1988 - PREMIER SEMESTRE

CASMEI ISSN 0249-6291

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

TOME 306 SÉRIE I N° 16 — 28 AVRIL 1988

Série I
MATHÉMATIQUE

gauthier-villars

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Un résultat de multiplicité dans un problème variationnel non compact

Olivier Rey

Résumé — Ω étant un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$, $N \geqq 5$, nous montrons que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le problème $-\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)} + \varepsilon u$, $u > 0$ sur Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, admet au moins autant de solutions dans $H_0^1(\Omega)$ que la catégorie de Ljusternik-Schnirelman de Ω.

A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness

Abstract — *We show that for* $\varepsilon > 0$ *small enough, the problem* $-\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)} + \varepsilon u$, $u > 0$ *on* Ω, $u = 0$ *on* $\partial\Omega$, *where* Ω *is a smooth bounded domain in* $\mathbf{R}^N$, $N \geqq 5$, *has at least as many solutions in* $H_0^1(\Omega)$ *as the Ljusternik-Schnirelman category of* Ω.

1. Introduction. — Ω étant un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 5$, on considère le problème :

$$(P_\varepsilon) \qquad -\Delta u = u^p + \varepsilon u, \quad u > 0 \text{ sur } \Omega; \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où $\varepsilon > 0$ et $p = (N+2)/(N-2)$, $p+1$ étant donc l'exposant critique de Sobolev pour l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$. Nous savons [3] que pour $\varepsilon \in]0, \lambda_1[$, où λ_1 désigne la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$, (P_ε) admet toujours une solution dans $H_0^1(\Omega)$. Nous savons aussi ([5], [6]), en définissant sur Ω la fonction :

$$\varphi(x) = H(x, x)$$

où H est la partie régulière de la fonction de Green associée au laplacien sur Ω, que pour tout point critique non dégénéré x_0 de φ, (P_ε) admet pour ε assez petit une solution u_ε qui se concentre autour de x_0 quand ε tend vers zéro.

Nous établissons ici le résultat suivant :

Théorème. — *Pour* ε *assez petit,* (P_ε) *admet au moins autant de solutions que la catégorie de Ljusternik-Schnirelman de* Ω.

Conformément à la définition donnée dans [4], on dit que la catégorie de $F \subset \Omega$ est k, notée $\mathrm{Cat}(F, \Omega) = k$, si F peut être recouvert par k ensembles fermés dans Ω, chacun contractile dans Ω, mais pas par $(k-1)$ de ces ensembles. On appelle catégorie de Ω l'entier strictement positif $\mathrm{Cat}(\Omega, \Omega)$.

2. Démonstration du théorème. — On introduit pour $0 < \varepsilon < \lambda_1$ sur $H_0^1(\Omega) - \{0\}$ la fonctionnelle C^2 :

$$K_\varepsilon(u) = \left(\int_\Omega |u|^{p+1}\right)^{-2/(p+1)} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \varepsilon \int_\Omega u^2\right)$$

dont les points critiques vérifient, à un coefficient multiplicatif près :

$$(P'_\varepsilon) \qquad -\Delta u = |u|^{p-1} u + \varepsilon u \quad \text{sur } \Omega; \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

c'est-à-dire (P_ε) si u est une fonction positive non identiquement nulle, en appliquant le principe du maximum fort. D'autre part, pour $x \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, on considère les fonctions :

$$U_{x,\lambda} = \lambda^{(N-2)/2} (1 + \lambda^2 |. - x|^2)^{-(N-2)/2}$$

Note présentée par Haïm Brezis.

0249-6291/88/03060715 \$ 2.00 © Académie des Sciences

qui vérifient sur $\mathbf{R}^N: -\Delta U = N(N-2)U^p$, et leurs projections $PU_{x,\lambda}$ sur $H_0^1(\Omega)$ qui vérifient sur $\Omega: -\Delta PU = N(N-2)U^p$. Soit :

$$E_{x,\lambda} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / \langle v, PU_{x,\lambda} \rangle_{H_0^1} = \left\langle v, \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle v, \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \right\rangle_{H_0^1} = 0 \, (1 \leq i \leq N) \right\}$$

et

$$M = \{ (x, \lambda, v) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* \times H_0^1(\Omega) / v \in E_{x,\lambda};\ \lambda\, d(x, \partial\Omega) > T_0,\ |v|_{H_0^1} < \eta_0 \}$$

où T_0, η_0 sont des constantes strictement positives. Comme dans [6], on établit à partir de [2] :

PROPOSITION 1. — *(x, λ, v) est un point critique de la fonctionnelle*

$$J_\varepsilon:\ M \to \mathbf{R}$$
$$(x, \lambda, v) \mapsto K_\varepsilon(PU_{x,\lambda} + v)$$

si et seulement si $u = PU_{x,\lambda} + v$ est un point critique de K_ε.

On a le développement :

$$\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial \lambda} = \omega_1 \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^3} - \omega_2 \frac{\varphi(x)}{\lambda^{N-1}} + V_1(\varepsilon, x, \lambda, v) \right)$$

où ω_1 et ω_2 sont des constantes strictement positives (qui ne dépendent que de N) et V_1 est une fonction C^1 qui vérifie :

$$V_1 = O\left[\frac{1}{\lambda^N} + \frac{\varepsilon}{\lambda^{N-1}} + \frac{|v|_{H_0^1}^2}{\lambda} + \varepsilon |v|_{H_0^1} \left(\frac{1}{\lambda^{5/2}} \text{si } N=5,\ \frac{(\operatorname{Log}\lambda)^{2/3}}{\lambda^3} \text{si } N=6,\ \frac{1}{\lambda^3} \text{si } N>6 \right) \right]$$

sur tout fermé $\Omega_d = \{ x \in \Omega / d(x, \partial\Omega) \geq d \}$. Grâce à ce développement et à un développement de J_ε au voisinage de $v=0$ ([1], [6]), le théorème des fonctions implicites permet de montrer :

PROPOSITION 2. — *Il existe une application C^1 qui à tout $(\varepsilon, x) \in]0, \lambda_1[\times \Omega$ avec ε assez petit (dépendant de $d(x, \partial\Omega)$) associe $(\lambda_{\varepsilon,x}, v_{\varepsilon,x}) \in \mathbf{R}_+^* \times H_0^1(\Omega)$ tel que $(\lambda_{\varepsilon,x}, v_{\varepsilon,x})$ soit point critique de l'application :*

$$M_x = M \cap \{ \{x\} \times \mathbf{R}_+^* \times H_0^1(\Omega) \} \to \mathbf{R}$$
$$(\lambda, v) \mapsto J_\varepsilon(x, \lambda, v)$$

et de plus :

$$|v_{\varepsilon,x}| = O\,[\varepsilon^{5/2} \text{ si } N=5,\ \varepsilon^2 |\operatorname{Log}\varepsilon|^{2/3} \text{ si } N=6,\ \varepsilon^{(N+2)/2(N-4)} \text{ si } N>6]$$
$$\lambda_{\varepsilon,x} = K(\varepsilon, x)(\omega_2 \varphi(x))^{1/(N-4)} \varepsilon^{-1/(N-4)}$$
$$K - 1 = O\,[\varepsilon \text{ si } N=5,\ \varepsilon |\operatorname{Log}\varepsilon|^{2/3} \text{ si } N=6,\ \varepsilon^{2/(N-4)} \text{ si } N>6]$$

où les estimations sont uniformes par rapport à x sur tout fermé Ω_d.

Dans ces conditions, le calcul nous conduit à :

$$J_\varepsilon(x, \lambda_{\varepsilon,x}, v_{\varepsilon,x}) = \omega_3 - \omega_4 \varphi(x)^{-2/(N-4)} \varepsilon^{(N-2)/(N-4)} + V_2(\varepsilon, x)$$

où ω_3 et ω_4 sont des constantes strictement positives (qui ne dépendent que de N) et V_2 est une fonction C^1 qui vérifie :

$$V_2 = O\,[\varepsilon^4 \text{ si } N=5,\ \varepsilon^3 |\operatorname{Log}\varepsilon|^{2/3} \text{ si } N=6,\ \varepsilon^{N/(N-4)} \text{ si } N>6]$$

uniformément par rapport à x sur tout fermé Ω_d. Pour obtenir un point critique de J_ε, et donc de K_ε, il ne nous reste qu'à trouver un point critique de $x \to J_\varepsilon(x, \lambda_{\varepsilon,x}, v_{\varepsilon,x})$, ou encore de :

$$\varphi_\varepsilon: \quad x \mapsto \varphi(x) + V_3(\varepsilon, x)$$

où V_3 est une fonction C^1 qui vérifie :

$$V_3 = O\,[\varepsilon \text{ si } N=5,\ \varepsilon\,|\operatorname{Log}\varepsilon|^{2/3} \text{ si } N=6,\ \varepsilon^{2/(N-4)} \text{ si } N>6]$$

uniformément par rapport à x sur tout fermé Ω_d. Conformément à la théorie de Ljusternik-Schnirelman, nous posons :

$$C_k = \min_{F \in \mathscr{F}_k} \max_{p \in F} \{\varphi_\varepsilon(p)\} = \inf\{b \in \mathbf{R} / \exists\, F \in \mathscr{F}_k,\ F \subset \varphi_\varepsilon^b\}$$

où

$$\varphi_\varepsilon^b = \{x \in \Omega_d / \varphi_\varepsilon(x) \leqq b\}$$

$$\mathscr{F}_k = \{F \subset \Omega_d / F \text{ compact, } \operatorname{Cat}(F, \Omega_d) \geqq k\}$$

$$1 \leqq k \leqq n = \operatorname{Cat}(\Omega, \Omega)$$

[Ω étant supposé régulier, pour d assez petit $\operatorname{Cat}(\Omega, \Omega) = \operatorname{Cat}(\Omega_d, \Omega) = \operatorname{Cat}(\Omega_d, \Omega_d)$.] Notons que nous avons l'équivalence :

$$\varphi(x) \sim (2\,d(x, \partial\Omega))^{2-N} \quad \text{quand } d(x, \partial\Omega) \to 0$$

et donc que pour d, puis ε assez petit :

$$C_n \leqq \sup_{x \in \Omega_{2d}} \varphi_\varepsilon(x) < \inf_{x \in \partial\Omega_d} \varphi_\varepsilon(x).$$

Si C_k n'était pas valeur critique de φ_ε, nous pourrions pour un certain $\eta > 0$ rétracter par déformation $\varphi_\varepsilon^{C_k+\eta}$ sur $\varphi_\varepsilon^{C_k-\eta}$ par le flot $dp/dt = -\nabla\varphi_\varepsilon(p)$, ce qui contredirait la définition de C_k — puisqu'une déformation continue ne peut diminuer la catégorie. De plus, si $c = c_{m+1} = \ldots = c_{m+k}$, alors φ_ε admet au moins k points critiques au niveau c [4], ce qui montre que pour d assez petit, puis ε assez petit, φ_ε admet au moins n points critiques à l'intérieur de Ω_d. Pour ε assez petit, K_ε possède donc au moins n points critiques, c'est-à-dire que nous disposons de n solutions distinctes de (P'_ε), de la forme

$$u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon (PU_{x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, x_e} + v_{\varepsilon, x_e}),$$

où α_ε est un réel qui tend vers $(N(N-2))^{(N-2)/4}$ quand ε tend vers 0.

Multipliant (P'_ε) par u_ε^- et intégrant sur Ω, nous trouvons :

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2 = \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} + \varepsilon \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^2.$$

Le théorème d'injection de Sobolev :

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2 \geqq S \left(\int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} \right)^{2/(p+1)}$$

et l'inégalité de Poincaré :

$$\int_\Omega (u_\varepsilon^-)^2 \leqq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2$$

montrent alors que $|u_\varepsilon^-|_{p+1}$ est soit nulle, soit loin de 0. Comme $|u_\varepsilon^-|_{p+1} \leqq \alpha_\varepsilon |v_{\varepsilon, x_e}|_{p+1}$, $u_\varepsilon^- \equiv 0$ pour ε suffisamment petit, ce qui achève la démonstration.

Note reçue le 5 février 1988, acceptée le 15 février 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BAHRI, *Critical points at infinity in some variational problems* (à paraître).

[2] A. BAHRI et J. M. CORON, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 301, série I, 1985, p. 345-348.

[3] H. BRÉZIS et L. NIRENBERG, *Comm. Pure Appl. Math.*, 36, 1983, p. 437-477.

[4] S. N. CHOW et J. K. HALE, *Methods of bifurcation theory*, Springer, 1982.

[5] O. REY, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 305, série I, 1987, p. 591-594.

[6] O. REY, *The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent* (à paraître).

Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex.*