



**HAL**  
open science

# Concentration des solutions d'équations elliptiques avec non-linéarité critique

Olivier Rey

► **To cite this version:**

Olivier Rey. Concentration des solutions d'équations elliptiques avec non-linéarité critique. 1990, Exposé n°12. hal-00943402

**HAL Id: hal-00943402**

**<https://hal.science/hal-00943402>**

Submitted on 12 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

O. REY

## **Concentration des solutions d'équations elliptiques avec nonlinéarité critique**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1989-1990), exp. n° 12, p. 1-16.

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1989-1990\\_\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990___A14_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles  
(École Polytechnique), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

---

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

### CONCENTRATION DES SOLUTIONS D'EQUATIONS ELLIPTIQUES AVEC NONLINEARITE CRITIQUE

O. REY



# Concentration des solutions d'équations elliptiques avec nonlinéarité critique

Olivier Rey

## 1 Introduction et résultats

Nous revenons dans cet article sur les problèmes du type

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x, u) & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \geq 3$ ,  $p = \frac{N+2}{N-2}$  et  $f(x, u)$  est un terme d'ordre inférieur à  $u^p$ , c'est-à-dire

$$\frac{f(x, u)}{u^p} \rightarrow 0 \quad \text{quand } u \rightarrow +\infty$$

L'exposant  $p$  est critique du point de vue des injections de Sobolev, dans le sens où l'injection de  $L^{p+1}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  est continue mais pas compacte. Il en résulte que la fonctionnelle associée au problème :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} - \int_{\Omega} F(x, u)$$

avec  $F(x, u) = \int_0^{\infty} f(x, t) dt$ , ne vérifie pas la condition de Palais-Smale : il existe des "points critiques à l'infini", correspondant à des phénomènes de concentration en certains points du domaine.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons plus particulièrement au comportement asymptotique par rapport à  $\varepsilon$  des solutions du problème  $(P_\varepsilon)$

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^p + \varepsilon f(x, u) & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

quand  $\varepsilon > 0$  tend vers 0.

Pour certaines fonctions  $f$ , on peut démontrer l'existence et la multiplicité de solutions à  $(P_\varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  assez petit—[BN1] [R1] [R2]. Par contre, pour  $\varepsilon = 0$ , le problème devient plus délicat, et nous savons, entre autre, que si  $\Omega$  est étoilé il n'y a pas de solution. Par conséquent, des solutions de  $(P_\varepsilon)$  vont disparaître pour  $\varepsilon = 0$ , soit en tendant uniformément vers 0, soit en se concentrant de plus en plus autour de certains points jusqu'à une concentration infinie.

Dans le cas  $f(x, u) = u$ , par exemple, on a les résultats suivants :

- (i) Si  $N \geq 4$ , et  $(u_\varepsilon)$  est une famille de solutions de  $(P_\varepsilon)$  qui se concentrent en un point  $x_0 \in \bar{\Omega}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors  $x_0 \in \Omega$  et

$$\varphi'(x_0) = 0$$

où

$$(1.1) \quad \varphi(x) = H(x, x)$$

et  $H$  est la partie régulière de la fonction de Green du Laplacien sur  $\Omega$ , notée  $G$ , i.e. :

$$(1.2) \quad H(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{N-2}} - G(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega^2$$

- (ii) Réciproquement, si  $N \geq 5$  et si  $x_0 \in \Omega$  est point critique non dégénéré de  $\varphi$ , il existe pour  $\varepsilon$  assez petit une famille de solutions de  $(P_\varepsilon)$  qui se concentrent en  $x_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

- (iii) Enfin, si  $N \geq 5$ , pour  $\varepsilon$  assez petit  $(P_\varepsilon)$  admet au moins autant de solutions que la catégorie de  $\Omega$ , se concentrant quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  en des points critiques de  $\varphi$ .

Les mêmes résultats sont valables pour le problème

$$(P'_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^{p-\varepsilon} & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous disposons de plus d'estimations très précises de la forme et de la vitesse de concentration des fonctions  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ —[H] [R3] [BP]

Nous allons ici démontrer des résultats relatifs au cas

$$f(x, u) = f(x) \quad f \not\equiv 0$$

On note  $(Q_\varepsilon)$  le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \varepsilon f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(on n'impose pas, dans un premier temps, à la solution  $u$  d'être positive), et  $\tilde{f}$  la fonction définie par

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{f} = f & \text{sur } \Omega \\ \tilde{f} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{i.e. } \tilde{f} = -\Delta_{\Omega}^{-1} f$$

Nous montrons les résultats suivants :

**Théorème 1** (1) *Supposons  $\tilde{f} \in C^2(\Omega)$ . Soit  $x_0 \in \Omega$  tel que*

(i)  $\tilde{f}(x_0) > 0$

(ii)  $x_0$  est un point critique non dégénéré de  $x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$

Alors il existe une famille  $(u_{\varepsilon})$  de solutions de  $(Q_{\varepsilon})$  qui se concentrent en  $x_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , i.e.

$$|\nabla u_{\varepsilon}|^2 \rightarrow S^{N/2} \delta_{x_0}, \quad |u_{\varepsilon}|^{p+1} \rightarrow S^{N/2} \delta_{x_0}$$

au sens des mesures, où  $\delta_{x_0}$  désigne la masse de Dirac au point  $x_0$  et

$$S = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{p+1} = 1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

est la constante de Sobolev. Si  $f \geq 0$  sur  $\Omega$ , (i) est automatiquement satisfaite, et  $u_{\varepsilon} > 0$  sur  $\Omega$ .

(2) *Supposons  $f \geq 0$ , et  $\tilde{f} \in C^1(\Omega)$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit,  $(Q_{\varepsilon})$  a au moins autant de solutions strictement positives que la catégorie de  $\Omega$ , se concentrant chacune quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  en un point critique de l'application  $x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$ .*

### Remarques

- Si  $f \in W^{l,p}(\Omega)$ ,  $lp > N$ , alors  $\tilde{f} \in C^2(\Omega)$ . Si  $f \in W^{l,p}(\Omega)$ ,  $(l+1)p > N$ , alors  $\tilde{f} \in C^1(\Omega)$
- Les résultats du théorème fournissent des équivalents des résultats (ii) (iii) relatifs au cas  $f(x, u) = u$ . Il est probable que l'équivalent du résultat (i) est également vrai, où  $\varphi$  est remplacée par la fonction  $x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$

Notons qu'en ce qui concerne l'existence de solutions au problème  $(Q_{\varepsilon})$  avec une hypothèse de régularité minimale sur  $f$ , i.e.  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , on déduit d'un résultat de Brézis et Nirenberg [BN2] la proposition suivante, démontrée en appendice :

**Proposition 1** *Pour  $f \geq 0$  et  $\varepsilon$  assez petit,  $(Q_{\varepsilon})$  a au moins deux solutions. L'une de ces solutions tend uniformément vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Corollaire :** de la proposition et du théorème 1-(2) on déduit que si  $f$  est positive et suffisamment régulière (i.e.  $\tilde{f} \in C^1(\Omega)$ ),  $(Q_\varepsilon)$  a pour  $\varepsilon$  assez petit au moins  $\text{cat}(\Omega) + 1$  solutions, dont l'une tend uniformément vers 0 et les autres se concentrent en des points critiques de la fonction  $x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

L'étude du problème  $(Q_\varepsilon)$  nous permet également d'énoncer des résultats relatifs au problème

$$(Q'_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{sur } \Omega \\ u = \varepsilon g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad g \neq 0$$

On obtient :

**Théorème 2** *Les résultats du Théorème 1 et de la Proposition 1 valent pour le problème  $(Q'_\varepsilon)$ , en remplaçant dans les énoncés  $f$  par  $g$  et  $\tilde{f}$  par  $\tilde{g}$ , où  $\tilde{g}$  est la fonction définie par :*

$$\begin{cases} \Delta \tilde{g} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \tilde{g} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En effet, si on opère dans  $(Q_\varepsilon)$  le changement de fonction inconnue

$$u = \tilde{u} + \varepsilon \tilde{f}$$

on est amené à considérer le problème équivalent

$$(\tilde{Q}_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = (\tilde{u} + \varepsilon \tilde{f})^p & \text{sur } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(où l'on note, pour simplifier,  $v^p$  à la place de  $|v|^{p-1}v$ ).

En opérant dans  $(Q'_\varepsilon)$  le changement de variable

$$u = \tilde{u} + \varepsilon \tilde{g}$$

on est conduit au problème équivalent

$$(\tilde{Q}'_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = (\tilde{u} + \varepsilon \tilde{g})^p & \text{sur } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

c'est-à-dire exactement  $(\tilde{Q}_\varepsilon)$  dans lequel  $\tilde{f}$  a été remplacé par  $\tilde{g}$ . Les résultats concernant  $(Q'_\varepsilon)$  se déduisent donc immédiatement de ceux relatifs à  $(Q_\varepsilon)$ .

Nous passons maintenant à la démonstration des théorèmes.



## 2 Démonstration des théorèmes

### 2.1 Notations

On introduit sur  $H_0^1(\Omega)$  la fonctionnelle

$$(2.1) \quad J(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |\tilde{u} + \varepsilon \tilde{f}|^{p+1}$$

dont les points critiques sont solution de  $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ .

On considère, pour  $x \in \Omega$  et  $\lambda > 0$  les fonctions

$$(2.2) \quad \delta_{\lambda,x}(y) = \frac{\lambda^{\frac{N-2}{2}}}{(1 + \lambda^2 |y - x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

ainsi que leurs projections  $P\delta_{\lambda,x}$  sur  $H_0^1(\Omega)$ , définies par

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Delta P\delta_{\lambda,x} = \Delta \delta_{\lambda,x} & \text{sur } \Omega \\ P\delta_{\lambda,x} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore

$$(2.4) \quad P\delta_{\lambda,x} = \delta_{\lambda,x} - \varphi_{\lambda,x}$$

avec

$$(2.5) \quad \begin{cases} \Delta \varphi_{\lambda,x} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi_{\lambda,x} = \delta_{\lambda,x} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En développant l'expression de  $\delta_{\lambda,x}$  sur  $\partial\Omega$  pour  $\lambda d$  grand, on obtient en appliquant le principe du maximum que

$$(2.6) \quad \varphi_{\lambda,x}(y) = \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} H(x, y) + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{N+2}{2}} d^N}\right)$$

où  $d = d(x, \partial\Omega)$  et  $H$  désigne la partie régulière de la fonction de Green.

Notons que pour tout  $x$  et tout  $\lambda$

$$(2.7) \quad -\Delta(c_N \delta_{\lambda,x}) = (c_N \delta_{\lambda,x})^p \text{ sur } \mathbf{R}^N, \text{ avec } c_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}$$

Soit, pour  $\eta > 0$ , le sous-ensemble de  $H_0^1(\Omega)$

$$F_\eta = \left\{ \alpha P\delta_{\lambda,x} \mid |\alpha - c_N| < \eta, \lambda d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{\eta} \right\}$$

Il est démontré dans [BC] que si  $u \in H_0^1(\Omega)$  est tel que  $\text{dist}_{H_0^1(\Omega)}(u, F_\eta) < \eta$ , et  $\eta$  est assez petit, le problème

Minimiser  $|u - \alpha P\delta_{\lambda,x}|_{H_0^1}$  par rapport à  $\alpha, \lambda, x$

possède une solution unique dans l'ouvert défini par

$$|\alpha - c_N| < 4\eta, \quad \lambda d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{4\eta}$$

Ceci nous permet de rechercher des points critiques de  $J$  en déterminant ceux de la fonctionnelle

$$(2.8) \quad \begin{aligned} K : \quad M &\rightarrow \mathbf{R} \\ (\alpha, \lambda, x, v) &\mapsto J(\alpha P\delta_{\lambda,x} + v) \end{aligned}$$

où

$$(2.9) \quad M = \left\{ (\alpha, \lambda, x, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \times \Omega \times H_0^1(\Omega) \mid v \in E_{\lambda,x}, |\alpha - c_N| < \eta_0, \right. \\ \left. \lambda d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{\eta_0}, |v|_{H_0^1} < \nu_0 \right\}$$

$\eta_0$  et  $\nu_0$  étant certaines constantes strictement positives et

$$(2.10) \quad E_{\lambda,x} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \mid \langle v, P\delta_{\lambda,x} \rangle_{H_0^1} = \langle v, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \rangle_{H_0^1} = \langle v, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \rangle_{H_0^1} = 0 \right\}$$

Enfin  $(\alpha, \lambda, x, v) \in M$  sera point critique de  $K$  si et seulement si il existe  $(A, B, C) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$  tel que le système suivant soit vérifié :

$$(E) \quad \begin{cases} (E.1) & \frac{\partial K}{\partial \alpha} = 0 \\ (E.2) & \frac{\partial K}{\partial \lambda} = B \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda^2} \nabla v + C \cdot \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{x,\lambda}}{\partial \lambda \partial x} \nabla v \\ (E.3) & \frac{\partial K}{\partial x} = B \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{x,\lambda}}{\partial \lambda \partial x} \nabla v + C \cdot \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{x,\lambda}}{\partial x^2} \nabla v \\ (E.4) & \frac{\partial K}{\partial v} = AP\delta_{\lambda,x} + B \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} + C \cdot \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \end{cases}$$

La démonstration du théorème nécessite un certain nombre de calculs. Nous n'en donnerons ici que les étapes principales, les détails en étant identiques à ceux déjà effectués dans [B] [R1] [R4]

## 2.2 Résolution du système (E)

C'est cette résolution qui va nous donner le premier résultat du Théorème 1. On s'intéresse d'abord à (E.4). On développe  $K$  au voisinage de  $v = 0$  en écrivant

$$J(\alpha P\delta_{\lambda,x} + v) = J(\alpha P\delta_{\lambda,x}) + F_{\alpha,\lambda,x}(v) + Q_{\alpha,\lambda,x}(v) + R_{\alpha,\lambda,x}(v)$$

avec  $F$  linéaire en  $v$ ,  $Q$  quadratique, et  $R$  regroupant les termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire

$$F_{\alpha,\lambda,x}(v) = - \int_{\Omega} (\alpha P \delta_{\lambda,x} + \varepsilon \tilde{f})^p v$$

$$Q_{\alpha,\lambda,x}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \frac{p}{2} \int_{\Omega} (\alpha P \delta_{\lambda,x} + \varepsilon \tilde{f})^{p-1} v^2$$

et

$$R_{\alpha,\lambda,x}(v) = O(|v|_{H_0^1}^{\min(3,p+1)}) \quad R'_{\alpha,\lambda,x}(v) = O(|v|_{H_0^1}^{\min(2,p)}) \quad R''_{\alpha,\lambda,x}(v) = O(|v|_{H_0^1}^{\min(1,p-1)})$$

(où pour simplifier on note  $\theta^q$  la fonction  $|\theta|^{q-1}\theta$ ).

Il est prouvé dans [B] [R1] que la forme quadratique  $Q_{\alpha,\lambda,x}$  est définie positive, avec un module de coercivité indépendant de  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $x$ ,  $\varepsilon$ , si l'on suppose  $\eta_0$  et  $\varepsilon$  assez petits. On peut encore écrire

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\lambda,x}(v) &= \langle f_{\alpha,\lambda,x}, v \rangle_{H_0^1} & f_{\alpha,\lambda,x} &\in E_{\lambda,x} \\ Q_{\alpha,\lambda,x}(v) &= \frac{1}{2} \langle A_{\alpha,\lambda,x}, v \rangle_{H_0^1} & A_{\alpha,\lambda,x} &\in \mathcal{L}(E_{\lambda,x}) \end{aligned}$$

avec  $A_{\alpha,\lambda,x}$  coercif, de module de coercivité indépendant de  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $x$ ,  $\varepsilon$ . On en déduit, en appliquant le théorème des fonctions implicites à partir du point  $(f, v) = (0, 0)$ , l'existence d'une fonction  $C^1$  qui à tout  $(\alpha, \lambda, x, \varepsilon)$  tel que

$$|\alpha - c_N| < \eta_0 \quad \lambda d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{\eta_0} \quad \varepsilon < \varepsilon_0$$

$\eta_0$  et  $\varepsilon_0$  assez petits, associe  $\bar{v} \in E_{\lambda,x}$ ,  $|\bar{v}|_{H_0^1} < \nu_0$ , tel que (E.4) soit vérifiée pour certains réels  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , avec de plus

$$(2.12) \quad |\bar{v}|_{H_0^1} = O(|f_{\alpha,\lambda,x}|_{H_0^1})$$

Or

$$\forall v \in E_{\lambda,x}, \quad \langle f_{\alpha,\lambda,x}, v \rangle_{H_0^1} = - \int_{\Omega} [(\alpha P \delta_{\lambda,x} + \varepsilon \tilde{f})^p - \alpha^p \delta_{\lambda,x}^p] v$$

puisque

$$\int_{\Omega} \delta_{\lambda,x}^p v = \frac{1}{N(N-2)} \int_{\Omega} \nabla \delta_{\lambda,x} \nabla v = 0$$

et le calcul nous donne alors, en utilisant (2.2) (2.4) (2.6), l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev (comme dans [B] [R1])

$$(2.13) \quad |f_{\alpha,\lambda,x}|_{H_0^1} = \begin{cases} O\left(\frac{1}{(\lambda d)^{N-2}} + \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} + \varepsilon^p\right) & \text{si } N < 6 \\ O\left(\frac{(\text{Log } \lambda d)^{2/3}}{(\lambda d)^4} + \frac{\varepsilon (\text{Log } \lambda d)^{2/3}}{\lambda^2} + \varepsilon^2\right) & \text{si } N = 6 \\ O\left(\frac{1}{(\lambda d)^{\frac{N+2}{2}}} + \varepsilon^p\right) & \text{si } N > 6 \end{cases}$$

et d'après (2.12) la même estimation pour  $|\bar{v}|_{H_0^1}$ .

Il nous reste maintenant à résoudre les équations restantes, c'est-à-dire le système formé par (E.1) (E.2) (E.3). En posant

$$(2.14) \quad \rho = c_N - \alpha = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} - \alpha$$

en utilisant (2.2) (2.4) (2.6) et l'estimation obtenue pour  $\bar{v}$ , on obtient à partir de (2.1) (2.8) :

$$(2.15) \quad \frac{\partial K}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda, x, \bar{v}) = -4N\Gamma_1\rho + V_\alpha(\alpha, \lambda, x)$$

et

$$(2.16) \quad V_\alpha(\alpha, \lambda, x) = O \left[ \rho^2 + \frac{1}{(\lambda d)^{N-2}} + \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} + \left( \frac{\varepsilon^2 \text{Log} \lambda}{\lambda^2} \text{ si } N = 4; \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \text{ si } N > 4 \right) + \varepsilon^{2p} \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda, x, \bar{v}) = -\frac{(N-2)^2}{2} \sigma_{N-1} \left[ \frac{\alpha \varepsilon \tilde{f}(x)}{\lambda^{N/2}} - \frac{\alpha^2 \varphi(x)}{\lambda^{N-1}} \right] + V_\lambda(\alpha, \lambda, x)$$

et

$$(2.17) \quad V_\lambda(\alpha, \lambda, x) = O \left[ \frac{1}{\lambda^N d^{N-1}} + \frac{\varepsilon \text{Log} \lambda}{\lambda^{\frac{N+4}{2}}} + \frac{|\rho|}{\lambda^{N-1} d^{N-2}} + \frac{|\rho| \varepsilon}{\lambda^{N/2}} + \frac{\varepsilon^p}{\lambda^{N/2}} + \frac{\varepsilon^{2p}}{\lambda} \right. \\ \left. + \left( \frac{\varepsilon^2 \text{Log} \lambda}{\lambda^3} \text{ si } N = 4; \frac{\varepsilon^2}{\lambda^3} \text{ si } N > 4 \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\varepsilon}{\lambda^{N-1} d^{N-2}} \text{ si } N < 6; \frac{\varepsilon (\text{Log} \lambda d)^{2/3}}{\lambda^5 d^2} \text{ si } N = 6; \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N+4}{2}} d^{\frac{N-2}{2}}} \text{ si } N > 6 \right) \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial x}(\alpha, \lambda, x, \bar{v}) = N(N-2) \sigma_{N-1} \left[ \frac{\alpha^2 \varphi'(x)}{2\lambda^{N-2}} - \varepsilon \alpha \frac{\tilde{f}'(x)}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \right] + V_x(\alpha, \lambda, x)$$

et

$$V_x(\alpha, \lambda, x) = O \left[ \left( \frac{1}{\lambda^3 d^4} \text{ si } N = 4; \frac{1}{\lambda^N d^{N+1}} \text{ si } N > 4 \right) + \frac{|\rho|}{\lambda^{N-2} d^{N-1}} + \frac{\varepsilon |\rho|}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} + \lambda \varepsilon^{2p} \right. \\ \left. + \left( \frac{\varepsilon}{\lambda^2 d^2} + \frac{\varepsilon \text{Log} \lambda}{\lambda^3 d^3} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \text{ si } N = 4; \frac{\varepsilon \text{Log} \lambda}{\lambda^{7/2} d^3} + \frac{\varepsilon^2 \text{Log} \lambda}{\lambda^2} + \frac{\varepsilon^{7/3}}{\lambda^{3/2}} \text{ si } N = 5; \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N+2}{2}} d^{\sup(4, N/2)}} + \frac{\varepsilon^p}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \text{ si } N \geq 6 \right) \right]$$

où  $\Gamma_1 = \int_{\mathbf{R}^N} \delta_{0,1}^{p+1}$  et  $\sigma_{N-1} = \text{mes}(S^{N-1})$ .

Supposons maintenant que  $x_0 = 0 \in \Omega$ ,  $\tilde{f}(0) > 0$ , et que 0 est point critique non-dégénéré de la fonction  $x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$ .

On peut alors écrire

$$(2.18) \quad 2\varphi(x)\tilde{f}'(x) - \tilde{f}(x)\varphi'(x) = Mx + o(|x|)$$

où  $M$  est une matrice inversible.

Nous supposons dans la suite que  $x$  varie dans un voisinage  $\mathcal{O}$  de 0, tel que

$$\forall x \in \overline{\mathcal{O}}, \quad \tilde{f}(x) > 0 \text{ et } \text{dist}(\mathcal{O}, \partial\Omega) = d_0 > 0$$

Conformément à ce que nous suggère (2.16), on effectue le changement de variable

$$(2.19) \quad \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{\varepsilon \tilde{f}(x)}{\alpha \varphi(x)} (1 + \xi)$$

où l'on impose *a priori*  $|\xi| < 1/2$ . Notons qu'alors nous avons

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda, x, \bar{v}) = \frac{(N-2)^2 \sigma_{N-1}}{2} \frac{\alpha \varepsilon \tilde{f}(x)}{\lambda^{N/2}} \xi + V_\lambda(\alpha, \lambda, x)$$

et

$$\frac{\partial K}{\partial x}(\alpha, \lambda, x, \bar{v}) = -\frac{N(N-2)\sigma_{N-1}}{2} \frac{\varepsilon^2 \tilde{f}}{\varphi^2(x)} Mx + O(\varepsilon^2 |\xi|) + V_x(\alpha, \lambda, x)$$

ainsi que les évaluations

$$(2.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \alpha} = O[|\rho| + \varepsilon^2] \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda} = O\left[\varepsilon^{\frac{2N-2}{N-2}} (|\xi| + |\rho|) + \varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}\right] \\ \frac{\partial K}{\partial x} = O\left[\varepsilon^2 (|\xi| + |\rho| + |x|) + \left(\varepsilon^3 \text{ si } N = 4; \varepsilon^{\frac{2N}{N-2}} |\text{Log} \varepsilon| \text{ si } N > 4\right)\right] \end{cases}$$

et

$$(2.21) \quad |\bar{v}|_{H_0^1} = O\left[\varepsilon^2 \text{ si } N < 6; \varepsilon^2 |\text{Log} \varepsilon|^{2/3} \text{ si } N = 6; \varepsilon^p \text{ si } N > 6\right]$$

Ces estimations vont nous permettre d'évaluer les réels  $A, B, C$  déterminés par (E.4). En effet, si nous multiplions scalairement dans  $H_0^1(\Omega)$  l'équation (E.4) par respectivement  $P\delta_{\lambda,x}$ ,  $\frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x}$ , nous obtenons un système linéaire quasi-diagonal en  $A, B, C$ —

les coefficients s'évaluant par un calcul direct en utilisant (2.2) (2.4) (2.6) :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle P\delta_{\lambda,x}, P\delta_{\lambda,x} \rangle_{H_0^1} = N(N-2)\Gamma_1 + O\left(\frac{1}{\lambda^{N-2}}\right) \\ \langle P\delta_{\lambda,x}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \rangle_{H_0^1} = O\left(\frac{1}{\lambda^{N-1}}\right) \\ \langle P\delta_{\lambda,x}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_i} \rangle_{H_0^1} = O\left(\frac{1}{\lambda^{N-2}}\right) \\ \langle \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \rangle_{H_0^1} = \frac{N(N+2)\Gamma_2}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right) \\ \langle \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_i} \rangle_{H_0^1} = O\left(\frac{1}{\lambda^{N-1}}\right) \\ \langle \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_i}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_j} \rangle_{H_0^1} = N(N+2)\Gamma_3\lambda^2\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N-2}}\right) \end{array} \right.$$

$$\Gamma_2 = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_{0,1}^{\delta^{p-1}} \left( \frac{\partial \delta_{0,1}}{\partial \lambda} \right)^2 \quad \Gamma_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_{0,1}^{\delta^{p-1}} \left( \frac{\partial \delta_{0,1}}{\partial x_i} \right)^2$$

et le second membre étant donné par

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, P\delta_{\lambda,x} \right\rangle_{H_0^1} &= \frac{\partial K}{\partial \alpha} \\ \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial K}{\lambda} \\ \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \right\rangle_{H_0^1} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial K}{\partial x} \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire fournit

$$\begin{aligned} A &= O \left[ \left| \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right| + \frac{1}{\lambda^{N-3}} \left| \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right| + \frac{1}{\lambda^N} \left| \frac{\partial K}{\partial x} \right| \right] \\ B &= O \left[ \frac{1}{\lambda^{N-3}} \left| \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right| + \lambda^2 \left| \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right| + \frac{1}{\lambda^N} \left| \frac{\partial K}{\partial x} \right| \right] \\ C &= O \left[ \frac{1}{\lambda^N} \left| \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right| + \frac{1}{\lambda^{N-1}} \left| \frac{\partial K}{\partial \lambda} \right| + \frac{1}{\lambda^2} \left| \frac{\partial K}{\partial x} \right| \right] \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'évaluer les expressions

$$\begin{aligned} B \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda^2} \nabla \bar{v} + C \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda \partial x} \nabla \bar{v} &= O \left[ \left( \frac{|B|}{\lambda^2} + |C| \right) |\bar{v}|_{H_0^1} \right] \\ B \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda \partial x} \nabla \bar{v} + C \int_{\Omega} \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial x^2} \nabla \bar{v} &= O \left[ (|B| + \lambda^2 |C|) |\bar{v}|_{H_0^1} \right] \end{aligned}$$

grâce à (2.20) et (2.21). On en déduit alors que le système formé par les équations (E.1) (E.2) (E.3) est équivalent à

$$(E') \quad \begin{cases} \rho = V_1(\varepsilon, \rho, \xi, x) \\ \xi = V_2(\varepsilon, \rho, \xi, x) \\ x = V_3(\varepsilon, \rho, \xi, x) \end{cases}$$

où  $V_1, V_2, V_3$  sont des fonctions continues qui vérifient les estimations

$$\begin{cases} V_1 = O(\rho^2 + \varepsilon^2) \\ V_2 = O(|\rho| + \xi^2 + \varepsilon^{\frac{2}{N-2}}) \\ V_3 = O\left(|\rho| + |\xi| + \begin{cases} \varepsilon \text{ si } N = 4 \\ \varepsilon^{\frac{4}{N-2}} |\text{Log} \varepsilon| \text{ si } N > 4 \end{cases} + o(|x|)\right) \end{cases}$$

Le théorème du point fixe de Brouwer montre que pour  $\varepsilon$  assez petit le système (E') admet une solution  $(\rho_\varepsilon, \xi_\varepsilon, x_\varepsilon)$ , qui vérifie de surcroît:

$$(2.23) \quad \begin{cases} \rho_\varepsilon = O(\varepsilon^2) \\ \xi_\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{2}{N-2}}\right) \\ x_\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{2}{N-2}}\right) \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$(2.24) \quad u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon P \delta_{\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon} + \bar{v}_\varepsilon + \varepsilon \tilde{f}$$

avec  $\alpha_\varepsilon = c_N - \rho_\varepsilon$ ,  $\frac{1}{\lambda_\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{\varepsilon \tilde{f}(x_\varepsilon)}{\alpha_\varepsilon \varphi(x_\varepsilon)} (1 + \xi_\varepsilon)$ , et  $\bar{v}_\varepsilon = \bar{v}_{\varepsilon, \alpha_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, x_\varepsilon}$ , solution par construction de  $(Q_\varepsilon)$ , est telle que

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 \rightarrow S^{N/2} \delta_0, \quad |u_\varepsilon|^{p+1} \rightarrow S^{N/2} \delta_0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

D'autre part, si  $f \geq 0$ ,  $u_\varepsilon > 0$  sur  $\Omega$ . En effet, multipliant l'équation  $-\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{p-1} u_\varepsilon + \varepsilon \tilde{f}$  par  $u_\varepsilon^- = \max(0, -u_\varepsilon)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2 = \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} - \varepsilon \int_\Omega f u_\varepsilon^- \leq \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1}$$

L'inégalité de Sobolev nous donne par ailleurs

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2 \geq S \left( \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}}$$

et donc, soit  $\int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} \geq S^{N/2}$ , soit  $u_\varepsilon^- \equiv 0$ . Or  $u_\varepsilon^- \leq |\bar{v}_\varepsilon|$  et  $|\bar{v}_\varepsilon|_{p+1} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Par conséquent, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $u_\varepsilon^- \equiv 0$ , et le principe du maximum fort montre que  $u_\varepsilon > 0$  sur  $\Omega$ . Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème 1.

### 2.3 Catégorie du domaine et multiplicité des solutions

On va montrer la multiplicité des solutions à  $(Q_\varepsilon)$  en fonction de la catégorie du domaine  $\Omega$ , en cherchant des solutions sous la même forme que précédemment.

Plus précisément,  $\theta$  étant une constante strictement positive qu'on choisira ultérieurement, on définit pour  $\varepsilon > 0$ ,  $d > 0$  l'ouvert :

$$(2.25) \quad \mathcal{M}_{d,\varepsilon} = \left\{ (\rho, \lambda, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \times \Omega \mid |\rho| < \theta\varepsilon^2, d(x, \partial\Omega) > d, \right. \\ \left. \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \in \left] \frac{\varepsilon \tilde{f}(x)}{2c_N \varphi(x)}, \frac{3\varepsilon \tilde{f}(x)}{2c_N \varphi(x)} \right[ \right\}$$

et sur  $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$  la fonction

$$(2.25) \quad \mathcal{K}(\rho, \lambda, x) = K(\alpha, \lambda, x, \bar{v}) = J(\alpha P \delta_{\lambda,x} + \bar{v})$$

avec  $\alpha = c_N - \rho$ , dont les points critiques fournissent des solutions de  $(Q_\varepsilon)$ . Les dérivées premières de  $\mathcal{K}$  sont données par

$$(2.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho} = -\frac{\partial K}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \lambda} = \frac{\partial K}{\partial \lambda} + \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} \\ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right\rangle_{H_0^1} \end{cases}$$

Les dérivées premières de  $K$  ayant déjà été évaluées, il nous reste à estimer les produits  $\left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1}$  et  $\left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right\rangle_{H_0^1}$

Pour cela, écrivons  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda}$  sous la forme

$$(2.28) \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} = w + a P \delta_{\lambda,x} + b \frac{\partial P \delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} + c \frac{\partial P \delta_{\lambda,x}}{\partial x}$$

avec  $(a, b, c) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$  et  $w \in E_{\lambda,x}$ . On a alors

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} &= a \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, P \delta_{\lambda,x} \right\rangle_{H_0^1} + b \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P \delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} + c \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P \delta_{\lambda,x}}{\partial x} \right\rangle_{H_0^1} \\ &= a \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{b}{\alpha} \frac{\partial K}{\partial \lambda} + \frac{c}{\alpha} \frac{\partial K}{\partial x} \end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on multiplie scalairement dans  $H_0^1(\Omega)$  (2.28) par respectivement  $P \delta_{\lambda,x}$ ,  $\frac{\partial P \delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial P \delta_{\lambda,x}}{\partial x}$ , on obtient un système linéaire quasi-diagonal en  $a, b, c$ , dont les coef-



ficients sont donnés par (2.22) et le second membre par

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda}, P\delta_{\lambda,x} \right\rangle_{H_0^1} &= -\left\langle \bar{v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} = 0 \\ \left\langle \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} &= -\left\langle \bar{v}, \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda^2} \right\rangle_{H_0^1} = O\left(\frac{|\bar{v}|_{H_0^1}}{\lambda^2}\right) \\ \left\langle \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \right\rangle_{H_0^1} &= -\left\langle \bar{v}, \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda \partial x} \right\rangle_{H_0^1} = O(|\bar{v}|_{H_0^1})\end{aligned}$$

étant donné que  $\left| \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda^2} \right|_{H_0^1} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  et  $\left| \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda \partial x} \right|_{H_0^1} = O(1)$ .

La résolution du système nous donne alors

$$(2.30) \quad \begin{cases} a = O\left(\frac{|\bar{v}|_{H_0^1}}{\lambda^{N-1}d^{N-2}}\right) \\ b = O(|\bar{v}|_{H_0^1}) \\ c = O\left(\frac{|\bar{v}|_{H_0^1}}{\lambda^2}\right) \end{cases}$$

En utilisant le fait que  $\varphi(x) \sim \frac{1}{(2d(x, \partial\Omega))^{N-2}}$  quand  $d(x, \partial\Omega) \rightarrow 0$  ([R2]), on voit que sur  $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$  on a  $\frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} = O(\varepsilon d^{N-1})$  et donc, à partir de (2.15) (2.16) (2.17) on obtient

$$(2.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \alpha} = O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda} = O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2}{N-2}} d^{\frac{N^2-2}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2N+2}{N-2}} d^{\frac{6N-6}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2N+6}{N-2}} d^{\frac{2N-2}{N-2}}\right) \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda} = O\left(\varepsilon^2 d^{N-1} + \frac{\varepsilon^{\frac{2N+2}{N-2}}}{d^{\frac{2N-2}{N-2}}}\right) \end{cases}$$

De (2.29) (2.30) (2.31) on déduit finalement que

$$(2.32) \quad \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} = O\left[|\bar{v}|_{H_0^1} \left(\varepsilon^{\frac{2(N-1)}{N-2}} d^{\frac{N(N-1)}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2(N+1)}{N-2}} d^{\frac{6(N-1)}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2(N+3)}{N-2}} d^{\frac{2(N-1)}{N-2}}\right)\right]$$

De la même manière on trouve que

$$(2.33) \quad \left\langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right\rangle_{H_0^1} = O\left[|\bar{v}|_{H_0^1} \left(\varepsilon^{\frac{2(N-3)}{N-2}} d^{\frac{(N-4)(N-1)}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2(N-1)}{N-2}} d^{\frac{2(N-1)}{N-2}} + \frac{\varepsilon^{\frac{2(N+1)}{N-2}}}{d^{\frac{2(N-1)}{N-2}}}\right)\right]$$

(2.12) et (2.13) nous donnant de plus l'estimation

$$(2.34) \quad |\bar{v}|_{H_0^1} = O\left[\varepsilon^2 d^{N-1} + \varepsilon^p \text{ si } N < 6; \varepsilon^2(1 + |\text{Log}\varepsilon|^{2/3}d^5) \text{ si } N = 6; \varepsilon^p \text{ si } N > 6\right]$$

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer les dérivées de  $\mathcal{K}$  sur le bord de  $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$ . On voit facilement d'après (2.15) et (2.27) que pour  $d$  assez petit, puis  $\varepsilon$  assez petit, on a pour tout  $(\rho, \lambda, x) \in \mathcal{M}_{d,\varepsilon}$

$$(2.35) \quad \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho}(-\theta\varepsilon^2, \lambda, x) < 0 < \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho}(\theta\varepsilon^2, \lambda, x)$$

avec un bon choix de  $\theta$ , indépendant de  $d$  et de  $\varepsilon$ . De même, en combinant (2.16) (2.27) avec (2.32) (2.34) obtient-on sous les mêmes conditions

$$(2.36) \quad \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \lambda}(\rho, \frac{\varepsilon \tilde{f}(x)}{2c_N \varphi(x)}, x) < 0 < \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \lambda}(\rho, \frac{3\varepsilon \tilde{f}(x)}{2c_N \varphi(x)}, x)$$

Notons  $\Omega_d = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > d\}$  et  $n(x)$  la normale sortante en  $x \in \partial\Omega_d$  au bord de  $\Omega_d$ . On a l'équivalence  $\varphi'(x) \sim \frac{N-2}{2^{N-1}d^{N-1}}n(x)$  quand  $d \rightarrow 0$  ([R2]), et  $\tilde{f}'(x).n < 0$  pour  $d$  assez petit d'après le principe du maximum fort ( $f$  étant supposée positive). En combinant alors (2.17) (2.27) avec (2.33) (2.34) on obtient toujours sous les mêmes conditions

$$(2.37) \quad \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n}(\rho, \lambda, x).n(x) > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega_d$$

La théorie de Ljusternik-Schnirelman assure alors que  $\mathcal{K}$  possède au moins autant de points critiques dans  $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$  que la catégorie de  $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$ . Or  $\text{cat } \mathcal{M}_{d,\varepsilon} = \text{cat } \Omega_d$  et  $\text{cat } \Omega_d = \text{cat } \Omega$  pour  $d$  assez petit,  $\Omega$  étant supposé régulier.

On prouve comme précédemment que les solutions de  $(Q_\varepsilon)$  correspondantes sont strictement positives. Par construction, elles se concentrent chacune quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  autour d'un point de  $\Omega$ , et le système  $(E)$  montre alors que ces points sont critiques pour la fonction  $x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$ . Ceci achève la démonstration de la deuxième partie du Théorème 1.

### Remarque

En combinant les estimations obtenues ici avec celles de [R1], on peut démontrer, si l'on considère le problème

$$(R_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \varepsilon u + \varepsilon f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

les résultats suivants (en supposant  $f$  assez régulière) :

Si  $N = 4, 5$ , et si  $x_0 \in \Omega$ ,  $\tilde{f}(x_0) > 0$ , est point critique non dégénéré de la fonction

$$x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$$

Si  $N = 6$ , et si  $x_0 \in \Omega$ ,  $\tilde{f}(x_0) > -1/2$ , est point critique non dégénéré de la fonction

$$x \rightarrow \frac{\tilde{f}(x) + 1/2}{\varphi(x)^{1/2}}$$

Si  $N > 6$ , et si  $x_0 \in \Omega$  est point critique non dégénéré de la fonction  $\varphi$  alors il existe une famille  $(u_\varepsilon)$  de solutions de  $(R_\varepsilon)$  qui se concentrent en  $x_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si  $f \geq 0$ , ces solutions sont strictement positives.

Notons enfin que pour  $N = 5$ , le même résultat vaut si  $x_0$  est point critique non-dégénéré de  $\tilde{f}$ , avec  $\tilde{f}(x_0) = 0$ .

## Appendice

### Preuve de la Proposition 1

H. Brézis et L. Nirenberg ont considéré dans [BN2] le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu(u + \varphi)^p & \text{sur } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\mu$  est un réel fixé,  $\varphi \in H^1(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi \not\equiv 0$ .

Ils assurent l'existence de  $\mu^* < +\infty$  tel que pour tout  $\mu \in [0, \mu^*]$  il existe une plus petite solution régulière  $\underline{u}(\mu)$  au problème, alors qu'il n'y a pas de solution pour  $\mu > \mu^*$ . Cette branche de solutions est obtenue en appliquant le théorème des fonctions implicites à partir du point  $\underline{u}(0) = 0$ . De plus, pour  $\mu \in [0, \mu^*[$ , la première valeur propre du problème linéarisé en  $\underline{u}(\mu)$  est positive, ce qui permet en utilisant le lemme du col de montrer l'existence d'une deuxième solution – régulière elle aussi.

Si l'on prend maintenant  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $f \geq 0$ , et qu'on définit  $\varphi$  par

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = f & \text{sur } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on a :  $\varphi \in H_0^1(\partial\Omega)$ ,  $\varphi > 0$ ,  $\varphi \not\equiv 0$ —et donc l'existence de deux solutions au problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v^p + f & \text{sur } \Omega \\ v > 0 & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où l'on a posé  $v = u + \varphi$ , ou encore, en posant  $w = \mu^{\frac{1}{p-1}} v$ , l'existence de deux solutions au problème

$$\begin{cases} -\Delta w = w^p + \mu^{\frac{1}{p-1}} f & \text{sur } \Omega \\ w > 0 & \text{sur } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour  $\mu \in ]0, \mu^*[$ , d'où le résultat recherché.

## References

- [B] A. BAHRI, Critical points at infinity in some variational problems, Pitman Research Notes in Mathematics Series **182**, Longman, 1989.
- [BC] A. BAHRI, J.-M. CORON, On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : the effect of the topology of the domain, *Comm. Pure Applied Math.* **41** (1988), pp. 255–294.
- [BN1] H. BRÉZIS, L. NIRENBERG, Positive solutions of nonlinear equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Applied Math.* **36** (1983), pp. 437–477.
- [BN2] H. BRÉZIS, L. NIRENBERG, A minimization problem with critical exponent and nonzero data, à paraître.
- [BP] H. BRÉZIS, L.A. PELETIER, Asymptotics for elliptic equations involving critical growth, à paraître.
- [H] Z.C. HAN, Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, à paraître.
- [R1] O. REY, The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent, *J. Funct. Analysis* **89** (1990), no. 1, pp. 1–52.
- [R2] O. REY, A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness, *J. Nonlinear Anal. TMA*, vol. 13, no. 10 (1989), pp. 1241–1249.
- [R3] O. REY, Proof of two conjectures of H. Brézis and L.A. Peletier, *Manuscripta Math.* **65** (1989), pp. 19–37
- [R4] O. REY, Bifurcation from infinity in a nonlinear elliptic equation involving the limiting Sobolev exponent, à paraître au *Duke Math. Journal* (juin 1990).