



**HAL**  
open science

## Quelques propriétés des modèles de réalisabilité de ZF

Jean-Louis Krivine

► **To cite this version:**

| Jean-Louis Krivine. Quelques propriétés des modèles de réalisabilité de ZF. 2014. hal-00940254v2

**HAL Id: hal-00940254**

**<https://hal.science/hal-00940254v2>**

Preprint submitted on 30 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques propriétés des modèles de réalisabilité de ZF

Jean-Louis Krivine

Equipe P.P.S. Université Paris-Diderot, CNRS

krivine@pps.univ-paris-diderot.fr

**Abstract.** In [4, 5, 6], we introduce the technique of *classical realizability*, which permits to extend the Curry-Howard correspondence between proofs and programs, to Zermelo-Fraenkel set theory. The models of ZF we obtain in this way, are called *realizability models*; this is an extension of the method of forcing, in which the ordered sets (sets of *conditions*) are replaced with more complex first order structures called *realizability algebras*.

We show here that every realizability model  $\mathcal{N}$  of ZF contains a transitive submodel, which has the same ordinals as  $\mathcal{N}$ , and which is an elementary extension of the ground model. It follows that the constructible universe of a realizability model is an elementary extension of the constructible universe of the ground model.

We obtain this result by showing the existence of an ultrafilter on the *characteristic Boolean algebra*  $\mathfrak{B}$  of the realizability model, which is defined in [5, 6].

**Résumé.** Dans [4, 5, 6], on a introduit la technique de *réalisabilité classique*, qui permet d'étendre la correspondance de Curry-Howard, entre les preuves et les programmes, à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Les modèles de ZF ainsi obtenus sont appelés *modèles de réalisabilité*; il s'agit d'une extension de la méthode du forcing, où les ensembles ordonnés (ensembles de *conditions*) sont remplacés par des structures du premier ordre plus complexes appelées *algèbres de réalisabilité*.

On montre ici que tout modèle de réalisabilité  $\mathcal{N}$  de ZF contient un sous-modèle transitif, qui a les mêmes ordinaux que  $\mathcal{N}$ , et qui est une extension élémentaire du modèle de base. Il en résulte que les constructibles d'un modèle de réalisabilité forment une extension élémentaire des constructibles du modèle de base.

Ce résultat est obtenu en montrant l'existence d'un ultrafiltre sur *l'algèbre de Boole caractéristique*  $\mathfrak{B}$  du modèle de réalisabilité, qui est définie dans [5, 6].

## Introduction

On utilise ici les notions de base et les notations de la théorie de la *réalisabilité classique*, développée dans [4, 5, 6].

On considère un modèle  $\mathcal{M}$  de  $\text{ZF} + \text{V} = \text{L}$ , qu'on appelle le *modèle de base*<sup>1</sup> et, dans  $\mathcal{M}$ , une *algèbre de réalisabilité*  $\mathcal{A} = (\Lambda, \Pi, \Lambda \star \Pi, \text{QP}, \perp)$ .

$\Lambda$  est l'ensemble des *termes*,  $\Pi$  est l'ensemble des *piles*,  $\Lambda \star \Pi$  est l'ensemble des *processus*,  $\text{QP} \subset \Lambda$  est l'ensemble des *quasi-preuves* et  $\perp$  est une partie de  $\Lambda \star \Pi$ .

Les axiomes d'*algèbre de réalisabilité* sont donnés dans [4] ou [6].

Dans  $\mathcal{M}$ , on utilise le langage de ZF avec les symboles de relation binaires  $\notin, \subset$  et des symboles de fonction, qu'on définit au fur et à mesure des besoins, au moyen de formules de ZF.

On construit alors (voir [4]) le *modèle de réalisabilité*  $\mathcal{N}$ , qui a le même ensemble de base que  $\mathcal{M}$ , dont l'ensemble des valeurs de vérité est  $\mathcal{P}(\Pi)$  munie d'une structure d'algèbre de Boole convenable.

Le langage de ce modèle est constitué des mêmes symboles de fonction (avec la même interprétation) que pour le modèle  $\mathcal{M}$ , et des trois symboles de relation binaire  $\notin, \in, \subset$ .

Les *formules* sont construites de façon usuelle, à partir des formules atomiques, à l'aide des seuls symboles logiques  $\perp, \rightarrow, \forall$ . On utilise les notations :

$\neg F$  pour  $F \rightarrow \perp$ ;  $F_1, \dots, F_n \rightarrow F$  pour  $(F_1 \rightarrow (\dots \rightarrow F_n) \rightarrow F)$ ;

$\exists x F$  pour  $\neg \forall x \neg F$ ;  $\exists x \{F_1, \dots, F_n\}$  pour  $\neg \forall x (F_1, \dots, F_n \rightarrow \perp)$ .

**Notation.** On utilisera souvent la notation  $\vec{x}$  pour désigner une suite finie  $x_1, \dots, x_n$ ; par exemple, on écrira  $F[\vec{x}]$  pour  $F[x_1, \dots, x_n]$ .

Au moyen du théorème de complétude, on obtient, à partir de  $\mathcal{N}$ , un modèle ordinaire  $\mathcal{N}'$ , à valeurs de vérité dans  $\{0, 1\}$ . L'ensemble de base de  $\mathcal{N}'$  contient, en général *strictement*, celui de  $\mathcal{N}$ .

Les éléments de  $\mathcal{N}'$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) seront appelés *individus de  $\mathcal{N}$*  (resp.  $\mathcal{M}$ ). Les individus seront généralement notés  $a, b, c, \dots, a_0, a_1, \dots$ .

Dans [4] ou [5], on définit une théorie  $\text{ZF}_\varepsilon$ , écrite dans ce langage. On montre qu'elle est une *extension conservative* de ZF, et que le modèle  $\mathcal{N}$  satisfait les axiomes de  $\text{ZF}_\varepsilon$ , au sens que ces axiomes sont *réalisés par une quasi-preuve*.

Etant donné un terme  $\tau \in \Lambda$  et une formule close  $F[a_1, \dots, a_n]$  du langage de  $\text{ZF}_\varepsilon$ , à paramètres  $a_1, \dots, a_n$  dans  $\mathcal{N}$  (ou, ce qui revient au même, dans  $\mathcal{M}$ ), on écrira :

$\tau \Vdash F[a_1, \dots, a_n]$  pour exprimer que le terme  $\tau \in \Lambda$  réalise  $F[a_1, \dots, a_n]$ .

La valeur de vérité de cette formule est un sous-ensemble de  $\Pi$ , noté  $\|F[a_1, \dots, a_n]\|$ .

On écrira  $\Vdash F[a_1, \dots, a_n]$  pour exprimer que  $F[a_1, \dots, a_n]$  est réalisée par une quasi-preuve.

Le modèle  $\mathcal{N}'$  satisfait donc  $\text{ZF}_\varepsilon$ ; dans  $\mathcal{N}'$ , on peut donc définir un modèle de ZF, noté  $\mathcal{N}'_\varepsilon$ , dans lequel l'égalité est interprétée par l'*équivalence extensionnelle* notée  $x \simeq y$  (pour  $x \subset y \wedge y \subset x$ ).

Les propriétés générales des modèles de réalisabilité sont décrites dans [6], dont nous utiliserons les définitions et les notations.

Dans la suite, sauf indication contraire, chaque formule de  $\text{ZF}_\varepsilon$  doit être interprétée dans  $\mathcal{N}$  (sa valeur de vérité est alors une partie de  $\Pi$ ) ou, si on préfère, dans  $\mathcal{N}'$  (sa valeur de

---

1. Il suffit, en fait, que  $\mathcal{M}$  satisfasse le *principe du choix CP*, qui s'écrit comme suit, dans le langage de ZF enrichi d'un symbole de relation binaire  $\triangleleft$ : " $\triangleleft$  est une relation de bon ordre sur  $\mathcal{M}$ ".

On sait que tout modèle dénombrable de ZFC peut être enrichi en un modèle de  $\text{ZF} + \text{CP}$ .

vérité est alors 0 ou 1). Si la formule doit être interprétée dans  $\mathcal{M}$ , (elle ne contient alors pas le symbole  $\notin$ ) on le dira explicitement.

## Symboles de fonction

**Notations.** La formule  $\forall z(z \notin y \rightarrow z \notin x)$  est notée  $x \subseteq y$  (*inclusion forte*); la formule  $x \subseteq y \wedge y \subseteq x$  est notée  $x \cong y$  (*équivalence extensionnelle forte*).

Rappelons que  $\subset$  et  $\simeq$  sont les symboles d'inclusion et d'équivalence extensionnelle de ZF :  $x \subset y \equiv \forall z(z \notin y \rightarrow z \notin x)$ ;  $x \simeq y \equiv (x \subset y \wedge y \subset x)$ .

## Symboles associés aux axiomes de $ZF_\varepsilon$

Pour chaque formule  $F[y, \vec{z}]$  de  $ZF_\varepsilon$ , (où  $\vec{z}$  est une suite finie de variables  $z_1, \dots, z_n$ ) on définit, dans  $\mathcal{M}$ , un symbole de fonction d'arité  $n+1$ , noté provisoirement  $\text{Compr}_F(x, \vec{z})$ , ( $\text{Compr}$  est une abréviation de *Compréhension*) en posant :

$\text{Compr}_F(a, \vec{c}) = \{(b, \xi \cdot \pi) ; (b, \pi) \in a, \xi \Vdash F[b, \vec{c}]\}$ .

On a montré dans [6] que l'on a  $\|b \notin \text{Compr}_F(a, \vec{c})\| = \|F[b, \vec{c}] \rightarrow b \notin a\|$ . On a donc :

$I \Vdash \forall x \forall y \forall \vec{z} (y \notin \text{Compr}_F(x, \vec{z}) \rightarrow (F[y, \vec{z}] \rightarrow y \notin x))$ ;

$I \Vdash \forall x \forall y \forall \vec{z} ((F[y, \vec{z}] \rightarrow y \notin x) \rightarrow y \notin \text{Compr}_F(x, \vec{z}))$ .

Au lieu de  $\text{Compr}_F(x, \vec{z})$ , nous utiliserons donc, pour ce symbole de fonction, la notation plus intuitive  $\{y \varepsilon x ; F[y, \vec{z}]\}$ , dans laquelle  $y$  est une variable liée.

De la même façon, on peut définir un symbole de fonction pour chacun des axiomes suivants de  $ZF_\varepsilon$  : l'axiome de la paire, de la réunion, des parties, les schémas de collection et de l'infini.

Pour l'axiome de la réunion et l'axiome des parties, on définit ci-dessous deux symboles de fonction unaires  $\overline{\cup}x$  et  $\overline{\mathcal{P}}(x)$ , tels que :

$I \Vdash \forall x \forall z (z \varepsilon \overline{\cup}x \leftrightarrow (\exists y \varepsilon x) z \varepsilon y)$ .

$I \Vdash \forall x (\forall y \varepsilon \overline{\mathcal{P}}(x)) (\forall z \varepsilon y) (z \varepsilon x)$ ;  $I \Vdash \forall x \forall y (\exists y' \varepsilon \overline{\mathcal{P}}(x)) \forall z (z \varepsilon y' \leftrightarrow z \varepsilon x \wedge z \varepsilon y)$ .

**Théorème 1.** Soient  $\mathcal{V}, \mathcal{Q}$  les symboles de fonction unaire définis dans  $\mathcal{M}$  par :

$\mathcal{V}(a) = Cl(a) \times \Pi$  et  $\mathcal{Q}(a) = \mathcal{P}(Cl(a) \times \Pi) \times \Pi$

où  $Cl(a)$  désigne la clôture transitive de  $a$ . On a alors :

i)  $I \Vdash \forall x \forall y \forall z (z \varepsilon y, z \notin \mathcal{V}(x) \rightarrow y \notin x)$ .

ii)  $I \Vdash \forall x \forall \vec{z} (\{y \varepsilon x ; F[y, \vec{z}]\} \varepsilon \mathcal{Q}(x))$  pour toute formule  $F[x, \vec{z}]$  de  $ZF_\varepsilon$ .

i) Soient  $a, b, c$  des individus de  $\mathcal{M}$ ,  $\xi, \eta \in \Lambda$  et  $\pi \in \Pi$  tels que :

$\xi \Vdash c \varepsilon b$ ,  $\eta \Vdash c \notin \mathcal{V}(a)$  et  $\pi \in \|b \notin a\|$ ; on a donc  $(b, \pi) \in a$ . On doit montrer  $\xi \star \eta \cdot \pi \in \perp$ .

On montre que  $\eta \Vdash c \notin b$  : en effet, si  $\rho \in \|c \notin b\|$ , on a  $(c, \rho) \in b$ . Mais on a  $(b, \pi) \in a$  et donc  $c \in Cl(a)$ , d'où  $\|c \notin \mathcal{V}(a)\| = \Pi$ ; donc  $\eta \Vdash \perp$  et on a bien  $\eta \star \rho \in \perp$ .

Par hypothèse sur  $\xi$ , on a donc  $\xi \star \eta \cdot \pi \in \perp$ .

ii) Soient  $a, \vec{c}$  des individus de  $\mathcal{M}$ ; on doit montrer  $I \Vdash A \varepsilon \mathcal{Q}(a)$  avec  $A = \{y \varepsilon a ; F[y, \vec{c}]\}$ .

On a  $A = \{(b, \xi \cdot \pi) ; (b, \pi) \in a, \xi \Vdash F[b, \vec{c}]\}$  et donc  $A \subset Cl(a) \times \Pi$ . Or, on a :

$\|A \notin \mathcal{Q}(a)\| = \{\pi \in \Pi ; (A, \pi) \in \mathcal{Q}(a)\} = \Pi$  et donc  $I \Vdash A \varepsilon \mathcal{Q}(a)$ .

C.Q.F.D.

On peut alors définir les symboles de fonction  $\overline{\cup}$  et  $\overline{\mathcal{P}}$  en posant :

$$\overline{\cup}x = \{z \varepsilon \mathcal{V}(x) ; (\exists y \varepsilon x) z \varepsilon y\}; \quad \overline{\mathcal{P}}(x) = \{y \varepsilon \mathcal{Q}(x) ; y \subseteq x\}.$$

De même, nous utiliserons dans la suite, des symboles de fonction associés à une forme forte du *schéma de collection*.

Pour les définir, il est commode de le décomposer (théorèmes 2, 3 et 4).

**Théorème 2.** *Pour toute formule  $F(x, \vec{z})$  de  $ZF_\varepsilon$ , on a :*

$$\Vdash \forall \vec{z} (\exists x F(x, \vec{z}) \rightarrow (\exists x \varepsilon \phi_F(\vec{z})) F(x, \vec{z})); \quad \Vdash \forall \vec{z} (\forall x \varepsilon \phi_F(\vec{z})) F(x, \vec{z})$$

où  $\phi_F$  est un symbole de fonction défini dans  $\mathcal{M}$ .

On montre  $\lambda x(x) \Vdash \forall x (x \varepsilon \Phi_F(\vec{z}) \rightarrow F(x, \vec{z})) \rightarrow \forall x F(x, \vec{z})$  où le symbole de fonction  $\Phi_F$  est défini comme suit :

A l'aide du schéma de collection dans  $\mathcal{M}$ , on définit un symbole de fonction  $\Psi(\vec{z})$  tel que :

$$\|\forall x F(x, \vec{z})\| = \bigcup_{x \in \Psi(\vec{z})} \|F(x, \vec{z})\| \quad \text{et on pose} \quad \Phi_F(\vec{z}) = \Psi(\vec{z}) \times \Pi.$$

Soient  $\xi \Vdash \forall x (x \varepsilon \Phi_F(\vec{z}) \rightarrow F(x, \vec{z}))$  et  $\pi \in \|\forall x F(x, \vec{z})\|$ .

Alors  $\pi \in \|F(x, \vec{z})\|$  pour un  $x \in \Psi(\vec{z})$ , donc  $\Vdash x \varepsilon \Phi_F(\vec{z})$  et  $\xi \star \Vdash \pi \in \perp$ .

En remplaçant  $F$  par  $\neg F$ , on a donc  $\Vdash \exists x F(x, \vec{z}) \rightarrow (\exists x \varepsilon \Phi_{\neg F}(\vec{z})) F(x, \vec{z})$ .

Il suffit alors de poser  $\phi_F(\vec{z}) = \{x \varepsilon \Phi_{\neg F}(\vec{z}) ; F(x, \vec{z})\}$ .

C.Q.F.D.

**Théorème 3.** *Pour toute formule  $F(y, \vec{z})$  de  $ZF_\varepsilon$ , on a :*

$$\Vdash \forall \vec{z} (\exists x \forall y (F(y, \vec{z}) \rightarrow y \varepsilon x) \rightarrow \forall y (F(y, \vec{z}) \leftrightarrow y \varepsilon \gamma_F(\vec{z})))$$

où  $\gamma_F$  est un symbole de fonction défini dans  $\mathcal{M}$ .

En effet, d'après le théorème 2, on a :

$$\Vdash \forall \vec{z} (\exists x \forall y (F(y, \vec{z}) \rightarrow y \varepsilon x) \rightarrow (\exists x \varepsilon \phi(\vec{z})) \forall y (F(y, \vec{z}) \rightarrow y \varepsilon x))$$

où  $\phi$  est un symbole de fonction. On a donc, par définition de  $\overline{\cup}\phi(\vec{z})$  :

$$\Vdash \forall \vec{z} \left( \exists x \forall y (F(y, \vec{z}) \rightarrow y \varepsilon x) \rightarrow \forall y (F(y, \vec{z}) \rightarrow y \varepsilon \overline{\cup}\phi(\vec{z})) \right).$$

Il suffit alors de poser  $\gamma_F(\vec{z}) = \{y \varepsilon \overline{\cup}\phi(\vec{z}) ; F(y, \vec{z})\}$  (schéma de compréhension).

C.Q.F.D.

Lorsque l'hypothèse  $\exists x \forall y (F(y, \vec{z}) \rightarrow y \varepsilon x)$  est satisfaite, on dira que *la formule  $F(y, \vec{z})$  définit un ensemble*.

Pour le symbole de fonction  $\gamma_F(\vec{z})$ , on utilisera la notation plus intuitive  $\{y ; F(y, \vec{z})\}$ , où  $y$  est une variable liée.

**Théorème 4.**

*Soit  $f(x, \vec{z})$  un symbole de fonction (défini dans  $\mathcal{M}$ ) à  $n + 1$  variables. On a alors :*

$$\Vdash \forall a \forall y \forall \vec{z} (y \varepsilon \phi_f(a, \vec{z}) \leftrightarrow (\exists x \varepsilon a) (y = f(x, \vec{z})))$$

où  $\phi_f$  est un symbole de fonction à  $n + 1$  variables.

On définit, dans  $\mathcal{M}$ , le symbole  $\phi_f$  de la façon suivante :

Soient  $a_0, y_0, \vec{z}_0$  des individus, fixés dans  $\mathcal{M}$ ; on pose :

$$\phi_f(a_0, \vec{z}_0) = \{(f(x, \vec{z}_0), \pi) ; (x, \pi) \in a_0\}.$$

On a alors immédiatement  $\|y_0 \notin \phi_f(a_0, \vec{z}_0)\| = \|\forall x(y_0 = f(x, \vec{z}_0) \leftrightarrow x \notin a_0)\|$ . Par suite :  
 $\Vdash \forall x(y_0 = f(x, \vec{z}_0) \leftrightarrow x \notin a_0) \leftrightarrow y_0 \notin \phi_f(a_0, \vec{z}_0)$  ce qui donne le résultat voulu.

C.Q.F.D.

**Remarque.** Le connecteur  $\leftrightarrow$  est défini dans [5, 6].

Pour le symbole de fonction  $\phi_f(a, \vec{z})$ , on utilisera la notation plus intuitive  $\{f(x, \vec{z}) ; x \in a\}$ , où  $x$  est une variable liée. On l'appelle *image de  $a$  par la fonction  $f(x)$* .

## Symboles de fonctions caractéristiques

Soit  $R(x_1, \dots, x_n)$  une relation  $n$ -aire définie dans  $\mathcal{M}$ . Sa *fonction caractéristique*, à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , sera notée  $\langle R(x_1, \dots, x_n) \rangle$ . On a donc :  $\mathcal{M} \models \forall \vec{x}(R(\vec{x}) \leftrightarrow \langle R(\vec{x}) \rangle = 1)$ .

Dans le modèle de réalisabilité  $\mathcal{N}$ , le symbole de fonction  $\langle R(\vec{x}) \rangle$  est donc à valeurs dans  $\mathbb{I}2$ .

Le théorème 8 ci-dessous, montre que si une relation binaire  $y \sqsubset x$  est bien fondée dans  $\mathcal{M}$ , alors la relation  $\langle y \sqsubset x \rangle = 1$  est bien fondée dans  $\mathcal{N}$ .

## Symboles divers

Dans la suite, on utilisera certains symboles de fonction, dont la définition et les propriétés sont données dans [6]. On donne simplement ci-dessous leur définition.

- le symbole de fonction unaire  $\mathbb{I}1$ , défini dans  $\mathcal{M}$  par  $\mathbb{I}1x = x \times \Pi$ .
- les symboles de fonctions  $\wedge, \vee, \neg$ , de domaines  $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$  et  $\{0, 1\}$ , à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , sont définis dans  $\mathcal{M}$  au moyen des tables de vérité usuelles.  
Ces fonctions définissent, dans  $\mathcal{N}$ , une structure d'algèbre de Boole sur  $\mathbb{I}2$ .  
On l'appelle *l'algèbre de Boole caractéristique* du modèle de réalisabilité  $\mathcal{N}$ .
- un symbole de fonction binaire de domaine  $\{0, 1\} \times \mathcal{M}$ , noté  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ , en posant :  
 $0x = \emptyset ; 1x = x$ .
- un symbole de fonction binaire  $\sqcup$  de domaine  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  en posant  $x \sqcup y = x \cup y$ .  
Noter que l'extension au modèle  $\mathcal{N}$  de cette opération *n'est pas* l'union  $\cup$ , ce qui explique l'utilisation d'un autre symbole.

**Lemme 5** (Linéarité).

Soit  $f$  un symbole de fonction binaire, défini dans  $\mathcal{M}$ . On a alors :

i)  $\Vdash \forall \alpha^{\mathbb{I}2} \forall x \forall y (\alpha f(x, y) = \alpha f(\alpha x, y))$ .

ii) Si, de plus,  $f(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$ , alors :

$\Vdash \forall \alpha^{\mathbb{I}2} \forall \alpha'^{\mathbb{I}2} \forall x \forall y \forall x' \forall y' (\alpha \wedge \alpha' = 0 \leftrightarrow f(\alpha x \sqcup \alpha' x', \alpha y \sqcup \alpha' y') = \alpha f(x, y) \sqcup \alpha' f(x', y'))$ .

**Remarque.** Le connecteur  $\leftrightarrow$  et le quantificateur restreint  $\forall x^{\mathbb{I}X}$  sont définis dans [5, 6].

Il suffit de vérifier :

pour (i) les deux cas  $\alpha = 0, 1$  ;

pour (ii) les trois cas  $(\alpha, \alpha') = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$  ;

ce qui est trivial.

C.Q.F.D.

## Relations bien fondées

Dans cette section on étudie les propriétés des relations bien fondées de  $\mathcal{N}$ . Tous les résultats énoncés ici sont, bien entendu, triviaux dans ZF. Les difficultés proviennent du fait que la relation d'appartenance forte  $\varepsilon$  ne satisfait pas l'extensionnalité.

Une relation binaire  $\prec$  est dite *bien fondée* si on a :

$$\forall X (\forall x (\forall y (y \prec x \rightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (x \notin X)).$$

Le sens intuitif est que tout individu  $X$  non vide a un  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $\prec$ .

### Théorème 6.

Si la relation  $x \prec y$  est bien fondée alors, pour toute formule  $F[x, \vec{z}]$  de  $ZF_\varepsilon$ , on a :

$$\forall \vec{z} (\forall x (\forall y (y \prec x \rightarrow F[y, \vec{z}]) \rightarrow F[x, \vec{z}]) \rightarrow \forall x F[x, \vec{z}]).$$

On raisonne par l'absurde en considérant, dans  $\mathcal{N}$ , un individu  $a$  et une formule  $G[x]$  tels que l'on ait :

$$(1) \quad G[a] ; \forall x (G[x] \rightarrow \exists y \{G[y], y \prec x\}).$$

On applique le schéma d'axiomes de l'infini de  $ZF_\varepsilon$  :

$$(2) \quad \exists c \{a \varepsilon c, (\forall x \varepsilon c) (\exists y F(x, y) \rightarrow (\exists y \varepsilon c) F(x, y))\}$$

en posant  $F(x, y) \equiv G[x] \wedge G[y] \wedge y \prec x$ . Soit  $b = \{x \varepsilon c ; G(x)\}$  ; d'après (1) et (2), on a  $a \varepsilon b$ .

On obtient une contradiction avec l'hypothèse, en montrant  $(\forall x \varepsilon b) (\exists y \varepsilon b) (y \prec x)$ .

On suppose donc  $x \varepsilon c$  et  $G[x]$  ; d'après (2), on a :

$$\exists y \{G[x], G[y], y \prec x\} \rightarrow (\exists y \varepsilon c) \{G[x], G[y], y \prec x\}.$$

D'après  $G[x]$  et (1), on a  $\exists y \{G[x], G[y], y \prec x\}$ . On a donc  $(\exists y \varepsilon c) \{G[y], y \prec x\}$  d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Pour montrer  $\forall x F[x]$ , il suffit donc de montrer  $\forall x (\forall y (y \prec x \rightarrow F[y]) \rightarrow F[x])$ .

On dira alors qu'on a montré  $\forall x F[x]$  par induction suivant la relation bien fondée  $\prec$ .

### Théorème 7. La relation binaire $x \varepsilon y$ est bien fondée.

On doit montrer  $\forall x (\forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (x \notin X)$ .

Le théorème 6 appliqué à la relation bien fondée  $x \varepsilon y$  et à la formule  $F[x] \equiv x \notin X$ , donne :

$$\forall x (\forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (x \notin X).$$

On a immédiatement  $\vdash x \notin X \rightarrow x \notin X$ . Il reste donc à montrer :

$$\vdash \forall x (\forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (\forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X).$$

Mais  $x \notin X \equiv \forall x' (x' \simeq x \rightarrow x' \notin X)$ . Il reste donc à montrer :

$$\vdash \forall x (\forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X), \forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X), x' \simeq x \rightarrow x' \notin X ; \text{ ou encore :}$$

$$\vdash \forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X), x' \simeq x \rightarrow \forall y (y \varepsilon x' \rightarrow y \notin X).$$

Or, de  $x' \simeq x, y \varepsilon x'$  on déduit  $y \varepsilon x$ . Il existe donc  $y' \simeq y$  tel que  $y' \varepsilon x$ .

De  $\forall y (y \varepsilon x \rightarrow y \notin X)$ , on déduit alors  $y' \notin X$ , d'où  $y \notin X$ .

C.Q.F.D.

Dans ce qui suit, on utilise le fait que, s'il existe un ordinal  $\rho$  tel que  $F[\rho]$ , il en existe un qui est le premier,  $F[\rho]$  étant une formule quelconque écrite dans le langage de  $ZF_\varepsilon$ . Cela résulte du théorème 7.

## Conservation de la fondation

**Théorème 8.** Soit  $\sqsubset$  une relation binaire bien fondée dans le modèle de base  $\mathcal{M}$ . Alors, la relation  $\langle y \sqsubset x \rangle = 1$  est bien fondée dans  $\mathcal{N}$ . On a en fait :

$$\mathbf{Y} \Vdash \forall X (\forall x (\forall y (\langle y \sqsubset x \rangle = 1 \leftrightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (x \notin X)).$$

Soit  $\xi \in \Lambda$  tel que  $\xi \Vdash \forall x (\forall y (\langle y \sqsubset x \rangle = 1 \leftrightarrow y \notin X_0) \rightarrow x \notin X_0)$ ,  $X_0$  étant un individu quelconque de  $\mathcal{M}$ . Soit  $F[x]$  la formule  $(\forall \pi \in \|\!|x \notin X_0\|\!|)(\mathbf{Y} \star \xi \cdot \pi \in \perp)$ ; il s'agit de montrer  $\forall x F[x]$ . Puisque  $\sqsubset$  est une relation bien fondée, il suffit de montrer  $\forall x (\forall y (y \sqsubset x \rightarrow F[y]) \rightarrow F[x])$ , ou encore  $\neg F[x_0] \rightarrow (\exists y \sqsubset x_0) \neg F[y]$ , pour un individu  $x_0$  quelconque.

D'après l'hypothèse  $\neg F[x_0]$ , il existe  $\pi_0 \in \|\!|x_0 \notin X_0\|\!$  telle que  $\mathbf{Y} \star \xi \cdot \pi_0 \notin \perp$ , et donc :

$\xi \star \mathbf{Y} \xi \cdot \pi_0 \notin \perp$ . Par hypothèse sur  $\xi$ , on en déduit  $\mathbf{Y} \xi \not\Vdash \forall y (\langle y \sqsubset x_0 \rangle = 1 \leftrightarrow y \notin X_0)$ .

Il existe donc  $y_0 \sqsubset x_0$  tel que  $\mathbf{Y} \xi \not\Vdash y_0 \notin X_0$ . On a donc  $(\exists \pi \in \|\!|y_0 \notin X_0\|\!|)(\mathbf{Y} \star \xi \cdot \pi \notin \perp)$ , c'est-à-dire  $\neg F[y_0]$ .

C.Q.F.D.

## Définition d'une fonction de rang

**Définitions.** Une *fonction de domaine*  $D$  est un individu  $\phi$  tel que :

$(\forall z \varepsilon \phi) (\exists x \varepsilon D) \exists y (z = (x, y))$ ;  $(\forall x \varepsilon D) \exists y ((x, y) \varepsilon \phi)$ ;

$\forall x \forall y \forall y' ((x, y) \varepsilon \phi, (x, y') \varepsilon \phi \rightarrow y = y')$ .

Soient  $\phi$  une fonction de domaine  $D$  et  $F[y, \vec{z}]$  une formule de  $\text{ZF}_\varepsilon$ . Alors, la formule :  $\exists y \{(x, y) \varepsilon \phi, F[y, \vec{z}]\}$  est notée  $F[\phi(x), \vec{z}]$ .

**Remarque.** Attention, la notation  $\phi(x)$  peut faire croire qu'il s'agit d'un symbole de fonction, ce qui n'est pas le cas.

Au moyen du théorème 3, on définit le symbole de fonction binaire  $\text{Im}$  en posant :

$$\text{Im}(\phi, D) = \{y ; (\exists x \varepsilon D) (x, y) \varepsilon \phi\}.$$

Lorsque  $\phi$  est une fonction de domaine  $D$ , on utilisera, pour  $\text{Im}(\phi, D)$ , la notation plus intuitive  $\{\phi(x) ; x \varepsilon D\}$ , qu'on appelle *image de la fonction*  $\phi$ .

Soit  $D' \subseteq D$ , c'est-à-dire  $\forall x (x \notin D \rightarrow x \notin D')$ ; une *restriction de  $\phi$  à  $D'$*  est, par définition, une fonction  $\phi'$  de domaine  $D'$  telle que  $\phi' \subseteq \phi$ .

Par exemple,  $\{z \varepsilon \phi ; (\exists x \varepsilon D') \exists y (z = (x, y))\}$  est une restriction de  $\phi$  à  $D'$ .

Si  $\phi'_0, \phi'_1$  sont des restrictions de  $\phi$  à  $D'$ , alors  $\phi'_0 \cong \phi'_1$ .

### Définition.

Une relation binaire  $\prec$  est dite *rangée* si on a  $\forall x \exists y \forall z (z \prec x \rightarrow z \varepsilon y)$ , autrement dit : les minorants d'un individu forment un ensemble.

D'après le théorème 3, si la relation  $\prec$  est rangée et définie par une formule  $P[x, y, \vec{u}]$  de  $\text{ZF}_\varepsilon$  avec paramètres dans  $\mathcal{N}$ , on a :

$\mathcal{N} \models \forall x \forall y (x \prec y \leftrightarrow x \varepsilon f(y))$ , pour un symbole de fonction  $f$ , défini dans  $\mathcal{M}$

( $f$  est une fonction de  $y$  et des paramètres  $\vec{u}$  de la formule définissant  $\prec$ ).

Dans ce qui suit, on suppose que  $\prec$  est une relation binaire rangée *transitive*.

Une fonction  $\phi$  de domaine  $\{x ; x \prec a\}$  sera dite *a-inductive pour  $\prec$* , si on a :

$\phi(x) \simeq \{\phi(y) ; y \prec x\}$  pour tout  $x \prec a$ . Autrement dit :

$(\forall x \prec a) (\forall y \prec x) \phi(y) \in \phi(x)$ ;  $(\forall x \prec a) (\forall z \varepsilon \phi(x)) (\exists y \prec x) z \simeq \phi(y)$ .

Si  $\phi$  est  $a$ -inductive pour  $\prec$ , on pose  $O(\phi, a) = \{\phi(x) ; x \prec a\}$  (image de  $\phi$ ).

**Lemme 9.** Soient  $\phi, \phi'$  deux fonctions  $a$ -inductives pour  $\prec$ . Alors :

i)  $\phi(x) \simeq \phi'(x)$  pour tout  $x \prec a$ .

ii)  $O(\phi, a) \simeq O(\phi', a)$ .

iii)  $(\forall x \prec a) On(\phi(x))$ ;  $O(\phi, a)$  est un ordinal, appelé ordinal de  $\phi$ .

i) Preuve par induction sur  $\phi(x)$  suivant  $\in$  : si  $u \in \phi(x)$ , alors  $u \simeq \phi(y)$  avec  $y \prec x$ . Puisque  $\phi(y) \in \phi(x)$ , on a  $\phi(y) \simeq \phi'(y)$  par hypothèse d'induction ; donc  $\phi(y) \in \phi'(x)$  et  $\phi(x) \subset \phi'(x)$ .

Inversement, si  $u \in \phi'(x)$ , alors  $u \simeq \phi'(y)$  avec  $y \prec x$ . On a donc  $\phi(y) \in \phi(x)$ , donc  $\phi(y) \simeq \phi'(y)$  par hypothèse d'induction ; donc  $u \in \phi(x)$  et  $\phi'(x) \subset \phi(x)$ .

ii) Immédiat, d'après (i).

iii) On montre  $On(\phi(x))$  par induction sur  $\phi(x)$ , pour la relation bien fondée  $\in$  :

Si  $u \in \phi(x)$ , on a  $u \simeq \phi(y)$  avec  $y \prec x$  ; on a donc  $On(u)$  par hypothèse d'induction.

Si  $v \in u$ , alors  $v \in \phi(y)$ , donc  $v \simeq \phi(z)$  avec  $z \prec y$  ; donc  $v \in \phi(x)$ .

Par suite,  $\phi(x)$  est un ensemble transitif d'ordinaux, donc un ordinal.

Il en résulte que  $O(\phi, a)$  est aussi un ensemble transitif d'ordinaux, donc un ordinal.

C.Q.F.D.

**Lemme 10.** Si  $\phi$  est  $a$ -inductive pour  $\prec$ , et si  $b \prec a$ , alors toute restriction  $\psi$  de  $\phi$  au domaine  $\{x ; x \prec b\}$  est une fonction  $b$ -inductive pour  $\prec$ .

On a, en effet,  $\psi(x) = \phi(x) \simeq \{\phi(y) ; y \prec x\} \simeq \{\psi(y) ; y \prec x\}$ .

C.Q.F.D.

Au moyen du théorème 2, on définit un symbole de fonction  $\Phi$  unaire, tel que l'on ait :

$\forall x (\forall f \in \Phi(x))(f \text{ est une fonction } x\text{-inductive})$  ;

$\forall x \forall f (f \text{ est une fonction } x\text{-inductive} \rightarrow \exists f (f \in \Phi(x)))$ .

Autrement dit,  $\Phi(x)$  est un ensemble de fonctions  $x$ -inductives, qui est non vide dès qu'il en existe une.

On définit enfin le symbole de fonction unaire  $Rg$ , à l'aide du théorème 4, en posant :

$$Rg(x) = \overline{\bigcup} \{O(f, x) ; f \in \Phi(x)\}$$

(le symbole  $\overline{\bigcup}$  est défini après le théorème 1).

$Rg(x)$  est donc la réunion des ordinaux des fonctions  $x$ -inductives de l'ensemble  $\Phi(x)$ .

Comme tous ces ordinaux sont extensionnellement équivalents d'après le lemme 9(ii), leur réunion  $Rg(x)$  est aussi un ordinal équivalent.

**Remarques.**

S'il n'existe aucune fonction  $x$ -inductive, alors  $Rg(x)$  est vide.

Les symboles de fonction  $O, \Phi, Rg$  ont, comme arguments supplémentaires, les paramètres  $\vec{u}$  et la formule  $P[x, y, \vec{u}]$  définissant la relation  $y \prec x$ .

On suppose maintenant que  $\prec$  est une relation transitive rangée qui est *bien fondée*. C'est donc une *relation d'ordre strict*.

**Lemme 11.** Toute restriction de  $Rg$  au domaine  $\{x ; x \prec a\}$  est une fonction  $a$ -inductive pour  $\prec$ .

Preuve par induction sur  $a$  suivant  $\prec$ ; soit  $f$  une restriction de  $\text{Rg}$  au domaine  $\{x ; x \prec a\}$  et soit  $x \prec a$ . On doit montrer que  $f(x) \simeq \{f(y) ; y \prec x\}$ , autrement dit, que l'on a :

$$\text{Rg}(x) \simeq \{\text{Rg}(y) ; y \prec x\}.$$

Soit  $\psi$  une restriction quelconque de  $\text{Rg}$  au domaine  $\{y ; y \prec x\}$ . Par hypothèse d'induction,  $\psi$  est une fonction  $x$ -inductive pour  $\prec$ .

On peut alors montrer que  $\text{Rg}(x) \simeq \{\text{Rg}(y) ; y \prec x\}$  :

i) Si  $u \in \text{Rg}(x)$  alors  $u \in \text{O}(\phi, x)$  pour une fonction  $\phi$  qui est  $x$ -inductive pour  $\prec$ , à condition qu'il existe une telle fonction. Or, il en existe bien une, à savoir  $\psi$ .

Par définition de  $\text{O}(\phi, x)$ , on a donc  $u = \phi(y)$  avec  $y \prec x$ . Or,  $\text{Rg}(y) \simeq \phi(y)$ , puisque  $\phi, \psi$  sont deux fonctions  $x$ -inductives pour  $\prec$ , et  $\psi(y) = \text{Rg}(y)$  (lemme 9(i)).

On a donc  $u \simeq \text{Rg}(y)$ , avec  $y \prec x$ .

ii) Inversement, si on a  $y \prec x$ , alors  $\text{Rg}(y) = \psi(y)$ . Soit  $\phi \in \Phi(x)$ ; alors  $\phi, \psi$  sont  $x$ -inductives pour  $\prec$ , donc  $\phi(y) \simeq \psi(y)$  (lemme 9(i)).

Or  $\phi(y) \in \text{O}(\phi, x)$ , donc  $\phi(y) \in \text{Rg}(x)$  par définition de  $\text{Rg}(x)$ .

Par suite, on a  $\text{Rg}(y) = \psi(y) \in \text{Rg}(x)$ .

C.Q.F.D.

**Théorème 12.** *On a  $\text{Rg}(x) \simeq \{\text{Rg}(y) ; y \prec x\}$  pour tout  $x$ .*

Preuve par induction sur  $x$  suivant  $\prec$ ; soit  $\psi$  une restriction quelconque de  $\text{Rg}$  au domaine  $\{y ; y \prec x\}$ . D'après le lemme 11,  $\psi$  est une fonction  $x$ -inductive pour  $\prec$ .

On termine alors la preuve, en répétant les paragraphes (i) et (ii) de celle du lemme 11.

C.Q.F.D.

$\text{Rg}$  est appelée la *fonction de rang* de la relation  $\prec$  transitive, rangée et bien fondée.  $\text{Rg}(x)$  est, pour tout  $x$ , un représentant de l'ordinal de n'importe quelle fonction  $x$ -inductive pour  $\prec$ .

Les valeurs prises par la fonction de rang  $\text{Rg}$  forment un segment initial de  $\text{On}$ , que nous appellerons *l'image de  $\text{Rg}$* . C'est donc, soit un ordinal, soit  $\text{On}$  tout entier.

**Proposition 13.** *Soient  $\prec_0, \prec_1$  deux relations transitives bien fondées rangées, et  $f$  une fonction telle que  $\forall x \forall y (x \prec_0 y \rightarrow f(x) \prec_1 f(y))$ .*

*Si  $\text{Rg}_0, \text{Rg}_1$  sont leurs fonctions de rang, alors  $\forall x (\text{Rg}_0(x) \leq \text{Rg}_1(f(x)))$  et l'image de  $\text{Rg}_0$  est un segment initial de l'image de  $\text{Rg}_1$ .*

On montre immédiatement  $\forall x (\text{Rg}_0(x) \leq \text{Rg}_1(f(x)))$  par induction suivant  $\prec_0$ . D'où le résultat, puisque l'image d'une fonction de rang est un segment initial de  $\text{On}$ .

C.Q.F.D.

## Un ultrafiltre sur $\mathbb{J}2$

Dans toute la suite, on écrit  $y < x$  pour  $y \in \text{Cl}(x)$  dans  $\mathcal{M}$ , où  $\text{Cl}(x)$  désigne la clôture transitive de  $x$ . C'est une relation d'ordre strict bien fondée (on pourrait en utiliser d'autres, par exemple la relation  $\text{rg}(y) < \text{rg}(x)$ ).

Le symbole de fonction binaire  $\langle y < x \rangle$  est donc, dans  $\mathcal{N}$ , à valeurs dans  $\mathbb{J}2$ .

D'après le théorème 8, la relation binaire  $\langle y < x \rangle = 1$  est bien fondée dans  $\mathcal{N}$ .

**Théorème 14.**  $\Vdash$  Il existe un ultrafiltre sur  $\mathfrak{J}2$ , qui est défini par :  
 $\mathcal{D} = \{\alpha \in \mathfrak{J}2 ; \text{ la relation } \langle y < x \rangle \geq \alpha \text{ est bien fondée}\}.$

**Remarque.** D'après le lemme 5, la formule  $\langle y < x \rangle \geq \alpha$  peut s'écrire aussi  $\langle \alpha y < \alpha x \rangle = \alpha$ .  
La formule  $\alpha \in \mathcal{D}$ , qu'on écrira aussi  $\mathcal{D}[\alpha]$ , est donc :

$$\mathcal{D}[\alpha] \equiv \forall X (\forall x (\forall y (\langle y < x \rangle \geq \alpha \leftrightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (x \notin X))$$

**Remarque.** On a :

$$\mathcal{D}[1] \equiv \forall X (\forall x (\forall y (\langle y < x \rangle = 1 \leftrightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X) \rightarrow \forall x (x \notin X)).$$

$$\mathcal{D}[0] \equiv \forall X ((\emptyset \notin X \rightarrow \emptyset \notin X) \rightarrow \emptyset \notin X).$$

On a immédiatement :  $\lambda x x \Vdash \neg \mathcal{D}[0]$  ;  $\forall Y \Vdash \mathcal{D}[1]$  ;

$I \Vdash \forall \alpha^{\mathfrak{J}2} \forall \beta^{\mathfrak{J}2} (\alpha \leq \beta \leftrightarrow (\mathcal{D}[\alpha] \rightarrow \mathcal{D}[\beta]))$  (plus précisément :  $\|\mathcal{D}[1]\| \subset \|\mathcal{D}[0]\|$ ).

Il suffit donc de montrer :

$\Vdash \forall \alpha^{\mathfrak{J}2} \forall \beta^{\mathfrak{J}2} (\alpha \wedge \beta = 0 \leftrightarrow (\mathcal{D}[\alpha \vee \beta] \rightarrow \mathcal{D}[\alpha] \vee \mathcal{D}[\beta]))$  ; voir le théorème 15 ;

$\Vdash \forall \alpha^{\mathfrak{J}2} \forall \beta^{\mathfrak{J}2} (\alpha \wedge \beta = 0 \leftrightarrow (\mathcal{D}[\alpha], \mathcal{D}[\beta] \rightarrow \perp))$  ; ou même seulement :

$\Vdash \forall \alpha^{\mathfrak{J}2} (\mathcal{D}[\alpha], \mathcal{D}[-\alpha] \rightarrow \perp)$  ; voir le théorème 23.

**Théorème 15.**

i)  $\Vdash \forall \alpha^{\mathfrak{J}2} \forall \beta^{\mathfrak{J}2} (\alpha \wedge \beta = 0 \leftrightarrow (\mathcal{D}[\alpha \vee \beta] \rightarrow \mathcal{D}[\alpha] \vee \mathcal{D}[\beta]))$ .

ii)  $\Vdash \forall \alpha^{\mathfrak{J}2} \forall \beta^{\mathfrak{J}2} (\mathcal{D}[\alpha \vee \beta] \rightarrow \mathcal{D}[\alpha] \vee \mathcal{D}[\beta])$ .

i) Cette formule s'écrit  $\forall \alpha^{\mathfrak{J}2} \forall \alpha'^{\mathfrak{J}2} (\alpha \wedge \alpha' = 0 \leftrightarrow (\mathcal{D}[\alpha \vee \alpha'], \neg \mathcal{D}[\alpha], \neg \mathcal{D}[\alpha'] \rightarrow \perp))$ .

Posons  $F[\alpha, X] \equiv \forall x (\forall y (\langle y < x \rangle \geq \alpha \leftrightarrow y \notin X) \rightarrow x \notin X)$  ( $X$  n'a pas d'élément minimal).

On a donc les hypothèses :  $\alpha \wedge \alpha' = 0$ ,  $\mathcal{D}[\alpha \vee \alpha']$ ,  $F[\alpha, X]$ ,  $F[\alpha', X']$ ,  $a_0 \in X$ ,  $a'_0 \in X'$ .

On pose  $Z = \{\alpha x \sqcup \alpha' x' ; x \in X, x' \in X'\}$  ; on a donc  $\alpha a_0 \sqcup \alpha' a'_0 \in Z$  et, par suite,  $\exists x (x \in Z)$ .

Il suffit donc de montrer :  $F[\alpha, X], F[\alpha', X'] \rightarrow F[\alpha \vee \alpha', Z]$ , ce qui est le lemme 16.

ii) On pose  $\beta' = \beta \wedge (-\alpha)$  ; on a  $\alpha \wedge \beta' = 0$  et  $\alpha \vee \beta' = \alpha \vee \beta$ . On a donc  $\mathcal{D}[\alpha \vee \beta] \rightarrow \mathcal{D}[\alpha] \vee \mathcal{D}[\beta']$ .

Or, on a  $\beta' \leq \beta$  et donc  $\mathcal{D}[\beta'] \rightarrow \mathcal{D}[\beta]$ .

C.Q.F.D.

**Lemme 16.** Soient  $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{J}2$ ,  $\alpha \wedge \alpha' = 0$ . Si  $X$  (resp.  $X'$ ) n'a pas d'élément minimal pour la relation  $\langle y < x \rangle \geq \alpha$  (resp.  $\alpha'$ ), alors  $Z = \{\alpha x \sqcup \alpha' x' ; x \in X, x' \in X'\}$  n'a pas d'élément minimal pour la relation  $\langle y < x \rangle \geq \alpha \vee \alpha'$ .

On cherche une contradiction à partir des hypothèses suivantes :

$F[\alpha, X]$  ;  $F[\alpha', X']$  ;  $\forall y (\langle y < b \rangle \geq \alpha \vee \alpha' \leftrightarrow y \notin Z)$  ;  $b \in Z$  (où  $b$  est un individu quelconque).

De  $b \in Z$ , on déduit qu'il existe  $a \in X$ ,  $a' \in X'$  tels que  $b = \alpha a \sqcup \alpha' a'$ .

On a donc, en substituant  $a$  (resp.  $a'$ ) à la variable  $x$  dans  $F[\alpha, X]$  (resp.  $F[\alpha', X']$ ) :

$\forall y (\langle y < a \rangle \geq \alpha \leftrightarrow y \notin X) \rightarrow \perp$  ;  $\forall y (\langle y < a' \rangle \geq \alpha' \leftrightarrow y \notin X') \rightarrow \perp$ .

Il existe donc  $y_0 \in X$ ,  $y'_0 \in X'$  tels que  $\langle y_0 < a \rangle \geq \alpha$ ,  $\langle y'_0 < a' \rangle \geq \alpha'$ .

On pose  $z_0 = \alpha y_0 \sqcup \alpha' y'_0$  et on a  $\langle z_0 < \alpha a \sqcup \alpha' a' \rangle \geq \alpha \vee \alpha'$  (lemme 5(ii)) ;

autrement dit  $\langle z_0 < b \rangle \geq \alpha \vee \alpha'$ . De plus  $z_0 \in Z$  par définition de  $Z$ .

Mais cela contredit l'hypothèse  $\forall y (\langle y < b \rangle \geq \alpha \vee \alpha' \leftrightarrow y \notin Z)$ .

C.Q.F.D.

**Lemme 17.**

i)  $I \Vdash \forall x \forall y (\langle x < y \rangle \neq 1 \rightarrow x \notin y)$ .

- ii) Si  $\mathcal{M} \models u \in v$ , alors  $\perp \Vdash u \varepsilon \mathbb{I}v$ .  
iii)  $\perp \Vdash \forall x \forall y \forall \alpha^{\mathbb{I}2} (\langle x < y \rangle \geq \alpha \leftrightarrow \alpha x \varepsilon \mathbb{I}Cl(\{y\}))$ .  
iv)  $\perp \Vdash \forall x \forall y (\langle x < y \rangle = 1 \leftrightarrow x \varepsilon \mathbb{I}Cl(y))$ .

Soient  $a, b$  deux individus.

i) Soient  $\xi \Vdash \langle a < b \rangle \neq 1$ ,  $\pi \in \|\!| a \notin \mathbb{I}b \|\!$ ; alors,  $(a, \pi) \in b$ , donc  $\langle a < b \rangle = 1$  et  $\xi \Vdash \perp$ .

Donc  $\xi \star \pi \in \perp$ .

ii) En effet, on a  $\|\!| u \notin \mathbb{I}v \|\!| = \{\pi \in \Pi ; (u, \pi) \in v \times \Pi\} = \Pi$ .

iii) Soient  $\alpha \in \{0, 1\}$  et  $a, b \in \mathcal{M}$  tels que  $\langle a < b \rangle \geq \alpha$ .

Si  $\alpha = 0$ , on doit montrer  $\perp \Vdash \emptyset \varepsilon \mathbb{I}Cl(\{y\})$  ce qui découle de (ii).

Si  $\alpha = 1$ , alors  $\langle a < b \rangle = 1$ , c'est-à-dire  $a \in Cl(b)$ , donc  $a \in Cl(\{b\})$ .

D'après (ii), il en résulte que  $\perp \Vdash a \varepsilon \mathbb{I}Cl(\{b\})$ .

iv) En effet, si  $a, b$  sont deux individus de  $\mathcal{M}$ , on a trivialement :

$$\|\!| \langle a < b \rangle \neq 1 \|\!| = \|\!| a \notin \mathbb{I}Cl(b) \|\!|.$$

C.Q.F.D.

### Lemme 18.

La relation bien fondée  $\langle x < y \rangle = 1$  est rangée et sa fonction de rang  $R$  a pour image  $On$ .

Le lemme 17(iv) montre que la relation est rangée.

Soient  $\rho$  un ordinal et  $r$  un individu  $\simeq \rho$ . On montre, par induction sur  $\rho$ , que  $R(r) \geq \rho$ .

En effet, pour tout  $\rho' \in \rho$ , il existe  $r' \varepsilon r$  tel que  $r' \simeq \rho'$ . On a  $R(r') \geq \rho'$  par hypothèse d'induction, et  $\langle r' < r \rangle = 1$  d'après le lemme 17(i). On a donc  $\rho' \in R(r)$  par définition de  $R$ , et finalement  $R(r) \geq \rho$ . Cela montre que l'image de  $R$  n'est pas majorée dans  $On$ , donc est  $On$  tout entier.

C.Q.F.D.

**Théorème 19.** Soit  $F(x, y)$  une formule de  $ZF_\varepsilon$ , avec paramètres. On a alors :

$\perp \Vdash \forall x \forall y (\forall \varpi^{\mathbb{I}11} F(x, f(x, \varpi)) \rightarrow F(x, y))$  pour un symbole de fonction  $f$  convenable, défini dans  $\mathcal{M}$ , de domaine  $\mathcal{M} \times \Pi$ .

En utilisant le principe du choix, on définit, dans  $\mathcal{M}$ , un symbole de fonction  $f$  tel que :

$$\forall x \forall y (\forall \varpi \in \Pi) (\varpi \in \|\!| F(x, y) \|\!| \rightarrow \varpi \in \|\!| F(x, f(x, \varpi)) \|\!|).$$

Soient  $a, b$  deux individus,  $\xi \Vdash \forall \varpi^{\mathbb{I}11} F(a, f(a, \varpi))$  et  $\pi \in \|\!| F(a, b) \|\!|$ .

On a donc  $\pi \in \|\!| F(a, f(a, \pi)) \|\!|$ , donc  $\xi \star \pi \in \perp$ .

C.Q.F.D.

**Définitions.** Soient  $a$  un individu de  $\mathcal{N}$  et  $\kappa$  un ordinal (qui n'est donc pas un individu de  $\mathcal{N}$ , mais une classe d'équivalence pour  $\simeq$ ).

Une fonction ou application de  $\kappa$  dans  $a$  est, par définition, une relation binaire  $R(\rho, x)$  telle que :  $\forall x \forall x' (\forall \rho, \rho' \in \kappa) (R(\rho, x), R(\rho', x'), \rho \simeq \rho' \rightarrow x = x')$  ;  $(\forall \rho \in \kappa) (\exists x \varepsilon a) R(\rho, x)$ .

C'est une injection si on a  $\forall x (\forall \rho, \rho' \in \kappa) (R(\rho, x), R(\rho', x) \rightarrow \rho \simeq \rho')$ .

Une surjection de  $a$  sur  $\kappa$  est une fonction  $f$  de domaine  $a$  telle que :

$$(\forall \rho \in \kappa) (\exists x \varepsilon a) f(x) \simeq \rho.$$

### Théorème 20.

Pour tout individu  $a$ , il existe un ordinal  $\kappa$  tel qu'il n'existe aucune surjection de  $a$  sur  $\kappa$ .

Soit  $f$  une surjection de  $a$  sur un ordinal  $\rho$ . On définit une relation d'ordre strict  $\prec_f$  en posant  $x \prec_f y \Leftrightarrow x \in a \wedge y \in a \wedge f(x) < f(y)$ . Il est clair que cette relation est bien fondée, que  $f$  est une fonction  $a$ -inductive, et que  $\mathbf{O}(f, a) \simeq \rho$ .

On peut considérer cette relation comme une partie de  $a \times a$ .

Au moyen des axiomes de la réunion, des parties et de collection donnés ci-dessus (théorème 1 à 4), on définit l'ordinal  $\kappa_0$  qui est la réunion des  $\mathbf{O}(f, a)$  pour toutes les fonctions  $f$  qui sont  $a$ -inductives pour une relation d'ordre strict bien fondée sur  $a$ .

Pour cela, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{B}(a) = \{X \in \overline{\mathcal{P}}(a \times a) ; X \text{ est une relation d'ordre strict bien fondée sur } a\}.$$

On pose alors  $\kappa_0 = \bigcup \{\mathbf{O}(f, a) ; X \in \mathcal{B}(a), f \in \Phi(X, a)\}$ .

On utilise, dans cette définition, le symbole de fonction  $\Phi$ , défini après le lemme 10, qui associe à chaque relation d'ordre strict bien fondée  $X$  sur  $a$ , un ensemble *non vide* de fonctions  $a$ -inductives pour cette relation.

Il n'existe alors aucune surjection de  $a$  sur  $\kappa_0 + 1$ .

C.Q.F.D.

On désigne par  $\Delta$  le premier ordinal de  $\mathcal{N}$  tel qu'il n'existe pas de surjection de  $\mathfrak{III}$  sur  $\Delta$  : pour toute fonction  $\phi$ , il existe  $\delta \in \Delta$  tel que  $\forall x \mathfrak{III}(\phi(x) \neq \delta)$ .

Il est clair que  $\Delta$  est un cardinal.

Pour chaque  $\alpha \in \mathfrak{I}2$ , on désigne par  $\mathcal{N}_\alpha$  la classe définie par la formule  $x = \alpha x$ .

**Lemme 21.**

Soient  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathfrak{I}2$ ,  $\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$  et  $R_0$  (resp.  $R_1$ ) une relation fonctionnelle de domaine  $\mathcal{N}_{\alpha_0}$  (resp.  $\mathcal{N}_{\alpha_1}$ ) à valeurs dans  $\text{On}$ . Alors, ou bien  $R_0$ , ou bien  $R_1$ , n'est pas surjective sur  $\Delta$ .

On raisonne par l'absurde, en supposant que  $R_0$  et  $R_1$  sont surjectives sur  $\Delta$ .

D'après le théorème 19 appliqué à la formule  $F(x_0, x_1) \equiv \neg(R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 x_1))$ , on a :

$$\forall x_0 (\exists x_1 (R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 x_1)) \rightarrow \exists \varpi \mathfrak{III}(R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 f(x_0, \varpi))))$$

où  $f$  est un symbole de fonction convenable (donc défini dans  $\mathcal{M}$ ).

En remplaçant  $x_0$  par  $\alpha_0 x_0$ , on obtient :

$$\forall x_0 (\exists x_1 (R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 x_1)) \rightarrow \exists \varpi \mathfrak{III}(R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 f(\alpha_0 x_0, \varpi)))).$$

Or, d'après le lemme 5(i), on a  $\alpha_1 f(\alpha_0 x, \varpi) = \alpha_1 f(\alpha_1 \alpha_0 x, \varpi) = \alpha_1 f(\emptyset, \varpi)$ . Par suite :

$$\forall x_0 (\exists x_1 (R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 x_1)) \rightarrow \exists \varpi \mathfrak{III}(R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 f(\emptyset, \varpi)))).$$

Par hypothèse, on a  $(\forall \rho \in \Delta) \exists x_0 \exists x_1 (\rho \simeq R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 x_1))$ . Par suite :

$(\forall \rho \in \Delta) \exists x_0 \exists \varpi \mathfrak{III}(\rho \simeq R_0(\alpha_0 x_0) \simeq R_1(\alpha_1 f(\emptyset, \varpi)))$  et on a donc :

$(\forall \rho \in \Delta) \exists \varpi \mathfrak{III}(\rho \simeq R_1(\alpha_1 f(\emptyset, \varpi)))$ .

La fonction  $\varpi \mapsto R_1(\alpha_1 f(\emptyset, \varpi))$  est donc une surjection de  $\mathfrak{III}$  sur  $\Delta$ . Mais cela contredit la définition de  $\Delta$ .

**Remarque.** On devrait écrire  $f(\alpha_0, \alpha_1, x_0, \varpi)$  au lieu de  $f(x_0, \varpi)$ , car le symbole de fonction  $f$  dépend des quatre variables  $\alpha_0, \alpha_1, x_0, \varpi$ . En fait, il dépend aussi des paramètres éventuels apparaissant dans  $R_0, R_1$ . Cela ne change rien à la démonstration.

C.Q.F.D.

**Corollaire 22.** Soient  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathfrak{I}2$ ,  $\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$ , et  $\prec_0, \prec_1$  deux relations d'ordre strict de domaines respectifs  $\mathcal{N}_{\alpha_0}, \mathcal{N}_{\alpha_1}$  qui sont bien fondées et rangées. Soient  $Rg_0, Rg_1$  leurs fonctions de rang. Alors, ou bien l'image de  $Rg_0$ , ou bien celle de  $Rg_1$  est  $< \Delta$ .

Pour pouvoir définir les fonctions de rang  $\text{Rg}_0, \text{Rg}_1$ , on considère les relations  $\prec'_0, \prec'_1$ , de domaine  $\mathcal{N}$  tout entier, définies par  $x \prec'_i y \equiv (x = \alpha_i x) \wedge (y = \alpha_i y) \wedge (x \prec_i y)$  pour  $i = 0, 1$ .

Ces deux relations d'ordre strict sont bien fondées et rangées.

Leurs fonctions de rang  $\text{Rg}'_0, \text{Rg}'_1$  prennent la valeur 0 en dehors de  $\mathcal{N}_{\alpha_0}, \mathcal{N}_{\alpha_1}$  respectivement : en effet, tous les individus hors de  $\mathcal{N}_{\alpha_i}$  sont minimaux pour  $\prec'_i$ .

D'après le lemme 21, l'une des deux, par exemple  $\text{Rg}'_0$  n'est pas surjective sur  $\Delta$ .

Comme l'image d'une fonction de rang est un segment initial de  $\text{On}$ , l'image de  $\text{Rg}'_0$  est un ordinal  $< \Delta$ .

C.Q.F.D.

**Théorème 23.**

i)  $\Vdash \forall \alpha_0 \forall \alpha_1 (\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0 \leftrightarrow (\mathcal{D}[\alpha_0], \mathcal{D}[\alpha_1] \rightarrow \perp))$ .

ii)  $\Vdash \forall \alpha_0 \forall \alpha_1 (\mathcal{D}[\alpha_0], \mathcal{D}[\alpha_1] \rightarrow \mathcal{D}[\alpha_0 \wedge \alpha_1])$ .

i) Dans  $\mathcal{N}$ , soient  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{J}2$  tels que  $\alpha_0 \wedge \alpha_1 = 0$  et les deux relations  $\langle x < y \rangle \geq \alpha_0, \langle x < y \rangle \geq \alpha_1$  soient bien fondées. On a donc  $\alpha_0, \alpha_1 \neq 0, 1$ .

Les deux relations  $x \prec_i y \equiv (x = \alpha_i x) \wedge (y = \alpha_i y) \wedge (\langle x < y \rangle = \alpha_i)$  pour  $i = 0, 1$ , sont donc des ordres stricts bien fondés.

Il résulte du lemme 17(iii), que ces deux relations sont rangées.

Or, d'après le lemme 5, on a :  $\Vdash \forall x \forall y \forall \alpha (\langle x < y \rangle = 1 \rightarrow \langle \alpha x < \alpha y \rangle = \alpha)$ .

Mais, d'après le lemme 18, la fonction de rang de la relation bien fondée  $\langle x < y \rangle = 1$  a pour image  $\text{On}$  tout entier. D'après la proposition 13, il en est donc de même pour les fonctions de rang des relations d'ordre strict bien fondées  $x \prec_0 y$  et  $x \prec_1 y$ .

Mais cela contredit le corollaire 22.

ii) On a  $\alpha_0 \leq (\alpha_0 \wedge \alpha_1) \vee (-\alpha_1)$ . D'après  $\mathcal{D}[\alpha_0]$  et le théorème 15, on a donc  $\mathcal{D}[\alpha_0 \wedge \alpha_1]$  ou  $\mathcal{D}[-\alpha_1]$ . Mais  $\mathcal{D}[-\alpha_1]$  est impossible, d'après  $\mathcal{D}[\alpha_1]$  et (i).

C.Q.F.D.

**Corollaire 24.**  $\mathcal{D}[\alpha]$  équivaut à chacune des propriétés suivantes :

i) Il existe une relation d'ordre strict  $\prec$  de domaine  $\mathcal{N}_\alpha$  qui est bien fondée, rangée et dont la fonction de rang a une image  $\geq \Delta$ .

ii) Il existe une fonction de domaine  $\mathcal{N}_\alpha$  qui est surjective sur  $\Delta$ .

$\mathcal{D}[\alpha] \Rightarrow$  (i) :

Par définition de  $\mathcal{D}[\alpha]$ , la relation binaire  $(x = \alpha x) \wedge (y = \alpha y) \wedge (\langle x < y \rangle = \alpha)$  est bien fondée. D'après le lemme 17(iii), cette relation est rangée. Dans la preuve du théorème 23, on a vu que sa fonction de rang a pour image  $\text{On}$  tout entier.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : évident.

(ii)  $\Rightarrow \mathcal{D}[\alpha]$  :

Puisque  $\mathcal{D}$  est un ultrafiltre, il suffit de montrer  $\neg \mathcal{D}[-\alpha]$ . Or, (ii) et  $\mathcal{D}[-\alpha]$  contredisent le lemme 21.

C.Q.F.D.

**Théorème 25.**

Si  $\mathbb{J}2$  est non trivial, il n'existe aucun ensemble totalement ordonné par  $\varepsilon$ , de cardinal  $\geq \Delta$ .

Soient  $\alpha \in \mathbb{J}2, \alpha \neq 0, 1$  et  $X$  un ensemble totalement (donc bien) ordonné par  $\varepsilon$ , qui est équipotent à  $\Delta$ . On montre que l'application  $x \mapsto \alpha x$  est alors une injection de  $X$  dans  $\mathcal{N}_\alpha$  :

En effet, d'après le lemme 17(i), on a  $x \varepsilon y \rightarrow \langle x < y \rangle = 1$  et, d'après le lemme 5, on a :  $\langle x < y \rangle = 1 \rightarrow \langle \alpha x < \alpha y \rangle = \alpha$ . Donc, si  $x, y \in X$  et  $x \neq y$ , on aura, par exemple,  $x \varepsilon y$ , donc  $\langle \alpha x < \alpha y \rangle = \alpha$  et donc  $\alpha x \neq \alpha y$  puisque  $\alpha \neq 0$ .

Il existe donc une fonction de domaine  $\mathcal{N}_\alpha$  qui est surjective sur  $\Delta$ . Le même raisonnement appliqué à  $-\alpha$  donne le même résultat pour  $-\alpha$ . Mais cela contredit le lemme 21.

C.Q.F.D.

## Le modèle $\mathcal{M}_\mathcal{D}$

Pour chaque formule  $F[x_1, \dots, x_n]$  de ZF, on a défini, dans le modèle de base  $\mathcal{M}$ , un symbole de fonction  $n$ -aire, à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , noté  $\langle F[x_1, \dots, x_n] \rangle$ , en posant, quels que soient les individus  $a_1, \dots, a_n$  de  $\mathcal{M}$  :  $\langle F[a_1, \dots, a_n] \rangle = 1 \Leftrightarrow \mathcal{M} \models F[a_1, \dots, a_n]$ .

Dans  $\mathcal{N}$ , le symbole fonctionnel  $\langle F[x_1, \dots, x_n] \rangle$  est à valeurs dans l'algèbre de Boole  $\mathbb{J}2$ .

On définit, dans  $\mathcal{N}$ , deux relations binaires  $\in_\mathcal{D}$  et  $=_\mathcal{D}$  en posant :

$$(x \in_\mathcal{D} y) \equiv \mathcal{D}[\langle x \in y \rangle]; \quad (x =_\mathcal{D} y) \equiv \mathcal{D}[\langle x = y \rangle].$$

La classe  $\mathcal{N}$ , munie de ces deux relations sera notée  $\mathcal{M}_\mathcal{D}$ .

Pour chaque formule  $F[\vec{x}, y]$  de ZF, à  $n+1$  variables libres  $x_1, \dots, x_n, y$ , on peut, à l'aide du *principe du choix* dans  $\mathcal{M}$ , définir un symbole  $f_F$  de fonction  $n$ -aire, tel que :

$$\mathcal{M} \models \forall \vec{x} (F[\vec{x}, f_F(\vec{x})] \rightarrow \forall y F[\vec{x}, y]);$$

$f_F$  est appelé la *fonction de Skolem* de la formule  $F[\vec{x}, y]$ .

### Lemme 26.

- i)  $\mathbb{I} \Vdash \forall \vec{x} \forall y (\langle \forall y F[\vec{x}, y] \rangle \leq \langle F[\vec{x}, y] \rangle)$
- ii)  $\mathbb{I} \Vdash \forall \vec{x} \forall y (\langle \forall y F[\vec{x}, y] \rangle = \langle F[\vec{x}, f_F(\vec{x})] \rangle)$ .

Trivial.

C.Q.F.D.

Pour chaque formule  $F[\vec{x}]$  de ZF, on définit par récurrence *une formule de  $ZF_\varepsilon$* , qui a les mêmes variables libres, et que l'on note  $\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F[\vec{x}]$ .

- $F$  est atomique :

$(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models x_1 \in x_2)$  est  $x_1 \in_\mathcal{D} x_2$ ;  $(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models x_1 = x_2)$  est  $x_1 =_\mathcal{D} x_2$ ;  $(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models \perp)$  est  $\perp$ .

- $F \equiv F_0 \rightarrow F_1$  : alors  $(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F)$  est la formule  $(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F_0) \rightarrow (\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F_1)$ .
- $F[\vec{x}] \equiv \forall y G[\vec{x}, y]$  : alors  $(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F[\vec{x}])$  est la formule  $\forall y (\mathcal{M}_\mathcal{D} \models G[\vec{x}, y])$ .

**Lemme 27.** *Pour chaque formule  $F[\vec{x}]$  de ZF, on a  $\mathbb{I} \Vdash \forall \vec{x} ((\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F[\vec{x}]) \leftrightarrow \mathcal{D}\langle F[\vec{x}] \rangle)$ .*

Preuve par récurrence sur la longueur de  $F$ .

Si  $F$  est atomique, on a  $\mathbb{I} \Vdash \forall \vec{x} ((\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F[\vec{x}]) \rightarrow \mathcal{D}\langle F[\vec{x}] \rangle)$

et  $\mathbb{I} \Vdash \forall \vec{x} (\mathcal{D}\langle F[\vec{x}] \rangle \rightarrow (\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F[\vec{x}]))$  puisque  $(\mathcal{M}_\mathcal{D} \models F[\vec{x}])$  est identique à  $\mathcal{D}\langle F[\vec{x}] \rangle$ .

Si  $F \equiv F_0 \rightarrow F_1$ , la formule  $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F) \leftrightarrow \mathcal{D}\langle F \rangle$  s'écrit :

$$((\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F_0) \rightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F_1)) \leftrightarrow \mathcal{D}\langle F_0 \rightarrow F_1 \rangle.$$

Puisque  $\mathcal{D}$  est un ultrafiltre, cette formule équivaut à :

$$((\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F_0) \rightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F_1)) \leftrightarrow (\mathcal{D}\langle F_0 \rangle \rightarrow \mathcal{D}\langle F_1 \rangle), \text{ qui est conséquence logique de :}$$

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F_0) \leftrightarrow \mathcal{D}\langle F_0 \rangle \text{ et de } (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F_1) \leftrightarrow \mathcal{D}\langle F_1 \rangle.$$

D'où le résultat, d'après l'hypothèse de récurrence.

Si  $F[\vec{x}] \equiv \forall y G[\vec{x}, y]$ , soit  $f_G(\vec{x})$  la fonction de Skolem de  $G$ .

On a alors  $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \forall y G[\vec{x}, y]) \equiv \forall y (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models G[\vec{x}, y])$  et donc :

$$\vdash (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \forall y G[\vec{x}, y]) \rightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models G[\vec{x}, f_G(\vec{x})]).$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc :

$$\vdash (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \forall y G[\vec{x}, y]) \rightarrow \mathcal{D}\langle G[\vec{x}, f_G(\vec{x})] \rangle.$$

En appliquant le lemme 26(ii), on obtient  $\vdash (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \forall y G[\vec{x}, y]) \rightarrow \mathcal{D}\langle \forall y G[\vec{x}, y] \rangle$ .

Inversement, d'après le lemme 26(i), on a  $\vdash \forall y (\mathcal{D}\langle \forall y G[\vec{x}, y] \rangle \rightarrow \mathcal{D}\langle G[\vec{x}, y] \rangle)$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient donc :

$$\vdash \mathcal{D}\langle \forall y G[\vec{x}, y] \rangle \rightarrow \forall y (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models G[\vec{x}, y]), \text{ et donc, par définition de } (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \forall y G[\vec{x}, y]) :$$

$$\vdash \mathcal{D}\langle \forall y G[\vec{x}, y] \rangle \rightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \forall y G[\vec{x}, y]).$$

C.Q.F.D.

**Théorème 28.**  $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$  est une extension élémentaire du modèle de base  $\mathcal{M}$ .

Soit  $F[\vec{a}]$  une formule close de ZF, à paramètres  $a_1, \dots, a_n$  dans  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{M} \models F[\vec{a}]$ , on a  $\langle F[\vec{a}] \rangle = 1$  (par définition), et donc évidemment  $\vdash \mathcal{D}\langle F[\vec{a}] \rangle$ .

D'après le lemme 27, on a donc  $\vdash (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models F[\vec{a}])$ .

Si  $\mathcal{M} \not\models F[\vec{a}]$ , alors  $\mathcal{M} \models \neg F[\vec{a}]$ ; on a donc  $\vdash (\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \models \neg F[\vec{a}])$ .

C.Q.F.D.

**Remarque.** Le théorème 28 est, en fait, valable pour n'importe quel ultrafiltre sur  $\mathfrak{I}2$ , avec la même démonstration.

**Théorème 29.** Soit  $\sqsubset$  une relation binaire bien fondée, définie dans le modèle de base  $\mathcal{M}$ . Alors la relation  $\mathcal{D}\langle x \sqsubset y \rangle$  est bien fondée dans le modèle de réalisabilité  $\mathcal{N}$ .

**Notations.** Pour  $\alpha \in \mathfrak{I}2$ , on écrira  $x <_{\alpha} y$  pour  $\langle x < y \rangle \geq \alpha$ ; et  $x \sqsubset_{\mathcal{D}} y$  pour  $\langle x \sqsubset y \rangle \in \mathcal{D}$ . On rappelle que  $x < y$  signifie  $x \in \text{Cl}(y)$ .

On définit, dans le modèle  $\mathcal{M}$ , une relation binaire  $\sqsubseteq$  sur la classe  $\{0, 1\} \times \mathcal{M}$ , en posant, pour  $\alpha, \alpha' \in \{0, 1\}$  et  $a, a'$  quelconques dans  $\mathcal{M}$  :

$$(\alpha', a') \sqsubseteq (\alpha, a) \Leftrightarrow (\alpha' < \alpha) \vee (\alpha = \alpha' = 1 \wedge a' \sqsubset a) \vee (\alpha = \alpha' = 0 \wedge a' < a).$$

La relation  $\sqsubseteq$  est la *somme directe ordonnée* des deux relations  $\sqsubset, <$ .

On montre aisément qu'elle est *bien fondée dans  $\mathcal{M}$* .

Le symbole fonctionnel binaire associé à cette relation, de domaine  $\{0, 1\} \times \mathcal{M}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , est donné par :

$$\langle (\alpha', a') \sqsubseteq (\alpha, a) \rangle = (\neg\alpha' \wedge \alpha) \vee (\alpha' \wedge \alpha \wedge \langle a' \sqsubset a \rangle) \vee (\neg\alpha' \wedge \neg\alpha \wedge \langle a' < a \rangle).$$

Cette définition donne, dans  $\mathcal{N}$ , un symbole fonctionnel à deux arguments dans  $\mathfrak{I}2 \times \mathcal{N}$ , à valeurs dans  $\mathfrak{I}2$ .

D'après le théorème 8, la relation binaire  $\langle (\alpha', a') \sqsubseteq (\alpha, a) \rangle = 1$  est bien fondée dans  $\mathcal{N}$ .

On raisonne par l'absurde, en supposant que la relation binaire  $\sqsubset_{\mathcal{D}}$  n'est pas bien fondée.

Il existe donc  $a_0, A_0$  tels que  $a_0 \in A_0$  et  $A_0$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $\sqsubset_{\mathcal{D}}$ .

On définit, dans  $\mathcal{N}$ , la classe  $\mathcal{X}$  des couples  $(\alpha, x)$ , tels que l'on ait :

- $\mathcal{D}(\alpha)$ ;
- il existe  $X$  tel que  $x \in X$  et  $X$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $\sqsubset_{\mathcal{D}}$  ni pour  $<_{-\alpha}$ .

On obtient la contradiction cherchée en montrant que la classe  $\mathcal{X}$  est non vide et n'a pas d'élément minimal pour la relation binaire  $\langle (\alpha', x') \sqsubset (\alpha, x) \rangle = 1$ .

Le couple  $(1, a_0)$  est dans  $\mathcal{X}$  : en effet, on a  $x <_0 x$  pour tout  $x$ , donc  $A_0$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $<_0$ .

Soit maintenant  $(\alpha, a)$  dans  $\mathcal{X}$  ; on cherche  $(\alpha', a')$  dans  $\mathcal{X}$  tel que  $\langle (\alpha', a') \sqsubset (\alpha, a) \rangle = 1$ .

Par hypothèse sur  $(\alpha, a)$ , il existe  $A$  tel que  $a \in A$  et  $A$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $\sqsubset_{\mathcal{D}}$ . Il existe donc  $a^0 \in A$  tel que l'on ait  $\mathcal{D}\langle a^0 \sqsubset a \rangle$ .

On pose  $\alpha' = (\alpha \wedge \langle a^0 \sqsubset a \rangle)$  et on a donc  $\mathcal{D}(\alpha')$ . On pose  $\beta = \alpha \wedge \neg \alpha'$  ; donc  $\alpha', \beta, \neg \alpha$  forment une partition de 1 dans l'algèbre de Boole  $\mathfrak{B}$ .

On a  $\neg \mathcal{D}(\beta)$  donc, par définition de  $\mathcal{D}$ , la relation  $<_{\beta}$  n'est pas bien fondée. Il existe donc  $b, B$  tels que  $b \in B$  et  $B$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $<_{\beta}$ .

Par ailleurs, puisque  $a \in A$  et  $A$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $<_{-\alpha}$ , il existe  $a^1 \in A$  tel que  $a^1 <_{-\alpha} a$ . On pose alors :

$$A' = \{ \alpha' x \sqcup (\neg \alpha) y \sqcup \beta z ; x, y \in A, z \in B \} ; a' = \alpha' a^0 \sqcup (\neg \alpha) a^1 \sqcup \beta b.$$

On a donc bien  $a' \in A'$  ; par ailleurs :

$$\alpha' \wedge \alpha \wedge \langle a' \sqsubset a \rangle = \alpha' \wedge \langle a' \sqsubset a \rangle = \alpha' \wedge \langle a^0 \sqsubset a \rangle = \alpha' ;$$

$$\neg \alpha' \wedge \neg \alpha \wedge \langle a' < a \rangle = \neg \alpha, \text{ puisque } \neg \alpha' \geq \neg \alpha \text{ et } \langle a' < a \rangle \geq \neg \alpha \wedge \langle a^1 < a \rangle = \neg \alpha.$$

Il en résulte que  $\langle (\alpha', a') \sqsubset (\alpha, a) \rangle = \beta \vee \alpha' \vee \neg \alpha = 1$ , par définition de  $\langle (\alpha', a') \sqsubset (\alpha, a) \rangle$ .

Il reste à montrer que  $A'$  n'a pas de  $\varepsilon$ -élément minimal pour  $\sqsubset_{\mathcal{D}}$  et pour  $<_{-\alpha'}$ .

Soit donc  $u \in A'$ , donc  $u = \alpha' x \sqcup (\neg \alpha) y \sqcup \beta z$  avec  $x, y \in A$  et  $z \in B$ .

Par hypothèse sur  $A, B$ , il existe  $x', y' \in A, x' \sqsubset_{\mathcal{D}} x, y' <_{-\alpha} y$  et  $z' \in B, z' <_{\beta} z$ .

Alors, si on pose  $u' = \alpha' x' \sqcup (\neg \alpha) y' \sqcup \beta z'$ , on a  $u' \in A'$ .

De plus, on a  $\langle u' \sqsubset u \rangle \geq \alpha' \wedge \langle x' \sqsubset x \rangle$ , et donc  $\mathcal{D}\langle u' \sqsubset u \rangle$ , c'est-à-dire  $u' \sqsubset_{\mathcal{D}} u$ .

Enfin,  $\langle u' < u \rangle \geq (\neg \alpha \wedge \langle y' < y \rangle) \vee (\beta \wedge \langle z' < z \rangle) = \neg \alpha \vee \beta = \neg \alpha'$  ; on a donc  $u' <_{-\alpha'} u$ .

C.Q.F.D.

**Théorème 30.**  $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$  est bien fondé, donc a les mêmes ordinaux que  $\mathcal{N}'_{\varepsilon}$ .

On applique le théorème 29 à la relation binaire  $\in$  qui est bien fondée dans  $\mathcal{M}$ . On en déduit que la relation  $\langle x \in y \rangle$ , c'est-à-dire  $x \in_{\mathcal{D}} y$ , est bien fondée dans  $\mathcal{N}$ .

C.Q.F.D.

La relation  $\in_{\mathcal{D}}$  est bien fondée et extensionnelle, ce qui veut dire qu'on a, dans  $\mathcal{N}$  :

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in_{\mathcal{D}} x \leftrightarrow z \in_{\mathcal{D}} y) \rightarrow \forall z (x \in_{\mathcal{D}} z \rightarrow y \in_{\mathcal{D}} z)).$$

On peut alors définir une contraction (*collapsing*) au moyen d'un symbole de fonction  $\Phi$ , qui est un *isomorphisme* de  $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}}, \in_{\mathcal{D}})$  sur une classe transitive du modèle  $\mathcal{N}_{\varepsilon}$  de ZF, qui contient les ordinaux. On a donc :

$$\forall x \forall y (y \in_{\mathcal{D}} x \rightarrow \Phi(y) \in \Phi(x)) ; \forall x (\forall z \in \Phi(x)) (\exists y \in_{\mathcal{D}} x) z \simeq \Phi(y).$$

La définition est analogue à celle de la *fonction de rang* définie plus haut pour une relation bien fondée *transitive*. Le détail sera donné dans une version ultérieure de cet article.

Il en résulte que :

**Théorème 31.** Le modèle de réalisabilité  $\mathcal{N}_{\varepsilon}$  contient une classe transitive, qui contient les ordinaux et est une extension élémentaire du modèle de base  $\mathcal{M}$ .

**Corollaire 32.** *La classe  $L^{\mathcal{M}}$  des constructibles de  $\mathcal{M}$  est élémentairement incluse dans  $L^{\mathcal{N}}$ .*

## Références

- [1] H.B. Curry, R. Feys. *Combinatory Logic*. North-Holland (1958).
- [2] T. Griffin. *A formulæ-as-type notion of control*.  
Conf. record 17th A.C.M. Symp. on Principles of Progr. Languages (1990).
- [3] W. Howard. *The formulas-as-types notion of construction*.  
Essays on combinatory logic,  $\lambda$ -calculus, and formalism, J.P. Seldin and J.R. Hindley ed., Acad. Press (1980) p. 479–490.
- [4] J.-L. Krivine. *Realizability algebras : a program to well order  $\mathbb{R}$* .  
Logical Methods in Computer Science vol. 7, 3 :02 (2011) p. 1-47.
- [5] J.-L. Krivine. *Realizability algebras II : new models of  $ZF + DC$* .  
Logical Methods in Computer Science, vol. 8, 1 :10 (2012) p. 1-28.
- [6] J.-L. Krivine. *Realizability algebras III : some examples*.  
<http://arxiv.org/abs/1210.5065> (A paraître).
- [7] A. Miquel. *Forcing as a program transformation*.  
Logic in Computer Science (LICS'11) (2011) p. 197-206.