



HAL
open science

Existence and uniqueness of solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in the two-dimensional space

Chiara Simeoni

► **To cite this version:**

Chiara Simeoni. Existence and uniqueness of solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in the two-dimensional space. [Research Report] Department of Mathematics, Sapienza University of Rome, Italy. 1998, 21 p. hal-00932402

HAL Id: hal-00932402

<https://hal.science/hal-00932402v1>

Submitted on 17 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Università di Roma "La Sapienza"

Dipartimento di Matematica

Tesina del corso di Meccanica Statistica

Prof. F. Guerra

A.A. 1997/98

Esistenza ed unicità della
soluzione per l'equazione di
Vlasov-Fokker-Planck nel caso
bidimensionale

Chiara Simeoni

Indice dei contenuti

1 L'equazione di Vlasov-Poisson

Si definisce il sistema di Vlasov-Poisson (VP) per un gas di particelle interagenti e si descrive il modello fisico da cui può essere euristicamente derivato, accennando una dimostrazione rigorosa nel caso dell'equazione "mollificata" 2

2 L'equazione di Fokker-Planck per il sistema di Vlasov-Poisson

Si considera il sistema di Vlasov-Poisson in presenza di stocasticità, facendolo derivare euristicamente da un sistema dinamico finito immerso in un bagno termico 6

3 Il problema della risolubilità

Si affronta la questione dell'esistenza di soluzioni per i problemi associati all'equazione di Vlasov-Poisson e Vlasov-Fokker-Planck. Dopo aver caratterizzato diverse forme di soluzione, legate alla regolarità del dato iniziale, si esibisce una breve rassegna dei risultati noti sull'argomento 8

4 Esistenza ed unicità della soluzione nel caso bidimensionale

Seguendo l'idea proposta da Neunzert, Pulvirenti e Triolo in un articolo del 1984, viene presentato un risultato di esistenza ed unicità della soluzione per l'equazione Vlasov-Fokker-Planck sullo spazio bidimensionale 10

5 Controesempi ed osservazioni conclusive

Si discute un controesempio all'esistenza globale per l'equazione Vlasov-Fokker-Planck nel caso della dinamica stellare sullo spazio \mathbf{R}^n , $n = 4$. Commentando i risultati presentati, si accenna ai successivi sviluppi della teoria ed alle questioni ancora in esame 18

Riferimenti bibliografici

realizzata in L^AT_EX

1 L'equazione di Vlasov-Poisson

L'evoluzione temporale di una distribuzione di particelle nello spazio delle fasi $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ è descritta da una funzione di densità $f = f(t, x, v)$, che soddisfa il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, detto *sistema di Vlasov-Poisson* (VP):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0,$$

$$E(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} \frac{x - y}{|x - y|^n} \rho(t, y) dy,$$

$$\rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x, v) dv,$$

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad t \geq 0, \quad (x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \gamma \in \mathbf{R}.$$

Le variabili $x \in \mathbf{R}^n$ e $v \in \mathbf{R}^n$ rappresentano rispettivamente posizione e velocità nello spazio delle fasi del sistema. Il moto è determinato dal campo E : per $\gamma < 0$ esso rappresenta una forza Newtoniana (le "particelle" si attraggono reciprocamente attraverso un campo di tipo gravitazionale) ed il sistema descrive la classica dinamica stellare; per $\gamma > 0$ rappresenta una forza Coulombiana, in questo caso il sistema descrive un plasma di cariche che interagiscono tra loro per mezzo dei campi elettrici da esse generati. La densità fisica del sistema è individuata dalla funzione ρ . Il valore del campo E al tempo t è legato alla densità f al tempo t stesso, attraverso una relazione che consente di calcolarlo, nota la soluzione del problema, come convoluzione su un opportuno nucleo

$$E = K * \rho.$$

L'equazione che definisce il problema risulta, perciò, iperbolica non lineare. La distribuzione assegnata al tempo 0 è descritta dalla funzione di densità f_0 .

Una interpretazione fisica più dettagliata dell'equazione di Vlasov si ottiene, con un approccio puramente euristico, descrivendone la relazione con le equazioni di Newton della meccanica classica: al di là delle questioni connesse con una formalizzazione rigorosa di questo argomento, si ricava l'equazione come limite di campo medio per un sistema dinamico finito (cioè discreto e con un numero finito di "particelle" interagenti).

Si consideri un sistema di N particelle che si muovono in \mathbf{R}^n , in accordo con le leggi della meccanica classica, interagendo mutuamente attraverso un potenziale V , proporzionale alla massa o alla carica delle particelle e "debolmente" singolare. Quest'ultima condizione si esprime assumendo che la forza esercitata da una particella i posizionata in un punto $x_i \in \mathbf{R}^n$ su una particella j in $x_j \in \mathbf{R}^n$ abbia la forma

$$\gamma_{ij} K(x_i - x_j),$$

con $K = K(y)$ applicazione vettoriale che diventa singolare solo nell'origine, in modo che

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x - y) \psi(y) dy$$

esista per tutti gli $x \in \mathbf{R}^n$, $\psi \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

La *legge di Newton* stabilisce, pertanto, che il moto di ciascuna particella sia descritto dall'equazione classica

$$m_i \dot{v}_i = \sum_{j \neq i}^N \gamma_{ij} K(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

dove $x_i \in \mathbf{R}^n$, $v_i \in \mathbf{R}^n$ e $m_i > 0$ rappresentano rispettivamente la posizione, la velocità e la massa della i -esima particella. Le costanti reali γ_{ij} sono legate alla natura del sistema:

a) $\gamma_{ij} = -\Gamma m_i m_j$, dove $\Gamma > 0$ è la costante gravitazionale e il sistema descrive il problema degli N corpi nella meccanica celeste;

b) $\gamma_{ij} = q_i q_j$, dove $q_i \in \mathbf{R}$ è la carica elettrica della i -esima particella e il sistema descrive la classica dinamica Coulombiana.

L'esempio tipico, a cui si fa riferimento nello studio dell'equazione di Vlasov-Poisson, è

$$K(y) = \frac{y}{|y|^n};$$

cioè $K(\cdot) := -\nabla G(\cdot)$, dove G è la soluzione fondamentale dell'equazione di Poisson in \mathbf{R}^n

$$\Delta G = -\delta,$$

che si annulla all'infinito.

Lo stato del sistema in un generico istante di tempo t è descritto dalla posizione e velocità di tutte le sue particelle

$$(x_i, v_i) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; \quad i = 1, \dots, N.$$

Senza alterare la fisica del problema, si supponga che tutte le particelle del sistema siano identiche (il che equivale a porre $m_i = m = 1$, $q_i = q = \pm 1$, $\gamma_{ij} = \gamma$; $i, j = 1, \dots, N$) e si riscalino le forze

$$\gamma \longrightarrow \frac{\gamma}{N},$$

mantenendo γ costante fissata (lo stesso effetto si produce normalizzando ad 1 la massa/carica totale del sistema, in modo che ciascuna particella abbia massa/carica $\frac{1}{N}$); in questa situazione si ha la cosiddetta “*approssimazione di campo medio*”.

Le leggi del moto si semplificano, allora, nel sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \gamma K(x_i - x_j), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Dato lo stato $\omega_N^\circ = (x_1^\circ, v_1^\circ; \dots; x_N^\circ, v_N^\circ)$ al tempo 0, si definisce lo stato $\omega_N(t) = (x_1(t), v_1(t); \dots; x_N(t), v_N(t))$ al tempo t risolvendo il problema ai valori iniziali per (1) con

$$(x_i(0), v_i(0)) = (x_i^\circ, v_i^\circ); \quad i = 1, \dots, N.$$

La soluzione del problema, tuttavia, potrebbe esistere solo per tempi finiti, a causa di una singolarità del nucleo K che definisce il campo vettoriale del sistema (1); inoltre, l'intervallo di esistenza della soluzione locale dipenderà dal valore N e la sua ampiezza potrebbe ridursi a 0 quando N tende all'infinito. Per superare questa difficoltà si può assumere K regolare, ad esempio limitato e continuo, assicurando l'esistenza di una soluzione globale $\omega_N(t)$ del problema per ogni tempo $t \geq 0$.

La regolarità si può ottenere, anche, con un *procedimento di "mollificazione"* del potenziale, ad esempio sostituendo il nucleo K con uno "mollificato"

$$K_\delta(x - y) = \frac{x - y}{(|x - y|^2 + \delta)^{n/2}}.$$

L'equazione di Vlasov-Poisson corrispondente è detta *equazione di Vlasov "modificata"* ed è della stessa forma di quella classica

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E_\delta(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0 \quad (2)$$

dove, adesso, si considera

$$E_\delta(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} K_\delta(x - y) \rho(t, y) dy.$$

La questione fondamentale che si pone è quella di confrontare $\omega_N(t)$ con una funzione $f(t, \cdot, \cdot) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, soluzione dell'equazione (2).

Procediamo confrontando i dati iniziali del Problema di Cauchy associato alle equazioni (1) e (2) rispettivamente, cioè ω_N° e $f(0, \cdot, \cdot) = f_0(\cdot, \cdot)$; poichè entrambi descrivono distribuzioni di masse o di cariche nello spazio $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, possono essere confrontati nel senso delle misure su \mathbf{R}^{2n} .

a) ω_N° viene interpretato come la misura di probabilità discreta (normalizzata sulla massa/carica totale del sistema)

$$\mu_N^\circ(dx, dv) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{P_j^\circ}(dx, dv)$$

con δ_P misura di Dirac concentrata in $P \in \mathbf{R}^{2n}$ e $P_j^\circ := (x_j^\circ, v_j^\circ)$, $j = 1, \dots, N$; allora,

$$\mu_N(t, dx, dv) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{P_j(t)}(dx, dv),$$

con $P_j(t) := (x_j(t), v_j(t))$, $j = 1, \dots, N$, definisce la misura evoluta al tempo t associata alla soluzione $\omega_N(t)$ del problema (1) con valore iniziale ω_N° .

b) f_0 viene assegnata regolare, non negativa e tale che

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} f_0(x, v) dx dv = 1;$$

può essere, pertanto, interpretata come la funzione di densità di una misura di probabilità μ° , assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Consideriamo, ora, una famiglia di sistemi con N particelle, N crescente, caratterizzati ciascuno da uno stato ω_N° al tempo 0 iniziale e supponiamo che

$$\mu_N^\circ \longrightarrow \mu^\circ$$

per $N \rightarrow \infty$. Questa convergenza va interpretata nel senso debole tra misure: sia ϕ una funzione continua e limitata su \mathbf{R}^{2n} e

$$\mu_N^\circ(\phi) := \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) \mu_N^\circ(dx, dv) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(P_j^\circ),$$

allora

$$\mu_N^\circ(\phi) \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) f_0(x, v) dx dv$$

per $N \rightarrow \infty$.

Sotto queste ipotesi, sfruttando in modo determinante le proprietà di regolarità assunte sul dato f_0 e sul nucleo K_δ , si può verificare che per ogni tempo $t \geq 0$ si ha

$$\mu_N(t, \phi) \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^{2n}} f(t, x, v) \phi(x, v) dx dv$$

per $N \rightarrow \infty$, essendo $f(t, \cdot, \cdot)$ la soluzione del problema (2) con valore iniziale f_0 . In questo senso l'equazione di Vlasov-Poisson modificata viene rigorosamente derivata, in approssimazione di campo medio, dalla dinamica (1).

I dettagli della dimostrazione di questo risultato si trovano in [N], sviluppati nel caso più generale di una qualunque misura di probabilità μ° su \mathbf{R}^{2n} , anche non assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Il problema dell'esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione di Vlasov-Poisson modificata è facilmente archiviabile, utilizzando il classico metodo delle caratteristiche per EDP, con le assunzioni di regolarità sulle strutture già discusse. Ulteriori considerazioni sul "limite di Vlasov" sono presentate in [BH] e [D].

Qui ci limitiamo a sottolineare che quella descritta è, realmente, una proprietà di continuità della soluzione dell'equazione (2) rispetto ai dati iniziali, nella topologia della convergenza debole di misure. Si verifica, infatti, che la misura applicata

$$\mu_N(t, \phi) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) \mu_N(t, dx, dv) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(P_j(t))$$

soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dt} \mu_N(t, \phi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla_{(x,v)} \phi(P_j(t)) \cdot \dot{P}_j(t) = \mu_N(t, \nabla_{(x,v)} \phi \cdot (v, E_\delta));$$

il che equivale ad affermare che $\mu_N(t, \cdot)$ è una soluzione debole dell'equazione (2), riscritta nella forma di una legge di conservazione

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + \operatorname{div}_{(x,v)} [(v, E_\delta(t, x)) f(t, x, v)] = 0 \quad (3)$$

essendo $\text{div}_{(x,v)}(v, E_\delta(t, x)) = 0$. In quest'ottica, il sistema (1) si interpreta come sistema delle caratteristiche associato all'equazione differenziale (3).

Concludiamo questa analisi osservando che, a causa della singolarità del nucleo K , l'argomento rigoroso di derivazione non può essere esteso all'equazione di Vlasov-Poisson classica (VP), per la quale la questione della validità resta aperta, pur potendosi azzardare una conferma delle considerazioni fatte, almeno dal punto di vista euristico.

2 L'equazione di Fokker-Planck per il sistema di Vlasov-Poisson

Una situazione particolarmente interessante si realizza quando il sistema di particelle considerato viene immerso in un bagno termico (ovvero, viene messo a contatto con un termostato), alla temperatura assoluta costante T ; il caso fisicamente più appropriato è quello del plasma fisico, rappresentato dall'equazione di Vlasov-Poisson per $\gamma > 0$. Si manifesta, allora, una stocasticità che comporta una modificazione dell'equazione, ottenuta aggiungendo un termine di diffusione rispetto alla velocità. Questo tiene conto delle complesse interazioni tra il sistema ed il bagno termico. La nuova equazione può essere derivata mediante il seguente argomento.

Si consideri il sistema di N particelle in \mathbf{R}^n , introdotto precedentemente; quando è immerso nel bagno termico, le equazioni del moto si trasformano nelle equazioni differenziali stocastiche (*equazioni di Langevin* in presenza di un campo di forze interno)

$$\begin{cases} dx_i(t) = v_i dt & i = 1, \dots, N \\ dv_i(t) = [\frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \gamma K(x_i(t) - x_j(t)) - \beta v_i] dt + \sigma db_i, \end{cases} \quad (4)$$

dove $\{b_i\}_{i=1}^N$ sono N moti Browniani standard indipendenti, β è un *parametro di viscosità* e la sua relazione con il *coefficiente di diffusione* σ è data da $\sigma^2/2 = \kappa T \beta$ (con κ costante di Boltzmann).

All'interpretazione fisica di queste equazioni è dedicata una vasta letteratura; in particolare, citiamo [C] e [GS] come riferimenti.

In questo ambito, si è interessati allo studio dell'evoluzione di una distribuzione di probabilità nell'intero spazio $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)^N$, partendo da una assegnata distribuzione iniziale di densità $f_N^\circ(\cdot) : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)^N \mapsto \mathbf{R}$,

$$f_N^\circ \geq 0 \quad e \quad \int f_N^\circ dx_1 dv_1 \dots dx_N dv_N = 1.$$

Tale evoluzione è descritta da una equazione differenziale alle derivate parziali, equivalente a quella di Liouville in assenza di stocasticità, detta *equazione di Fokker-Planck* per la densità

$$f_N(t; \cdot) = f_N(t; x_1, v_1, \dots, x_N, v_N);$$

quest'ultima si ricava, pertanto, come soluzione del problema ai valori iniziali ad essa associato

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_N + \sum_{i=1}^N \operatorname{div}_{x_i} (v_i f_N) + \sum_{i=1}^N \operatorname{div}_{v_i} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \gamma K(x_i - x_j) - \beta v_i \right) f_N \right] &= \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^N \Delta_{v_i} f_N, \\ f_N(0; \cdot) &= f_N^{\circ}(\cdot). \end{aligned} \quad (5)$$

Si supponga f_N simmetrica rispetto ad un qualunque scambio di due particelle e si indichi con f_N^k la funzione di densità marginale, *funzione di correlazione* per k particelle,

$$f_N^k(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k) := \int f_N(t; x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) dx_{k+1} dv_{k+1} \dots dx_N dv_N.$$

Dall'equazione (5) per f_N , integrando formalmente per parti e sfruttando le proprietà di decadenza della densità, si ricava una equazione per f_N^k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_N^k &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^k \Delta_{v_i} f_N^k + \beta \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} (v_i f_N^k) - \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{x_i} (v_i f_N^k) + \\ &\quad - \gamma \frac{N-k}{N} \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} \int K(x_i - x_{k+1}) \cdot \\ &\quad \cdot f_N^{k+1}(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k, x_{k+1}, v_{k+1}) dx_{k+1} dv_{k+1} + \\ &\quad - \gamma \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j \neq i}^k \operatorname{div}_{v_i} K(x_i - x_j) f_N^k(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k). \end{aligned}$$

Eseguendo un limite formale per $N \rightarrow \infty$, si ottiene, infine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^k &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^k \Delta_{v_i} f^k + \beta \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} (v_i f^k) - \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{x_i} (v_i f^k) + \\ &\quad - \gamma \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} \int K(x_i - x_{k+1}) \cdot \\ &\quad \cdot f^{k+1}(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k, x_{k+1}, v_{k+1}) dx_{k+1} dv_{k+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

dove $f^k(t; \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^k(t; \cdot)$ si interpreta come densità di probabilità per un sistema continuo di particelle infinitamente piccole.

Questa equazione possiede una proprietà notevole, detta “*propagazione del caos*”: se $f^k(0; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k) = \prod_{i=1}^k f_0(x_i, v_i)$ allora $f^k(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k) = \prod_{i=1}^k f(t, x_i, v_i)$, dove $f = f(t, x, v)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \operatorname{div}_v [(E(t, x) - \beta v) f(t, x, v)] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f(t, x, v) \quad (7)$$

con

$$E(t, x) = \gamma \int K(x - y) \rho(t, y) dy, \quad \rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x, v) dv.$$

In analogia al caso trattato di assenza di stocasticità, questa equazione non lineare viene chiamata “*equazione di Vlasov-Fokker-Planck*” e descrive, ad esempio, l’evoluzione di un plasma di elettroni in un bagno termico.

Il “ $\lim_{N \rightarrow \infty}$ ” con il quale l’equazione (7) è stata dedotta dalla (6) è assolutamente “formale”: la questione di una formulazione rigorosa di questo argomento è particolarmente aspra ed ancora aperta, presentando le medesime difficoltà incontrate nel problema, precedentemente discusso, della derivazione dell’equazione di Vlasov-Poisson.

3 Il problema della risolubilità

Argomento principale di questa discussione è il Problema di Cauchy associato all’equazione di Vlasov-Fokker-Planck (7). Si mostrerà che già noti risultati riguardanti l’equazione di Vlasov ordinaria (esistenza ed unicità della soluzione, teoremi costruttivi, controesempi notevoli) conservano la loro validità anche nel caso stocastico.

Ricordiamo che, relativamente al problema ai valori iniziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + \operatorname{div}_{(x,v)} [(v, E(t, x)) f(t, x, v)] &= 0, \\ f(0, \cdot, \cdot) &= f_0(\cdot, \cdot), \end{aligned} \quad (8)$$

si definisce *soluzione debole* una funzione f che verifica le condizioni seguenti:

- $f(t, \cdot, \cdot)$ è debolmente continua per ciascun valore t fissato in $[0, T]$;
- per ogni funzione test $\phi \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ con $\operatorname{supp} \phi \subset ([0, T] \times B)$, B compatto in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x, v) + (v, E(t, x)) \cdot \nabla_{(x,v)} \phi(t, x, v) \right) f(t, x, v) dx dv dt + \\ + \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} \phi(0, x, v) f_0(x, v) dx dv = 0. \end{aligned}$$

In particolare, f diventa una *soluzione classica* quando f_0 ed E sono sufficientemente regolari.

Definizioni analoghe si danno per il problema corrispondente in presenza di stocasticità, descritto dal sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \operatorname{div}_v [(E(t, x) - \beta v) f(t, x, v)] &= \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f(t, x, v) \\ f(0, \cdot, \cdot) &= f_0(\cdot, \cdot). \end{aligned} \quad (9)$$

Per il caso classico (8), lo studio dell'esistenza ed unicità della soluzione procede in due direzioni differenti. Da una parte si cercano soluzioni deboli ed in questo ambito ci si deve accontentare di risultati di pura esistenza in dimensione $n \leq 3$, non essendo stato formulato, fino ad ora, un argomento completo per l'unicità; teoremi di esistenza di soluzioni deboli sono stati dimostrati da Arseneev, Illner e Neunzert. Dall'altra parte si cerca di ottenere soluzioni classiche, per le quali l'unicità è facile da provare; tuttavia, il problema dell'esistenza globale in dimensione $n = 3$ è stato solo recentemente archiviato da Pfaffelmoser in maniera rigorosa per dati iniziali generali. Questo risultato, successivamente semplificato nella tecnica da Shaeffer, supera i precedenti dovuti a Batt, Bardos e Degon, nei quali vengono fatte assunzioni restrittive sulla regolarità del dato iniziale, sulla sua "grandezza" e su certe proprietà di simmetria del sistema. Queste ultime rendono il problema equivalente a quello in dimensione $n = 1, 2$, per il quale esistenza ed unicità di soluzioni classiche è stata dimostrata da Okabe ed Ukai e raffinata da Horst, al quale si deve anche un interessante argomento di risolubilità locale per $n = 3$. In dimensioni superiori, $n \geq 4$, nel caso della dinamica stellare, è noto il manifestarsi di esplosioni o collassi della soluzione in tempi finiti, anche qualora si assegnino dati iniziali estremamente regolari; lo stesso si verifica per $n = 3$ in un caso "relativistico".

Le difficoltà nella dimostrazione dell'esistenza globale di soluzioni regolari classiche sullo spazio tridimensionale sono, fondamentalmente, legate ad una potenziale divergenza della densità spaziale ρ in tempi finiti, dovuta ad un analogo comportamento del campo elettrico E .

Si potrebbe, allora, sperare che la modificazione stocastica nel modello (9), con l'introduzione del termine di viscosità ed una "delocalizzazione" delle particelle per effetto del termine di diffusione, possa prevenire la degenerazione delle soluzioni in tempi finiti; la situazione non è, tuttavia, troppo diversa da quella del problema ordinario.

Nel caso bidimensionale, $n = 2$, a cui limitiamo la nostra analisi, gli argomenti per provare esistenza ed unicità sono quelli adottati nello studio dell'equazione di Vlasov-Poisson semplice; l'idea principale consiste nel sostituire l'usuale sistema delle caratteristiche associato ad una EDP con un processo stocastico, cioè il sistema di equazioni differenziali ordinarie che determinano il moto delle particelle con un sistema differenziale stocastico. Anche il controesempio all'esistenza globale in dimensione $n = 4$ nel caso della dinamica stellare può essere esteso all'equazione Vlasov-Fokker-Planck, verificando la persistenza del fenomeno in presenza di "diffusione" stocastica. I risultati ottenuti e le stime utilizzate dipendono rigidamente dalla dimensione n dello spazio fisico su cui si studia l'equazione e, pertanto, sono difficilmente generalizzabili alle dimensioni superiori.

La letteratura matematica riguardante il problema di Vlasov-Fokker-Planck è particolarmente vasta e varia negli argomenti proposti per affrontare la questione della risolubilità. I lavori più recenti in tal senso sono quelli di François Bouchut, José Carrillo e Harold Dean Victory.

4 Esistenza ed unicità della soluzione nel caso bidimensionale

Le considerazioni precedenti suggeriscono una tecnica piuttosto “naturale” per la costruzione di soluzioni al problema in esame; questa si basa su un procedimento di “mollificazione” del nucleo singolare K delle equazioni, che consente di trattare agevolmente il sistema, completato con una operazione di limite per rimuovere il parametro di regolarizzazione introdotto. Numerosi lavori sull’equazione di Vlasov-Poisson citati utilizzano questo argomento (si veda, in particolare, [H1]).

In [NPT], gli autori lo estendono efficacemente al problema dell’equazione di Vlasov-Fokker-Planck sullo spazio bidimensionale.

Si consideri una famiglia di nuclei regolari $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ con $K_\delta \in C^2(\mathbf{R}^2)$, che approssima K nel modo seguente:

$$K_\delta(x) = K(x) \quad \text{per } |x| \geq \delta, \quad (10)$$

$$|K_\delta(x)| \leq \frac{C_1}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_i} K_\delta(x) \right| \leq \frac{C_2}{|x|} \quad (11)$$

per ogni $x \in \mathbf{R}^2$, $i = 1, 2$, $\delta > 0$, essendo C_1 e C_2 costanti reali positive. Approssimazioni di questa forma per il nucleo di Vlasov-Poisson si possono costruire materialmente a partire dall’espressione K_δ introdotta nel paragrafo 1, “addolcendo” la funzione valore assoluto per ottenere la regolarità richiesta. Come conseguenza delle proprietà (10) e (11), per ogni funzione $\psi \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, sono valide le stime

$$\|K_\delta * \psi\|_\infty \leq C \|\psi\|_\infty^{1/2}, \quad (12)$$

$$\int |\psi(y)| |K_\delta(x-y) - K_\delta(x'-y)| dy \leq D\varphi(|x-x'|) \|\psi\|_\infty, \quad (13)$$

dove

$$\varphi(r) := \begin{cases} r(1 - \ln r) & \text{per } r \leq 1 \\ 1 & \text{per } r > 1 \end{cases}$$

e le costanti C e D sono indipendenti da δ ed opportunamente scelte.

La stima (12) si ottiene decomponendo l’integrale della convoluzione sui domini complementari

$$\int K_\delta(x-y)\psi(y)dy = \int_{|x-y|\leq R} + \int_{|x-y|>R},$$

per $R > 0$ arbitrariamente fissato; preso il modulo di ambo i membri dell’uguaglianza, si tratta separatamente ciascuno dei due integrali, sfruttando le proprietà del nucleo K_δ e della funzione test ψ ; infine, si “ottimizza” la stima intermedia rispetto ad R . Analogamente si può procedere per la verifica della stima (13), complicando opportunamente la decomposizione in modo da considerare la posizione del secondo centro x' (per i dettagli si veda [MP], Lemma (3.1)).

Per ognuno dei nuclei regolari K_δ della famiglia approssimante, si consideri il problema “modificato”

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_t^\delta(x, v) + v \cdot \nabla_x f_t^\delta(x, v) + \operatorname{div}_v [(E_\delta(t, x) - \beta v) f_t^\delta(x, v)] = \\ = \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f_t^\delta(x, v), \\ f_0^\delta(\cdot, \cdot) = f_0(\cdot, \cdot) \end{aligned} \quad (14)$$

dove

$$E_\delta(t, x) = \gamma \int K_\delta(x - y) \rho_t^\delta(y) dy, \quad \rho_t^\delta(x) := \int_{\mathbf{R}^2} f_t^\delta(x, v) dv.$$

Il sistema delle caratteristiche stocastiche ad esso associato è definito come il processo stocastico $(x_\delta(t), v_\delta(t))_{t \geq 0}$ soluzione delle equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{cases} dx_\delta = v_\delta dt \\ dv_\delta = (E_\delta(t, x_\delta) - \beta v_\delta) dt + \sigma db \end{cases} \quad (15)$$

dove b è il moto Browniano standard in due dimensioni.

Indichiamo con $P_{t,s}^\delta(x, v; y, u)$ la densità di probabilità di transizione del processo dallo stato (y, u) al tempo s allo stato (x, v) al tempo t .

Il risultato valido nella situazione appena descritta è dato dalla

Proposizione (4.1) *Sia μ° una misura di probabilità sullo spazio delle fasi $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. Allora, per ogni $T \geq 0$ esiste una misura di probabilità μ_t^δ , $0 \leq t \leq T$, soluzione debole del sistema (14)*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu_t^\delta(\phi) = \mu_t^\delta(v \cdot \nabla_x \phi) + \mu_t^\delta[(E_\delta(t, x) - \beta v) \cdot \nabla_v \phi] + \frac{\sigma^2}{2} \mu_t^\delta(\Delta_v \phi), \\ \mu_0^\delta = \mu^\circ, \end{aligned}$$

dove la funzione test $\phi = \phi(x, v)$ si suppone sia due volte differenziabile con continuità, con derivate fino al secondo ordine limitate.

Questa soluzione è unica ed espressa da

$$\mu_t^\delta(\phi) = \int P_{t,0}^\delta(x, v; y, u) \phi(x, v) \mu^\circ(dy, du) dx dv.$$

Se μ° è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, con densità $f_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$, allora anche la misura soluzione è assolutamente continua

$$\mu_t^\delta(dx, dv) = f_t^\delta(x, v) dx dv$$

e si ha $\|f_t^\delta\|_{L^1} = \|f_0\|_{L^1}$, $\|f_t^\delta\|_\infty \leq C \|f_0\|_\infty$.

Per la dimostrazione si adotta un argomento standard, basato su un metodo di approssimazione costruttivo, sfruttando la regolarità del campo E_δ per la verifica delle stime di convergenza.

Si costruisce una successione ricorsiva di misure definite per un intervallo limitato dei tempi e si introduce, sullo spazio a cui esse appartengono, una

particolare metrica rispetto alla quale definire la convergenza; l'arbitrarietà nella scelta dell'intervallo di esistenza consente di concludere la globalità della soluzione nel tempo.

Passaggi rigorosi per la dimostrazione si possono ricavare combinando la tecnica usata in [MK] con quelle in [D] e [N].

Il passo fondamentale di questa trattazione consiste nella procedura di eliminazione del parametro δ dal sistema "mollificato", cioè lo studio del processo limite per $\delta \searrow 0$.

Nella dimostrazione del teorema principale si fa uso di una stima sulla densità spaziale ρ_t^δ , che presentiamo nel seguente

Lemma (4.2) *Sia $\mu^\circ(dx, dv) = f_0(x, v)dx dv$ una misura assolutamente continua, assegnata come dato iniziale del problema (14), con $f_0 \in L_1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \cap L_\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ ed a supporto compatto rispetto alle variabili di velocità. Sia f_t^δ la densità della soluzione μ_t^δ calcolata nella Proposizione (4.1) e $\rho_t^\delta(x) := \int f_t^\delta(x, v)dv$ la densità spaziale del sistema ad essa associata. Allora esiste una costante C_T , che dipende da f_0 e T ma non da δ , tale che*

$$\|\rho_t^\delta\|_\infty \leq C_T \quad \text{per ogni } t \in [0, T], \delta > 0. \quad (16)$$

Dimostrazione. L'idea segue quella proposta da Horst per l'equazione di Vlasov in assenza di stocasticità e sviluppata in [H1]: si cerca di ripercorrere l'evoluzione del sistema all'indietro dal tempo t al tempo 0, controllando campione per campione l'andamento delle traiettorie stocastiche per le singole particelle.

Dalla Proposizione (4.1) si ha

$$\rho_t^\delta(x) = \int f_t^\delta(x, v)dv = \int dv \int P_{t,0}^\delta(x, v; y, u) f_0(y, u) dy du.$$

Sia $\chi_t^\delta(x, v) := e^{-2\beta t} f_t^\delta(x, v)$; questa funzione risolve il problema ai valori iniziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi_t^\delta(x, v) + v \cdot \nabla_x \chi_t^\delta(x, v) + [(E_\delta(t, x) - \beta v)] \cdot \nabla_v \chi_t^\delta(x, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v \chi_t^\delta(x, v), \\ \chi_0^\delta(\cdot, \cdot) &= f_0(\cdot, \cdot), \end{aligned} \quad (17)$$

come si verifica con un conto diretto dalla sua definizione, utilizzando l'equazione (14) per la f_t^δ .

La (17) può essere interpretata come l'equazione di evoluzione indietro per la densità associata al processo "inverso", definito per $\tau < 0$,

$$\begin{cases} d\tilde{x}_\delta = -\tilde{v}_\delta d\tau \\ d\tilde{v}_\delta = (\tilde{E}_\delta(\tau, \tilde{x}_\delta) + \beta \tilde{v}_\delta) d\tau + \sigma db, \end{cases} \quad (18)$$

dove $\tilde{E}_\delta(\tau, z) = -E_\delta(-\tau, z)$; si tratta, cioè, del processo ottenuto invertendo i campi vettoriali e mantenendo crescente il parametro temporale τ .

Si indichi con $\tilde{P}_{\tau_1, \tau_0}^\delta(x, v; \tilde{x}, \tilde{v})$, $\tau_1 < \tau_0$, la densità di probabilità di transizione

indietro corrispondente, interpretata come la probabilità che il processo transiti al tempo τ_1 per lo stato (x, v) , condizionatamente al fatto di trovarsi nello stato (\tilde{x}, \tilde{v}) al tempo τ_0 successivo.

Per giustificare l'affermazione precedente si osservi, allora, che

$$\tilde{e}_\tau^\delta(x, v) := \int \tilde{P}_{\tau,0}^\delta(x, v; \tilde{x}, \tilde{v}) f_0(\tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{x} d\tilde{v}$$

soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{e}_\tau^\delta + v \cdot \nabla_x \tilde{e}_\tau^\delta + [(E_\delta(t, x) - \beta v)] \cdot \nabla_v \tilde{e}_\tau^\delta + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v \tilde{e}_\tau^\delta = 0,$$

con $\tilde{e}_\tau^\delta \rightarrow f_0$ per $\tau \nearrow 0$. Posto $\tau = -t$, ricordando la definizione di \tilde{E}_δ , si ottiene l'equazione (17) per $\chi_t^\delta = \tilde{e}_{-t}^\delta$.

Poichè $f_t^\delta(x, v) = e^{2\beta t} \chi_t^\delta(x, v)$, combinando le relazioni dimostrate, si ha

$$\begin{aligned} \rho_t^\delta(x) &= e^{2\beta t} \int dv \int \tilde{P}_{-t,0}^\delta(x, v; \tilde{x}, \tilde{v}) f_0(\tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{x} d\tilde{v} \leq \\ &\leq e^{2\beta t} \|f_0\|_\infty \int dv \int_{|\tilde{v}| \leq Q} \tilde{P}_{-t,0}^\delta(x, v; \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{x} d\tilde{v} = \\ &= e^{2\beta t} \|f_0\|_\infty \int dv \text{Prob}\{|\tilde{v}_\delta(0)| \leq Q / \tilde{x}_\delta(-t) = x, \tilde{v}_\delta(-t) = v\}, \end{aligned} \quad (19)$$

dove si suppone che $\text{supp} f_0 \subset \{(x, v) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 / |v| \leq Q\}$.

Integrando il sistema (18) rispetto al tempo iniziale $\tau_0 = -t$ e rendendo il parametro t esplicito, si ottiene

$$\tilde{v}_\delta(0) = v e^{\beta t} - \int_0^t e^{\beta s} E_\delta(s, x_\delta(s)) ds + w(t),$$

dove

$$w(t) = \int_0^t e^{-\beta(s-t)} db(s).$$

Da questa uguaglianza segue, immediatamente,

$$\begin{aligned} |v| &\leq e^{-\beta t} |\tilde{v}_\delta(0)| + \int_0^t |E_\delta(s, x_\delta(s))| ds + e^{-\beta t} |w(t)| \leq \\ &\leq e^{-\beta t} |\tilde{v}_\delta(0)| + C \int_0^t \|\rho_s^\delta\|_\infty^{1/2} ds + e^{-\beta t} |w(t)|, \end{aligned} \quad (20)$$

per scrivere la quale si è fatto uso della stima (12) sul secondo termine.

Decomponiamo, adesso, l'integrale nella (19) rispetto ad una coppia di eventi disgiunti ed esaustivi

$$\begin{aligned} &\int \text{Prob}\{|\tilde{v}_\delta(0)| \leq Q / \tilde{x}_\delta(-t) = x, \tilde{v}_\delta(-t) = v\} dv = \\ &= \int \text{Prob}\{|\tilde{v}_\delta(0)| \leq Q, |\bar{w}(t)| < \frac{|v|}{2} / \tilde{x}_\delta(-t) = x, \tilde{v}_\delta(-t) = v\} dv + \\ &+ \int \text{Prob}\{|\tilde{v}_\delta(0)| \leq Q, |\bar{w}(t)| \geq \frac{|v|}{2} / \tilde{x}_\delta(-t) = x, \tilde{v}_\delta(-t) = v\} dv, \end{aligned} \quad (21)$$

dove si definisce

$$e^{-\beta t} |w(t)| = \left| \int_0^t e^{-\beta s} db(s) \right| \leq \left| \int_0^t db(s) \right| =: |\bar{w}(t)|.$$

Applicando disuguaglianze classiche della Teoria della Probabilità (disuguaglianza di Markov e Jensen), opportunamente combinate con le caratteristiche del moto Browniano, si dimostra che la $Prob\{|\bar{w}(t)| \geq \alpha\}$ decresce esponenzialmente in α e, perciò, il secondo termine è uniformemente limitato da una costante che dipende solo da T (per il tramite del $supp f_t^\delta$ nello spazio \mathbf{R}_v^2).

Se $|\tilde{v}_\delta(0)| \leq Q$ e $|\bar{w}(t)| < \frac{|v|}{2}$, allora la stima (20) implica che

$$\frac{|v|}{2} \leq e^{-\beta t} Q + C \int_0^t \|\rho_s^\delta\|_\infty^{1/2} ds.$$

Quindi il primo integrale al secondo membro della (21) è limitato da

$$cost \cdot (Q + \int_0^t \|\rho_s^\delta\|_\infty^{1/2} ds)^2.$$

Per $0 \leq t \leq T$ vale, pertanto, la maggiorazione

$$\|\rho_t^\delta\|_\infty \leq cost \cdot (Q + \int_0^t \|\rho_s^\delta\|_\infty^{1/2} ds)^2 + cost,$$

con costanti dipendenti unicamente da f_0 e T .

Il Lemma di Gronwall, infine, fornisce una stima uniforme per $\|\rho_t^\delta\|_\infty^{1/2}$, che conclude la dimostrazione della (16).

Con quest'ultimo risultato a disposizione, si può completare la rimozione della "mollificazione".

Proposizione (4.3) *Si definisca*

$$D_t^{\delta, \delta'} := \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|x_\delta(s) - x_{\delta'}(s)| + |v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)|],$$

dove $0 < \delta' < \delta$ e $\{(x_\delta, v_\delta)\}_{\delta > 0}$ è la famiglia dei processi che partono dal punto (x, v) con la medesima distribuzione di probabilità, di densità $f_0 \in L^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ ed a supporto compatto rispetto alle velocità. Con \mathbb{E} si indica il valore medio di attesa, definito per una funzione della posizione del processo in un generico istante da

$$\mathbb{E}[\phi(x(t), v(t))] = \int \phi(x, v) P_{t,0}(x, v; y, u) f_0(y, u) dx dv dy du.$$

Allora

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} D_t^{\delta, \delta'} = 0$$

per tutti i valori $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Si confrontino due generici processi, con parametri δ e δ' rispettivamente; come soluzioni del sistema (15) nei casi specifici, essi soddisfano le relazioni

$$|x_\delta(t) - x_{\delta'}(t)| \leq \int_0^t |v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)| ds, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
|v_\delta(t) - v_{\delta'}(t)| &\leq \int_0^t |E_\delta(s, x_\delta(s)) - E_{\delta'}(s, x_{\delta'}(s))| ds + \\
&+ \beta \int_0^t |v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)| ds.
\end{aligned} \tag{23}$$

Aggiungendo e sottraendo le quantità opportune, il modulo della differenza dei campi elettrici che compare al secondo membro della (23) può essere diviso nei tre termini seguenti:

$$\begin{aligned}
I(s) &= \left| \int K_\delta(x_\delta(s) - y) [\rho_s^\delta(y) - \rho_s^{\delta'}(y)] dy \right|, \\
II(s) &= \left| \int [K_\delta(x_\delta(s) - y) - K_{\delta'}(x_\delta(s) - y)] \rho_s^{\delta'}(y) dy \right|, \\
III(s) &= \left| \int [K_{\delta'}(x_\delta(s) - y) - K_{\delta'}(x_{\delta'}(s) - y)] \rho_s^{\delta'}(y) dy \right|.
\end{aligned}$$

Il Lemma (4.2) garantisce l'uniforme limitatezza di ρ_s^δ ,

$$\|\rho_s^\delta\|_\infty \leq C_T \quad \text{per ogni } s \in [0, T], \delta > 0;$$

da questa e sfruttando le caratteristiche di K_δ descritte in (11) e (13), si ha

$$\begin{aligned}
II(s) &\leq C_\delta \quad \text{con } C_\delta \rightarrow 0 \text{ per } \delta \rightarrow 0, \\
III(s) &\leq C\varphi(|x_\delta(t) - x_{\delta'}(t)|),
\end{aligned} \tag{24}$$

dove C indica ogni generica costante positiva che dipende unicamente da f_0 e da T .

Per stimare il termine $I(s)$, si scrive la densità spaziale in termini di probabilità di transizione

$$\begin{aligned}
\rho_s^\delta(y) - \rho_s^{\delta'}(y) &= \int [f_s^\delta(y, v') - f_s^{\delta'}(y, v')] dv' = \\
&= \int dv' \int [P_{s,0}^\delta(y, v'; z, u) - P_{s,0}^{\delta'}(y, v'; z, u)] f_0(z, u) dz du.
\end{aligned}$$

Perciò

$$I(s) = \left| \int \mathbb{E}_{(z,u)} [K_\delta(x_\delta(s) - y_\delta(s)) - K_\delta(x_\delta(s) - y_{\delta'}(s))] f_0(z, u) dz du \right|, \tag{25}$$

dove il processo $y_\delta(s)$ parte al tempo 0 quasi certamente dallo stato (z, u) e $\mathbb{E}_{(z,u)}$ indica l'attesa condizionata rispetto a questo evento, cioè

$$\mathbb{E}_{(z,u)} [K_\delta(x_\delta(s) - y_\delta(s))] = \int K_\delta(x_\delta(s) - y) P_{s,0}^\delta(y, v'; z, u) dy dv'.$$

Dalle definizioni si verifica immediatamente che

$$\mathbb{E}[\cdot] = \int \mathbb{E}_{(x,v)}[\cdot] f_0(x, v) dx dv;$$

maggiorando il modulo dell'integrale con l'integrale del modulo nella (25) ed operando l'attesa \mathbb{E} , si verifica

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I(s)] &\leq \int \int f_0(x, v) \mathbb{E}_{(x, v)}[|K_\delta(x_\delta(s) - y_\delta(s)) - \\
&\quad - K_\delta(x_\delta(s) - y_{\delta'}(s))|] f_0(z, u) dz du dx dv = \\
&= \int dz du f_0(z, u) \mathbb{E}_{(z, u)}[\int dx dv f_s^\delta(x, v) |K_\delta(x_\delta(s) - y_\delta(s)) - K_\delta(x_\delta(s) - y_{\delta'}(s))|] \leq \\
&\leq \mathbb{E}[\int dx dv f_s^\delta(x, v) |K_\delta(x_\delta(s) - y_\delta(s)) - K_\delta(x_\delta(s) - y_{\delta'}(s))|] = \\
&= \mathbb{E}[\int dx \rho_s^\delta(x, v) |K_\delta(x_\delta(s) - y_\delta(s)) - K_\delta(x_\delta(s) - y_{\delta'}(s))|] \leq \\
&\leq C \mathbb{E}[\varphi(|y_\delta(s) - y_{\delta'}(s)|)]. \tag{26}
\end{aligned}$$

Nei precedenti passaggi si è fatto uso del Teorema di Fubini per l'inversione dell'ordine d'integrazione nelle attese e delle proprietà di definizione delle funzioni. Applicando, adesso, l'attesa sulle disuguaglianze (22) e (23), in virtù delle stime (24) e (26) ottenute

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|x_\delta(t) - x_{\delta'}(t)|] &\leq \int_0^t \mathbb{E}[|v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)|] ds, \\
\mathbb{E}[|v_\delta(t) - v_{\delta'}(t)|] &\leq C_\delta T + C \int_0^t \{ \mathbb{E}[\varphi(|x_\delta(s) - x_{\delta'}(s)|)] + \\
&\quad + \mathbb{E}[|v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)|] \} ds,
\end{aligned}$$

dove i contributi costanti dovuti al termine $III(s)$ sono stati raccolti nell'unica $C_\delta T$ e la C_δ è scelta opportunamente. La *disuguaglianza di Jensen*, per ogni variabile aleatoria ξ e per ogni funzione φ concava, stabilisce che

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi)] \leq \varphi(\mathbb{E}[\xi]);$$

pertanto, per linearità dell'attesa,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|x_\delta(t) - x_{\delta'}(t)| + |v_\delta(t) - v_{\delta'}(t)|] &= \mathbb{E}[|x_\delta(t) - x_{\delta'}(t)|] + \mathbb{E}[|v_\delta(t) - v_{\delta'}(t)|] \leq \\
&\leq C_\delta + C \int_0^t \{ 2\mathbb{E}[|v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)|] + \mathbb{E}[\varphi(|x_\delta(s) - x_{\delta'}(s)|)] \} ds \leq \\
&\leq C_\delta + C \int_0^t \varphi(\mathbb{E}[|x_\delta(s) - x_{\delta'}(s)|]) ds + C' \int_0^t \mathbb{E}[|v_\delta(s) - v_{\delta'}(s)|] ds.
\end{aligned}$$

Infine, prendendo di ambo i membri l'estremo superiore,

$$D_t^{\delta, \delta'} \leq C_\delta + C' \int_0^t D_s^{\delta, \delta'} ds + C \int_0^t \varphi(D_s^{\delta, \delta'}) ds.$$

La relazione precedente si interpreta affermando che $D_t^{\delta, \delta'}$ è limitata da una funzione $z_\delta(t)$, soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{z}_\delta(t) = C\bar{\varphi}(z_\delta(t)) \\ z_\delta(0) = C_\delta, \end{cases}$$

dove

$$\bar{\varphi}(r) := \begin{cases} \varphi(r) & \text{per } 0 < r < 1 \\ r & \text{per } r \geq 1 \end{cases}$$

(alla base di questa osservazione è la rappresentazione integrale di una equazione differenziale ordinaria). Eseguendo un conto esplicito si può verificare direttamente che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} z_\delta(t) = 0,$$

il che conclude la dimostrazione della proposizione.

A partire dalla tesi della Proposizione (4.3) è facile mostrare che (x_δ, v_δ) , soluzione del problema modificato, converge ad un processo limite (x, v) , la cui distribuzione di probabilità μ_t è limite debole della successione di misure $\{\mu_t^\delta\}_{\delta > 0}$; inoltre μ_t è descritta da una funzione di densità f_t che è soluzione debole dell'equazione di Vlasov-Fokker-Planck (7).

Queste verifiche utilizzano procedimenti standard di limite negli integrali che descrivono le varie strutture, in virtù delle proprietà di convergenza garantite dalla Proposizione (4.3).

Risulta, quindi, provato il risultato fondamentale di questa discussione, che si enuncia nel seguente

Teorema (4.4) *Sia $\mu^\circ(dx, dv) = f_0(x, v)dx dv$ una misura di probabilità iniziale, con $f_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ a supporto compatto in \mathbf{R}_v^2 . Allora esiste un'unica misura di probabilità $\mu_t(dx, dv) = f_t(x, v)dx dv$, che risolve il problema (7) in forma debole; cioè, per ogni funzione regolare ϕ , si ha*

$$\frac{d}{dt} \mu_t(\phi) = \mu_t(v \cdot \nabla_x \phi) + \mu_t[(E(t, x) - \beta v) \cdot \nabla_v \phi] + \frac{\sigma^2}{2} \mu_t(\Delta_v \phi),$$

$$\mu_0 = \mu^\circ.$$

Inoltre, indicata con $P_{t,s}(x, v; y, u)$ la densità di probabilità di transizione del processo stocastico soluzione del sistema

$$\begin{cases} dx = v dt \\ dv = (E(t, x) - \beta v) dt + \sigma db, \end{cases}$$

si esprime

$$\mu_t(dx, dv) = \int P_{t,0}(x, v; y, u) \mu^\circ(dy, du).$$

Infine

$$\mu_t = \lim_{\delta \rightarrow 0}^* \mu_t^\delta,$$

con μ_t^δ soluzione del problema "modificato" (15) e $\lim_{\delta \rightarrow 0}^*$ che denota la convergenza debole nello spazio delle misure.

5 Controesempi ed osservazioni conclusive

Come è stato anticipato, si vuole discutere un controesempio all'esistenza globale per il sistema Vlasov-Fokker-Planck sullo spazio \mathbf{R}^n , $n = 4$ e nel caso della dinamica stellare. In \mathbf{R}^4 , l'espressione del campo E dell'equazione (9) si modifica in

$$E(t, x) = \gamma \int \frac{x - y}{|x - y|^4} \rho(t, y) dy,$$

dove $\gamma < 0$ se esso descrive una dinamica Newtoniana.

Tale controesempio costituisce un'ulteriore estensione dei risultati ordinari al problema stocastico. Anche in questa circostanza si adotta un argomento dovuto ad Horst ([H2]).

Si può, allora, dimostrare che esistono dati iniziali, definiti da funzioni f_0 regolari, tali che le corrispondenti soluzioni del sistema Vlasov-Fokker-Planck "esplodono" in tempi finiti. In forma equivalente, assegnata f_0 con le caratteristiche stabilite dal Teorema (4.4), esiste al più un intervallo finito $[0, T)$ nel quale la soluzione è definita. Si tratta di costruire opportunamente f_0 in modo che questo intervallo non possa essere esteso all'infinito.

Se si sceglie f_0 a supporto compatto, l'energia cinetica

$$E_{cin}(t) := \frac{1}{2} \int |v|^2 f(t, x, v) dx dv$$

ed il momento d'inerzia del sistema

$$M(t) := \int |x|^2 f(t, x, v) dx dv$$

esistono entrambi finiti per $t = 0$. Seguendo il procedimento presentato in [H2], si conclude che E_{cin} ed M si mantengono finiti per tutti i tempi t in $[0, T)$, intervallo di esistenza locale della soluzione.

Inoltre, se il dato f_0 è sufficientemente regolare, è possibile derivare le equazioni

$$\dot{M}(t) = 2 \int x \cdot v f(t, x, v) dx dv, \quad (27)$$

$$\ddot{M}(t) = 4(E_{cin}(t) + E_{pot}(t)) - \beta \dot{M}(t), \quad (28)$$

facendo uso del criterio classico di integrazione lungo le caratteristiche del moto. Si ricordi che l'energia potenziale in dimensione $n = 4$ è definita come

$$E_{pot}(t) = \frac{\gamma}{2} \int \left(\int \frac{1}{|x - y|^2} \rho(t, y) dy \right) \rho(t, x) dx.$$

Per effetto della diffusione introdotta nello spazio delle velocità dal moto Browniano e del parametro di viscosità β , l'energia meccanica totale del sistema $E_{tot}(t) := E_{cin}(t) + E_{pot}(t)$ non si conserva lungo i moti; infatti,

$$\dot{E}_{tot}(t) = \dot{E}_{cin}(t) + \dot{E}_{pot}(t) = 2\sigma^2 - 2\beta E_{cin}(t). \quad (29)$$

Integrando l'equazione (28) ed osservando che, per la (29), è soddisfatta la stima

$$E_{tot}(t) \leq 2\sigma^2 t + E_{tot}(0),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= e^{-\beta t} \dot{M}(0) + 4 \int_0^t e^{-\beta(t-s)} E_{tot}(s) ds \leq \\ &\leq e^{-\beta t} \left[\dot{M}(0) + 4E_{tot}(0) \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} + 8\sigma^2 \frac{(\beta t - 1)e^{\beta t} - 1}{\beta^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Si scelga, adesso, f_0 in modo che $\dot{M}(0) = 0$; un possibile esempio è rappresentato da una funzione che presenti simmetria sferica rispetto alle variabili x e v . Allora, la (30) riduce a

$$\dot{M}(t) \leq 4 \left[E_{tot}(0) \frac{1 - e^{\beta t}}{\beta} + \frac{2\sigma^2 t}{\beta} \right]$$

e quindi

$$M(t) \leq M(0) + 4E_{tot}(0) \left(\frac{t}{\beta} - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta^2} \right) + \frac{4\sigma^2 t^2}{\beta}. \quad (31)$$

Poichè $\gamma < 0$, si può assegnare f_0 in modo che $E_{tot}(0)$ abbia valore negativo e modulo arbitrariamente grande. In tal caso l'espressione al secondo membro della (31) diventa negativa per un qualche valore finito del tempo $\bar{t} > 0$.

L'intervallo di esistenza della soluzione $[0, T)$ deve, pertanto, mantenersi più piccolo di $[0, \bar{t})$, dovendo essere il momento d'inerzia $M(t)$ positivo per tutti i tempi, in accordo con la sua definizione.

Numerosi, come si è detto, sono i lavori sull'equazione di Vlasov-Fokker-Planck e sui problemi, ai valori iniziali o con condizioni al bordo, ad essa associati.

Rispetto all'equazione di Vlasov-Poisson nel caso deterministico, che è di tipo iperbolico, la Fokker-Planck corrispondente, ottenuta per modificazione stocastica delle velocità, assume una struttura parabolica più regolare, che semplifica l'approccio al problema della risolubilità.

Teoremi classici sulle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine sfruttano metodi di perturbazione dell'operatore Laplaciano; l'originalità dei risultati presentati nei precedenti paragrafi sta nell'idea, già adottata con successo nello studio del sistema in assenza di stocasticità, di provare l'esistenza di una soluzione basandosi su stime del campo elettrico (si cita per tutti l'articolo di Jack Shaeffer [S]).

Sottolineamo, ancora una volta, che tali stime sulle norme delle funzioni che descrivono il problema dipendono significativamente dalla dimensione dello spazio delle fasi $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ e richiedono, pertanto, di adeguare la tecnica di dimostrazione ad ogni singolo caso.

L'argomento di analisi delle traiettorie caratteristiche del sistema, ispirato ad un *punto di vista Lagrangiano* della teoria, può essere esteso dal caso bidimensionale trattato alla dimensione superiore $n = 3$. In questa particolare circostanza, si vorrebbero ottenere stime indipendenti dal coefficiente di diffusione σ che caratterizza la presenza di stocasticità, in modo da poter procedere successivamente ad una operazione di limite per la rimozione del "rumore" Browniano. Si avrebbero, così, risultati di esistenza globale della soluzione per il sistema di Vlasov-Poisson ordinario passando per il problema stocasticizzato. Lo studio in questa direzione è ancora in fase di completamento.

Riferimenti bibliografici

- [BH] BRAUN,W. e HEPP,K., *The Vlasov Dynamics and its Fluctuations in the $1/N$ Limit of Interacting Classical Particles*, Commun. Math. Phys., **56** (1977), 101-113
- [C] CHANDRASEKHAR,S., *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Rev. Mod. Phys., **15** (1943)
- ristampato in
WAX,N., editore, *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, New York, Dover publications, Inc., 1954
- [D] DOBRUSHIN,R.L., *Vlasov Equations*, Funct. Anal. and Appl., **13** (1979), 115-123
- [GS] GIHMAN,I.I. e SKOROHOD,A.V., *Stochastic Differential Equations*, Berlin, Springer-Verlag, 1972
- [G] GUERRA,F., *Equazioni Differenziali Stocastiche*, Preprint, Roma, 1988
- [H1] HORST,E., *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation I.*, Math. Meth. in the Appl. Sci., **3** (1981), 229-248
- [H2] HORST,E., *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation II.*, Math. Meth. in the Appl. Sci., **4** (1982), 19-32
- [MP] MARCHIORO,C. e PULVIRENTI,M., *Hydrodynamics in Two Dimentions and Vortex Theory*, Commun. Math. Phys., **84** (1982), 483-503
- [MK] MCKEAN JR.,H.P., *Propagation of Chaos for a Class of Nonlinear Parabolic Equations*, Lectures in Differential Equations (ed. A.K.Aziz), vol II.(1969), 177-194
- [N] NEUNZERT,H., *An Introduction to the Nonlinear Boltzmann-Vlasov Equation*, Kinetic theories and the Boltzmann equation (Montecatini, 1981), Lecture Notes in Mathematics, Berlin-New York, Springer, 1984, 60-110
- [NPT] NEUNZERT,H., PULVIRENTI,M. e TRIOLO,L., *On the Vlasov-Fokker-Planck Equation*, Math. Meth. in the Appl. Sci., **6** (1984), 527-538
- [S] SHAEFFER,J., *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimentions*, Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1313-1335