



**HAL**  
open science

# Le rôle de la fonction de Green dans une équation elliptique non-linéaire avec l'exposant critique de Sobolev

Olivier Rey

► **To cite this version:**

Olivier Rey. Le rôle de la fonction de Green dans une équation elliptique non-linéaire avec l'exposant critique de Sobolev. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique*, 1987, 305 (13), pp.591-594. hal-00935365

**HAL Id: hal-00935365**

**<https://hal.science/hal-00935365>**

Submitted on 3 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES



TOME 305 SÉRIE I N° 13 — 30 OCTOBRE 1987

Série I  
MATHÉMATIQUE

**gauthier-villars**

## Le rôle de la fonction de Green dans une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev

Olivier REY

**Résumé** —  $\Omega$  étant un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 5$ , on montre que pour tout point critique non dégénéré  $x_0$  de la partie régulière de la fonction de Green relative au laplacien sur  $\Omega$ , il existe une famille  $(u_\varepsilon)$  de  $H_0^1(\Omega)$  telle que  $-\Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon^{(N+2)/(N-2)} + \varepsilon u_\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon > 0$  sur  $\Omega$ , et  $u_\varepsilon$  se concentre autour de  $x_0$  quand  $\varepsilon > 0$  tend vers 0. On donne également la réciproque de ce résultat.

### The role of Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent

**Abstract** — We show that for any non-degenerate critical point  $x_0$  of the regular part of Green's function relative to the Laplacian on  $\Omega$ , where  $\Omega$  is a smooth and bounded domain in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 5$ , there exists a family  $(u_\varepsilon)$  of  $H_0^1(\Omega)$  such that  $-\Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon^{(N+2)/(N-2)} + \varepsilon u_\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon > 0$  on  $\Omega$ , and  $u_\varepsilon$  concentrates around  $x_0$  as  $\varepsilon > 0$  goes to 0. We prove a converse to this result.

1. INTRODUCTION. — On considère un ouvert borné et régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 5$ , et on s'intéresse aux problèmes :

$$(P_\varepsilon) \quad -\Delta u = u^p + \varepsilon u, \quad u > 0 \quad \text{sur } \Omega; \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où  $\varepsilon > 0$  et  $(N-2)p = N+2$ , c'est-à-dire que  $p+1$  est l'exposant critique pour l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^{p+1}(\Omega)$ . On sait ([7], [6]) que pour  $\varepsilon \in ]0, \lambda_1[$ , où  $\lambda_1$  désigne la première valeur propre non nulle de l'opérateur  $-\Delta$  sur  $H_0^1(\Omega)$ ,  $(P_\varepsilon)$  admet toujours une solution dans  $H_0^1(\Omega)$ . Il s'agit ici d'étudier un aspect du rôle particulier ([3], [9], [11]) que joue la partie régulière de la fonction de Green dans ce type d'équations. On définit sur  $\Omega$  la fonction

$$\varphi(x) = H(x, x)$$

où  $H(x, y) = (1/|x-y|^{N-2}) - G(x, y)$  sur  $\Omega \times \Omega$  est la partie régulière de la fonction de Green associée au laplacien sur  $\Omega$  :

$$\forall x \in \Omega, \quad -\Delta G(x, \cdot) = \rho \delta_x \quad \text{sur } \Omega; \quad G(x, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

$\delta_x$  étant la masse de Dirac en  $x$ , et  $\rho = (N-2) \text{mes}(S^{N-1})$ .

2. LA PARTIE RÉGULIÈRE DE LA FONCTION DE GREEN. — On montre le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — Soit  $x_0$  un point critique non dégénéré de  $\varphi$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et une application

$$\theta: ]0, \varepsilon_0[ \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad \varepsilon \mapsto u_\varepsilon$$

telle que :

- (a)  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $u_\varepsilon$  est une solution dans  $H_0^1(\Omega)$  de  $(P_\varepsilon)$ ;
- (b)  $|\nabla u_\varepsilon|^2 \rightharpoonup \mu \delta_{x_0}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  au sens des mesures, avec

$$\mu = S^{N/2} \quad \text{et} \quad S = \inf_{\|u\|_{p+1} = 1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

En fait, on démontre qu'il existe une application continue

$$\theta': ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+^* \times H_0^1(\Omega)$$

$$t \mapsto (\varepsilon_t, u_t)$$

telle que

(a)  $\forall t \in ]0, 1]$ ,  $u_t$  est solution de  $(P_{\varepsilon_t})$ ;

(b)  $\varepsilon_t \rightarrow 0$  et  $|\nabla u_t|^2 \rightarrow \mu \delta_{x_0}$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Ce théorème fait jouer aux points critiques de  $\varphi$  un rôle particulier. L'importance de ces derniers est renforcée par l'énoncé suivant, qui constitue une réciproque du premier résultat :

THÉORÈME 2. — Soit  $(u_\varepsilon)$  une famille de  $H_0^1(\Omega)$  telle que :

(a)  $u_\varepsilon$  est une solution de  $(P_\varepsilon)$ ;

(b)  $|\nabla u_\varepsilon|^2 \rightarrow \mu \delta_{x_0}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $x_0 \in \bar{\Omega}$ .

Alors  $x_0 \in \Omega$ , et  $x_0$  est un point critique de  $\varphi$ .

3. ÉTAPES DE LA DÉMONSTRATION. — On introduit pour  $0 < \varepsilon < \lambda_1$  sur  $H_0^1(\Omega) - \{0\}$  la fonctionnelle  $C^2$  :

$$(1) \quad K_\varepsilon(u) = \left( \int_\Omega |u|^{p+1} \right)^{-(2/p+1)} \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 - \varepsilon \int_\Omega u^2 \right)$$

dont les points critiques, à un coefficient multiplicatif près, vérifient

$$(2) \quad -\Delta u = |u|^{p-1} u + \varepsilon u \quad \text{sur } \Omega.$$

D'autre part, pour  $x \in \Omega$  et  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ , on considère les fonctions

$$(3) \quad U_{x,\lambda} = \lambda^{(N-2)/2} (1 + \lambda^2 |\cdot - x|^2)^{(N-2)/2}$$

qui vérifient sur  $\mathbf{R}^N$  l'équation  $-\Delta U = N(N-2)U^p$  et leurs projections  $PU_{x,\lambda}$  sur  $H_0^1(\Omega)$  qui vérifient sur  $\Omega$  :  $-\Delta PU = N(N-2)U^p$ .

On démontre alors la proposition :

PROPOSITION 3. — Pour  $x \in \Omega$  et  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ , soit

$$(4) \quad E_{x,\lambda} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \mid \langle v, PU_{x,\lambda} \rangle_{H_0^1} = \left\langle v, \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \right\rangle_{H_0^1} = \left\langle v, \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \right\rangle_{H_0^1} = 0 \quad (1 \leq i \leq N) \right\}.$$

En posant

$$(5) \quad M = \{ (x, \lambda, v) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* \times H_0^1(\Omega) \mid v \in E_{x,\lambda}, \lambda d > T_0, |v|_{H_0^1} < \eta_0 \}$$

où  $d = d(x, \partial\Omega)$  et  $T_0, \eta_0$  sont des constantes strictement positives, on a l'équivalence :  $(x, \lambda, v)$  est un point critique de la fonctionnelle

$$(6) \quad \begin{cases} J_\varepsilon: M \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, \lambda, v) \mapsto K_\varepsilon(PU_{x,\lambda} + v) \end{cases}$$

si et seulement si  $u = PU_{x,\lambda} + v$  est un point critique de  $K_\varepsilon$ . Enfin,  $(x, \lambda, v)$  sera un point critique de  $J_\varepsilon$  sur  $M$  si, et seulement si, il existe  $(\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbf{R}^{N+2}$  tel que :

$$(*) \quad J'_\varepsilon = \alpha \Phi' + \beta \Psi' + \sum_{j=1}^N \gamma_j \xi'_j$$

où

$$\Phi = \int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda} \nabla v, \quad \Psi = \int_\Omega \nabla \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \nabla v, \quad \xi_j = \int_\Omega \nabla \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j} \nabla v.$$

En utilisant alors un argument développé par A. Bahri dans [3], on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 4. — Il existe  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $T_1 > 0$  et une application  $C^1$  qui à  $(\varepsilon, x, \lambda) \in ]0, \varepsilon_1] \times \Omega \times \mathbf{R}_+^*$  tel que  $\lambda d > T_1$  associe  $v_{\varepsilon, x, \lambda} \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$v_{\varepsilon, x, \lambda} \in E_{x, \lambda} \quad \text{et} \quad (J_\varepsilon)'_v = \alpha \Phi'_v + \beta \Psi'_v + \sum_{j=1}^N \xi'_{jv}$$

pour un certain  $(\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_N)_{\varepsilon, x, \lambda} \in \mathbf{R}^{N+2}$ .

$v_{\varepsilon, x, \lambda}$  minimise  $J_\varepsilon(x, \lambda, v)$  par rapport à  $v$  dans un voisinage de 0 dans  $H_0^1(\Omega)$ , et est le seul élément de  $E_{x, \lambda}$  dans ce voisinage tel que (\*) puisse être satisfaite. On obtient de plus une estimation sur  $v_{\varepsilon, x, \lambda}$  ( $v_{\varepsilon, x, \lambda} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\lambda d \rightarrow +\infty$ ) qui permet d'établir :

THÉORÈME 5. — Pour  $v = v_{\varepsilon, x, \lambda}$  et  $(\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_N) = (\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_N)_{\varepsilon, x, \lambda}$  (\*) est équivalent au système :

$$(7) \quad \begin{aligned} d^{N-1} \varphi'(x) &= V(\varepsilon, x, \lambda) \\ \frac{\varepsilon}{\lambda^3} - \omega \frac{\varphi(x)}{\lambda^{N-1}} &= W(\varepsilon, x, \lambda) \end{aligned}$$

où  $\omega$  est une constante strictement positive et  $V, W$  sont des fonctions continues de  $\varepsilon, x, \lambda$  qui vérifient

$$(8) \quad V = O\left[\frac{1}{\lambda d} + \varepsilon^2 \lambda d^4\right], \quad W = O\left[\frac{1}{\lambda^5 d^4} + \frac{\varepsilon}{\lambda^4 d^3}\right]$$

dans le cas  $N=5$ , et des estimations comparables pour les dimensions supérieures.

Ce théorème joue un rôle central, car aussi bien le théorème 1 que le théorème 2 en sont des conséquences plus ou moins directes. Appliquant le théorème du point fixe de Brouwer au système (7), compte tenu de (8), on obtient pour tout point critique non dégénéré  $x_0$  de  $\varphi$  et  $\varepsilon$  assez petit, l'existence de  $(x_\varepsilon)$  tendant vers  $x_0$  et  $(\lambda_\varepsilon)$  tendant vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers 0 tels que  $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$  résolve (7).

$$(9) \quad u_\varepsilon = \mathbf{P}U_{x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon} + v_{\varepsilon, x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon}$$

satisfait alors, moyennant une normalisation, les conditions du théorème 1, et [10] assure l'existence de  $\theta'$ . Le théorème 2 se démontre également simplement à partir du théorème 5 et de la proposition suivante, qui s'établit, par exemple, en utilisant [12] :

PROPOSITION 6. — Soit  $(u_\varepsilon)$  une famille satisfaisant les hypothèses du théorème 2. Pour  $\varepsilon$  assez petit,  $u_\varepsilon$  s'écrit sous la forme

$$u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \mathbf{P}U_{x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon} + w_\varepsilon$$

où  $x_\varepsilon \in \Omega$ ,  $\lambda_\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $w_\varepsilon \in E_{x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon}$ ,  $\alpha_\varepsilon \in \mathbf{R}$  et

$$\alpha_\varepsilon \rightarrow \alpha = (N(N-2))^{(N-2)/4}$$

$$x_\varepsilon \rightarrow x_0 \in \bar{\Omega}$$

$$\lambda_\varepsilon d_\varepsilon \rightarrow \infty$$

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)$$

quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

La proposition 4 identifie immédiatement  $w_\varepsilon$  avec  $v_{\varepsilon, x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon}/\alpha_\varepsilon$ , d'où l'on déduit que  $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$  doit nécessairement résoudre (7). Les estimations (8) et les équivalences

$$\varphi(x) \sim (2d)^{2-N}, \quad |\varphi'(x)| \sim 2(N-2)(2d)^{1-N} \quad \text{quand } d \rightarrow 0$$

permettent alors de conclure.

Note reçue le 6 juillet 1987, acceptée le 31 août 1987.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. ALEXANDER et J. YORKE, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 242, 1978, p. 271-284.
- [2] Th. AUBIN, *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations*, Grundlehren 252, Springer, 1982.
- [3] A. BAHRI, *Critical points at infinity in some variational problems* (à paraître).
- [4] A. BAHRI et J.-M. CORON, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 301, série I, 1985, p. 345-348.
- [5] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lecture Notes in Math*, 194, Springer, 1971.
- [6] H. BREZIS, *Proc. Symp. Pure Math*, 45, A.M.S., 1986, p. 165-201.
- [7] H. BREZIS et L. NIRENBERG, *Comm. Pure and Applied Math.*, 36, 1983, p. 437-477.
- [8] B. GIDAS, W. NI et L. NIRENBERG, *Comm. Math. Phys.*, 69, 1979, p. 209-243.
- [9] B. MACLEOD, à paraître.
- [10] P. RABINOWITZ, Rocky Mountain, *J. Math.*, 3, 1973, p. 161-202.
- [11] R. SCHOEN, *J. Diff. Geom.*, 20, 1984, p. 479-495.
- [12] M. STRUWE, *Math. Zeitschr.*, 187, 1984, p. 511-517.

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.