en un point  $(\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_k)$ .

En posant  $\Lambda_i = \bar{\Lambda}_i + \Lambda'_i$ , (E' 2) se réécrit sous la forme :

$$(E'' 2) \quad \Lambda'_i = W'_i(d, \eta, \Lambda', x)$$

où  $W'_i$  est une fonction continue qui satisfait la même estimation que  $W_i$ . Dans ces conditions, le théorème du point fixe de Brouwer assure que pour  $d$  assez petit, le système (E') admet une solution, qui vérifie de surcroît les estimations :

$$(14) \quad |\eta_i| \leq \rho d^{(N-2)/2}, \quad |x_i| \leq \rho d, \quad \Lambda'_i \leq \rho d^{1/2} \cdot (1 \text{ si } N \neq 4; |\text{Log } d| \text{ si } N = 4)$$

où  $\rho$  est une constante strictement positive.  $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i P U_i + \bar{v}$  est alors, par construction,

solution sur  $\Omega_d$  de l'équation :

$$(15) \quad -\Delta u = |u|^{4/(N-2)} u.$$

Il reste à montrer que  $u$  est positive. En multipliant (15) par  $u^- = \max(0, -u)$  et en intégrant sur  $\Omega_d$ , on obtient

$$\int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_d} (u^-)^{2N/(N-2)}.$$

L'inégalité de Sobolev :  $\int_{\Omega_d} |\nabla u|^2 \geq S \left( \int_{\Omega_d} (u^-)^{2N/(N-2)} \right)^{(N-2)/N}$ , et le fait que  $|u^-|_{2N/(N-2)} \leq |\bar{v}|_{2N/(N-2)} \leq S^{1/2} |\bar{v}|_{H_0^1} \rightarrow 0$  quand  $d \rightarrow 0$  permettent d'en déduire que pour  $d$  assez petit, nécessairement  $u^- \equiv 0$ , d'où, d'après le principe du maximum fort,  $u > 0$  sur  $\Omega_d$ .  $u$  est donc bien solution de (1). Par ailleurs, on déduit de (7), (8), (12), (14) que

$$|\nabla u|^2 \rightarrow \mu \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \text{ quand } d \rightarrow 0.$$

(<sup>1</sup>) R. Lewandowski me signale qu'il a obtenu un résultat similaire au théorème 1.

Note remise le 16 février 1989, acceptée le 20 février 1989.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. BAHRI, *Critical points at infinity in some variational problems*, Lecture Notes Longman (à paraître).
- [2] A. BAHRI et J.-M. CORON, On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain, *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, 1988, p. 253-294.
- [3] H. BREZIS, Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology, *Comm. Pure Applied Math.*, 39, 1986, p. S.17-S.39.
- [4] J.-M. CORON, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 299, série I, 1984, p. 209-212.
- [5] O. REY, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 305, série I, 1987, p. 591-594.
- [6] O. REY, The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent, *Journal of Functional Analysis* (à paraître).