



HAL
open science

Rhéologie des matériaux en cours de prise : Approche théorique

Laurent Arnaud, Géraldine Villain, Claude Boutin

► **To cite this version:**

Laurent Arnaud, Géraldine Villain, Claude Boutin. Rhéologie des matériaux en cours de prise : Approche théorique. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 2000, 328 (12), pp.855-862. hal-00941023

HAL Id: hal-00941023

<https://hal.science/hal-00941023>

Submitted on 3 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rhéologie des matériaux en cours de prise : Approche théorique

Laurent ARNAUD, Géraldine VILLAIN, Claude BOUTIN

École nationale des travaux publics de l'État, DGCB, Laboratoire géomatériaux, URA CNRS 1652,
rue M. Audin, 69518 Vaulx-en-Velin cedex, France
Courriel : laurent.arnaud@entpe.fr; claudie.boutin@entpe.fr

Résumé. La rhéologie des matériaux hétérogènes en cours de prise est étudiée par la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques. Ces matériaux sont considérés comme des suspensions de bulles d'air en concentration finie dans un fluide viscoélastique peu compressible. Le comportement macroscopique est celui d'un milieu viscoélastique compressible. Les modules de cisaillement et de volume sont du même ordre de grandeur et directement proportionnels à celui du fluide. À ces contributions liées au fluide, s'ajoute la compressibilité effective du gaz hors équilibre thermique.

rhéologie / homogénéisation / matériau hétérogène / matériau évolutif / prise / viscoélasticité

Rheology of materials throughout setting: Theoretical approach

Abstract. *The rheological behavior of setting heterogeneous materials is studied from a theoretical approach by means of the homogenization technique of periodic medium. These materials considered as suspensions of gas bubbles at finite concentration in a viscoelastic matrix with low compressibility, present the macroscopic behavior of a compressible viscoelastic medium. The shear and volume macroscopic moduli are of the same order of magnitude and directly proportional to that of the fluid. The effective compressibility of the gas (out of thermal equilibrium) is added to these fluid contributions.*

rheology / homogenization method / heterogeneous material / evolutive material / setting / viscoelasticity

Abridged English version

1. Introduction

This paper deals with the rheology of materials such as mortar, concrete, plaster, . . . during setting. The passage from a fluid to a solid state involves important rheological changes. Moreover, the materials are heterogeneous with solid particles, liquid and air bubbles trapped, and the heterogeneity size ranges from a millimeter to a centimeter. From an industrial point of view, these rheological properties are essential to control the manufacturing process (workability, pumping, . . .).

We determined the macroscopic behaviour of such materials by means of the homogenization method. This constitutive law is used to analyse the measurements performed with the experimental device presented in [1–3].

2. Homogenization theory

The macroscopic constitutive law of these heterogeneous media is deduced from a physical analysis at the microscopic scale using the homogenization theory. This method is well adapted when the medium presents a representative elementary volume (REV) and the scale separation between the REV size l and macroscopic length L related to the wavelength λ , $L = \lambda/2\pi$, is marked. L and l introduce the small parameter $\varepsilon = l/L$. For the experiments achieved [2], the value of ε is about 10^{-3} . The medium is considered as a periodic arrangement of identical cells Ω [4].

The interbubble mixture, called hereafter matrix, is constituted by solid elastic particles and viscous fluid. For simplicity, we assume that the matrix is a viscoelastic medium which evolves progressively with binder hydration. This chemical process leads to material setting; it is sufficiently slow (about 6 hours) to allow with short duration tests (about 25 ms), the identification of the instantaneous rheological behaviour at any time. We apply the homogenization method to a suspension of air bubbles (c is the finite gas concentration and $1/K_g$ its compressibility) in a viscoelastic matrix characterised by its complex viscoelastic shear modulus M_m and its compressibility $1/K_m$. The main physical features of this mixture are presented hereafter.

To describe the mechanical evolution of the matrix, the non usual intermediate case between the bubble fluid ($M_m \ll K_g$) and the porous solid ($K_g \ll M_m$) is considered so $M_m = O(K_g)$.

Considering this high shear viscoelasticity, the viscoelastic stress and pressure are of the same order of magnitude, and the displacements of each phase are of the same order of magnitude.

The macroscopic medium presents a high compressibility due to the gas bubbles. Under an isotropic solicitation, the matrix volume remains the same at the first order. The volume decrease of the cell is compensated by the gas volume variation ($K_g \ll K_m$). This cinematik induces shear strain state in the matrix.

In the gas, pressure variations are linked to density and temperature variations. The temperature distribution is governed by the heat transfer between the gas and fluid phases. In the gas, the equilibrium is not necessarily reached so we consider that the thickness of the thermal layer is of the same order than the bubble size. The high contrast of thermal properties leads to isothermal conditions in the matrix.

At the interface, considering the usual values of the surface tension and the bubble size ($R \approx 1$ mm), the variations of the capillary pressure are low as compared to those of pressure.

The pressure gradient is balanced in the matrix by both inertial and viscoelastic forces.

3. Renormalized form of the problem

Using L as the reference length and the above physical analysis, the set of linearised equations (mass and momentum balance, constitutive law, heat transfer equations and interface conditions) governing the amplitude of small harmonic oscillations in gas and matrix can be written in the renormalised form (equations (1)–(11)), where ε is used to express the relative order of magnitude of each quantity (the term $e^{i\omega t}$ is omitted).

4. Macroscopic behaviour law

The different problems in the cell Ω are set through equalling the terms of same power of ε . It can be observed that:

- the matrix is submitted to a macroscopic translation, and due to the high viscoelasticity, the gas bubble follows the displacement of the surrounding matrix; this result is different from the case of bubbly fluid with low viscosity where differential displacements between gas and matrix are observed [5];
- the temperature and the density of the gas phase are given (11)–(12); as the thermal equilibrium is not reached, temperature and density variations are out of phase (g takes complex values) and their distribution is not homogeneous (g is a function of y).

Equations (13), (18) and (19) define the macroscopic behaviour law. The tensors α (resp. β) of rank 2 (resp. 4) have real values and become scalar numbers in the case of isotropic macroscopic behaviour. The compressibility modulus of the matrix does not appear since its volume variations are negligible.

5. Comments and conclusions

At the macroscopic scale we obtain the behaviour of a viscoelastic compressible medium. The shear and volume moduli are of the same order of magnitude. The matrix only appears by its shear modulus M_m and the macroscopic moduli (shear and volume) are proportional to M_m by form tensors α and β . The contribution of the gas appears in the effective compressibility K , the value of which is generally complex. It can degenerate into real values (adiabatic or isothermic) according to frequency and bubble size. We note that even under macroscopic purely *isotropic* strain, it is the *shear* properties of the interbubble matrix which acts.

The behaviour law (equations (19) and (13)) corresponds to the interesting case where the viscoelastic modulus M_m is of the same order of magnitude than the gas compressibility $1/K_g$. Modifying the order of magnitude of M_m and following the same approach, one can prove that:

- when $M_m \ll K_g$, $\langle \sigma^0 \rangle = -K \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{I}$;
- when $K_m \gg M_m \gg K_g$, $\langle \sigma^0 \rangle = M_m [\alpha \cdot \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 + 2\beta \cdot e_x(\mathbf{U}^0)]$;
- when $M_m = O(K_m)$, the matrix compressibility must be taken into account and we obtain the classical behaviour of a porous medium with viscoelastic skeleton.

As the shear behaviour of setting material strongly evolves, these various descriptions can be observed as the material is passing from a fluid state to a solid state. An application of this work is presented in [2] where this behaviour law is used to analyse the evolutions observed experimentally on materials throughout setting. These results can also be applied to the study of ‘heavy’ foams rheology.

1. Introduction

Nous nous intéressons à la rhéologie de matériaux comme les bétons, mortiers en cours de prise. Ce passage de l’état de fluide à celui de solide implique une forte évolution des caractéristiques rhéologiques des matériaux. De plus, ces matériaux contenant des particules solides, du liquide et des bulles d’air emprisonnées au moment du malaxage sont hétérogènes. Enfin, la taille des hétérogénéités varie du millimètre au centimètre. D’un point de vue industriel, la connaissance de ces propriétés rhéologiques est fondamentale pour leur mise en œuvre (ouvrabilité, pompe, temps de décoffrage, ...).

Ce travail a été conduit suivant des approches théorique et expérimentale. Dans cette note, nous présentons l’approche théorique qui utilise la méthode d’homogénéisation des milieux périodiques pour déterminer le comportement macroscopique de tels matériaux soumis à de petites sollicitations harmoniques [1]. Nous présentons dans [2] et [3], le dispositif de mesures acoustiques et les expériences réalisées qui valident la loi de comportement présentée ici, et permettent d’accéder aux paramètres rhéologiques du matériau et de suivre leurs évolutions en cours de prise.

2. Méthode d’homogénéisation des milieux périodiques

Le comportement macroscopique est déduit de considérations physiques à l’échelle microscopique et de l’utilisation de la méthode d’homogénéisation [4]. Cette technique est bien adaptée aux milieux qui présentent un volume élémentaire représentatif (VER) et pour lesquels la séparation d’échelle entre la taille du VER et celle de la sollicitation est marquée.

Sous de grandes longueurs d’ondes λ , la longueur macroscopique $L = \lambda/2\pi$ et la longueur microscopique l permettent d’introduire le petit paramètre $\varepsilon = l/L$. Dans le cas des expériences menées [2],

$\varepsilon \approx 10^{-3}$. Ces longueurs de référence L et l conduisent à introduire deux variables spatiales x et y , reliées par $y = \varepsilon^{-1}x$. La méthode consiste à rechercher les grandeurs sous la forme de développements asymptotiques en puissance de ε , fonctions de x et y : $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_0(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}_1(x, y) + \dots$. Les dérivées spatiales sont transformées en $\partial x + \varepsilon^{-1} \partial y$. L'existence d'un VER permet de modéliser le milieu comme un arrangement périodique de cellules Ω identiques ; les termes \mathbf{u}_i sont donc périodiques en y .

3. Analyse physique

Pour les matériaux étudiés, la pâte interbulle, ou matrice, se compose de particules solides élastiques et de fluide visqueux, mélange que nous modélisons, en première approche, par un milieu viscoélastique qui évolue progressivement au cours de la prise. En effet, la pâte interbulle évolue avec les réactions d'hydratation du liant qui génèrent des composés solides. Ce processus chimique qui conduit à la prise du matériau est suffisamment lent (de l'ordre de 6 heures ou plus) pour que les mesures effectuées (d'une durée de 25 ms) donnent une caractérisation instantanée du comportement. D'une mesure à la suivante (séparées de 10 minutes), il est possible d'étudier l'évolution rhéologique.

Nous cherchons par homogénéisation le comportement équivalent d'une suspension périodique de bulles d'air de masse volumique ρ_g^e de compressibilité $1/K_g$, en concentration finie c , noyées dans une matrice viscoélastique de module complexe en cisaillement M_m , de compressibilité élastique (ou viscoélastique) $1/K_m$, et de masse volumique ρ_m^e (les indices g et m désignent respectivement le gaz et la matrice, et l'exposant e , la valeur à l'équilibre).

À l'état fluide initial, le matériau s'apparente à un fluide à bulles en concentration $c = O(1)$: forte déformabilité de la matrice et forte compressibilité. Lorsque la prise est achevée, le comportement du matériau se rapproche de celui d'un solide poreux (pores repartis dans une matrice très faiblement déformable). Le processus de solidification résulte de la rigidification de la matrice dont le module de cisaillement évolue considérablement en cours de prise. Typiquement pour les fluides à bulles, le module de cisaillement M_m est très faible comparée à la compressibilité inverse du gaz ($M_m \ll K_g$), alors que dans les solides poreux, il est de l'ordre de $M_m = O(K_m) \gg K_g$.

Pour décrire la situation intermédiaire du matériau en cours de prise, nous retenons donc l'hypothèse $M_m = O(K_g) \ll K_m$. En conséquence, le mélange présente des propriétés non classiques dont les principales caractéristiques sont les suivantes.

- (i) Comme $M_m = O(K_g)$, les contraintes de cisaillement dans la matrice sont du même ordre que la pression dans le gaz. Il en résulte que les deux constituants sont animés d'un même mouvement d'ensemble $u_g = O(u_m)$. Cette propriété se retrouve dans les solides poreux mais pas dans les fluides à bulles pour lesquels, le faible niveau de contrainte visqueuse autorise les déplacements relatifs fluide–gaz [5].
- (ii) La compressibilité inverse K du mélange est de l'ordre de K_g/c . En effet, sous une pression P , le système constitué de la matrice entourant les bulles d'air se déforme. Dans la matrice, la pression engendre des déformations isotropes $O(P/K_m)$, négligeables devant celles de distorsion $\gamma = O(P/M_m)$ puisque $M_m \ll K_m$. L'ordre de grandeur de cette distorsion est aussi celui de la variation relative de périmètre de cercles concentriques à la bulle. Ainsi l'interface matrice–bulle (de rayon R) voit son rayon réduit de $O(\gamma R)$. Cette variation de rayon de l'interface se traduit par une variation de volume de gaz qu'elle délimite de $O(2\gamma/3)$. La pression dans le gaz est donc $O(K_g(2\gamma/3)) = O(P(2K_g/3M_m)) = O(P)$ puisque $M_m = O(K_g)$. Comme $K_g \ll K_m$ et $c = O(1)$, nous obtenons pour les variations relatives de volume macroscopiques et locales : $\Delta V/V = O(c \cdot \Delta V_g/V_g) \gg O((1-c) \cdot \Delta V_m/V_m)$: cela signifie que la variation de volume est principalement due à la phase gazeuse. La compressibilité d'ensemble est pilotée par K_g et M_m et ces deux paramètres étant du même ordre, on a $K = O(K_g/c)$. Cette estimation est classique pour les fluides à bulles en concentration finie mais ne se retrouve pas dans les solides poreux (pour lesquels $K_g \ll M_m$ donc $P_g \ll P$ et $K = O(K_m)$).

- (iii) Dans le gaz, les variations de pression sont liées aux variations de densité et de température. Le champ de température est régi par les échanges thermiques entre gaz et fluide. Pour le gaz, l'équilibre thermique n'est pas nécessairement atteint et on considérera une épaisseur de la couche de diffusion thermique du même ordre que la taille des bulles. Par contre, les propriétés thermiques de la matrice conduisent à de très faibles variations de température, et elle reste en condition isotherme.
- (iv) À l'interface matrice gaz, en considérant les valeurs usuelles de la tension de surface (σ) et de la taille des bulles ($R \approx 1$ mm), les variations de pression capillaire sont faibles devant celles des pressions acoustiques : $P_c = 2\sigma\Delta(1/R) \ll P$.
- (v) Enfin en régime dynamique, le gradient de pression est équilibré par les forces inertielles et viscoélastiques. Du fait du contraste des masses volumiques, $\rho_m^e \gg \rho_g^e$, les effets inertiels associés à la matrice sont dominants.

Les hypothèses retenues permettent de décrire le comportement du matériau pendant la prise. Les limites de validité du modèle et les extensions simples que l'on peut en faire sont discutées en conclusion et permettent de considérer toute la phase de prise, de l'état fluide initial, et un état où la matrice est fortement rigidifiée.

4. Écriture du problème sous forme renormalisée

L'écriture renormalisée, usuelle en homogénéisation, est un raccourci commode qui permet, tout en gardant les variables dimensionnées, d'intégrer dans les équations les ordres de grandeur des paramètres et des nombres adimensionnels, exprimés en puissances de ε et conformes à l'analyse physique. Cette formalisation condensée est équivalente à la procédure plus habituelle, mais aussi plus fastidieuse, qui consiste à traiter le problème sous forme adimensionnelle puis à revenir aux variables dimensionnées après résolution.

À partir de l'analyse physique présentée ci-dessus, les équations linéarisées de bilan, de comportement, d'échange thermique et des conditions aux limites qui gouvernent l'amplitude des petites oscillations harmoniques dans la matrice et dans la phase gazeuse sont renormalisées sous la forme suivante [1] (le terme $e^{i\omega t}$ est omis, L est choisie comme longueur de référence) :

- dans la matrice fluide :

$$P_m + \varepsilon^{-1} K_m \nabla \cdot \mathbf{u}_m = 0 \quad (1)$$

$$-\nabla(P_m) + \frac{M_m}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_m) + M_m \Delta \mathbf{u}_m = -\omega^2 \rho_m^e \mathbf{u}_m \quad (2)$$

- dans la phase gazeuse :

$$\rho_g + \rho_g^e \nabla \cdot \mathbf{u}_g = 0 \quad (3)$$

$$\frac{P_g}{P_g^e} = \frac{\rho_g}{\rho_g^e} + \frac{T_g}{T_g^e} \quad (4)$$

$$-\nabla P_g = -\omega^2 \varepsilon \rho_g^e \mathbf{u}_g \quad (5)$$

$$\varepsilon^2 \nabla \cdot (k_g \nabla T_g) = i\omega (\rho_g^e C_{pg} T - P_g) \quad (6)$$

- à l'interface gaz-matrice :

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_m \quad (7)$$

$$T_g = 0 \quad (8)$$

$$[P_g \mathbf{I} - P_m \mathbf{I} + 2M_m e(\mathbf{u}_m)] \cdot \mathbf{n} = \varepsilon 2\sigma \Delta \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (9)$$

Les équations (2)–(4), (7) restent inchangées par la renormalisation puisque, en accord avec l'analyse physique, chacun des termes qu'elles contiennent sont du même ordre. La renormalisation de (1), (5), (9) découle directement des estimations $\rho_g^e = \varepsilon O(\rho_m^e)$, $K_m = O(\varepsilon^{-1}K_g)$, et $P_c = O(\varepsilon P)$. Enfin, dans l'équation (6) le terme ε^2 traduit que la couche de diffusion thermique, $\sqrt{k_g/(\omega\rho_g^e C_{pg})}$, est de l'ordre de la taille des bulles i.e. $O(\varepsilon L)$.

5. Loi de comportement macroscopique

Les problèmes aux différents ordres sont obtenus en égalant les termes de même puissance de ε . On donne ici brièvement les principales étapes de résolution.

Pression et déplacement

Dans la phase gazeuse, les termes dominants (équation (5), ε^{-1}) conduisent à $\nabla_y P_g^0 = 0$ et donc $P_g^0 = P^0(x)$. Dans la matrice, la résolution de (équation (1), ε^{-2}) $\nabla_y \cdot \mathbf{u}_m^0 = 0$ et (équation (2), ε^{-2}) $M_m \Delta_y \cdot \mathbf{u}_m^0 = 0$ montre que la matrice est soumise à une translation macroscopique $\mathbf{u}_m^0 = \mathbf{u}^0(x) = \mathbf{U}^0$. Pour le gaz (équation (3), ε^{-1}) $\nabla_y \cdot \mathbf{u}_g^0 = 0$ montre que le gaz, à l'échelle locale, apparaît comme incompressible. À partir de (équation (7), ε^0), le déplacement moyen d'une bulle de gaz est obtenu $\langle \mathbf{u}_g^0 \rangle = 1/\Omega_g \int_{\Omega_g} \mathbf{u}_g^0 d\Omega = \mathbf{U}^0$ où Ω_g est le volume gazeux dans la période Ω . Les bulles suivent le déplacement de la matrice qui les entoure. Ce résultat diffère de celui obtenu généralement pour les fluides à bulles de faible viscosité où il existe des déplacements relatifs entre fluide et gaz [5].

Température et masse volumique

La température dans le gaz se déduit de (équation (4), ε^0), (équation (6), ε^0) qui conduisent à :

$$i \frac{\omega_t}{\omega} R^2 \nabla_y \cdot \left(\nabla_y \left(\frac{T_g^0}{T_g^e} \right) \right) + \frac{T_g^0}{T_g^e} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{P^0}{P_g^e} \quad \text{où } \omega_t = \frac{k_g}{\rho_g^e C_{pg} R^2} \quad (10)$$

ω_t est la pulsation caractéristique pour laquelle l'épaisseur de la couche thermique égale R . (Équation (10)) et (équation (8), ε^0) définissent un problème linéaire de conduction de chaleur avec une source liée au champ de pression P^0 . La solution générale est obtenue à partir de la solution particulière $g(y, \omega/\omega_t)$ correspondant à une source unitaire. Les variations de température et de masse volumique au premier ordre (équation (4), ε^0) sont :

$$T_g^0 \left(y, \frac{\omega}{\omega_t} \right) / T_g^e = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) g \left(y, \frac{\omega}{\omega_t} \right) \frac{P^0}{P_g^e} \quad (11)$$

$$\rho_g^0 \left(y, \frac{\omega}{\omega_t} \right) / \rho_g^e = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) g \left(y, \frac{\omega}{\omega_t} \right) \right] \frac{P^0}{P_g^e} \quad (12)$$

L'équilibre thermique n'étant pas atteint les variations de température et de la masse volumique ne sont pas en phase (la fonction g est à valeurs complexes) et leur distribution est non homogène (g dépend de y).

Conservation de la masse

L'équation macroscopique est obtenue en associant les équations relatives à chaque phase (équation (1), ε^{-1}), (équation (3), ε^0) et les conditions aux limites (équation (7), ε^1). On utilise alors (équation (11)) et la propriété de périodicité locale pour obtenir :

$$\nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 = -\frac{P^0}{K} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) G \right] \frac{c}{P_g^e} \quad (13)$$

où $G = 1/\Omega_g \int_{\Omega_g} g d\Omega$ et $1/K$ est la compressibilité macroscopique du milieu équivalent. Si $\omega \ll \omega_t$, les bulles restent en condition isotherme, g tend vers 0, et $K \rightarrow P_g^e/c$. Pour $\omega \gg \omega_t$, la conduction est

limitée à une couche mince en dehors de laquelle le gaz reste en condition quasi-adiabatique, $g \rightarrow 1$ et $K \rightarrow \gamma P_g^e/c$. Pour des fréquences intermédiaires, il n'y a pas d'équilibre thermique et K prend des valeurs complexes. L'expression de G est donnée pour des bulles sphériques par [6].

Comportement macroscopique

Les déplacements locaux dans la matrice sont définis par les équations linéaires (équation (2), ε^{-1}), (équation (1), ε^{-1}), (équation (9), ε^0).

$$\nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 + \nabla_y \cdot \mathbf{u}_m^1 = 0 \quad (14)$$

$$-\nabla_y (P_m^0) + 2M_m \nabla_y \cdot (e_x(\mathbf{U}^0) + e_y(\mathbf{u}_m^1)) = 0 \quad (15)$$

$$[P^0 \mathbf{I} - P_m^0 \mathbf{I} + 2M_m (e_x(\mathbf{U}^0) + e_y(\mathbf{u}_m^1))] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (16)$$

La solution est une combinaison linéaire de champs de déplacement induits par la partie isotrope et par les composantes purement déviatoires de la déformation macroscopique :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^1 &= \chi_{ij}(y) \cdot e_{x^{ij}}(\mathbf{U}^0) + \chi'(y) \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 + \mathbf{u}^1(x) \\ P_m^0 &= 2M_m \pi_{ij}(y) \cdot e_{x^{ij}}(\mathbf{U}^0) + 2M_m \pi'(y) \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 + P^0 \end{aligned} \quad (17)$$

Les fonctions réelles $\pi_{ij}(y)$, $\pi'(y)$ et les champs $\chi_{ij}(y)$ et $\chi'(y)$ dépendent uniquement de la géométrie de la période Ω . Ce sont les champs solutions pour des déformations macroscopiques unitaires. Le module de compressibilité $1/K_m$ n'apparaît pas car la variation de volume de la matrice est négligeable à cet ordre.

L'équation de bilan d'effort macroscopique est obtenue en combinant les équations relatives à chacun des milieux (équation (2), ε^0), (équation (5), ε^0) et les conditions aux limites (équation (9), ε^0). En utilisant la périodicité locale et (équation (17)), on obtient par intégration sur chaque constituant :

$$\nabla_x \cdot \langle \sigma^0 \rangle = -\omega^2(1-c)\rho_m^e \mathbf{U}^0 \quad (18)$$

$$\langle \sigma^0 \rangle = -P^0 \cdot \mathbf{I} + M_m [\alpha \cdot \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 + 2\beta \cdot e_x(\mathbf{U}^0)] \quad (19)$$

$\langle \sigma^0 \rangle = 1/\Omega \int_{\Omega} \sigma^0 d\Omega$ est le tenseur des contraintes macroscopiques. Les tenseurs α (resp. β) d'ordre 2 (resp. 4) obtenus à partir de π , χ , π' et χ' sont à valeurs réelles et se réduisent à des scalaires pour un milieu macroscopique isotrope. Les équations (13), (18) et (19) définissent le comportement macroscopique.

6. Commentaires et conclusions

On obtient à l'échelle macroscopique, un milieu viscoélastique compressible dont les modules de cisaillement et de volume sont du même ordre de grandeur. La matrice intervient uniquement par son module de cisaillement M_m auquel sont proportionnels — par l'intermédiaire des tenseurs de forme α et β — les propriétés de viscoélasticité de cisaillement et de volume du mélange. La contribution du gaz apparaît dans la compressibilité effective à valeur généralement complexe K . Celle-ci peut dégénérer vers une valeur réelle adiabatique ou isotherme selon la fréquence et la taille des bulles. On note que même sous un champ de déformation macroscopique *purement isotrope*, ce sont les propriétés *en cisaillement* de la matrice qui interviennent.

Le comportement (équations (19) et (13)) correspond au cas intéressant où le module de viscoélasticité M_m est du même ordre de grandeur que K_g . En modifiant l'ordre de grandeur de M_m et en reprenant la démarche, on établit que :

- lorsque $M_m \ll K_g$, $\langle \sigma^0 \rangle = -K \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{I}$;
- lorsque $K_m \gg M_m \gg K_g$, $\langle \sigma^0 \rangle = M_m [\alpha \cdot \nabla_x \cdot \mathbf{U}^0 + 2\beta \cdot e_x(\mathbf{U}^0)]$;
- lorsque $M_m = O(K_m)$, la compressibilité de la matrice doit être prise en compte et on retrouve le comportement classique d'un milieu poreux à matrice viscoélastique.

Comme les propriétés en cisaillement d'un matériau qui fait prise évoluent très fortement, on peut s'attendre à rencontrer ces différents types de comportement au cours du passage de l'état de fluide à celui

de solide. Une application est présentée [2], où cette loi de comportement est utilisée et permet une analyse très cohérente des évolutions rhéologiques observées expérimentalement sur des matériaux en cours de prise. Ces résultats peuvent aussi être utilisés pour l'étude de la rhéologie des mousses « lourdes ».

Références bibliographiques

- [1] Villain G., Caractérisation de la prise des matériaux à base de ciment par propagation d'ondes acoustiques et ultrasonores, Thesis ENTPE/INSA, 1997.
- [2] Arnaud L., Villain G., Boutin C., Mesures rhéologiques sur matériaux en cours de prise, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib 328 (2000) 217–223.
- [3] Boutin C., Arnaud L., Mechanical characterization of heterogeneous materials during setting, European J. Mech. A/Solids 14 (4) (1995) 633–656.
- [4] Sanchez-Palencia E., Non Homogeneous Media and Vibration Theory, Lect. Notes in Phys. 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [5] Boutin C., Auriault J.L., Acoustics of bubbly fluids at large bubble concentration, European J. Mech. B/Fluids 12 (3) (1993) 367–399.
- [6] Auriault J.L., Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites, Internat. J. Heat Mass Transfer 26 (6) (1983) 861–869.