



HAL
open science

Armónicos en la Producción de Señales Senoidales con Actuadores Cuantizados

Manuel R. Arahall, Manuel Berenguel, Teodoro Alamo

► **To cite this version:**

Manuel R. Arahall, Manuel Berenguel, Teodoro Alamo. Armónicos en la Producción de Señales Senoidales con Actuadores Cuantizados. 2013. hal-00942236

HAL Id: hal-00942236

<https://hal.science/hal-00942236>

Submitted on 7 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Armónicos en la Producción de Señales Senoidales con Actuadores Cuantizados

Manuel R. Arahal^{a,*}, Manuel Berenguel^b, Teodoro Álamo^a

^a*DISA, Univ. de Sevilla, España.*

^b*Dpto. Informática, área ISA, Univ. de Almería, España.*

Abstract

Este trabajo propone la exploración del contenido armónico en las señales de control que tiene lugar al intentar producir señales senoidales mediante actuadores cuantizados en tiempo discreto. La aparición de armónicos ocurre en situaciones de interés práctico como por ejemplo en sistemas de control digital directo en los que la señal de control dispone únicamente de un número finito de valores. Este tipo de sistemas de control engloba a muchos tipos de controladores para los cuales las conclusiones son válidas. El análisis que se presenta se ilustra mediante algunos casos de complejidad creciente y se incluyen resultados experimentales. El punto principal del análisis es la distribución de armónicos en los dominios frecuencial y de amplitud. El estudio se realiza en un plano abstracto de gran generalidad y por ello constituye una metodología aplicable a distintos sectores. De éstos, el principal es el de los sistemas eléctricos con interruptores. Además, gracias a la generalidad del análisis las consecuencias extraíbles son de aplicación para muchos tipos de controladores: predictivos, neuronales, borrosos, adaptables, etc. con la única condición de que usen tiempo discreto, que la actuación esté cuantizada y que persigan producir señales senoidales. El análisis se basa en un enfoque no empleado en otras publicaciones que considera poblaciones de secuencias de señales de control para un ciclo fundamental. Copyright © XXXX CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Keywords:

converters, computer control, harmonics, quantized signals, inverter drives, bang-bang control, modulation.

1. Introducción

La producción de señales senoidales es necesaria en un gran número de problemas de ingeniería. En algunos casos el objetivo es la generación de una única señal de frecuencia fija (redes eléctricas), en otros se considera una única senoide pero de frecuencia variable (máquinas giratorias). En el caso más general el objetivo es la producción de varias senoides para construir una señal periódica o cuasi-periódica como es el caso en sistemas de calefacción para edificios, invernaderos (Ramírez-Arias et al., 2005) y otros que dependen directa o indirectamente de la radiación solar como foto-bio-reactores (Berenguel et al., 2004).

Los medios para producir senoides son variados, estando este trabajo centrado en el caso de la utilización de actuadores cuantizados. Este tipo de actuadores se caracteriza por disponer de un número finito de valores de salida. El caso más simple corresponde a actuadores con dos niveles, entre los que cabe citar el interruptor eléctrico y la válvula todo-nada. En ambos ejemplos existe un valor (cero) que corta el flujo y un valor (uno) que permite el flujo máximo. En los actuadores cuantizados, la transición de un valor a otro no es instantánea, pero habitualmente toma unos tiempos característicos mucho menores que la constante de tiempo del sistema sobre el que actúan, por lo que el tratamiento como actuación cuantizada es apropiado.

La producción de señales senoidales mediante pulsos rectangulares de distintos niveles tiene como base la suposición de que el sistema dinámico tiene un cierto carácter integrador por lo que responde al valor medio de la señal de actuación en un sub-periodo. El controlador tiene como misión dirigir al actuador con el objetivo de producir el valor medio deseado, usando para ello una señal de actuación con frecuentes conmutaciones (Holtz, 1992).

En este trabajo se van a considerar diversos casos que ilustran la metodología propuesta. El caso más simple, consistente en un actuador todo-nada con dos posibles valores o niveles de la actuación, será tratado en primer lugar. Se supondrá que el objetivo es la consecución de una sola onda senoidal de amplitud y frecuencia variables usando para ello un controlador de tiempo discreto. En este entorno se desarrollará una metodología para el análisis del contenido armónico. En dicho análisis se expondrá la distribución del contenido armónico en los dominios frecuencial y de amplitud. Posteriormente se pondrá de manifiesto que el método es válido para otras situaciones, por ejemplo para actuadores con niveles intermedios.

Se ha de tener bien presente que el tipo de controlador considerado es de acción digital directa. No entran en el análisis los sistemas de control que hacen uso de moduladores de libre conmutación como los basados en la técnica de Modulación por Ancho de Pulso (MAP, o PWM en inglés). Este tipo de controladores se pueden diseñar considerando que la actuación no está cuantizada pues el modulador acepta referencias continuas que son luego traducidas por la técnica MAP a actuaciones dis-

* Autor para correspondencia.

Email addresses: arahal @ us.es (Manuel R. Arahal), beren @ ual.es (Manuel Berenguel), alamo @ cartuja.us.es (Teodoro Álamo)

cretas. Los controladores directos tienen ciertas ventajas que ha provocado una proliferación de los mismos en la literatura. Cabe citar en primer lugar que la eliminación del modulador de la cadena de control conlleva una mejora de los tiempos de respuesta. Además el diseño aplicado a sistemas multifase y/o multinivel se simplifica mucho respecto al caso con modulador (Arahal et al., 2009).

El trabajo que se presenta es tangencial a otros desarrollos recientes que merecen ser indicados. Por un lado se tienen los controladores basados en eventos (Dormido et al., 2008) en los que la evaluación y emisión de la señal de control puede estar determinada por otras circunstancias diferentes al paso del tiempo en un reloj digital. Por otro lado, en los controladores por histéresis se aplica un único valor de la señal de control cuantizada durante un cierto periodo hasta que el sistema cruza los límites de histéresis. La realización de estos controladores en tiempo discreto cumple las condiciones del presente análisis por lo que las conclusiones son válidas para ellos. Dentro de este grupo, y para el caso particular de las máquinas eléctricas, puede citarse el control de par directo (Takahashi and Noguchi, 1986). El caso del control deslizante puede considerarse en la intersección de los dos tipos anteriormente citados.

En lo que concierne al estado del arte, los únicos trabajos relacionados con éste provienen del campo de la realización digital de controladores con MAP para sistemas eléctricos de frecuencia variable, sobre todo del área del control de velocidad en motores alimentados por inversores. En (Grant et al., 1985) se puede consultar un trabajo exponiendo la influencia de la longitud de los registros de la memoria del procesador sobre el contenido armónico en versiones digitales de la MAP. El contenido armónico sin embargo es considerado únicamente en función de la distorsión armónica total (DAT, o THD en inglés). Recientemente se ha puesto de manifiesto la importancia del contenido harmónico global, incluyendo armónicos no enteros y, en particular, subarmónicos. Éstos pueden producir daños debido a calentamiento (De Abreu and Emanuel, 2000), aunque en algún caso se inyectan armónicos particulares de forma deliberada para obtener ciertos beneficios (Arahal and Duran, 2009)

El análisis que se presenta intenta caracterizar la relación entre varios factores del funcionamiento del sistema: la amplitud y frecuencia de la onda objetivo, su relación con el tiempo de muestreo y los valores disponibles de señal de control y, finalmente, el contenido armónico producido. Como instrumento para el análisis se va a usar la secuencia de acciones discretas S , susceptibles de ser enviadas al actuador en un periodo T de la onda objetivo. La idea del presente trabajo es considerar el conjunto formado por todas las posibles secuencias, diezmarlo convenientemente y analizar el contenido armónico del conjunto resultante. El análisis de contenido armónico tendrá validez para cualquier controlador usado independientemente de su estructura o lógica de funcionamiento. En particular los valores límite hallados en el análisis no pueden ser violados por ningún controlador en las premisas escogidas. Esto constituye un resultado a tener en cuenta por la comunidad de control.

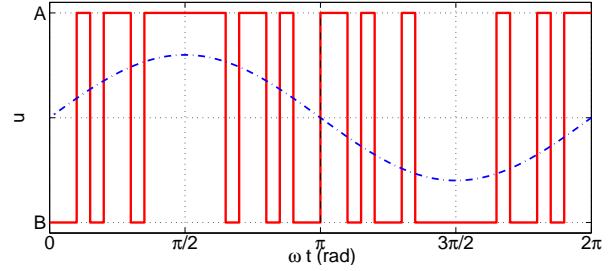


Figura 1: Secuencia de señales de control para un actuador de dos niveles $u(t)$ (línea continua) y componente armónica fundamental $u_1(t)$ (línea discontinua).

2. Planteamiento del problema

A continuación se plantea el problema de la generación de ondas senoidales mediante actuadores cuantizados. Para obtener la deseada generalidad el planteamiento es matemático, por lo que conviene en primer lugar plantear un caso concreto. Pienso para ello en el problema de producir tensiones senoidales a partir de una fuente de tensión de corriente continua (CC) usando para ello interruptores. Existen métodos clásicos como la modulación por ancho de pulso que proporcionan una secuencia de pulsos tales que su efecto es similar a la aplicación de la buscada señal senoidal (Holtz, 1992). En la figura se muestra este caso. Se observa que la señal de control u solo toma dos valores $u = A$ y $u = B$ y por tanto durante un periodo T la trayectoria $u(t)$ es una secuencia de pulsos. En el caso concreto representado en la figura se ha usado la secuencia: { B, B, A, B, A, A, B, A, A, A, A, A, A, B, A, A, B, A, B, B, A, A, B, A, B, B, A, B, B, B, B, B, B, A, B, B, A, B, A, A } que se compone de 40 tramos que cubren un periodo de tiempo normalizado $\omega t \in [0, 2\pi]$, siendo $\omega = 2\pi/T$.

Descomponiendo $u(t)$ mediante una serie de Fourier se obtiene una relación entre la secuencia de pulsos $u(t)$ y sus armónicos:

$$u(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t \quad (1)$$

La amplitud de cada armónico n puede calcularse a partir de los coeficientes de Fourier mediante

$$U_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2)$$

En la figura se presenta el primer armónico $u_1(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$. Este primer armónico representa la porción de señal de control que coincide en frecuencia con la señal senoidal buscada. Si la modulación ha sido adecuada se tendrá además que la amplitud del primer armónico $U_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ coincidirá con la amplitud buscada. El resto de armónicos para órdenes $n > 1$ representan componentes frecuenciales presentes en $u(t)$ y que pueden ser simplemente inútiles o incluso perjudiciales.

En un caso general cabe considerar un actuador capaz de producir N_n niveles diferentes de la señal de control. Estos niveles se agrupan en el conjunto $\mathbb{V} = \{V_1, \dots, V_{N_n}\}$. En el caso de dos niveles se tiene que $\mathbb{V} = \{A, B\}$. El actuador es operado a través de un controlador de tiempo discreto que decide el

valor de la señal de control $u(k)$ que se aplica durante cada periodo de muestreo de duración T_m de manera que $k = t/T_m$. Se considera sin pérdida de generalidad que el objetivo es la producción de una señal u^* con variación senoidal de periodo T , pulsación $\omega = 2\pi/T$, de media nula y amplitud m , por lo que $u^*(t) = m\text{sen}\omega t$. El caso de señales con un valor de continua no nulo o de señales que contienen más de una frecuencia puede derivarse de la exposición que sigue, por lo que se toma el caso más simple en aras de la claridad.

Durante un periodo T se producen $N_m = \frac{T}{T_m}$ muestras que se van a nominar mediante el índice de tiempo discreto k y se enumeran desde $k = 1$ hasta $k = N_m$. Se va a considerar en primer lugar el caso $N_m \in \mathbb{Z}$, dejando para luego la discusión del otro caso. Sea cual sea el controlador usado está claro que:

- En cada instante de tiempo discreto k producirá una señal de actuación $u(k) \in \mathbb{V}$ que se mantiene constante durante el periodo de muestreo.
- En un periodo T producirá unos valores genéricos $u(k)$ acomodables en una secuencia $S \doteq \{u(1), \dots, u(N_m)\}$

La secuencia S es el elemento al cual se aplica el análisis de contenido armónico como se indica a continuación.

2.1. Contenido armónico

La aplicación de la secuencia S equivale, mediante el análisis de Fourier, a producir unas trayectorias de componentes armónicas, siendo u_1 la que debe aproximarse a la senoide deseada. El objetivo del controlador pasa pues por producir un valor $u_1(t) = u^*(t)$. El resto de componentes armónicas son indeseadas por lo que conviene estudiar su distribución. Una medida que se emplea frecuentemente para aglutinar el contenido armónico no deseado es la distorsión total armónica (DAT) que se define así:

$$DAT = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}{U_1^2}} \cdot 100 \quad (3)$$

En la mayoría de casos el sistema dinámico al que se va a aplicar la señal de control presenta un comportamiento paso bajo, por lo que los armónicos de orden superior causan muy poco efecto. Es por eso que se puede truncar la suma de (3) para incluir únicamente los N_a primeros valores, estando el valor N_a estrechamente ligado al comportamiento del sistema dinámico conectado al actuador. Para calcular la DAT se ha de realizar la descomposición en armónicos mediante

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \text{sen } n\omega t \, d(\omega t) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \text{cos } n\omega t \, d(\omega t) \end{aligned} \quad (4)$$

Con estas herramientas es posible atacar el problema de determinar la distribución de armónicos para una secuencia concreta. Se va a usar un valor de $N_a = 35$ excepto cuando se

indique expresamente otra cosa. Esta elección no le resta generalidad a las conclusiones por varios motivos: la metodología es la misma, los valores obtenidos no difieren gran cosa para otros valores (usuales) de N_a . Téngase también en cuenta que, en algunas aplicaciones, el sistema dinámico anula completamente ciertos armónicos concretos, por ejemplo en el caso de algunos sistemas eléctricos trifásicos concretos en los que los armónicos triples no disipan potencia.

2.2. Secuencias

El conjunto de todas las secuencias de longitud N_m producibles utilizando N_n valores de la señal de control se denotará como \mathbb{C} . Este conjunto puede alcanzar una cardinalidad muy alta por lo que conviene eliminar algunas secuencias que no tiene sentido considerar. Esta eliminación puede ser más o menos restrictiva dependiendo de la aplicación ingenieril de que se trate en cada caso. En este trabajo se consideran las siguientes restricciones:

- Las secuencias han de tener simetría impar con respecto al elemento central, es decir $u(k) = -u(N_m - k + 1)$.
- Dentro de cada semiciclo, las secuencias han de tener simetría par con respecto al elemento central, es decir $u(k) = u(N_m/2 - k + 1)$ para el primer semiciclo $k = 1, \dots, N_m/2$ y $u(k) = u(3N_m/2 - k + 1)$ para el segundo semiciclo $k = N_m/2 + 1, \dots, N_m$.
- Dado que uno de los objetivos es caracterizar los valores mínimo de contenido armónico, se propone eliminar las secuencias cuya DAT sobrepase cierto umbral U_D .

Las dos primeras restricciones surgen del hecho de que se busca realizar una señal similar a un seno en fase con el inicio de la secuencia. Estas restricciones no restan generalidad pues la rotación de la secuencia no afecta a su contenido de armónicos y por tanto tampoco a la modulación producida. La tercera restricción simplemente elimina las secuencias con una DAT desmesurada. Esto no afecta a las conclusiones pues éstas se basan precisamente en las secuencias con menor contenido armónico pues son las que determinan los límites alcanzables por el actuador analizado. Dicho de otro modo, el interés está en ver qué valores mínimos de DAT se pueden lograr, no en los máximos. Las secuencias que quedan tras la eliminación constituyen un nuevo conjunto $\mathbb{S}(N_n, N_m, U_D) \subseteq \mathbb{C}$.

Cada secuencia en $\mathbb{S}(N_n, N_m, U_D)$ produce un valor de modulación que es la amplitud del primer armónico U_1 y que puede calcularse mediante (2). Por otra parte, usando (3) se obtiene el valor de distorsión armónica de la secuencia. El conjunto de los valores de modulación para todas las secuencias de $\mathbb{S}(N_n, N_m, U_D)$ es un conjunto que se denotará como $\mathbb{M}(N_n, N_m, U_D)$. De forma similar, el conjunto de todos los valores de DAT se nomina $\mathbb{D}(N_n, N_m, U_D)$. La distribución de \mathbb{D} frente a \mathbb{M} ilustra y aclara las capacidades de un actuador para unos valores dados de N_m y N_n .

A modo de ejemplo considere la figura 2 que se ha generado para $N_n = 2$, $N_m = 40$ $U_D = \infty$. A continuación se analizan algunas características de dicha distribución y que son comparti-

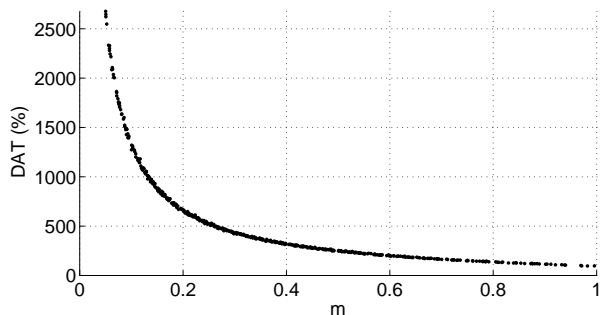


Figura 2: Valores de $\mathbb{D}(2, 40, \infty)$ (eje vertical) frente a los valores correspondientes de $\mathbb{M}(2, 40, \infty)$ (eje horizontal) para todas las secuencias que pertenecen a $\mathbb{S}(2, 40, \infty)$.

das para otros valores de N_n , N_m y U_D pues son una consecuencia de la discretización de tiempo y de valores de actuación.

3. Distribución de contenido armónico

A fin de ilustrar el método de análisis con algunos casos concretos se van a considerar varias situaciones de complejidad creciente. En primer lugar conviene tomar el caso de un actuador que proporciona dos únicos valores posibles de la señal de control. Sin pérdida de generalidad se pueden tomar estos valores como $u = +1$ y $u = -1$. Se tiene por tanto que $N_n = 2$ y las secuencias pertenecientes a $\mathbb{S}(N_m, 2, U_D)$ se pueden representar como números en base dos con N_m cifras. A modo de ejemplo se ha presentado ya la figura 2 que muestra la distribución de $\mathbb{D}(2, 40, \infty)$. A continuación se analizan las principales propiedades.

3.1. Existencia de valores mínimos de la DAT

Al mirar la figura 2 resulta evidente que la producción de señales senoidales por un actuador de dos niveles no podrá realizarse en ningún caso con una distorsión menor que cierto valor que se sitúa en el límite inferior de la gráfica y está en torno a 85 (%). Como se verá más adelante, para otros valores de N_n y N_m el valor umbral puede ser diferente pero existe. Esto quiere decir que la DAT de un controlador concreto no puede hacerse arbitrariamente pequeña. Este resultado es de gran generalidad y de interés para investigadores y profesionales del control. A modo de ejemplo considere el caso de control predictivo directo de inversores de voltaje. El valor hallado para la DAT es alto comparado con controladores que usan MAP (Arahal et al., 2009). Se han propuesto remedios como (Duran et al., 2009) pero falta un estudio que justifique los valores hallados. A partir del presente trabajo, y con el resultado de umbral mínimo es posible estimar si el remedio está lejos del límite teórico o si no merece la pena afinar más pues se ha llegado ya muy cerca del mínimo.

Más adelante se analiza la influencia del número de muestras y su relación con el número de conmutaciones por periodo, que tiene una gran importancia al usar actuadores cuantizados.

3.2. Incremento de la DAT para modulaciones bajas

Otro aspecto notable de la distribución armónica es el alto valor de la DAT a la hora de intentar sintetizar senoides de baja amplitud. Este hecho se aprecia claramente en la zona izquierda de las figuras que muestran \mathbb{D} frente a \mathbb{M} . El valor de la DAT se ve incrementado en varias veces el valor que se obtiene para modulaciones medias y altas. Esta característica explica los hallazgos de (Barrero et al., 2009b) al usar controladores predictivos en el control de máquinas de inducción y en otras aplicaciones de controladores predictivos como (Berenguel et al., 2004; Ramírez-Arias et al., 2005; Dormido et al., 2008).

Para evitar este efecto existen algunos remedios:

- Sistemas multifásicos. La separación en fases permite aprovechar mejor la distribución de energía pues los picos y valles de la señal senoidal están desplazados para cada fase.
- Actuadores multinivel. Al disponer de más valores discretos se facilita la tarea de producir la onda senoidal.
- Submodulación. Aunque el controlador utilice tiempo discreto de periodo T_m se puede concebir añadir un módulo que permita decidir el tiempo de aplicación de la señal durante un subintervalo de T_m . En este caso es preciso modificar el actuador y se abandona la restricción impuesta sobre los tiempos en los que se puede actuar. Por ejemplo en (Barrero et al., 2009a) se usa esta idea para el control de motores; para ello se utiliza un controlador predictivo para seleccionar la señal de control más adecuada y el periodo de aplicación de ésta se calcula con un modelo lineal simple, durante el resto del tiempo se aplica un voltaje nulo.

3.3. Carácter discreto de las modulaciones

En la figura 2, tomada como ejemplo ilustrativo, se aprecia que la distribución de secuencias en el plano DAT- m es discreta. Como consecuencia se tiene que algunos valores de m no se pueden generar sin violar las restricciones impuestas a las secuencias. Esto se ve claramente en las zonas cercanas a $m = 0$ y $m = 1$. Ocurre que, para cualesquiera N_m y N_n el número de valores de m que se puede producir es finito y por tanto existen huecos o zonas no habitadas. Este hecho es también de gran importancia pues implica que el control directo en tiempo discreto de actuadores cuantizados no puede cubrir el requisito de producir valores arbitrarios de modulación. Se verá más adelante que, aumentando N_m y N_n se consigue disminuir la longitud típica de esos huecos, pero nunca hacerlos desaparecer. Además dicho aumento puede traer consecuencias de otro índole al aumentar el número de conmutaciones por ciclo.

La imposibilidad de producir valores arbitrarios de m acarrea problemas para el sistema de control. Imagine por ejemplo que en una cierta configuración se produce un valor de m y que éste resulta insuficiente para el objetivo de control. De alguna manera el controlador intentará aumentar m para corregir la deficiencia buscando su objetivo, pero el actuador solo puede

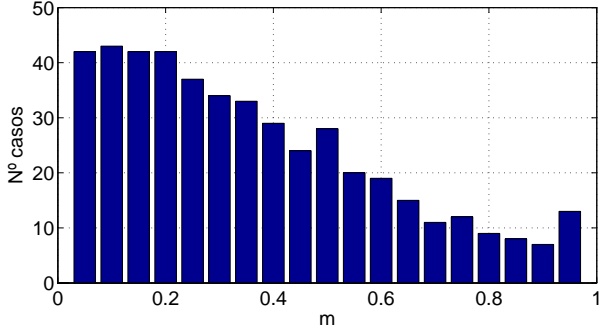


Figura 3: Número de secuencias de $S(2, 40, \infty)$ (eje vertical) que producen modulación en los subintervalos $I_i = \left[\frac{i-1}{20}, \frac{i}{20} \right] \forall i = 1, \dots, 19$.

saltar al siguiente valor de m realizable que puede resultar demasiado alto. Se producirá así una oscilación en la cual el sistema de control irá alternando configuraciones por debajo o por encima del valor deseado. Ésta es una consecuencia de la estructura del actuador y no depende de la lógica del controlador por lo que es un resultado de gran generalidad.

Para poner de manifiesto la distribución de secuencias se divide el intervalo de modulación $[0, 1]$ en 19 trozos y para cada uno de ellos se contabiliza el número de secuencias cuya modulación m pertenece al trozo. En la figura 3 se presenta este histograma para el caso particular $N_n = 2, N_m = 40$. Como puede verse la mayoría de secuencias pertenece a modulaciones bajas y sin embargo la DAT es mayor en dicha zona.

4. Factores que influyen en la distribución de DAT

A continuación se expone la influencia de diversos factores sobre la distribución de la DAT.

4.1. Influencia de N_m

A mayor longitud de la secuencia para un periodo fijo mayores posibilidades de conmutación se tienen. Por una lado aumenta el número de posibles conmutaciones por ciclo. Por otro lado no se debe olvidar que, incluso manteniendo el número de cambios, existe mayor libertad en el emplazamiento de éstos pues la discretización temporal se hace más fina al aumentar N_m . Visto de otro modo, la diferencia entre tiempo continuo y tiempo discreto se desdibuja al disminuir el tiempo de muestreo, como es bien sabido. Para ilustrar el efecto sobre la DAT se incluye aquí la figura 4 en la que se muestra la distribución de DAT para dos valores de N_m , usando en ambos casos $N_n = 2$ y $U_D = 500$. Como el número de secuencias es muy grande se ha procedido a limitar su número a 20 para cada subintervalo de modulación $I_i = \left[\frac{i-1}{20}, \frac{i}{20} \right] \forall i = 1, \dots, 19$. De este modo se muestran únicamente las 20 secuencias con menor DAT para cada tramo de modulación con lo que se aprecia mejor la envoltura inferior de la distribución.

El problema de aumentar N_m como remedio para disminuir la DAT es que se deja libertad a que se produzcan más conmutaciones de la señal de control por ciclo. Téngase en cuenta que el número de conmutaciones por ciclo N_c es el número total de

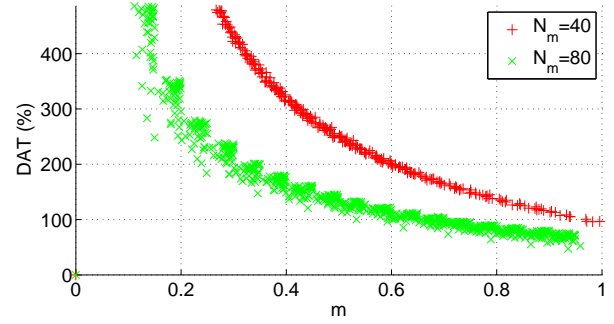


Figura 4: Distribución de \mathbb{D} (eje vertical) frente a \mathbb{M} (eje horizontal) para las con menor DAT obtenidas para $N_n = 2, U_D = 500$ (%) y dos valores diferentes de N_m .

cambios de valor que sufre la señal de control en un periodo, que no se debe confundir con N_m pues no es obligatorio que la señal de control cambie en cada muestra. Se tiene por tanto que N_c depende de la secuencia concreta, pudiendo darse el caso de que el mismo valor de m se pueda obtener con más o menos conmutaciones.

En muchos casos las conmutaciones tienen un coste de operación o de mantenimiento por lo que no conviene abusar. Así en el caso de sistemas eléctricos actuados por interruptores (inversores de voltaje por ejemplo) existe una disipación de potencia por contenido armónico y otra disipación de potencia por conmutaciones debido a que los interruptores electrónicos no son ideales (Blaabjerg et al., 1995). Esta relación de compromiso entre distintos tipos de pérdidas se pone de manifiesto en la figura 5. En la parte superior se aprecian las curvas de nivel de los valores mínimos de la DAT para cada subintervalo de m y para distintos valores de N_m . Dejando de lado el hecho de que existen huecos en la distribución de las secuencias (no mostrados en este caso). Puede verse que para conseguir una DAT menor que cierto límite es preciso moverse hacia arriba en la gráfica. En la gráfica inferior se muestran las curvas de nivel de N_c correspondientes a las mismas secuencias de la gráfica superior. Se observa ahora el fenómeno contrario: para mantenerse por debajo de cierto umbral de conmutaciones por ciclo es preciso desplazarse hacia abajo. Nuevamente merece la pena recalcar que estas curvas se pueden obtener para cualquier configuración de actuador y tienen validez para cualquier controlador de tiempo discreto que se utilice. En un caso práctico, si se requiere que $DAT < U_D$ y al mismo tiempo $N_c < U_C$ (al menos para cierto intervalo de m), puede ocurrir que no exista intersección entre ambas zonas y se podría concluir que la medida a tomar no es cambiar el controlador sino el actuador.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el tiempo de muestreo no se puede reducir arbitrariamente porque existe siempre una limitación impuesta por el tiempo de cálculo del controlador. En el caso de procesos químicos o termodinámicos las constantes de tiempo son de segundos, minutos e incluso horas por lo que el tiempo de cálculo no es relevante en la mayoría de casos (Grüber et al., 2013). En cambio, para algunos procesos mecánicos y eléctricos los periodos pueden ser del orden de centésimas de segundos por lo que el tiempo de cálculo

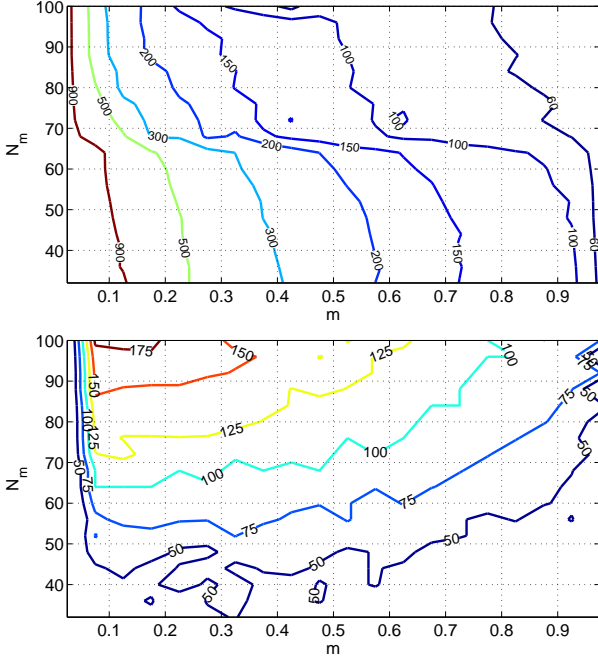


Figura 5: Curvas de nivel para DAT (gráfica superior) y para N_c (gráfica inferior) obtenidas a partir de las secuencias con menor DAT tomadas de $\mathbb{S}(2, N_m, \infty)$.

se debe reducir a decenas de micro segundos y para ello son necesarios equipos especiales como procesadores digitales de señal. En el caso de control predictivo de motores de inducción (Arahal et al., 2009; Barrero et al., 2009b) se emplea un modelo que permite optimizar la señal de control a aplicar. Sucede entonces que los tiempos de cálculo son una limitación a tener en cuenta sobre todo para frecuencias altas.

Finalmente cabe ahora considerar el caso en que $\frac{T}{T_m}$ no es entero. Esta circunstancia puede producirse en aplicaciones de frecuencia variable (a menos que se discretice el número de niveles de frecuencia en los que se puede trabajar). Supóngase entonces que el actuador ha de proporcionar una onda fundamental con un periodo T no múltiplo de T_m , caben dos escenarios: a) el valor de T_m es fijo o b) el valor de T_m es modificado para obtener $N'_m = \frac{T}{T'_m} \in \mathbb{Z}$. La primera opción es la más frecuente pues la segunda requiere una reconfiguración del controlador pues su sintonización depende del tiempo de muestro utilizado. Se considera pues esta primera opción, en tal caso las secuencias S no abarcan ciclos completos. No se puede alcanzar una situación de régimen permanente senoidal a menos que el actuador proporcione $p \in \mathbb{Z}$ secuencias que cubran $q \in \mathbb{Z}$ periodos fundamentales, de forma que $p \cdot N_m \cdot T_m = q \cdot T$. Esta situación conlleva la aparición de subarmónicos y de armónicos no enteros. La distorsión total medida como agregación de los armónicos enteros deja de tener sentido y se debe pasar a usar una medida que incluya todo el contenido armónico. Para evitar todo esto sólo cabe recurrir al menor T_m que el controlador puede gestionar y limitar las frecuencias fundamentales a las que se va a trabajar. Claramente las prestaciones del sistema de control se ven afectadas. La opción b) no se usa habitualmente pero proporciona una solución en la que no aparecen armónicos

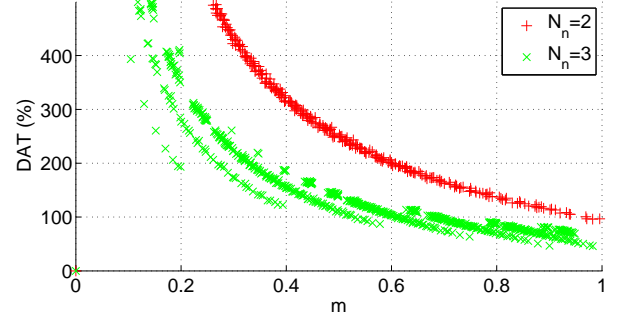


Figura 6: Distribución de \mathbb{D} (eje vertical) frente a \mathbb{M} (eje horizontal) para las con menor DAT obtenidas para $N_m = 40$, $U_D = 500$ (%) y dos valores diferentes de N_n .

no enteros y que devuelve el escenario a los términos empleados en este análisis.

4.2. Influencia de N_n

El número de señales de control distintas que el actuador puede realizar o número de niveles tiene una gran influencia en la capacidad de modulación. Es fácil de ver que en un sistema con $N_n = 2$, la incorporación de un nivel intermedio $u = C$ permite obtener valores intermedios con menos conmutaciones. En el caso límite de un número de niveles tendiendo a infinito desaparecerían los problemas asociados a la cuantización. A modo de ejemplo se va a considerar un actuador con tres niveles $u = -1$, $u = 0$ y $u = +1$ que puede compararse con el caso anterior de dos niveles.

La figura 6 muestra la distribución de DAT para dos valores de N_n , usando en ambos casos $N_m = 40$ y $U_D = 500$. Como el número de secuencias es muy grande se ha procedido a limitar el dibujo a las 20 mejores (menor DAT) para cada subintervalo de modulación $I_i = \left[\frac{i-1}{20}, \frac{i}{20} \right] \forall i = 1, \dots, 19$.

El aumento de N_n conlleva una disminución de la DAT incluso utilizando un menor número de muestras por ciclo N_m . Es interesante ver que la disminución es más pronunciada para los valores bajos de modulación.

5. Confirmación experimental

Para la confirmación experimental y a modo de ejemplo se ha seleccionado un caso práctico proveniente del control de sistemas eléctricos de frecuencia variable mediante inversor de voltaje. Se considera una carga trifásica conectada al inversor de medio puente compuesto por 6 interruptores como se muestra en la figura 7-a). La actuación tiene lugar activando alguno de los interruptores K y desactivando otros. La señal de control es un vector $u = (K_a, K_b, K_c)$ siendo $K_i \in \{0, 1\}$ para cada fase $i \in \{a, b, c\}$. Normalmente un valor de 1 significa interruptor activo (cerrado) y un valor de 0 interruptor abierto. El valor de los interruptores complementarios \bar{K} siempre es $\bar{K}_i = 1 - K_i$ por lo que no necesita ser especificado y por tanto $u \in \mathbb{B}^3$.

Para una señal de control genérica u , el voltaje producido en cada fase de la carga puede obtenerse a partir de una matriz

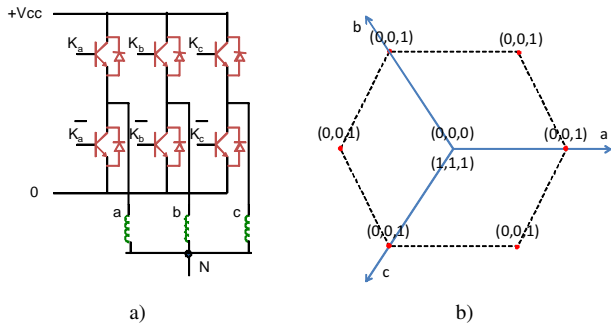


Figura 7: a) Diagrama simplificado de un inversor trifásico, b) voltajes que puede producir en el plano $a - b - c$.

de conectividad constante M_c y el valor del voltaje de corriente continua V_{cc} mediante $v_{abc} = u \cdot M_c \cdot V_{cc}$, siendo

$$M_c = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con esta configuración existen 2^3 combinaciones de activación de interruptores por lo que el actuador dispondría de 8 actuaciones distintas. Los voltajes producidos son solamente 7 pues la combinación $(0, 0, 0)$ y la $(1, 1, 1)$ producen el mismo efecto en la carga trifásica debido a las características de M_c , por tanto $N_n = 7$. Los voltajes en el plano $a - b - c$ producidos por cada combinación se muestran en la figura 7-b).

El análisis puede llevarse a cabo en la forma indicada en los puntos anteriores con una salvedad: se exige a las secuencias que produzcan aproximadamente la misma modulación en las tres fases para evitar desequilibrios indeseados. El desequilibrio se define como el cociente entre la mayor y la menor modulación para las tres fases, o sea:

$$\epsilon \doteq \frac{\max_i m_i}{\min_i m_i} - 1 \quad \forall i \in \{a, b, c\} \quad (5)$$

El máximo desequilibrio permitido se denota como E , por lo que la nueva condición exigida a las secuencias en este caso trifásico es que $\epsilon < E$. A modo de ejemplo, en la figura se muestra la distribución de DAT para $N_n = 7$, $E = 0,003$ y varios valores de N_m . Se ha ampliado la zona de interés para las pruebas que siguen.

Para los experimentos se consideran tres secuencias con las características que se exponen en la tabla 1. La primera columna de la tabla es un número identificador de la secuencia (1 a 3), la segunda columna es el valor de N_m . La tercera columna es la secuencia de acciones de control en un periodo. Cada número se corresponde con una de las 7 acciones de control posibles numeradas de la 0 a la 6. La equivalencia entre el número de acción de control y la posición de los interruptores se consigue pasando el número a binario. Conviene indicar que las dos primeras secuencias se han obtenido a partir del análisis de la DAT y corresponden al límite inferior de la DAT. La secuencia 3 ha sido generada por un controlador predictivo de corriente, con un horizonte de control $H_c = 1$ y que usa optimización por exploración exhaustiva (Arahal et al., 2009). La cuarta columna

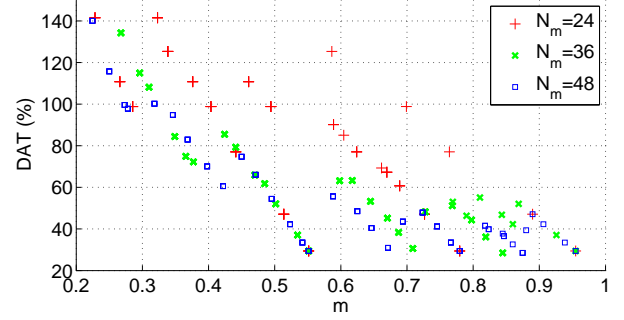


Figura 8: Distribución de \mathbb{D} sobre \mathbb{M} para varios valores de N_m en el caso trifásico.

es el valor de la DAT medido sobre las formas de onda obtenidas con un inversor experimentalmente. El tiempo de muestreo para la toma de datos experimental ha sido de $2 \cdot 10^{-6}$ (s). Se observa que los valores obtenidos experimentalmente para la DAT concuerdan con los límites teóricos. La DAT se ha medido utilizando únicamente los armónicos impares no múltiplos de 3 hasta $N_a = 31$. Los armónicos múltiplos de 3 no se contabilizan habitualmente pues se pueden cancelar en la carga trifásica. Como era de esperar la DAT del controlador predictivo es mayor que el límite teórico calculado mediante exploración de las secuencias y que puede verse en la figura 8.

En la figura 9 se presentan las formas de onda de voltaje generadas por el inversor con $V_{cc} = 100$ (V) para un periodo $T = 1/50$ (s). Sobre ellas se superpone el primer armónico. Puede verse que se han elegido las secuencias para que produzcan aproximadamente la misma modulación $m \approx 0,67$ en los tres casos. Puede verse que existen múltiples formas de producir la onda senoidal deseada, siempre aproximadamente por las razones ya comentadas, y que algunas de ellas producen menos DAT que otras, existiendo un límite inferior.

6. Conclusión

La metodología presentada permite analizar la distribución del contenido armónico de una manera desligada del tipo de control utilizado. Permite por tanto ayudar en el diseño de sistemas para producción de señales senoidales y además proporciona una respuesta a un problema práctico de frecuente aparición: el del contenido armónico en controladores de tiempo discreto con actuación cuantizada.

English Summary

Harmonics in Sinusoidal Waveform Generation with Quantized Actuation.

Abstract

This paper proposes the study of the harmonic content of actuation signals occurring when producing sinusoids with quantized actuators. The occurrence of harmonics takes place in different situations of practical interest such as in direct digital control systems where the actuating signal must take a finite number of

Tabla 1: Secuencias usadas en los casos experimentales.

	N_m	S	DAT
1	36	{ 5, 6, 0, 6, 6, 0, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 3, 2, 3, 0, 3, 3, 0, 4, 4, 3, 5, 4, 4, 0, 5, 0, 5, 6 }	38 %
2	48	{ 0, 0, 6, 6, 6, 1, 6, 6, 6, 6, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 0, 4, 4, 0, 5, 5, 5, 4, 5, 5, 0, 0 }	31 %
3	50	{ 0, 6, 5, 6, 6, 1, 1, 0, 1, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 0, 3, 2, 3, 3, 4, 0, 3, 3, 4, 4, 5, 0, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 0, 5, 0, 5, 5, 6, 6 }	49 %

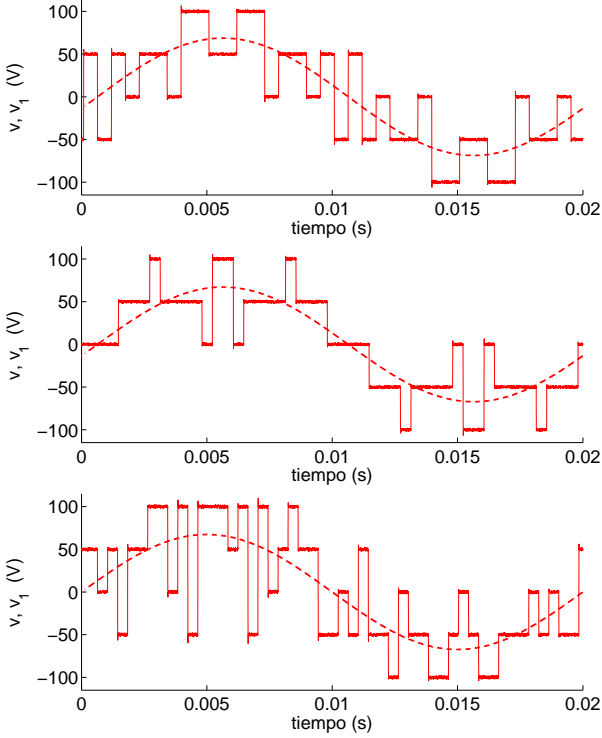


Figura 9: Resultados experimentales para las secuencias 1 (arriba), 2 (centro) y 3 (abajo). La línea continua representa la trayectoria de la fase a y la línea discontinua la componente fundamental.

values. This kind of control system include many controller types for which the conclusions of this paper apply. The analysis is illustrated using cases of increasing complexity, for which the causes and consequences of harmonic content are shown. The key point in the analysis is the harmonic distribution in the frequency and amplitude realms. The analysis is made in an abstract setting of broad generality, constituting a methodology that can be applied to different applications. Among these, the most salient are the switched electrical systems. Furthermore, thanks to the generality of the analysis the conclusions apply to many different control schemes such as predictive, neural, fuzzy, adaptive, etc. The only requirements are that the controller must use discrete-time and the control action be quantized. The proposed analysis is based on whole sequences for a fundamental period, a view not encountered in the literature.

Keywords:

Computer control harmonics quantized signals. Agradecimientos

Los autores agradecen al Estado Español el apoyo brindado mediante la financiación del proyecto DPI2010-21589-C05-04.

Referencias

- Arahal, M., Duran, M., 2009. Pi tuning of five-phase drives with third harmonic injection. *Control Engineering Practice* 17 (7), 787–797.
- Arahal, M. R., Barrero, F., Toral, S., Durán, M. J., Gregor, R., 2009. Multi-phase current control using finite-state model-predictive control. *Control Engineering Practice* 17 (5), 579 – 587.
- Barrero, F., Arahal, M. R., Gregor, R., Toral, S., Durán, M. J., 2009a. One-step modulation predictive current control method for the asymmetrical dual three-phase induction machine. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 56 (6), 1974–1983.
- Barrero, F., Arahal, M. R., Gregor, R., Toral, S., Durán, M. J., 2009b. A proof of concept study of predictive current control for VSI-driven asymmetrical dual three-phase AC machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 56 (6), 1937–1954.
- Berenguel, M., Rodríguez, F., Ación, F. G., García, J. L., 2004. Model predictive control of pH in tubular photobioreactors. *Journal of Process Control* 14 (4), 377–387.
- Blaabjerg, F., Jaeger, U., Munk-Nielsen, S., 1995. Power losses in PWM-VSI inverter using NPT or PT IGBT devices. *Power Electronics, IEEE Transactions on* 10 (3), 358–367.
- De Abreu, J. P. G., Emanuel, A., 2000. The need to limit subharmonics injection. In: *Harmonics and Quality of Power, 2000. Proceedings. Ninth International Conference on*. Vol. 1. IEEE, pp. 251–253.
- Dormido, S., Sánchez, J., Kofman, E., 2008. Muestreo, control y comunicación basados en eventos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 5 (1), 5–26.
- Duran, M., Barrero, F., Toral, S., Arahal, M., Prieto, J., 2009. Improved techniques of restrained search predictive control for multiphase drives. In: *Electric Machines and Drives Conference, 2009. IEMDC '09. IEEE International*. pp. 239–244.
- Grant, D. A., Stevens, M., Houldsworth, J. A., 1985. The effect of word length on the harmonic content of microprocessor-based pwm waveform generators. *Industry Applications, IEEE Transactions on* IA-21 (1), 218–225.
- Grüber, J. K., Rodríguez Ramírez, D., Limón Marruedo, D., Alamo, T., 2013. Computationally efficient nonlinear min-max model predictive control based on volterra series models - application to a pilot plant. *Journal of Process Control* 23 (4), 543–560.
- Holtz, J., 1992. Pulsewidth modulation-a survey. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 39 (5), 410–420.
- Ramírez-Arias, A., Rodríguez, F., Guzmán, J. L., Arahal, M. R., Berenguel, M., López, J. C., 2005. Improving efficiency of greenhouse heating systems using model predictive control. In: *IFAC World Congress*. Vol. 16. pp. 2096–2096.
- Takahashi, I., Noguchi, T., 1986. A new quick-response and high-efficiency control strategy of an induction motor. *Industry Applications, IEEE Transactions on* IA-22 (5), 820–827.