HAL open science

Modélisation simplifiée de la modération dans le cas hétérogène.

Bertrand Mercier

To cite this version:

Bertrand Mercier. Modélisation simplifiée de la modération dans le cas hétérogène.. 2014. hal-00943290

HAL Id: hal-00943290

https://hal.science/hal-00943290v1

Preprint submitted on 7 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation simplifiée de la modération dans le cas hétérogène.
19/1/14 B. Mercier

Résumé

On propose dans cet article un modèle simplifié du ralentissement en mode hétérogène.
On suppose que le cœur est constitué de plaques combustibles séparées par des lames de modérateur. Pour fixer les idées, on considère que le modérateur est de l'eau légère.
Le modèle que nous proposons est un modèle à 3 groupes (rapide, épithermique, thermique).
La plaque de combustible est à la fois une source de neutrons de fissions et un absorbant des neutrons qui sortent du modérateur.
Nous adoptons pour simplifier un albedo constant égal à α pour le groupe rapide, β pour le groupe épi-thermique et 0 pour le groupe thermique.
L'approximation diffusion est utilisée dans chacun des 3 groupes.
Les équations sont couplées, comme il convient dans un modèle multigroupe.

1. <u>Le modèle proposé</u>.

On considère une lame d'eau d'épaisseur $2L$ située entre 2 plaques de combustible.
On appelle Oz l'axe orthogonal aux deux plaques et on place l'origine de telle façon que l'interface entre l'eau et les deux plaques soit situées en z = $\mp L$.
Par symétrie, on peut se donner des conditions de réflexion en z = 0.
On se place dans le fomalisme multigroupe avec 3 groupes :

(1.1) $\quad -D\,\varphi'' + \Sigma_1\,\varphi = S_0,$

(1.2) $\quad -D\,\psi'' + \Sigma_2\,\psi = \Sigma_{12}\,\varphi\,,$

(1.3) $\quad -D\,\omega'' + \Sigma_a\,\omega = \Sigma_{23}\psi\,,$

pour $\quad 0 \le z \le L.$

Dans ces équations φ, ψ, ω désignent les flux dans les groupes 1, 2 et 3 respectivement.
La léthargie étant reliée à l'énergie des neutrons par la formule

$$E = E_0 e^{-u} \text{ avec } E_0 = 10^7\ ev,$$

le groupe 1 correspondra aux léthargies $0 \le u \le 10$, le groupe 2 aux léthargies $10 \le u \le 15$ et le groupe 3 aux léthargies ≥ 15. Avec ce choix, le groupe 2 qui couvre l'intervalle 3,06 ev à 445 ev inclut la zone des résonances résolues, dans laquelle les neutrons courent le risque d'être capturé par l'U238.
On modélise les propriétés d'absorption du combustible par un albedo, c'est-à-dire un coefficient qui relie le courant entrant J_- au courant sortant J_+ .
Dans le cadre de l'approximation diffusion, on sait que

$$J_- = \frac{1}{4}\varphi(L) + \frac{D}{2}\varphi'(L)$$

$$J_+ = \frac{1}{4}\varphi(L) - \frac{D}{2}\varphi'(L)$$

Supposer que

$$J_- = \alpha\, J_+$$

avec $0 \le \alpha \le 1$ revient à imposer la condition aux limites

(1.4) $\quad (1-\alpha)\,\varphi(L) + 2D\,(1+\alpha)\varphi'(L) = 0$

De même imposer un albedo égal à β pour le courant dans le groupe 2 revient à imposer

(1.5) $\quad (1-\beta)\,\psi(L) + 2D\,(1+\beta)\psi'(L) = 0.$

Dans le groupe thermique, on supposera tout simplement que le courant entrant est nul :

(1.6) $\frac{1}{4}\omega(L) + \frac{D}{2}\omega'(L) = 0.$

Cette hypothèse est justifiée par la grande valeur de la section efficace d'absorption de l'U235 dans le domaine thermique. Tout se passe comme-ci le coefficient d'albedo était nul dans ce groupe.

En z = 0, on imposera 3 conditions de symétrie :

(1.7) $\varphi'(0) = 0$

(1.8) $\psi'(0) = 0$

(1.9) $\omega'(0) = 0$

Quand chaque cm^2 de plaque combustible injecte Φ neutrons/s de fissions dans l'eau légère, on voudrait savoir combien vont être absorbés par l'eau, combien vont être capturés par l'U^{238} dans le domaine épithermique, et combien vont être absorbés par l'U^{235} dans le domaine thermique. En effet, en première approximation, ceux qui sortent trop tôt du modérateur risquent d'être capturés, et ceux qui en sortent dans le domaine thermique ont des chances de donner lieu à des fissions.

Remarquons que si la plaque de combustible a une épaisseur δ, certains neutrons peuvent la traverser sans être absorbés (et sans perdre d'énergie). Physiquement ces neutrons réapparaissent donc dans le modérateur en $z \geq L + \delta$ avec un cosinus directeur positif mais par périodicité, c'est la même chose si on les renvoie dans le modérateur en $z = L$, et donc en changeant le signe de leur cosinus directeur.

Dans le cadre de cette étude, on supposera, pour simplifier, que, pour l'eau, les sections efficaces macroscopiques de diffusion et d'absorption sont *indépendantes* de l'énergie des neutrons.

Dans ce qui suit, on prendra Σ_s = 3,57 cm^{-1} et Σ_a = 0,02 cm^{-1}, et on posera $\Sigma_t = \Sigma_s + \Sigma_a$.

Remarque 1.1 :

Par conservation des neutrons on doit avoir $\Sigma_1 = \Sigma_a + \Sigma_{12}$ et $\Sigma_2 = \Sigma_a + \Sigma_{23}$.

De fait, en sommant les 3 équations (1.1) à (1.3), on obtient :

(1.10) $-D\,(\varphi + \psi + \omega)'' + \Sigma_a\,(\varphi + \psi + \omega) = S_0.$

qui n'est autre que l'équation de diffusion à 1 groupe.

Nous aurions pu mettre une source S_i différente dans chacun des 3 groupes $i = 1,2,3$ avec $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, mais le spectre des neutrons de fission étant centré sur 2 Mev, physiquement S_2 et S_3 sont négligeables et $S_1 \cong S_0$.

Dans la mesure où nous choisissons 3 albedos différents en $z = L$ dans chacun des 3 groupes, notre modèle n'est pas équivalent au modèle à 1 groupe. ■

Nous nous intéressons à la fuite dans le groupe 3 : en effet les neutrons thermiques qui vont passer de l'eau au combustible sont des neutrons utiles qui feront des fissions dans l'U^{235}.

Le groupe 2 correspond à la zone des résonances résolues dans l'U^{238}, et c'est une gamme de léthargie dans laquelle les neutrons risquent fort de se faire capturer.

Nous nous donnerons un albedo α = 0,5 dans ce groupe : seulement 50% des neutrons qui passent de l'eau au combustible dans cette gamme de léthargie reviendront dans l'eau : les autres sont supposés capturés.

Au contraire le groupe 1 correspond à une gamme de léthargie dans laquelle la section efficace de capture de l'U^{238} est faible. On supposera que l'albedo est égal à 0,95.

Le problème aux deux bouts (1.1) à (1.9) peut être résolu simplement, de façon approchée, par la méthode des différences finies.
Dans le cadre de la présente étude, nous ferons en section 3 une approximation qui nous permettra de trouver une solution analytique sous la forme de sommes de cosinus hyperboliques.
De cette façon, il sera assez facile de dégager des tendances.

2. <u>Introduction de la source</u> S_0

On va choisir pour S_0 la source de première collision, que nous allons introduire dans cette section.
Si l'on était dans le cadre de l'équation de Boltzmann, au lieu de chercher, dans le groupe 1, un flux φ moyenné en angle, exprimé en neutrons/cm^2/s on chercherait un flux neutronique $\Phi = \Phi(x, \Omega)$ qui serait exprimé en n/stéradians/cm^2/s.
Si on désigne par θ l'angle polaire et par γ l'angle azimutal permettant de déterminer $\overrightarrow{\Omega}$, on a

$$\overrightarrow{\Omega} = \{\cos\gamma\ \sin\theta, \sin\gamma \sin\theta, cos\theta\}$$

Du fait de la symétrie axiale, on peut supposer que le flux neutronique ne dépend pas de γ.
On pose $\mu = \cos\theta$, et on écrit que $\Phi = \Phi(z, \mu)$.
On sait que Φ vérifie l'équation de Boltzmann :

(2.1) $\mu \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Sigma_t\, \Phi = \Sigma_s\, K_0\Phi$, pour $0 \le z \le L, -1 \le \mu \le 1$,

où K_0 est l'opérateur intégral défini par :

$$(K_0\Phi)(\mu) = \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu')\Phi\,(\mu')d\mu'$$

et $p(\mu, \mu')$ est la probabilité pour qu'un neutron ayant une collision en z et arrivant dans la direction μ', soit renvoyé après collision dans la direction μ, de sorte que

(2.2) $\int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu')\, d\mu = 1$.

Pour l'équation de Boltzmann aussi, on a besoin de conditions aux limites en $z = 0$ et $z = L$;
on va supposer que le flux *entrant* dans la lame d'eau est connu, et qu'il suit la loi de Lambert (aussi appelée loi du cosinus).
En $z = L$, on a donc

$$\Phi(L, \mu) = -A\mu \quad \text{pour } \mu < 0$$

En $z = 0$, on adoptera des conditions de réflexion

$$\Phi(0, \mu) = \Phi(0, -\mu) \quad \text{pour } \mu > 0.$$

Pour introduire la source de première collision, on introduit la solution Ψ de l'équation de Botzmann sans second membre :

(2.3) $\mu \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \Sigma_t\, \Psi = 0$, pour $0 \le z \le L, -1 \le \mu \le 1$,

(2.4) $\Psi\,(L, \mu) = -\,A\mu$ pour $\mu < 0$

(2.5) $\Psi\,(0, \mu) = \Psi(0, -\mu)$ pour $\mu > 0$.

Il est facile de vérifier que :

$$\Psi\,(x, \mu) = -A\mu\ \exp\left(\frac{\Sigma_t(L-z)}{\mu}\right) \quad \text{si } \mu < 0,$$

$$\Psi\,(x, \mu) = A\mu\ \exp\left(-\frac{\Sigma_t(L+z)}{\mu}\right) \quad \text{si } \mu > 0.$$

Soit $\Phi_0 = \Phi - \Psi$, et $S = \Sigma_s\, K_0\, \Psi$, on voit que Φ_0 est solution de l'équation suivante :

(2.6) $\mu \frac{\partial}{\partial z}\Phi_0 + \Sigma_t\, \Phi_0 = \Sigma_s\, K_0\Phi_0 + S$, pour $0 \le x \le L, -1 \le \mu \le 1$,

(2.7) $\Phi_0\,(L,\mu) = 0$ pour $\mu < 0$

(2.8) $\Phi_0\,(0,\mu) = \Phi_0(0,-\mu)$ pour $\mu > 0$.

La source S est appelée *source de première collision*.

On va maintenant remplacer le problème (2.3)(2.4)(2.5) par un problème approché en utilisant la théorie de la diffusion.

Soient φ_0 , J et S_0 définis par :

$$\varphi_0(z) = \int_{-1}^{+1} \Phi_0\,(z,\mu)d\mu$$

$$J(z) = \int_{-1}^{+1} \mu\Phi_0\,(z,\mu)d\mu$$

$$S_0(z) = \int_{-1}^{+1} S\,(z,\mu)d\mu = \int_{-1}^{+1} \Sigma_s\,(K_0\Psi)\,(z,\mu)d\mu$$

$$= \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathrm{p}(\mu,\mu')\Psi\,(z,\mu')d\mu'\,d\mu$$

$$= \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \Psi(z,\mu')d\mu'$$

Par intégration en μ de (2.1), on obtient, en remarquant que

$$\int_{-1}^{+1} (K_0\Phi_0)\,(z,\mu)d\mu = \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathrm{p}(\mu,\mu')\Phi_0\,(z,\mu')d\mu'\,d\mu$$

$$= \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \Phi_0(z,\mu')d\mu' = \Sigma_s\,\varphi_0(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}J + \Sigma_t\,\varphi_0 = \Sigma_s\,\varphi_0 + S_0$$

c'est-à-dire :

(2.9) $\frac{\partial}{\partial z}J + \Sigma_a\,\varphi_0 = S_0$

que l'on complète avec la loi de Fick

(2.10) $J = -\,D\,\frac{d}{dz}\varphi_0$.

On voit que φ_0 vérifie l'équation de diffusion (1.10) ; le flux φ qui apparaît dans notre modèle à 3 groupes n'est donc pas tout le flux rapide, en effet on a

$$\Phi = \Phi_0 + \Psi,$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} \Phi\,(z,\mu)d\mu = \int_{-1}^{+1} (\Phi_0 + \Psi)\,(z,\mu)d\mu = \varphi(z) + \int_{-1}^{+1} \Psi\,(z,\mu)d\mu\,.$$

Dans la mesure où nous avons supposé que Σ_t et Σ_s sont indépendants de u, nous avons pas eu besoin de faire apparaître la dépendance en u de Φ dans (2.1) ni pour Ψ dans (2.3).

Il est évident (voir remarque 1.1) que la contribution de Ψ aux groupes 2 et 3 est négligeable.

<u>Remarque 2.1 :</u>

Physiquement, à chaque collision, il y a un lien entre l'angle de déviation et le saut de léthargie (ou d'énergie). On pourrait donc souhaiter considérer l'équation de Boltzmann pour $\Phi = \Phi(z,\mu,u)$, à savoir

(2.11) $\mu\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Sigma_t\,\Phi = \Sigma_s\,K_1\Phi$, pour $0 \le z \le L, -1 \le \mu \le 1, u \ge 0$

où K_1 est l'opérateur intégral défini par :

$$(K_1\Phi)(\mu,u) = \int_0^{\infty} du' \int_{-1}^{+1} \mathrm{k}(\mu,\mu';u,u')\Phi\,(\mu',u')d\mu'.$$

Maintenant, comme le montrent les simulations Monte-Carlo (voir figure ci-dessous), cela fait peu de différences, pour l'eau, si on suppose que le noyau k est de la forme :

$$\mathrm{k}(\mu,\mu';u,u') = \mathrm{p}(\mu,\mu')\mathrm{q}(u,u')$$

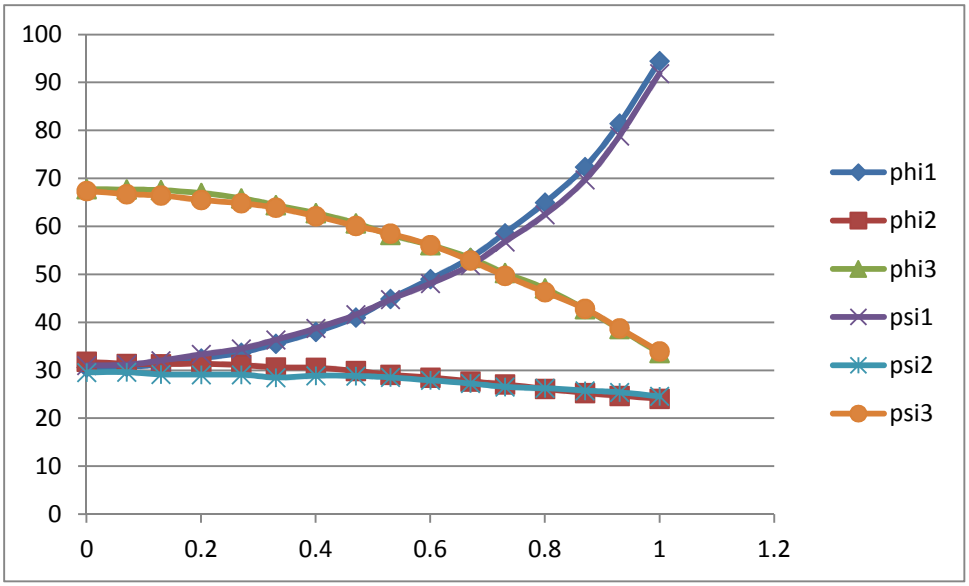

Fig 2.1 Comparaison d'un calcul Monte-Carlo avec ou sans corrélation entre la déviation angulaire et le saut en léthargie. La demi-épaisseur L de la lame d'eau est égale à 1 cm (abscisse). Les flux intégrés en léthargie dans les 3 groupes considérés figurent en ordonnée.

Statistiquement, cela veut dire que l'on décide indépendamment le changement de direction ($\mu' \rightarrow \mu$) et le changement de léthargie ($u' \rightarrow u$). On sait d'ailleurs que pour l'eau

$$q(u,u') = e^{u'-u} \text{ si } u' \leq u \text{ et zéro sinon}$$

En intégrant l'équation (2.7) par rapport à u, et en remarquant que

$$\int_0^\infty q(u,u')du = 1$$

on voit que l'équation (2.11) pour $\Phi(z,\mu,u)$ redonne l'équation (2.1) pour $\Phi(z,\mu)$.
Maintenant si on tronque l'intégrale à $u = 10$, on commet une petite erreur qui est négligeable dans la mesure où les neutrons de fission correspondent à la gamme de léthargie $1 \leq u \leq 4$ et où $e^{-6} \cong 0{,}002$.■

<u>Remarque 2.2</u> : Bilan neutronique.
Quand on intégre l'équation (2.3) en z et en μ, on obtient

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_0^L \left(\mu \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Sigma_t \Psi\right) dz = \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^L \Sigma_t \Psi \, dz + \int_{-1}^{1} \mu(\Psi(L,\mu) - \Psi(0,\mu))d\mu$$

Le premier terme s'interprète comme une absorption. Mais celle-ci se scinde en deux parties :

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_0^L \Sigma_a \Psi \, dz$$

lequel correspond à une capture dans l'eau et

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_0^L \Sigma_s \Psi \, dz$$

qui correspond aux neutrons réémis par la source S_O, dans l'équation (1.1).
Les conditions aux limites (2.4) et (2.5) montrent que le deuxième terme se transforme en :

$$\int_{-1}^{1} \mu(\Psi(L,\mu) - \Psi(0,\mu))d\mu = \int_{-1}^{1} \mu\Psi(L,\mu)d\mu - \int_{-1}^{1} \mu\Psi(0,\mu)d\mu$$

$$= -\int_{-1}^{0} A\mu^2 d\mu + \int_0^1 \mu\Psi(L,\mu)d\mu - \int_0^1 (\mu\Psi(0,\mu) - \mu\Psi(0,-\mu)d\mu$$

$$= -\int_{-1}^{0} A\mu^2 d\mu + \int_0^1 \mu\Psi(L,\mu)d\mu.$$

On en déduit que le courant des neutrons qui rentrent :

$$J_- = \int_{-1}^{0} \mathrm{A}\mu^2 d\mu = \int_0^1 \mathrm{A}\mu^2 d\mu$$

est égal à la capture + le transfert + la fuite

$$J_+ = \int_0^1 \mu\Psi(\mathrm{L},\mu) d\mu. \blacksquare$$

Noter que nous avons omis le facteur 2π qui serait nécessaire pour obtenir une évaluation de tous les neutrons qui rentrent dans la lame d'eau. On peut donc noter le fait qu'ici et dans la suite le courant sortant, l'absorption, le flux neutronique et la source seraient à multiplier par 2π.■

3. Approximation de la source de première collision.

Dans ce qui suit, nous allons remarquer que la source de première collision S_0 peut être approchée, avec une assez bonne précision, par la somme de deux cosinus hyperbolique.

En partant de la définition de Ψ, on a pour $\mu > 0$

$$\Psi\,(z,-\mu) + \Psi\,(z,\mu) = A\mu\ \exp\left(-\frac{\Sigma_t(L-z)}{\mu}\right) + A\mu\ \exp\left(-\frac{\Sigma_t(L+z)}{\mu}\right)$$

$$\Psi\,(z,-\mu) + \Psi\,(z,\mu) = A\mu\ \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu}\right)\left(e^{\frac{z\Sigma_t}{\mu}} + e^{-\frac{z\Sigma_t}{\mu}}\right) = 2A\mu\ \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu}\right) ch(\frac{z\Sigma_t}{\mu})$$

Donc

$$S_0(z) = \Sigma_s \int_{-1}^{+1} \Psi(z,\mu')d\mu' = \Sigma_s \int_0^1 \big(\Psi\,(z,-\mu) + \Psi\,(z,\mu)\big)\, d\mu$$

$$= 2A\,\Sigma_s \int_0^1 \mu \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu}\right) ch(\frac{z\Sigma_t}{\mu})\ d\mu$$

En introduisant les 2 points μ_1 et μ_2 de la formule d'intégration de Gauss sur l'intervalle $[0,1]$ on peut donc approcher $S_0(z)$ par

(3.1) $$S_0(z) \cong A\,\Sigma_s \left[\mu_1 \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu_1}\right) ch(\frac{z\Sigma_t}{\mu_1}) + \mu_2 \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu_2}\right) ch(\frac{z\Sigma_t}{\mu_2})\right]$$

Numériquement, on observe que l'erreur commise est en moyenne de l'ordre de 1%.

Nous posons à présent

$$E_1 = \frac{A}{D}\Sigma_s\ \mu_1 \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu_1}\right) \qquad g_1 = \frac{\Sigma_t}{\mu_1}$$

$$E_2 = \frac{A}{D}\Sigma_s\ \mu_2 \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu_2}\right) \qquad g_2 = \frac{\Sigma_t}{\mu_2}$$

de sorte que

(3.2) $$S_0(z) = D\ [E_1 ch(\,g_1 z) + E_2 ch(g_2 z)].$$

<u>Remarque 3.2 :</u> Bilan neutronique.

En reprenant les calculs effectués en remarque 2.2, nous voyons que

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_0^L \Psi\, dz = \int_0^1 d\mu \int_0^L (\Psi\,(z,-\mu) + \Psi\,(z,\mu))dz$$

$$= 2A \int_0^1 d\mu \int_0^L \mu\ \exp\left(-\frac{L\Sigma_t}{\mu}\right) ch(\frac{z\Sigma_t}{\mu})dz$$

$$\cong \frac{D}{\Sigma_s}\int_0^L (E_1 ch(\,g_1 z) + E_2 ch(g_2 z))dz$$

$$= \frac{D}{\Sigma_s}\left(\frac{E_1}{g_1} sh(\,g_1 L) + \frac{E_2}{g_2} sh(g_2 L)\right.$$

La capture dans l'eau est donc

$$\frac{D\Sigma_a}{\Sigma_s}\left(\frac{E_1}{g_1} sh(\,g_1 L) + \frac{E_2}{g_2} sh(g_2 L)\right.$$

et le transfert dans le groupe 1 est

(3. 3) $D(\ \frac{E_1}{g_1} sh(\ g_1 L) + \frac{E_2}{g_2} sh(g_2 L).$

Le courant entrant est :

$$J_- = \int_0^1 \mathrm{A}\mu^2 d\mu = \frac{A}{3}$$

(noter que la formule de Gauss à 2 points est exacte pour les polynômes de degré 2.

La fuite est égale à

$$J_+ = \int_0^1 \mu\Psi(\mathrm{L},\mu)d\mu = A\int_0^1 \mu^2\ \exp\left(-\frac{2\,L\,\Sigma_t}{\mu}\right) d\mu \cong \frac{A}{2}(\mu_1^2 \exp(-2g_1 L) + \mu_2^2 \exp(-2g_2 L)\ ).\ \blacksquare$$

4. Résolution de l'équation (1.1)

On pose maintenant $a = \sqrt{\frac{\Sigma_1}{D}}$. Comme

$$\frac{S_0}{D} = E_1\ \mathrm{ch}(g_1.z) + E_2\ \mathrm{ch}(g_2.z)$$

on voit que φ est solution de l'équation :

(4.1) $-\varphi'' + a^2\ \varphi = E_1\ \mathrm{ch}(g_1.z) + E_2\ \mathrm{ch}(g_2.z)$

(4.2) $\varphi'(0) = 0$

Pour résoudre cette équation, on remarque tout d'abord que, pour $i = 1{,}2$

$$\varphi_i(x) = \frac{E_i}{a^2 - g_i^2}\ \mathrm{ch}(g_i.z)$$

est solution de

(4.3) $-\varphi_i'' + a^2\ \varphi_i = E_i\ \mathrm{ch}(g_i.z)$

(4.4) $\varphi_i'(0) = 0$

La somme $\varphi_1 +\ \varphi_2$ est donc une solution particulière de (4.1) (4.2).

La solution générale est donc :

(4.5) $\varphi(z) =\ B\,\mathrm{ch}(a.z) +\ \varphi_1(z) +\ \varphi_2(z) = B\,\mathrm{ch}(a.z) - F_1\ \mathrm{ch}(g_1.z)\ - F_2\ \mathrm{ch}(g_2.z)$

où l'on a posé $F_i = \frac{E_i}{g_i^2 - a^2}$ pour $i = 1{,}2$.

La condition (1.14) permet de fixer la valeur de B : nous n'expliciterons pas les calculs.

<u>Remarque 4.1</u> : Bilan neutronique pour le groupe 1

Le flux transféré par la source de première collision est donné par (3.3).

Le courant sortant est

$$J_+ = \frac{1}{4}\varphi(L) - \frac{D}{2}\varphi'(L)$$

le courant rentrant est $J_- =\ \alpha\, J_+$.

L'absorption est

$$\int_0^L \Sigma_1\ \varphi\ dx = \Sigma_1\left(\frac{B}{a}\mathrm{sh}(a.L) - \frac{F_1}{g_1}\ \mathrm{sh}(g_1.L) - \quad \frac{F_2}{g_2}\mathrm{sh}(g_2.L)\right)\ .$$

L'absorption se scinde en deux parties : la capture par l'eau (remplacer Σ_1 par Σ_a) et par le transfert du groupe 1 au groupe 2 (remplacer Σ_1 par Σ_{12}) ■

5. <u>Résolution de l'équation</u> (1.2)

Posons maintenant

$$b = \sqrt{\frac{\Sigma_2}{D}} \quad \text{et} \quad c = \frac{\Sigma_{12}}{D}$$

l'équation (1.2) est équivalente à

(5.1) $-\ \psi'' + b^2\ \psi\ =\ c\ \varphi.$

Comme précédemment, on remarque que

$$- C\ ch(a.z) + G_1\,\mathrm{ch}(g_1.z)\ + G_2\ \mathrm{ch}(g_2.z)$$

est une solution particulière de (5.1) si (noter qu'il faut que $a \neq b$ et donc que $\Sigma_2 \neq \Sigma_1$)

$$C = \frac{cB}{a^2-b^2}$$

$$G_1 = \frac{cF_1}{g_1^2-b^2}$$

$$G_2 = \frac{cF_2}{g_2^2-b^2}$$

La solution générale de (5.1)+(1.8) est donc

(5.2) $\psi(z) = Hch(b.z) - C\ ch(a.z) + G_1\,\mathrm{ch}(g_1.z)\ + G_2\ \mathrm{ch}(g_2.z)$

Il reste à choisir la constante H de telle sorte que la condition (5.5) soit vérifiée : comme précédemment, nous n'expliciterons pas les calculs

<u>Remarque 5.1</u> : Bilan neutronique pour le groupe 2.

Le terme transféré du groupe 1 au groupe 2, à savoir

$$\Sigma_{12}\left(\frac{B}{a}\mathrm{sh}(a.L) - \frac{F_1}{g_1}\ \mathrm{sh}(g_1.L) - \quad \frac{F_2}{g_2}\mathrm{sh}(g_2.L)\right)$$

est le terme source pour le groupe 2.

Le courant sortant est

$$J_+ = \frac{1}{4}\varphi(L) - \frac{D}{2}\varphi'(L)$$

le courant rentrant est $J_- = \alpha\, J_+$.

L'absorption est

$$\int_0^L \Sigma_2\ \psi\ dx = \Sigma_2\left(\frac{H}{b}sh(b.L) - \frac{C}{a}\mathrm{sh}(a.L) + \frac{G_1}{g_1}\ \mathrm{sh}(g_1.L) + \frac{G_2}{g_2}\mathrm{sh}(g_2.L)\right)\ .$$

L'absorption se scinde en deux parties : la capture par l'eau (remplacer Σ_2 par Σ_a) et par le transfert du groupe 2 au groupe 3 (remplacer Σ_2 par Σ_{23})

Pour le groupe 2 aussi, la source sera égale à l'absorption plus le courant net J_+- J_-. ■

6. <u>Résolution de l'équation</u> (1.3)

Si nous posons

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{c} = \frac{\Sigma_{23}}{D}$$

on aura, en tenant compte de (5.2) :

(6.1) $- \omega'' + \tilde{a}^2\,\omega = \tilde{c}\,\psi = \tilde{c}\,Hch(b.x) - \tilde{c}\,C\ ch(a.x) + \tilde{c}\,G_1\,\mathrm{ch}(g_1.x)\ + \tilde{c}\,G_2\ \mathrm{ch}(g_2.x)$

Pour résoudre cette équation on remarque que

$$\widetilde{H}ch(b.x) - \tilde{C}\ \ ch(a.x) + \widetilde{G_1}\,\mathrm{ch}(g_1.x)\ + \quad \widetilde{G_2}\,\mathrm{ch}(g_2.x)$$

est une solution particulière de (6.1) si

$$(\tilde{a}^2 - b^2)\widetilde{H} = \tilde{c}\,H$$

$$(\tilde{a}^2 - a^2)\tilde{C} = \tilde{c}\,C$$

$$(\tilde{a}^2 - g_1^2)\widetilde{G_1} = \tilde{c}\,G_1$$

$$(\tilde{a}^2 - g_2^2)\widetilde{G_2} = \tilde{c}\,G_2$$

On en déduit l'expression de la solution générale

$$\omega(x) = K\ ch(\tilde{a}.x) + \widetilde{H}ch(b.x) - \tilde{C}\ \ ch(a.x) + \widetilde{G_1}\,\mathrm{ch}(g_1.x) + \ \widetilde{G_2}\,\mathrm{ch}(g_2.x)$$

la valeur de K étant fixée par la condition (1.5).

Là encore, nous n'expliciterons pas les calculs.

7. <u>Résultats chiffrés.</u>

Pour obtenir des résultats chiffrés, il nous faut en premier lieu évaluer le coefficient de diffusion D. Pour cela on pourrait appliquer des résultats classiques (cf. p.ex. Reuss, précis de neutronique, p.300) :

$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$ avec $\Sigma_{tr} = \Sigma_t - \overline{\cos\theta}\ \Sigma_s$ et (pour l'eau $\overline{\cos\theta} = \frac{2}{3}$).

On a donc $\Sigma_{tr} = \Sigma_a + \Sigma_s - \frac{2}{3}\Sigma_s = \Sigma_a + \frac{1}{3}\Sigma_s$ = 0,02 + 1,19 = 1,21 cm^{-1}.

Donc D peut être pris égal à 1/3,63 = 0,275 cm. Toutefois, nous obtenons des résultats un peu meilleurs avec D = 0,5 cm

Il va falloir ensuite estimer les valeurs de Σ_{12} et Σ_{23}.

On en déduira les valeurs de $\Sigma_1 = \Sigma_{12} + \Sigma_a$ et de $\Sigma_2 = \Sigma_{23} + \Sigma_a$.

On va ajuster au mieux les valeurs de Σ_{12} et Σ_{23} par rapport à un calcul Monte-Carlo dans le modérateur effectué avec les mêmes conditions aux limites (α = 0,95 et β = 0,5).

Le meilleur choix semble être Σ_{12} = 0,75 cm^{-1} et Σ_{23} = 0,7 cm^{-1}.

Il permet d'obtenir les résultats représentés dans la figure ci-dessous, où il faut préciser que, pour être comparable au Monte-Carlo, nous représentons dans le groupe 1 non pas φ mais $\varphi + \frac{S_0}{\Sigma_s}$.

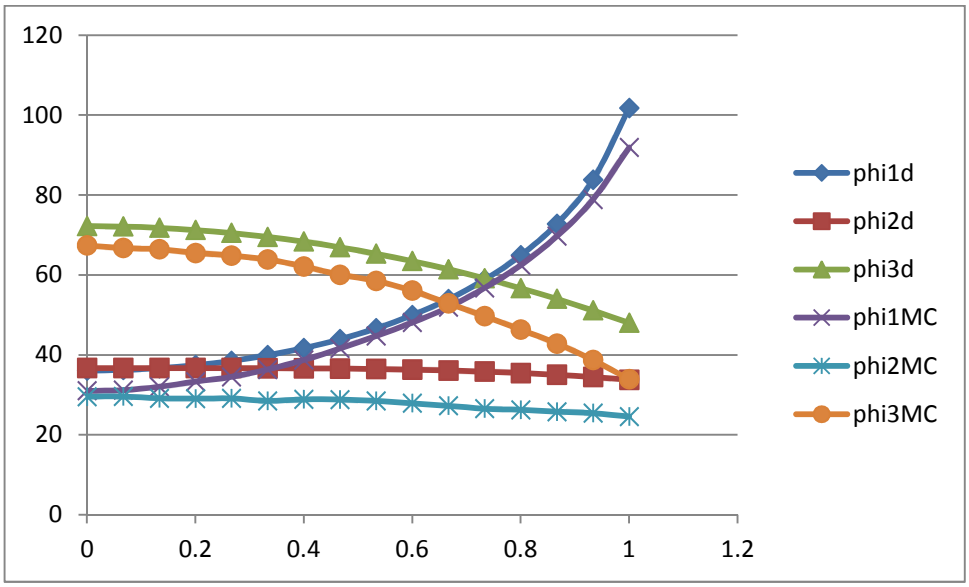

Fig7.1 Comparaison de notre modèle avec les résultats Monte-Carlo pour L = 1cm.

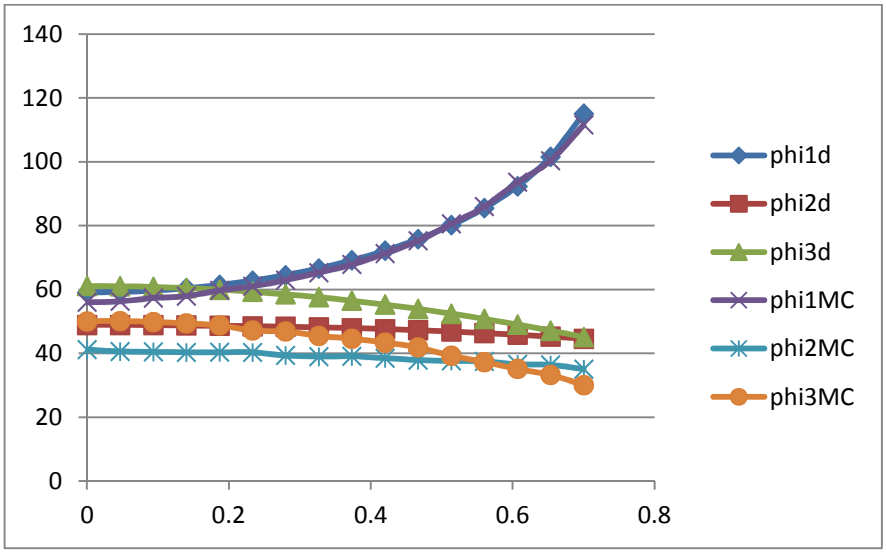

Fig7.2 Comparaison de notre modèle avec les résultats Monte-Carlo pour L = 1cm.

La valeur de A est choisie égale à 100 n/cm^2/s, mais on pourrait multiplier tous les chiffres par 10^{12} pour obtenir des valeurs plus représentatives de ce qui se passe dans un réacteur expérimental.
Il apparaît que, avec notre modèle simplifié, nous commettons une erreur de l'ordre de 15% sur les flux du groupe 2, et de 20% sur les flux du groupe 3. Toutefois, les ordres de grandeur y sont et les tendances sont bonnes.
En effet, avec le même jeu de paramètres, mais en prenant L = 0,7cm, nous obtenons la Fig 7.2

8. <u>Evaluation avec notre modèle des facteurs p et f de Fermi</u>.
On rappelle qu'Enrico Fermi a introduit la célèbre formule des 4 facteurs :

$$k_\infty = \varepsilon\, p\, f\, \eta$$

formule dans laquelle p désigne le facteur antitrappe, et f le facteur d'utilisation thermique.
En effectuant les calculs ci-dessus avec un albedo β = 0,5, nous obtenons les bilans suivants :

Récap	1st collision	Gr.1	Gr2	Gr3
source	33.333	33.144	31.638	25.285
transfert	33.144	31.638	25.285	0.000
capture	0.186	0.844	0.722	1.282
fuite	0.003	0.663	5.630	24.003
total	0.000	0.000	0.000	0.000

qui montrent que notre modèle apparaît plus comme un modèle à 4 groupes (ou à 3 groupes et demi). En effet, dans chacune des 4 colonnes, il y a un bilan équilibré entre source, capture, transfert et fuite.
Ce tableau nous permet d'évaluer la capture totale (3,034), la fuite dans les groupes 0, 1 et 2 (6,296) et la fuite dans le groupe 3 qui indique quels sont les neutrons utiles (ceux qui vont faire des fissions).
On peut donc facilement évaluer le produit $p.f$ = 24,003/33,333 =0,720. (en MC p.f = 0,678)
On peut aussi évaluer le facteur d'utilisation thermique f = 1-3,034/33,333=0,909. (MC f = 0,902)
On en déduit donc le facteur antitrappe en faisant le ratio $p.f$ sur f on trouve p = 0,792. (MC p=0,752). L'écart entre le facteur anti-trappe p donné par notre modèle et celui donné par la méthode Monte-Carlo n'est donc que de 5%.
Notre modèle nous permet d'étudier facilement la variation de f de p et de $p.f$ en fonction de L.
Le tableau ci-dessous montre que f est décroissant avec L. A contrario, p est croissant, comme il se doit avec L. Dans notre cas, l'optimum de modération est obtenu pour L = 1,4 cm.

L ==>	0,4 cm	0,5 cm	0,6 cm	0,7 cm	0,8 cm	0,9 cm	1,1 cm
f	0.944	0.938	0.932	0.926	0.920	0.915	0.903
p	0.590	0.653	0.697	0.730	0.756	0.776	0.805
pf	0.557	0.612	0.650	0.676	0.696	0.710	0.727