



**HAL**  
open science

# Calcul de la stabilité de vibrations périodiques de structures : étude comparative de quelques méthodes numériques

Loïc Peletan, Sébastien Baguet, Mohamed Torkhani, Georges Jacquet-Richardet

## ► To cite this version:

Loïc Peletan, Sébastien Baguet, Mohamed Torkhani, Georges Jacquet-Richardet. Calcul de la stabilité de vibrations périodiques de structures : étude comparative de quelques méthodes numériques. 11e Colloque National en Calcul des Structures, May 2013, Giens, France. pp.1-8. hal-00935345

**HAL Id: hal-00935345**

**<https://hal.science/hal-00935345v1>**

Submitted on 16 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul de la stabilité de vibrations périodiques de structures : étude comparative de quelques méthodes numériques

Loïc PELETAN <sup>1,2</sup>, Sébastien BAGUET <sup>1\*</sup>, Mohamed TORKHANI <sup>2</sup>, Georges JACQUET-RICHARDET <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, Villeurbanne, France, sebastien.baguet@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> LaMSID UMR EDF-CNRS-CEA 2832, EDF R&D, Clamart, France, mohamed.torkhani@edf.fr

\* Auteur correspondant

**Résumé** — Plusieurs méthodes numériques pour le calcul de la stabilité de solution périodiques de systèmes dynamiques sont testées sur des structures non-linéaires. Une étude comparative en termes d'effort de programmation, de coût de calcul et de précision est menée afin d'évaluer l'efficacité de chacune des méthodes.

**Mots clés** — Vibrations non-linéaires, stabilité, solution périodique, Méthode de la Balance Harmonique, matrice de Monodromie, éléments finis

## 1 Introduction

Les vibrations non-linéaires de structures sont riches en phénomènes complexes : présence de bifurcations indiquant des changements de régime vibratoire (périodique, quasi-périodique, ...), coexistence de plusieurs solutions (stables/instables), ... Dans ce contexte, le calcul des solutions périodiques et de leur stabilité nécessite des outils robustes et efficaces. Si les méthodes efficaces de calcul des solutions périodiques d'un système dynamique sont bien identifiées, il n'en va pas de même pour le calcul de stabilité. En effet, de nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature, à l'origine pour des systèmes à coefficients périodiques puis pour des systèmes non-linéaires. L'effort de programmation, le coût de calcul et la précision peuvent varier considérablement d'une méthode à l'autre. Les applications utilisées ici pour le démontrer concernent la dynamique non-linéaire des rotors.

## 2 Calcul des solutions périodiques

La Méthode de la Balance Harmonique (HBM) est l'une des méthodes les plus efficaces pour le calcul des solutions périodiques. Contrairement aux méthodes temporelles (intégration directe, shooting, ...), les équations non-linéaires du mouvement (1) sont résolues dans le domaine fréquentiel.

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathbf{p}(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Pour cela, les inconnues sont recherchées sous forme de séries de Fourier et une procédure de Galerkin permet de transformer le système différentiel (1), de taille  $n_{ddl}$ , en un système algébrique non-linéaire de taille  $n_{HBM} = n_{ddl}(2N + 1)$  avec  $n_{ddl}$  le nombre de degrés de liberté de la structure considérée et  $N$  le nombre d'harmoniques retenues dans les séries de Fourier [1]

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{P}$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier des déplacements, des forces non-linéaires et des efforts extérieurs,  $\omega$  la pulsation des efforts extérieurs, et  $\mathbf{Z}(\omega) = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_k, \dots, \mathbf{Z}_N)$  avec

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - k^2\omega^2\mathbf{M} & k\omega\mathbf{C} \\ -k\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - k^2\omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Le système non-linéaire (2) est résolu à l'aide d'une méthode itérative de type Newton-Raphson couplée à une méthode de continuation par longueur d'arc pour le suivi des courbes de réponse ainsi qu'à une technique AFT (Alternating Frequency Time) pour le calcul des forces non-linéaires  $\mathbf{f}_{nl}$  [2]. Cette méthode

fréquentielle est préférée ici aux méthodes temporelles car elle s'avère très efficace pour les applications considérées. Le temps nécessaire au calcul des solutions périodiques est utilisé comme temps de référence pour évaluer le surcout engendré par le calcul de stabilité.

### 3 Calcul de stabilité

On s'intéresse ici à la notion de stabilité locale, au moyen de la théorie de Floquet, qui consiste à déterminer l'évolution d'une « petite » perturbation autour de l'état d'équilibre. Si la perturbation s'atténue avec le temps alors la solution est considérée comme stable sinon elle est instable. Cela permet de discriminer les solutions physiquement observables (stables). L'évolution de la stabilité d'une solution en fonction d'un paramètre de contrôle permet également faire apparaître les bifurcations qui indiquent généralement un changement de régime dynamique.

L'idée naturelle consiste à associer à la HBM un calcul de stabilité lui aussi fréquentiel afin d'obtenir un algorithme complet (continuation + stabilité) cohérent en terme de formulation. C'est l'objet des méthodes dites de *Hill*. Toutefois, le calcul de stabilité se faisant a posteriori, il est tout à fait possible de l'effectuer dans le domaine temporel. Dans ce cas, il s'agit de calculer la matrice de Monodromie du système dynamique. Plusieurs méthodes existent pour cela. Quelques-unes d'entre elles, qui seront décrites puis comparées dans cet article, sont récapitulées dans le tableau 1.

Méthode	Type	Principe	Taille du système	Réf.
RK	temporelle	Intégration sur une période par Runge-Kutta de (1) écrite sous forme d'état	$2n_{ddl}$	[3, 4]
NMK	temporelle	Intégration sur une période par Newmark de (1)	$n_{ddl}$	[5]
RK2	temporelle	Approximation par un produit de matrices calculées par Runge-Kutta	$2n_{ddl}$	[6]
EXP	temporelle	Approximation par un produit d'exponentielles de matrices	$2n_{ddl}$	[6]
Hill1	fréquentielle	Calcul de la matrice de Hill	$2n_{ddl}(2N + 1)$	[1]
Hill2	fréquentielle	Calcul de la matrice de Hill + filtrage	$2n_{ddl}(2N + 1)$	[7]

Tableau 1 – Descriptif de quelques méthodes de calcul de stabilité.

#### 3.1 Méthodes dans le domaine temporel (Calcul de la matrice de Monodromie)

##### 3.1.1 Intégration temporelle par Runge-Kutta (RK)

Une fois les équations du mouvement (1) réécrites sous forme d'état avec  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]^t$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}, t) \quad (3)$$

la matrice de Monodromie  $\mathbf{H}$  est obtenue comme solution à l'instant  $t = T$  de l'équation différentielle

$$\dot{\phi} = \mathbf{J}(\mathbf{z}_0, t)\phi \quad \phi(0) = \mathbf{Id} \quad (4)$$

où  $\mathbf{z}_0(t)$  est une solution de (3) de période  $T$  et  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{z}$  est le jacobien de (3) [3]. Les valeurs propres de la matrice de Monodromie  $\mathbf{H} = \phi(T)$  sont appelées les multiplicateurs de Floquet. Si un seul de ces multiplicateurs a un module supérieur à 1, alors la solution est instable, sinon cette dernière est stable. Deux implémentations sont possibles. La première consiste à intégrer (4) sur une période en procédant colonne par colonne sur  $\phi$ , ce qui revient à intégrer  $2n_{ddl}$  fois un système de taille  $2n_{ddl}$  (algorithme *n-passes*). La deuxième consiste à ré-arranger (4) sous forme d'un vecteur de taille  $4n_{ddl}^2$ . On intègre alors 1 seule fois un système de taille  $4n_{ddl}^2$  (algorithme *1-passe*). Cet algorithme simple passe peut, d'après Gaonkar [4], réduire le coût de calcul jusqu'à 50% mais seulement dans le cas d'un calcul en simple précision.

##### 3.1.2 Approximation par produit de matrices calculées par Runge-Kutta (RK2)

La matrice de monodromie peut être approximée de façon à réduire le temps de calcul avec peu de perte de précision. Dans cet algorithme  $\mathbf{H}$  est calculé avec la formule suivante [6] :

$$\mathbf{H} = \prod_{k=1}^K \mathbf{G}(T - kh)$$

avec  $h = T/K$  le pas de temps et  $\mathbf{G}$  une matrice calculée à partir de la matrice  $\mathbf{J}$  à différents pas de temps par le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. D'un point de vue programmation, cette méthode est très similaire à la méthode *EXP* car la matrice de monodromie est calculée comme un produit d'autres matrices calculées à l'avance. Ces deux méthodes diffèrent simplement par la façon dont ces matrices intermédiaires sont calculées.

### 3.1.3 Approximation par produit d'exponentielles de matrices calculées par Runge-Kutta (EXP)

Pour cela, on suppose que  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)$  est constante par morceaux [6]. L'intervalle de temps  $[0, T]$  est subdivisé en  $K$  intervalles  $([0, t_1, t_2, \dots, t_{K-1}, t_K])$ . La matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)$  est supposée constante dans chaque sous-intervalle. Ainsi,  $\mathbf{H}$  peut être approximée par la formule suivante :

$$\mathbf{H} \approx \tilde{\mathbf{H}} = \prod_{k=K}^1 e^{\mathbf{J}_k(t_k - t_{k-1})} \quad (5)$$

où  $\mathbf{J}_k$  est la valeur moyenne de  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)$  sur l'intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$ . En pratique, comme  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)$  est calculée seulement aux instants  $t_k, k \in [0..K]$ , on peut écrire  $\mathbf{J}_k = (\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t_k) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t_{k-1}))/2$ . La qualité de l'approximation dépend de  $K$ . En effet :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \quad (6)$$

En pratique, les exponentielles de matrice peuvent être calculées de manière efficace par approximation de Taylor ou de Padé, ou encore par décomposition en valeurs singulières.

### 3.1.4 Intégration temporelle par Newmark (NMK)

Soit  $\mathbf{z}_0(t) = [\mathbf{q}_0(t), \dot{\mathbf{q}}_0(t)]^t$  une solution périodique de (1). En dérivant (1) par rapport à  $\mathbf{z}_0$  et après permutation des dérivées par rapport à  $t$  et à  $\mathbf{z}_0$ , on obtient le système différentiel linéaire [5]

$$\mathbf{M} \ddot{\phi}(t) + \left[ \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \dot{\phi}(t) + \left[ \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{q}} \right] \phi(t) = 0 \quad (7)$$

où  $\phi(t) = \partial \mathbf{z} / \partial \mathbf{z}_0$ . On résout ce système à l'aide du schéma de Newmark avec les conditions initiales  $\phi(0) = [\mathbf{Id} \ \mathbf{0}]$ ,  $\dot{\phi}(0) = [\mathbf{0} \ \mathbf{Id}]$  et  $\ddot{\phi}(0)$  obtenu avec (7). La matrice de monodromie correspond à la solution à  $t = T$ , *i.e.*  $\mathbf{H} = [\phi(T) \dot{\phi}(T)]^t$ . Cette écriture est très avantageuse puisqu'on traite un système de taille  $n_{\text{ddl}}$  seulement. De plus, le schéma de Newmark linéaire en accélération moyenne étant inconditionnellement stable, il permet des pas de temps beaucoup plus grands que Runge-Kutta lors de l'intégration sur  $[0, T]$ .

## 3.2 Méthodes dans le domaine fréquentiel (Méthode de Hill)

### 3.2.1 Calcul de la matrice de Hill (Hill1)

La méthode de Hill consiste à écrire le déplacement  $\mathbf{q}(t)$  comme somme d'une solution  $\mathbf{q}_0(t)$  de l'équation (1) et d'une perturbation écrite sous forme d'un produit entre un terme périodique et un terme d'exponentielle décroissante  $\mathbf{s}(t) = \tilde{\mathbf{s}}(t)e^{-\lambda t}$ , où  $\tilde{\mathbf{s}}$  est périodique de période  $T$ . Comme on suppose  $\mathbf{s}$  petit, on peut faire une approximation du premier ordre pour  $\mathbf{f}_{nl}$ , et une procédure de Galerkin, similaire à celle utilisée pour la méthode HBM, peut être appliquée à l'équation du mouvement perturbée. On obtient alors le problème aux valeurs propres quadratique suivant :

$$(\mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{H}_1 + \lambda^2 \mathbf{H}_2) \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (8)$$

où  $\mathbf{H}_0 = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0}$ ,  $\mathbf{H}_1 = \text{diag}(\mathbf{C}, \mathbf{H}_1^1, \dots, \mathbf{H}_1^k, \dots, \mathbf{H}_1^N)$ ,  $\mathbf{H}_1^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2k\omega \mathbf{M} \\ -2k\omega \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H}_2 = \text{diag}(\mathbf{M}, \dots, \mathbf{M})$

L'équation (8) est un problème aux valeurs propres quadratique de dimension  $n_{\text{ddl}}(2N + 1)$  qui possède  $2n_{\text{ddl}}(2N + 1)$  valeurs propres  $\lambda$  appelées exposants de Floquet. Les multiplicateurs de Floquet  $\eta$  peuvent être déduits des exposants de Floquet  $\lambda$  par la relation  $\eta_i = e^{\lambda_i T}$ .

Comme  $\mathbf{H}_2$  est inversible, l'équation (8) peut être réécrite sous la forme

$$(\hat{\mathbf{H}} - \lambda \mathbf{Id}) \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} \\ -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{H}_0 & -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{s}} \\ \lambda \tilde{\mathbf{s}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

En conséquence, trouver les valeurs propres de l'équation (8) est équivalent à trouver les valeurs propres de la matrice réelle  $\hat{\mathbf{H}}$  de taille  $2n_{\text{ddl}}(2N+1) \times 2n_{\text{ddl}}(2N+1)$ . Néanmoins, comme  $\tilde{\mathbf{s}}$  est écrit sous forme d'une série de Fourier tronquée, la précision de cette méthode dépend du nombre d'harmoniques retenu dans cette décomposition. Utiliser un nombre infini d'harmoniques mènerait au résultats exact mais conduirait également à une matrice  $\hat{\mathbf{H}}$  de taille infinie. Pour des raisons numériques évidentes seul un nombre restreint d'harmoniques peut être utilisé dans la pratique.

### 3.2.2 Calcul de la matrice de Hill + filtrage (Hill2)

La méthode *Hill1* donne  $2n_{\text{ddl}}(2N+1)$  multiplicateurs de Floquet mais seulement  $2n_{\text{ddl}}$  parmi eux ont une réelle signification physique. L'existence des multiplicateurs de Floquet non physiques peut avoir pour conséquence une mauvaise évaluation de la stabilité des solutions. Pour tenter de résoudre ce problème, Lazarus et Thomas [7] ont proposé une technique pour identifier puis filtrer les multiplicateurs non physiques. La technique est légèrement différente de celle utilisée dans *Hill1*. Elle consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant

$$(\bar{\mathbf{H}} - \lambda \mathbf{Id}) \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{J}_0 + i\omega \mathbf{Id} & \mathbf{J}_{-1} & \mathbf{J}_{-2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_{-1} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 - i\omega \mathbf{Id} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (11)$$

où les sous-matrices  $\mathbf{J}_h$  sont obtenues par développement de Fourier infini de la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, t)$ . Pour les mêmes raisons que dans la méthode *Hill1*,  $\bar{\mathbf{H}}$  doit être tronquée à une taille finie. Les valeurs propres de  $\bar{\mathbf{H}}$  sont filtrées à partir d'un critère basé sur les vecteurs propres associés  $\mathbf{s}_i$ . Davantage de détails sont donnés dans [7]. Cette approche souffre des mêmes inconvénients que la méthode *Hill1* en ce sens qu'un choix sur les harmoniques à retenir dans la décomposition doit être fait mais elle est également censée donner des résultats plus précis grâce au filtrage. Cette technique de filtrage ne peut pas être directement appliquée à la méthode *Hill1*.

L'effort de programmation entre ces deux méthodes de Hill est similaire, cependant la construction de  $\hat{\mathbf{H}}$  ou de  $\bar{\mathbf{H}}$  peut être plus ou moins lourde en fonction de la méthode employée. par exemple, la matrice  $\bar{\mathbf{H}}$  est un sous produit de la méthode HBM lorsque cette dernière est couplée à la méthode asymptotique numérique (MAN) pour la continuation. Inversement,  $\hat{\mathbf{H}}$  est plus facile à construire quand la HBM est associée à la technique de continuation par pseudo longueur d'arc. Notons par ailleurs que la matrice  $\bar{\mathbf{H}}$  décrite ici n'est pas seulement non symétrique mais également complexe. De telles propriétés ne sont pas optimales pour le calcul des valeurs propres.

## 4 Cas tests

Les algorithmes mentionnés ont été implémentés dans Code\_Aster [8] par le biais de surcharges en langage Python. Deux cas tests sont utilisés pour analyser leurs précision et performances. Il est important de préciser que ces techniques sont paramétrables et que ces paramètres ont une très grande influence sur la précision des résultats et sur les performances. Contrairement aux autres techniques, la méthode *RK* n'a pas de paramètre réglable car le schéma d'intégration temporelle de la bibliothèque python Scipy a des routines intégrées qui permettent de régler automatiquement les paramètres importants comme le pas de temps par exemple. Pour les méthodes *RK2* et *EXP*, il faut choisir le nombre d'intervalles  $K$ . Des tests préliminaires ont permis de déterminer que 256 intervalles réguliers étaient suffisants pour obtenir une précision satisfaisante dans toutes les situations testées dans le cas de la méthode *EXP*. Pour la méthode *RK2*, puisque le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre n'est pas inconditionnellement stable, un plus grand nombre d'intervalles (1024) a du être utilisé pour le dernier cas test (rotor multi-ddl), et même 2048

intervalles de temps pour la variante 5. Pour la méthodes *EXP*, un second paramètre doit être pris en compte : la précision avec laquelle les exponentielles de matrice sont calculées. Lorsque les méthodes de Taylor ou de Padé sont utilisées, les fonctions Scipy utilisent des valeurs par défaut qui fournissent une précision satisfaisante dans tous les cas. La méthode *NMK* utilise également une période découpée en 256 intervalles réguliers. Les paramètres du schéma de Newmark ont été choisis à  $\gamma = 0.5$  and  $\beta = 0.25$  correspondant à l'accélération moyenne. Enfin, la méthode *Hill2* utilise toutes les harmoniques entre 0 et la plus grande harmonique utilisée lors du calcul HBM.

### 4.1 Oscillateur de Duffing

On considère l'oscillateur de Duffing défini par l'équation du mouvement

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) + k_{nl}q^3(t) = p(t) \tag{12}$$

avec  $m = 10\text{kg}$ ,  $c = 10\text{N.s.m}^{-1}$ ,  $k = 1000\text{N.m}^{-1}$ ,  $k_{nl} = 2000\text{N.m}^{-3}$ ,  $p(t) = p_0 \cos(\Omega t)$ ,  $p_0 = 100\text{N}$ .

Le calcul HBM a été effectué avec 3 harmoniques ( $\{1,3,5\}$ ) en plus du terme d'ordre constant. La figure 1 montre la courbe de réponse du système avec mise en évidence de la stabilité. Toutes les méthodes testées ici, sauf la méthode *Hill1*, donnent une précision satisfaisante (figure 2). Du point de vue des performances

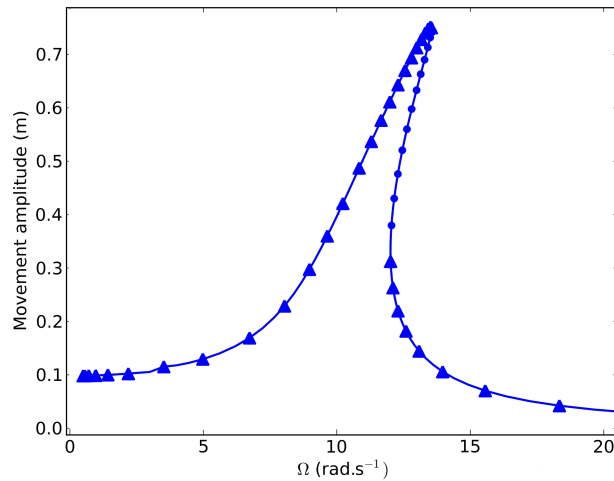


Fig. 1 – Oscillateur de Duffing. Courbe de réponse. (▲) stable, (●) instable

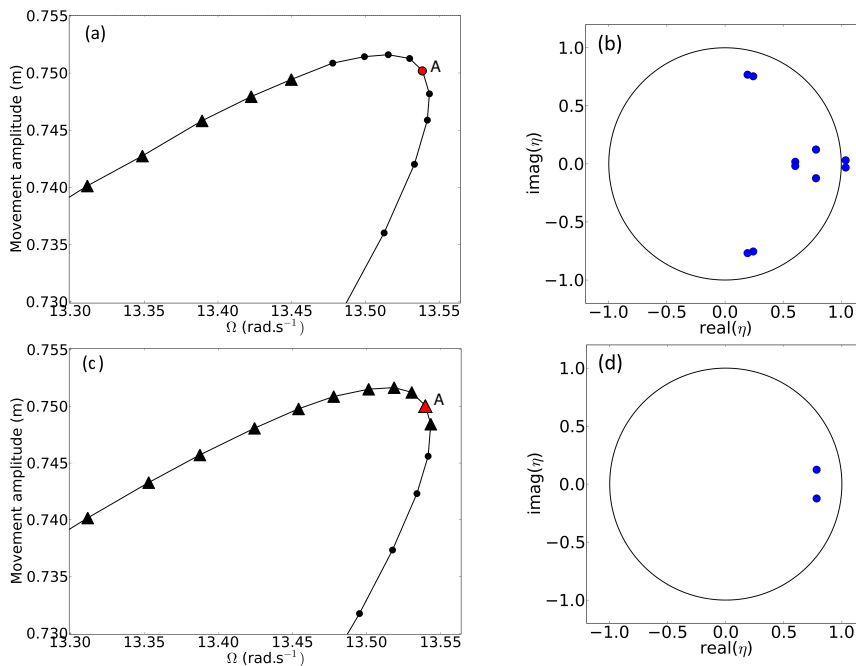


Fig. 2 – Oscillateur de Duffing. Zoom au niveau du point limite (▲) stable, (●) instable, et multiplicateurs de Floquet au point A. a) et b) Méthode *Hill1*, c) et d) Autres méthodes : *Hill2*, *RK2*, *EXP*, *NMK*

en temps de calcul tous les résultats sont regroupés dans le tableau 2 et les méthodes sont comparées relativement au temps de calcul HBM sans détermination de stabilité (temps normalisé à 1). Sur ce cas test, la méthode *Hill2* semble la plus prometteuse car elle donne une précision satisfaisante tout en étant la plus rapide (augmentation du temps de calcul de seulement 30% comparé à un calcul HBM sans stabilité). La méthode de référence (*RK*) multiplie quant à elle le temps de calcul par un peu plus de 7. Les autres méthodes du domaine temporel multiplient les temps de calcul par une valeur comprise entre 2 et 4 suivant la méthode. On constate donc dès à présent que le calcul de stabilité représente une part importante du coût de calcul total.

## 4.2 Rotor éléments finis

Le deuxième cas-test concerne le rotor à trois disques de la figure 3. Ce rotor est composé de 13 éléments de type poutre de Timoshenko pour un total de 69 degrés de liberté, de 3 disques (modélisés par des masses et des inerties additionnelles) au niveau des nœuds 3, 6 et 11, et repose sur 2 paliers orthotropes situés à ses extrémités. Le modèle représente un rotor de 1 mètre de longueur avec un diamètre d'arbre de 10cm. L'excitation extérieure est provoquée par une force de balourd présente sur le disque numéro 2 (nœud numéro 6 du maillage) d'une valeur de  $2 \cdot 10^{-2}$  kg.m et le contact est possible sur ce même nœud avec un modèle de stator fixe et rigide d'une rigidité de l'ordre de 10 fois supérieure à la rigidité des paliers. Le jeu initial entre le rotor et le stator est choisi à 1mm. Les équations du mouvement discrétisées par

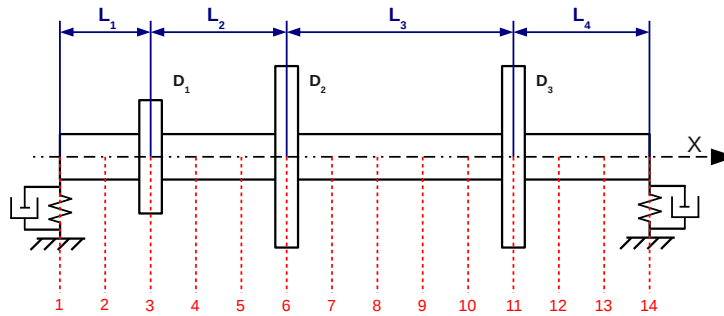


Fig. 3 – Modèle de rotor éléments finis

éléments finis ont la même forme que (1) où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.  $\mathbf{C}$  inclut l'amortissement gyroscopique qui varie avec la vitesse de rotation  $\omega$  du rotor.  $\mathbf{q}(t)$  représente le déplacement du rotor,  $\mathbf{p}(t)$  l'excitation extérieure de type balourd et  $\mathbf{f}_{nl}(t)$  la force de contact basée sur une loi de contact pénalisée couplée à une loi de friction de type Coulomb :

$$\mathbf{f}_c(t) = -k\delta(t) - \mu \|\mathbf{v}_{rel}(t)\| \frac{\mathbf{v}_{rel}(t)}{\|\mathbf{v}_{rel}(t)\|} \quad (13)$$

avec  $\delta(t) = (r(t) - \delta_0)\mathbf{n}_{norm}(t)$  si  $r > \delta_0$ ,  $\delta(t) = \mathbf{0}$  sinon, où  $r$  est le déplacement radial du rotor,  $\mathbf{n}_{norm}$  est la normale au contact,  $k$  est la rigidité de contact,  $\delta_0$  est le jeu initial entre le rotor et le stator,  $\mu$  est le coefficient de frottement et  $\mathbf{v}_{rel}$  est la vitesse relative entre le rotor et le stator au point de contact.

Pour cette étude comparative, cinq variantes de ce modèle ont été testées. Pour quatre d'entre elles, le nombre total de ddls a été modifié en jouant sur le nombre d'éléments du modèle (voir tableau 2). L'influence du nombre total de degrés de liberté peut ainsi être testée.

Dans les variantes 1 et 2, le système a été réduit à 24 ddls et 34 ddls. Dans les troisième et dernière variantes, le nombre de ddl a été modifié à 49 et 89. Le nombre d'éléments dans le modèle a toujours été suffisant pour éviter de modifier significativement la courbe de réponse du système dans la plage de fréquence testée. Le calcul HBM a été effectué dans tous les cas avec 12 harmoniques au total.

Les résultats concernant ce cas-test sont regroupés dans le tableau 2. La méthode *NMK* donne des résultats avec une bonne précision et est de loin la plus rapide des cinq méthodes testées. Toutefois, on peut noter que le coût relatif de la méthode augmente avec le nombre de ddls. Le temps de calcul est ainsi multiplié par 10 dans le cas du rotor éléments finis avec 89 ddls. Les méthodes *EXP* et *RK2* deviennent également plus lentes avec l'augmentation de la taille du système traité mais à un rythme bien plus élevé que la méthode *NMK*. La méthode *Hill2* est à peu près aussi lente que la méthode *RK* tout en fournissant des résultats imprécis.

### 4.3 Discussion

Une analyse fine des performances atteintes par les cinq méthodes de calcul de stabilité considérées permet une meilleure compréhension des méthodes et une anticipation de leurs performances sur des systèmes de taille réelle. Indépendamment de la précision des résultats, on peut constater que les différentes techniques testées ne sont pas du tout équivalentes en terme de coût de calcul. Suivant les exemples traités, le coût additionnel du calcul de la stabilité peut aller de 30% (méthode *Hill2* pour le Duffing) à près de 10<sup>7</sup>% (méthode *RK* dans le cas du rotor éléments finis à 89 dds). D'une manière générale, et quelle que soit la méthode employée, on constate une augmentation du coût relatif lorsque la taille du système traité augmente. Pour mieux comprendre cette tendance, il est important de noter que le calcul de stabilité se fait principalement en deux étapes : 1. construire une matrice **H**, 2. calculer ses valeurs propres.

La nature de **H** et/ou la façon de construire cette dernière est différente suivant la méthode. Dans le cas d'une méthode fréquentielle, **H** est de taille  $2n_{ddl}(2N + 1)$ , alors qu'elle est de taille  $2n_{ddl}$  dans le cas d'une méthode temporelle. Suivant la situation, la plus grande partie du temps de calcul sera passée soit sur la construction de la matrice, soit sur le calcul de ses valeurs propres.

Dans le cas de la méthode *Hill2*, la quasi-totalité du temps est passée à calculer les valeurs propres. Les mauvaises performances de la méthode *Hill2* viennent donc du fait que la taille de la matrice **H** est grande ( $2n_{ddl}(2N + 1)$ ) ce qui demande beaucoup de temps pour calculer les valeurs propres.

Dans le cas des méthodes temporelles, la plupart du temps est passé à construire **H**. en effet, la taille de cette dernière ( $n_{ddl}$ ) est beaucoup plus petite et donc le calcul des valeurs propres reste relativement rapide. De plus, la construction de **H** est par nature plus longue avec les méthodes temporelles qu'avec les méthodes fréquentielles. Les méthodes temporelles deviennent cependant relativement inefficaces avec l'augmentation de la taille du système. Au sein des méthodes temporelles, de grands écarts de performances peuvent être notés. La méthode *RK* est de loin la plus lente car  $2n_{ddl}$  intégrations numériques doivent être effectuées sur une période, ce qui devient très pénalisant lorsque  $n_{ddl}$  augmente. Les méthodes simple passe *EXP* et *RK2* n'ont pas ce problème et sont de fait plus rapides. Ces deux dernières sont similaires dans leur implémentation puisque la matrice **H** est calculée dans ce cas comme un produit de matrices intermédiaires

modèle	$n_{ele}$	$n_{ddl}$	$N$	$n_{HBM}$	Référence	domaine	domaine				
						fréquentiel	<i>Hill2</i>	<i>RK</i>	<i>EXP</i>	<i>RK2</i>	<i>NMK</i>
Duffing	N/A	1	3	7	1		1.3	7.2	3.7	2.4	2.2
Rotor v.1	4	24	12	600	1		2 400*	1 400	10	7.9	1.8
Rotor v.2	6	34	12	850	1		4 600*	5 300	22	16	2.3
Rotor v.3	9	49	12	1225	1		11 000*	13 000	51	34	3.5
Rotor v.4	13	69	12	1725	1		59 000*	37 000	170	81	5.7
Rotor v.5	17	89	12	2225	1		120 000*	99 000	260	300	10

Tableau 2 – Temps de calcul relatif. Le temps passé à calculer la courbe de réponse sans stabilité est normalisé à 1 comme indiqué dans la colonne 'Référence'. Les nombres avec une astérisque (\*) indiquent une précision non satisfaisante.

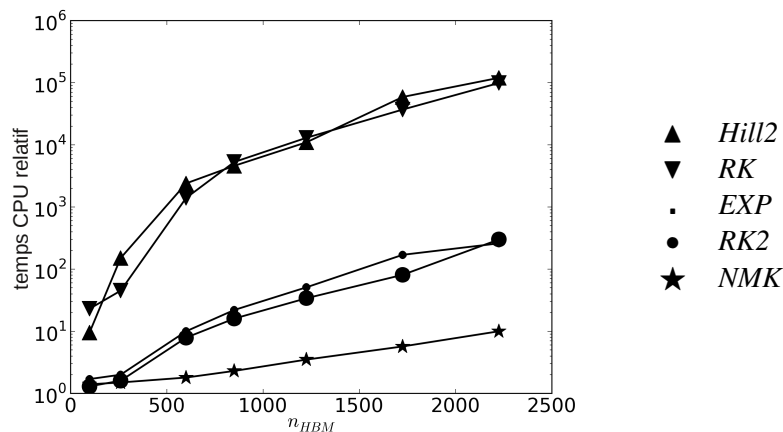


Fig. 4 – Temps CPU relatif en fonction de  $n_{HBM}$ . Temps passé à calculer la stabilité des solutions de la courbe de réponse par rapport à une simulation HBM sans calcul de stabilité.



pré-calculées. Dans la méthode *EXP*, les calculs d'exponentielles de matrices deviennent prépondérants et très coûteux quand  $n_{ddl}$  augmente. La méthode *RK2* ne nécessite pas de coûteux calcul d'exponentielle de matrice mais nécessite un nombre plus important de pas de temps pour éviter la divergence numérique lorsque la taille du système augmente. Pour cette raison, les méthodes *EXP* et *RK2* deviennent lentes lorsque  $n_{ddl}$  augmente.

La figure 4 montre le temps de calcul relatif comme une fonction de la taille totale du système HBM et ce pour les cinq techniques étudiées ici. La méthode *NMK* se montre la plus efficace. Comme le schéma de Newmark ne nécessite pas de transformer les équations du mouvement sous forme d'état, la taille du système reste à  $n_{ddl}$  au lieu de  $2n_{ddl}$ . De plus, seulement 256 pas de temps suffisent pour obtenir une bonne précision dans tous les cas grâce aux bonnes propriétés de stabilité du schéma d'accélération moyenne. Cependant, cette méthode multiplie malgré tout les temps de calcul par 10 dans le cas du rotor éléments finis à 89 ddl par rapport à un calcul HBM sans stabilité. La complexité algorithmique de la méthode *NMK* étant plus élevée que celle de la balance harmonique, on s'attend à voir augmenter encore les temps de calcul pour des systèmes plus complexes, mais dans une moindre mesure comparé aux autres méthodes.

## 5 Conclusion

Cinq techniques couramment utilisées pour déterminer la stabilité de solutions périodiques de systèmes dynamiques ont été testées et comparées en termes de précision et de temps de calcul sur différents cas tests. Une technique est basée sur la méthode de Hill (domaine fréquentiel) et les autres méthodes sont basées sur le calcul de la matrice de monodromie dans le domaine temporel. Toutes ces techniques requièrent principalement la construction d'une matrice  $\mathbf{H}$  suivi du calcul de ses valeurs propres. Elles diffèrent principalement de par la nature de  $\mathbf{H}$  et/ou de par la façon de l'obtenir.

Les quatre techniques basées sur le calcul de la matrice de monodromie dans le domaine temporel montrent une bien meilleure précision et contrairement à la méthode de Hill, la plus grande partie du temps est passé à construire  $\mathbf{H}$ . Cependant, elles présentent de grandes différences en termes de performances. Finalement, pour les exemples traités ici, c'est la méthode de Newmark qui semble offrir le meilleur compromis entre la précision des résultats et les temps de calcul. Sa précision est très satisfaisante tout en étant de loin la plus rapide des techniques testées. Ces bonnes performances sont confirmées par d'autres exemples présentés dans [9].

## Références

- [1] G. Von Groll and D. J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *J. Sound Vib.*, 241(2) :223 – 233, 2001.
- [2] L. Peletan. *Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Doctorale MEGA de Lyon, 2012-ISAL-0146, 2012.
- [3] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. Wiley series in nonlinear science, 1995.
- [4] G. H. Gaonkar, D. S. Simha Prasad, and D. Sastry. On computing floquet transition matrices of rotorcraft. *J. Am. Helicopter Soc.*, 26(3) :56–61, 1981.
- [5] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mech. Syst. Sig. Process.*, 23(1) :195 – 216, 2009.
- [6] P. Friedmann, C. E. Hammond, and T.-H. Woo. Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11(7) :1117–1136, 1977.
- [7] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *C.R. Mec.*, 338(9) :510 – 517, 2010.
- [8] EDF R&D. Code\_Aster : A general code for structural dynamics simulation under gnu gpl licence., 2001–.
- [9] L. Peletan, S. Baguet, M. Torkhani, and G. Jacquet-Richardet. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. *Nonlinear Dyn.*, In press, 2013.