



HAL
open science

On the Cauchy problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation

Chiara Simeoni

► **To cite this version:**

Chiara Simeoni. On the Cauchy problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation. [Research Report] Department of Mathematics, Sapienza University of Rome, Italy. 1999, 66 p. hal-00932394

HAL Id: hal-00932394

<https://hal.science/hal-00932394v1>

Submitted on 16 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE e NATURALI
Corso di Laurea in MATEMATICA

Tesi di Laurea

Sul problema di Cauchy per
l'equazione
Vlasov-Poisson-Fokker-Planck

Relatore:
Prof. Mario Pulvirenti

Laureanda:
Chiara Simeoni
matricola 11100486

Anno Accademico 1997/98

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1	
Una caratterizzazione del problema dal punto di vista fisico	
1.1 Il sistema di Vlasov-Poisson	3
1.2 L'equazione Fokker-Planck per il sistema di Vlasov-Poisson	9
Capitolo 2	
Teoria della risolubilità	
2.1 Aspetti della questione: una rassegna dei principali risultati	12
2.2 Definizioni e lemmi preliminari	17
2.3 Esistenza ed unicità della soluzione per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck nel caso bidimensionale	27
Capitolo 3	
Il problema di Cauchy per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio tridimensionale	
3.1 La stima uniforme sulla densità spaziale	36
3.2 Convergenza al sistema di Vlasov-Poisson nel limite di diffusione nulla .	50
Appendice A	57
Appendice B	58
Bibliografia	61

Introduzione

L'equazione di Vlasov-Poisson è uno dei problemi della Fisica-Matematica più a lungo discussi: un gran numero di autori ha affrontato questioni attinenti ad essa, tutte in qualche modo collegate con lo studio del problema di Cauchy associato (esistenza di soluzioni ed unicità, comportamento asintotico, analisi degli stati stazionari, metodi numerici di approssimazione). Nonostante siano state formulate varie teorie sull'argomento, soltanto di recente si sono chiariti alcuni aspetti fondamentali e, così, resi rigorosi passi cruciali nella dimostrazione dei risultati.

Situazione analoga si presenta se si prende in considerazione il problema di Cauchy per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Quest'ultima si ottiene, come modello matematico, quando il fenomeno ideale descritto dall'equazione di Vlasov-Poisson viene modificato con l'introduzione di un elemento di stocasticità, che comporta un effetto di diffusione sulle velocità nel sistema fisico. Da un punto di vista strutturale, rispetto al caso ordinario, compare nell'equazione un termine lineare del secondo ordine, dipendente da un coefficiente caratteristico della diffusione stocastica; formalmente, all'annullarsi di questo coefficiente il sistema di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck converge a quello di Vlasov-Poisson.

Una questione particolarmente spinosa è quella che riguarda la teoria della risolubilità globale sullo spazio tridimensionale, dove le strutture del problema manifestano singolarità che impediscono una trattazione semplice con metodi classici.

In questa tesi si affronta lo studio del problema di Cauchy per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, proponendo un approccio basato sull'analisi delle traiettorie caratteristiche del sistema, già tentato con successo nel caso ordinario. Obiettivo principale è provare stime sulla norma uniforme della densità macroscopica del sistema che siano indipendenti dal coefficiente di diffusione e da altri parametri tipici del fenomeno perturbato (termini di viscosità dissipativi). La validità di tali stime garantisce la risolubilità globale del problema e costituirà

lo strumento fondamentale per una verifica rigorosa della derivazione del sistema di Vlasov-Poisson da quello di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck nel limite di piccola diffusione.

Il contenuto della tesi è organizzato in una struttura piuttosto naturale.

Il Capitolo 1 è dedicato alla descrizione del problema da un punto di vista fisico: viene illustrato il modo in cui i sistemi di Vlasov-Poisson e di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck possono essere dedotti euristicamente da un sistema dinamico finito nel limite di campo medio.

Nel Capitolo 2 si affronta la teoria della risolubilità; dopo aver sottolineato i nodi della questione e presentato una rassegna dei lavori noti sul problema, si introducono le strutture utilizzate per l'analisi e si discutono interessanti proprietà del sistema in esame; infine, viene dimostrata esistenza ed unicità della soluzione per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio bidimensionale.

Il Capitolo 3 costituisce la parte veramente originale della trattazione, riferita allo studio del sistema sullo spazio tridimensionale: viene provata la stima uniforme sulla densità macroscopica ed i risultati di esistenza globale della soluzione e di convergenza "traiettorie per traiettoria" che seguono. Nelle Appendici A e B si riporta la dimostrazione di alcuni lemmi tecnici applicati.

Capitolo 1

Una caratterizzazione del problema dal punto di vista fisico

Si definisce l'equazione di Vlasov-Poisson per un complesso di particelle interagenti e si descrive il modello fisico da cui può essere euristicamente dedotta, accennando una dimostrazione rigorosa nel caso dell'equazione "mollificata". Si considera, poi, il sistema di Vlasov-Poisson con l'aggiunta di un termine di stocasticità, facendolo derivare euristicamente da un sistema dinamico finito immerso in un bagno termico.

1.1 Il sistema di Vlasov-Poisson

L'evoluzione temporale di una distribuzione di particelle nello spazio delle fasi $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, è descritta da una funzione di densità microscopica $f = f(t, x, v)$, che soddisfa il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, detto *sistema di Vlasov-Poisson* (VP):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0,$$

$$E(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} \frac{x - y}{|x - y|^n} \rho(t, y) dy,$$

$$\rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x, v) dv,$$

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad t \geq 0, \quad (x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \gamma \in \mathbf{R}.$$

Le variabili $x \in \mathbf{R}^n$ e $v \in \mathbf{R}^n$ rappresentano rispettivamente posizione e velocità nello spazio delle fasi del sistema. Il moto è determinato dal campo E : per $\gamma < 0$ esso rappresenta una forza Newtoniana (le “particelle” si attraggono reciprocamente attraverso un campo di tipo gravitazionale) ed il sistema descrive la classica dinamica stellare; per $\gamma > 0$ rappresenta una forza Coulombiana, in questo caso il sistema descrive un plasma di cariche che interagiscono tra loro per mezzo dei campi elettrici da esse generati. La funzione ρ individua la densità fisica del sistema. Il valore del campo E al tempo t è legato alla densità f al tempo t stesso, attraverso una relazione che consente di calcolarlo, nota la soluzione del problema, come convoluzione su un opportuno nucleo

$$E = K * \rho;$$

in questa circostanza si dice che E è un campo “autoconsistente”. L’equazione che definisce il problema risulta, perciò, non lineare. La distribuzione assegnata al tempo 0 è descritta dalla funzione di densità f_0 .

Il sistema di Vlasov-Poisson è, in definitiva, il modello matematico per la dinamica di un “ensemble” di particelle di varia natura che interagiscono reciprocamente, in assenza di collisioni; una galassia ne è un esempio concreto, dove le stelle giocano il ruolo di particelle.

Una interpretazione fisica più dettagliata dell’equazione di Vlasov-Poisson si ottiene descrivendone la relazione con le equazioni di Newton della meccanica classica: al di là delle questioni connesse ad una formalizzazione rigorosa di questo argomento, si ricava l’equazione come limite di campo medio per un sistema dinamico finito (cioè discreto e con un numero finito di “particelle” interagenti).

Si consideri un sistema di N particelle che si muovono in \mathbf{R}^n , $n \geq 1$, in accordo con le leggi della meccanica classica, interagendo mutuamente attraverso un potenziale proporzionale alla massa o alla carica delle particelle e “debolmente” singolare. Quest’ultima condizione è espressa assumendo che la forza esercitata da una particella i posizionata in un punto $x_i \in \mathbf{R}^n$ su una particella j in $x_j \in \mathbf{R}^n$ abbia la forma

$$\gamma_{ij}K(x_i - x_j),$$

con $K = K(y)$ applicazione vettoriale che diventa singolare solo nell’origine, in modo che

$$\int_{\mathbf{R}^n} K(x - y)\psi(y)dy$$

esista per tutti gli $x \in \mathbf{R}^n$, $\psi \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

La legge di Newton stabilisce, pertanto, che il moto di ciascuna particella soddisfi l'equazione classica

$$m_i \dot{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{ij} K(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

dove $x_i \in \mathbf{R}^n$, $v_i \in \mathbf{R}^n$ e $m_i > 0$ rappresentano rispettivamente la posizione, la velocità e la massa della i -esima particella. Le costanti reali γ_{ij} sono legate alla natura del sistema:

a) $\gamma_{ij} = -\Gamma m_i m_j$, dove $\Gamma > 0$ è la costante gravitazionale, se il sistema descrive il problema degli N corpi nella meccanica celeste;

b) $\gamma_{ij} = q_i q_j$, dove $q_i \in \mathbf{R}$ è la carica elettrica della i -esima particella, se il sistema descrive la classica dinamica Coulombiana.

Anche l'espressione analitica dell'applicazione K è fissata dalle caratteristiche fisiche del sistema: l'esempio tipico, a cui si fa riferimento per lo studio dell'equazione di Vlasov-Poisson e che giustifica il nome dato al sistema, è

$$K(y) = \frac{y}{|y|^n};$$

cioè $K(\cdot) := -\nabla G(\cdot)$, dove G è la soluzione fondamentale dell'equazione di Poisson in \mathbf{R}^n

$$\Delta G = -\delta;$$

il campo E conservativo, gravitazionale o elettrico, si costruisce allora, secondo la teoria classica, a partire da un potenziale $E = -\nabla V$, con V soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta V = -\rho$, $V = G * \rho$.

Lo stato del sistema in un generico istante di tempo t è descritto dalla posizione e velocità di tutte le sue particelle

$$(x_i, v_i) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; \quad i = 1, \dots, N.$$

Senza alterare la fisica del problema, si supponga che tutte le particelle del sistema siano identiche (il che equivale a porre $m_i = m = 1$, $q_i = q = \pm 1$, $\gamma_{ij} = \gamma$; $i, j = 1, \dots, N$) e si riscalino le forze

$$\gamma \longrightarrow \frac{\gamma}{N},$$

mantenendo γ costante fissata (lo stesso effetto si ottiene normalizzando ad 1 la massa/carica totale del sistema, in modo che ciascuna particella abbia massa/carica $\frac{1}{N}$); in questa situazione si ha la cosiddetta “*approssimazione di campo medio*”.

Le leggi del moto si semplificano, allora, nel sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \frac{\gamma}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dato lo stato $\omega_N^0 = (x_1^0, v_1^0; \dots; x_N^0, v_N^0)$ al tempo 0, si determina lo stato $\omega_N(t) = (x_1(t), v_1(t); \dots; x_N(t), v_N(t))$ al tempo t risolvendo il problema ai valori iniziali per (1.1) con

$$(x_i(0), v_i(0)) = (x_i^0, v_i^0); \quad i = 1, \dots, N,$$

La soluzione del problema, tuttavia, almeno nel caso $\gamma < 0$, potrebbe esistere solo per tempi finiti, a causa della singolarità del nucleo K che definisce il campo vettoriale del sistema (1.1); inoltre, l’intervallo di esistenza locale della soluzione dipenderà dal valore N e la sua ampiezza potrebbe ridursi a 0 quando N tende all’infinito. Per superare questa difficoltà si può assumere K regolare, ad esempio limitato e continuo, assicurando l’esistenza di una soluzione globale $\omega_N(t)$ del problema per ogni tempo $t \geq 0$.

La regolarità si può ottenere, anche, con un *procedimento di “mollificazione”*, ad esempio sostituendo il nucleo K con uno “mollificato”

$$K_\delta(y) = \frac{y}{(|y|^2 + \delta)^{n/2}}.$$

L’equazione di Vlasov-Poisson corrispondente è detta *equazione “modificata”* ed è della stessa forma di quella classica

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E_\delta(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0 \quad (1.2)$$

dove, adesso, si considera

$$E_\delta(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} K_\delta(x - y) \rho(t, y) dy.$$

La principale questione che si pone è di confrontare $\omega_N(t)$ con una funzione $f(t, \cdot, \cdot) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$, soluzione dell’equazione (1.2).

Procediamo considerando i dati iniziali del problema di Cauchy associato alle equazioni (1.1) e (1.2) rispettivamente, cioè ω_N^0 e $f(0, \cdot, \cdot) = f_0(\cdot, \cdot)$; poichè entrambi descrivono distribuzioni di masse o di cariche nello spazio $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, possono essere confrontati nel senso delle misure su \mathbf{R}^{2n} .

a) ω_N^0 induce la misura di probabilità discreta (normalizzata sulla massa/carica totale del sistema)

$$\mu_N^0(dx, dv) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{P_i^0}(dx, dv),$$

con δ_P misura di Dirac concentrata in $P \in \mathbf{R}^{2n}$ e $P_i^0 = (x_i^0, v_i^0)$, $i = 1, \dots, N$; allora

$$\mu_N(t, dx, dv) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{P_i(t)}(dx, dv),$$

con $P_i(t) = (x_i(t), v_i(t))$, $i = 1, \dots, N$, definisce la misura evoluta al tempo t associata alla soluzione $\omega_N(t)$ del problema relativo ad (1.1) con valore iniziale ω_N^0 .

b) f_0 viene assegnata regolare, non negativa e tale che

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} f_0(x, v) dx dv = 1;$$

può essere, pertanto, interpretata come la funzione di densità di una misura di probabilità μ^0 , assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Consideriamo, ora, una famiglia di sistemi con N particelle, N crescente, caratterizzati ciascuno da uno stato ω_N^0 al tempo 0 iniziale e supponiamo che

$$\mu_N^0 \longrightarrow \mu^0$$

per $N \rightarrow \infty$. Questa convergenza va intesa nel senso debole tra misure: sia ϕ una funzione continua e limitata su \mathbf{R}^{2n} e

$$\mu_N^0(\phi) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) \mu_N^0(dx, dv) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(P_i^0),$$

allora

$$\mu_N^0(\phi) \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) f_0(x, v) dx dv$$

per $N \rightarrow \infty$.

Sotto queste ipotesi, sfruttando in modo determinante le proprietà di regolarità assunte sul dato f_0 e sul nucleo K_δ , si può verificare che per ogni tempo $t \geq 0$ si ha

$$\mu_N(t, \phi) \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) f(t, x, v) dx dv$$

per $N \rightarrow \infty$, essendo $f(t, \cdot, \cdot)$ la soluzione del problema relativo ad (1.2) con valore iniziale f_0 . In questo senso l'equazione di Vlasov-Poisson "modificata" viene rigorosamente derivata, nel limite di campo medio, dalla dinamica (1.1).

I dettagli della dimostrazione di questo risultato si trovano in [N], sviluppati nel caso più generale di una qualunque misura di probabilità μ° su \mathbf{R}^{2n} , anche non assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Il problema dell'esistenza ed unicità della soluzione per l'equazione di Vlasov-Poisson "modificata" è risolvibile, con le assunzioni di regolarità introdotte sulle strutture, utilizzando il classico *metodo delle caratteristiche* per equazioni differenziali alle derivate parziali (EDP). Ulteriori considerazioni sul *limite di Vlasov* sono presentate in [BH] e [D].

Qui ci limitiamo a sottolineare che quella descritta è, in effetti, una proprietà di continuità della soluzione dell'equazione (1.2) rispetto ai dati iniziali, nella topologia della convergenza debole di misure. Si verifica, infatti, che la misura applicata

$$\mu_N(t, \phi) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \phi(x, v) \mu_N(t, dx, dv) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(P_i(t))$$

soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dt} \mu_N(t, \phi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_{(x,v)} \phi(P_i(t)) \cdot \dot{P}_i(t) = \mu_N(t, \nabla_{(x,v)} \phi \cdot (v, E_\delta));$$

il che equivale ad affermare che $\mu_N(t, \cdot)$ è una soluzione debole dell'equazione (1.2), riscritta nella forma di una legge di conservazione

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + \text{div}_{(x,v)} [(v, E_\delta(t, x)) f(t, x, v)] = 0, \quad (1.3)$$

essendo $\text{div}_{(x,v)}(v, E_\delta(t, x)) = 0$. In quest'ottica, (1.1) si interpreta come il sistema delle caratteristiche associato all'equazione differenziale alle derivate parziali (1.3).

Concludiamo questa analisi osservando che, a causa della singolarità del nucleo K , l'argomento rigoroso di derivazione non può essere esteso all'equazione di Vlasov-Poisson (VP) classica, per la quale la questione della validità resta aperta, pur potendosi azzardare una conferma delle considerazioni fatte, almeno dal punto di vista euristico.

1.2 L'equazione Fokker-Planck per il sistema di Vlasov-Poisson

Una situazione particolarmente interessante si realizza quando il sistema di particelle considerato viene immerso in un bagno termico (ovvero, viene messo a contatto con un termostato), alla temperatura assoluta costante T ; il caso fisicamente più appropriato è quello del plasma fisico, descritto dall'equazione di Vlasov-Poisson per $\gamma > 0$. Si manifesta, allora, una stocasticità che comporta una modificazione dell'equazione, ottenuta aggiungendo un termine di diffusione rispetto alle velocità; questo tiene conto delle complesse interazioni tra il sistema ed il bagno termico. La nuova equazione può essere derivata mediante il seguente modello.

Si consideri il sistema finito di N particelle in \mathbf{R}^n , introdotto precedentemente; quando è immerso nel bagno termico, le equazioni del moto si trasformano nelle equazioni differenziali stocastiche, *equazioni di Langevin* in presenza di un campo di forze interno,

$$\begin{cases} dx_i = v_i dt \\ dv_i = \left(\frac{\gamma}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K(x_i - x_j) - \beta v_i \right) dt + \sigma db_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

dove $\{b_i\}_{i=1}^N$ sono N moti browniani standard indipendenti, β è un *parametro di viscosità* e la sua relazione con il *coefficiente di diffusione* σ è data da $\sigma^2/2 = \kappa T \beta$ (con κ costante di Boltzmann).

All'interpretazione fisica di queste equazioni è dedicata una vasta letteratura; in particolare, citiamo [C] e [GS] come riferimenti.

In questo ambito, si è interessati allo studio dell'evoluzione di una distribuzione di probabilità nell'intero spazio $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)^N$, partendo da una assegnata distribuzione iniziale di densità $f_N^0(\cdot) : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)^N \mapsto \mathbf{R}$,

$$f_N^0 \geq 0 \quad e \quad \int f_N^0 dx_1 dv_1 \dots dx_N dv_N = 1.$$

Tale evoluzione è descritta da una equazione differenziale alle derivate parziali, equivalente a quella di Liouville in assenza di stocasticità, detta *equazione di Fokker-Planck* per la densità

$$f_N(t; \cdot) = f_N(t; x_1, v_1, \dots, x_N, v_N);$$

quest'ultima si ricava, pertanto, come soluzione del problema ai valori iniziali ad essa associato

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_N + \sum_{i=1}^N \operatorname{div}_{x_i} (v_i f_N) + \sum_{i=1}^N \operatorname{div}_{v_i} \left[\left(\frac{\gamma}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K(x_i - x_j) - \beta v_i \right) f_N \right] = \\ = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^N \Delta_{v_i} f_N, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$f_N(0; \cdot) = f_N^o(\cdot).$$

Si supponga f_N simmetrica rispetto ad un qualunque scambio di due particelle e si indichi con f_N^k la funzione di densità marginale, *funzione di distribuzione* per k particelle,

$$f_N^k(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k) := \int f_N(t; x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) dx_{k+1} dv_{k+1} \dots dx_N dv_N.$$

Dall'equazione (1.4) per f_N , integrando formalmente per parti e sfruttando le proprietà di decadenza della densità, si ricava una equazione per f_N^k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_N^k = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^k \Delta_{v_i} f_N^k + \beta \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} (v_i f_N^k) - \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{x_i} (v_i f_N^k) + \\ - \gamma \frac{N-k}{N} \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} \int K(x_i - x_{k+1}) \cdot \\ \cdot f_N^{k+1}(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k, x_{k+1}, v_{k+1}) dx_{k+1} dv_{k+1} + \\ - \frac{\gamma}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \operatorname{div}_{v_i} K(x_i - x_j) f_N^k(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k). \end{aligned}$$

Eseguendo un limite formale per $N \rightarrow \infty$ si ottiene, infine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^k = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^k \Delta_{v_i} f^k + \beta \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} (v_i f^k) - \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{x_i} (v_i f^k) + \\ - \gamma \sum_{i=1}^k \operatorname{div}_{v_i} \int K(x_i - x_{k+1}) \cdot \\ \cdot f^{k+1}(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k, x_{k+1}, v_{k+1}) dx_{k+1} dv_{k+1}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove $f^k(t; \cdot) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^k(t; \cdot)$ si interpreta come densità di probabilità per un sistema continuo di infinite particelle.

Questa equazione possiede una proprietà notevole, detta “*propagazione del caos*”: se $f^k(0; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k) = \prod_{i=1}^k f_0(x_i, v_i)$ allora esiste una soluzione fattorizzata, cioè $f^k(t; x_1, v_1, \dots, x_k, v_k) = \prod_{i=1}^k f(t, x_i, v_i)$, dove $f = f(t, x, v)$ soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \operatorname{div}_v [(E(t, x) - \beta v) f(t, x, v)] = \\ = \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f(t, x, v), \end{aligned} \quad (1.6)$$

con

$$E(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} K(x - y) \rho(t, y) dy, \quad \rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x, v) dv. \quad (1.7)$$

In analogia al caso trattato in assenza di stocasticità, questa equazione non lineare viene chiamata *equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck* e descrive, ad esempio, l'evoluzione di un plasma di elettroni in un bagno termico, in presenza di frizioni interne ($\beta > 0$). Il sistema costituito dall'equazione (1.6) con le definizioni (1.7) è detto *sistema di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP)*.

Il “ $\lim_{N \rightarrow \infty}$ ” con il quale l'equazione (1.5) è stata dedotta dalla (1.4) è assolutamente “formale”: la questione di una formulazione rigorosa di questo argomento è particolarmente aspra ed ancora aperta, presentando le medesime difficoltà incontrate nel problema, precedentemente discusso, della derivazione dell'equazione di Vlasov-Poisson.

Capitolo 2

Teoria della risolubilità

Si affronta la questione dell'esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy associato alle equazioni di Vlasov-Poisson e di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. In relazione alle diverse forme di soluzione prese in considerazione, legate alle proprietà di regolarità del dato iniziale, si esibisce una breve rassegna dei risultati noti sull'argomento. Dopo aver discusso alcune proprietà del sistema (VPFP), legate alle strutture che lo definiscono, viene presentato un risultato di esistenza ed unicità della soluzione sullo spazio bidimensionale.

2.1 Aspetti della questione: una rassegna dei principali risultati

Argomento centrale di questa trattazione è il problema di Cauchy associato all'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio tridimensionale. Si mostrerà che già noti risultati riguardanti l'equazione di Vlasov-Poisson ordinaria e l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio bidimensionale (esistenza ed unicità della soluzione, stime di regolarità sulle strutture, proprietà di convergenza) conservano la loro validità anche nel caso che vogliamo affrontare.

Ricordiamo che, relativamente al problema ai valori iniziali per (VP)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) &= 0, \\ f(0, \cdot, \cdot) &= f_0(\cdot, \cdot), \end{aligned} \tag{2.1}$$

si definisce *soluzione debole* una funzione f che verifica le condizioni seguenti:

- a) $f(t, \cdot, \cdot)$ è debolmente continua per ciascun valore t fissato in $[0, T]$;
- b) per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ con $\text{supp}\phi \subset B$, B compatto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) \phi(x, v) \, dx dv = \\ & = \int_{\mathbb{R}^{2n}} [v \cdot \nabla_x \phi(x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v \phi(x, v)] f(t, x, v) \, dx dv. \end{aligned}$$

In particolare, f diventa una *soluzione classica* quando f_0 ed E sono sufficientemente regolari.

Definizioni analoghe si danno per il problema corrispondente in presenza di stocasticità, descritto dal sistema (VPFP)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \text{div}_v [(E(t, x) - \beta v) f(t, x, v)] = \\ = \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f(t, x, v), \\ f(0, \cdot, \cdot) = f_0(\cdot, \cdot). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il problema dell'esistenza ed unicità della soluzione per il sistema di Vlasov-Poisson (VP) è oggetto di interesse da lungo tempo ed è stato trattato da numerosi autori. Lo studio procede distintamente in due direzioni.

Da una parte si cercano soluzioni deboli ed in questo ambito ci si deve accontentare di risultati di pura esistenza in dimensione $n \leq 3$, non essendo stato formulato, fino ad ora, un argomento completo per l'unicità; teoremi di esistenza di soluzioni deboli sono stati dimostrati da Arsenev [A], Illner e Neunzert [IN], più recentemente da Horst e Hunze [HH], Di Perna e Lions [DPL].

Dall'altra parte si cerca di ottenere soluzioni classiche, per le quali l'unicità è facile da provare; tuttavia, il problema dell'esistenza globale in dimensione $n = 3$ è stato solo di recente concluso in maniera rigorosa per dati iniziali generali.

Il primo risultato in tal senso si deve a Pfaffelmoser [P]. La sua dimostrazione, piuttosto articolata, è stata successivamente semplificata nella tecnica da Schaeffer [S2]: avvalendosi delle idee chiave sul moto relativo delle particelle in un plasma, sviluppate in [P], egli ottiene una stima migliore sulla crescita della soluzione. Ulteriori sviluppi in questa direzione sono dovuti a Wollman, il quale propone in [W] una versione semplificata, assai efficace, delle dimostrazioni di Schaeffer.

Questi lavori superano i precedenti dovuti a Bardos e Degond [BD], Batt [B] e lo

stesso Schaeffer [S1], nei quali vengono fatte assunzioni restrittive sulla regolarità del dato iniziale, sulla sua “grandezza” e su certe proprietà di simmetria del sistema. Queste ultime rendono il problema equivalente a quelli in dimensione $n = 1, 2$, per i quali esistenza globale ed unicità di soluzioni classiche è stata provata da Iordanskii [I], nel caso unidimensionale, in quello bidimensionale da Okabe ed Ukai [OU] e raffinata da Horst [H1], al quale si deve anche un interessante argomento di risolubilità locale per $n = 3$.

In dimensioni superiori, $n \geq 4$, nel caso della dinamica stellare, è noto il manifestarsi di esplosioni o collassi della soluzione in tempi finiti, anche qualora si assegnino dati iniziali estremamente regolari; lo stesso si verifica per $n = 3$ in un caso “relativistico” [GLS].

Oltre a dimostrazioni per tutta una serie di casi specifici, la maggior parte dei lavori citati presenta, come risultato finale, un criterio generale per la risolubilità del sistema. In particolare, viene mostrato in [H1] che per provare l'esistenza di una soluzione classica è sufficiente ottenere una stima a priori sul supporto della soluzione stessa nello spazio delle velocità \mathbf{R}_v^n o, equivalentemente, sulla densità spaziale ρ . Allora il problema dell'esistenza ed unicità di soluzioni classiche per (VP) si riduce a quello di stimare queste grandezze, interpretate come funzioni del tempo; naturalmente, l'ampiezza dell'intervallo di esistenza di queste soluzioni dipenderà dal massimo valore del tempo t per cui si riesce ad avere un controllo. Questo tipo di approccio è usato da Horst per risolvere il problema bidimensionale, completato introducendo stime basate sulla conservazione dell'energia. Pfaffelmoser per primo, poi Schaeffer e Wollman, sfruttando le considerazioni sul moto relativo delle particelle in un plasma, ottengono le stime necessarie per il caso tridimensionale, per tempi arbitrari, assicurando così l'esistenza globale della soluzione in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$.

Le difficoltà nella dimostrazione dell'esistenza globale di soluzioni regolari (classiche) sullo spazio tridimensionale sono, fondamentalmente, legate ad una potenziale divergenza della densità spaziale ρ in tempi finiti, dovuta ad un analogo comportamento del campo E .

Si potrebbe, allora, sperare che la modificazione stocastica (2.2) del modello, con l'introduzione del termine di viscosità ed una “delocalizzazione” delle particelle per effetto del termine di diffusione, possa prevenire la degenerazione delle soluzioni in tempi finiti; la situazione non è, tuttavia, troppo diversa da quella del problema ordinario. Nei casi che discuteremo, infatti, gli argomenti per

provare esistenza ed unicità della soluzione sono quelli adottati nello studio dell'equazione di Vlasov-Poisson semplice; l'idea principale consiste nel sostituire l'usuale sistema delle caratteristiche associato ad una EDP con un processo stocastico, cioè il sistema di equazioni differenziali ordinarie che determinano il moto delle particelle con un sistema differenziale stocastico. Anche il controesempio all'esistenza globale in dimensione $n = 4$, nel caso della dinamica stellare, può essere esteso all'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, verificando la persistenza del fenomeno in presenza di "diffusione" stocastica (si veda [NPT]). I risultati ottenuti e le stime utilizzate dipendono rigidamente dalla dimensione n dello spazio fisico su cui si studia l'equazione e, pertanto, sono difficilmente generalizzabili alle dimensioni superiori.

La letteratura matematica riguardante il problema di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP) è particolarmente vasta e varia negli argomenti proposti per affrontare la questione della risolubilità.

Nel caso stocastico si presenta particolarmente significativa la nozione di soluzione debole: in questa classe, infatti, rientrano le funzioni di densità delle misure di probabilità su \mathbf{R}^{2n} assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue. Ciò consente di introdurre un concetto di *soluzione nello spazio delle misure* per il problema di Cauchy associato al sistema (VPFP), che estende quelli precedentemente definiti. Da un punto di vista matematico, una maggiore generalità sul dato iniziale rende il problema più difficilmente trattabile con strumenti classici, laddove proprietà di regolarità del dato iniziale garantiscono la validità di stime a priori, assai utili per le dimostrazioni. Sotto il profilo fisico, anche condizioni più deboli conservano un certo interesse e producono importanti risultati, il che giustifica gli sforzi di molti autori nel condurre studi in questa direzione.

I lavori più recenti sull'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sono quelli di Bouchut, riguardanti la risolubilità in senso classico del problema tridimensionale [B1]: viene provata esistenza ed unicità di una soluzione regolare per il sistema (VPFP) in dimensione $n = 3$, analizzando gli effetti che il nucleo di Fokker-Planck, soluzione fondamentale della parte lineare dell'equazione, ha sui termini non lineari del campo di forze. Sviluppando questo metodo di analisi, Bouchut dimostra che la soluzione ottenuta trasmette proprietà di forte regolarità alla densità macroscopica ρ ed al campo E , che conducono a stime sulla norma uniforme di queste grandezze [B2]. Sfortunatamente queste stime dipendono in maniera singolare dal parametro di diffusione σ , che caratterizza il termine di stocasticità

nel sistema, diventando prive di senso quando questo tende ad annullarsi. D'altra parte, tale condizione è intrinsecamente legata al tipo di approccio costruttivo formulato nei lavori di Bouchut, a partire dai quali non si può tentare la verifica della convergenza del sistema (VPFP) al corrispondente (VP) ordinario, nel limite di diffusione nulla.

Lo studio della risolubilità del problema in senso debole viene affrontato da Victory in [V]; seguendo la linea proposta da Illner e Neunzert per il caso ordinario, egli dimostra l'esistenza globale di soluzioni deboli sullo spazio tridimensionale, costruendo una successione di approssimanti regolari (soluzioni di un problema modificato) e sfruttando argomenti di compattezza sullo spazio delle misure di probabilità per provarne la convergenza. Precedentemente, Victory e O'Dwyer [VD] si erano occupati di soluzioni classiche, ottenendo un risultato di esistenza semplicemente locale per la dimensione $n = 3$, utilizzato per costruire le approssimazioni; il metodo di verifica è nella sostanza analogo a quello di Bouchut e ne eredita i limiti.

Contributi notevoli alla teoria sono forniti anche dagli studi di Degond [DE] e Carrillo e Soler [CS], rispettivamente nell'ambito della risolubilità classica del problema bidimensionale e della risolubilità debole fino alla dimensione $n = 4$; in quest'ultimo caso si assumono ipotesi di limitatezza dei momenti di ordine superiore rispetto alle variabili spaziali e di velocità. Entrambi i lavori si concludono con un risultato di convergenza del sistema (VPFP) a quello (VP) nel limite di diffusione nulla, ma si basano su criteri puramente deterministici ispirati ad un *punto di vista Lagrangiano* della teoria.

Gli argomenti che presenteremo in questa trattazione sono tipici di un approccio completamente diverso allo studio del problema di Cauchy per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck.

Il metodo sviluppato è quello classico delle caratteristiche per EDP, opportunamente adattato al caso di un sistema di caratteristiche stocastiche, già formulato in [NPT] per il problema sullo spazio bidimensionale. Esso fornirà una stima uniforme sulla densità spaziale ρ indipendente dal parametro di diffusione σ , a partire dalla quale si dimostra la convergenza delle traiettorie dei processi stocastici caratteristici del sistema (VPFP) ai moti deterministici del sistema (VP), all'annullarsi del coefficiente σ . In questo senso, che è più forte dei precedenti citati, si concluderà la derivazione dell'equazione di Vlasov-Poisson da quella di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck nel limite di piccola diffusione.

2.2 Definizioni e lemmi preliminari

Prima di discutere alcune proprietà relative alle grandezze associate al sistema (VPFP), che utilizzeremo per la dimostrazione dei successivi risultati, introduciamo le notazioni adottate nel corso della esposizione.

La teoria che sviluppiamo riguarda l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck in condizioni di assenza di viscosità all'interno del sistema da essa modellizzato, quando le particelle si muovono interagendo tra loro senza collisioni ($\beta = 0$). Il caso $\beta > 0$ si tratta in maniera analoga; tuttavia, la presenza del termine dissipativo βv nell'equazione complica la notazione, per cui preferiamo limitarci all'ipotesi $\beta = 0$. Il nostro studio riguarda, allora, il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f(t, x, v), \\ f(0, \cdot, \cdot) &= f_0(\cdot, \cdot), \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove, lo ricordiamo,

$$E(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^n} \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(t, y) dy, \quad \rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x, v) dv, \quad \gamma = \pm 1.$$

Sia $T > 0$ arbitrariamente fissato.

Definiamo lo spazio in cui vivono i campioni del moto browniano n -dimensionale,

$$\mathcal{C}_0^*([0, T]) := \{ \xi : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n / \xi \in \mathcal{C}([0, T]) \text{ e } \xi(0) = 0 \}.$$

Un moto browniano, detto anche *processo di Wiener*, n -dimensionale si può rappresentare mediante l'applicazione

$$\begin{aligned} b : [0, T] &\longrightarrow \mathcal{A}_b \\ t &\longrightarrow b(t), \end{aligned}$$

dove \mathcal{A}_b è la famiglia delle variabili aleatorie, a valori in \mathbf{R}^n , definite da b al variare del parametro t , cioè il processo stocastico $\{b(t)\}_{0 \leq t \leq T}$; ciascuna delle $b(t)$ è distribuita secondo una gaussiana $\mathcal{N}(0, t)$ di media 0 e varianza pari a t , con funzione di densità

$$g_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{2t} \right\}, \quad x \in \mathbf{R}^n;$$

il processo parte dall'origine ed i suoi incrementi sono indipendenti, anch'essi distribuiti normalmente

$$b(t_2) - b(t_1) = b(t_2 - t_1) \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1), \quad t_2 \geq t_1.$$

E' noto che le traiettorie del processo, i cosiddetti *campioni di moto browniano*

$$b: [0, T] \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

sono continue ma non differenziabili (ciò risulta naturale per il significato fisico del processo stesso, per la verifica si rimanda a [BI]).

L'ambiguità iniziale della notazione, dovuta al fatto di aver indicato con b sia il rumore browniano che agisce sul sistema che ogni sua traiettoria deterministica, si supera nel seguito, dove b verrà interpretato sempre in quest'ultimo senso.

Indichiamo con $(X(t, s, x, v; b), V(t, s, x, v; b))$, $t \geq s$, la traiettoria del processo stocastico che parte al tempo $s \geq 0$ dal punto $(x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, soluzione del sistema delle caratteristiche stocastiche associato al problema (2.3) e descritto dalle equazioni di Langevin

$$\begin{cases} dX = V dt \\ dV = E(t, X) dt + \sigma db. \end{cases} \quad (2.4)$$

Osserviamo che, nel caso in cui b sia un generico campione di moto browniano, il sistema (2.4) definisce un processo puramente deterministico, per l'analisi del quale si applica esattamente la teoria classica: infatti, la (2.4) equivale a considerare le equazioni integrali

$$X(t, s, x, v; b) = x + \int_s^t V(\tau, s, x, v; b) d\tau,$$

$$V(t, s, x, v; b) = v + \int_s^t E(\tau, X(\tau, s, x, v; b)) d\tau + \sigma[b(t) - b(s)], \quad (2.5)$$

che hanno una soluzione $(X, V) \in \mathcal{C}([0, T])$ per ogni $b \in \mathcal{C}_0^s([0, T])$ e per ogni dato iniziale $(s, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Perciò, $\{X(t), V(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ identifica un processo stocastico definito sullo spazio di probabilità $(\mathcal{C}_0^s([0, T]), \Sigma, \mu(db))$, dove $\mu(db)$ è la misura di Wiener indotta dal moto browniano; una qualunque variabile aleatoria del processo, per t fissato, è descritta dall'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^s([0, T]) &\longrightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ b &\longrightarrow (X(t, s, x, v; b), V(t, s, x, v; b)), \end{aligned}$$

ed ogni valore assunto eredita il peso statistico del campione da cui è generato. Fissato il campione browniano b , si noti che la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ (x, v) &\longrightarrow (X(t, s, x, v; b), V(t, s, x, v; b)) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo che conserva le misure; infatti $\operatorname{div}_{(x,v)}(v, E(t, x)) = 0$ e vale il teorema di Liouville (è determinante, in questo senso, l'ipotesi $\beta = 0$).

Una volta risolto il sistema (2.5), una soluzione del problema (2.3) può essere espressa nella forma debole

$$\begin{aligned} &\int \int f(t, x, v) \phi(x, v) dx dv = \\ &= \mathbb{E} \left[\int \int f_0(x, v) \phi(X(t, 0, x, v; b), V(t, 0, x, v; b)) dx dv \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

per ogni funzione test $\phi = \phi(x, v)$ sufficientemente regolare, con \mathbb{E} che indica l'aspettazione rispetto al rumore browniano.

Questa relazione si dimostra verificando l'uguaglianza delle derivate, rispetto alla variabile temporale, dei due membri. Per il secondo, dallo sviluppo di Taylor per la funzione ϕ arrestato al primo ordine, utilizzando le equazioni del processo (X, V) , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int \int f_0(x, v) [\phi(X(t, 0, x, v; b), V(t, 0, x, v; b)) - \phi(x, v)] dx dv \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int \int f_0(x, v) \left[\nabla_x \phi(x, v) \cdot vt + \nabla_v \phi(x, v) \cdot E(0, x)t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nabla_v \phi(x, v) \cdot \sigma b(t) + \frac{1}{2} \Delta_v \phi(x, v) \sigma^2 (b(t))^2 + o(t) \right] dx dv \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int \int f_0(x, v) \left[\nabla_x \phi(x, v) \cdot vt + \nabla_v \phi(x, v) \cdot E(0, x)t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta_v \phi(x, v) \sigma^2 t + o(t) \right] = \\ &= \int \int f_0(x, v) \left[\nabla_x \phi(x, v) \cdot v + \nabla_v \phi(x, v) \cdot E(0, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta_v \phi(x, v) \right]; \end{aligned}$$

otteniamo lo stesso risultato per la derivata del primo membro, sfruttando l'equazione (2.3) di evoluzione della densità f ed integrando per parti in modo opportuno; la *proprietà di semigrupp*o permette di concludere l'uguaglianza delle derivate in ogni punto a partire da quella nell'origine.

Nel caso del problema ordinario, il valore della funzione di densità al tempo t nel punto (x, v) si calcola a partire dal dato iniziale, muovendosi lungo le curve caratteristiche univocamente definite,

$$f(t, x, v) = f_0(X(0, t, x, v), V(0, t, x, v)); \quad (2.7)$$

in quello che stiamo descrivendo, il carattere stocastico, impresso alle caratteristiche dalla presenza di un rumore browniano, impone di considerare tutti i singoli campioni e poi di eseguire una media con i loro pesi statistici

$$f(t, x, v) = \mathbb{E}[f_0(X(0, t, x, v; b), V(0, t, x, v; b))], \quad (2.8)$$

Perciò l'aspettazione \mathbb{E} è, effettivamente, un integrale del suo argomento contro la misura $\mu(db)$.

Dalla (2.8) segue la relazione

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x, v) dv = \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{R}^n} dv f_0(X(0, t, x, v; b), V(0, t, x, v; b)) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove il dato iniziale f_0 è calcolato sul valore $(X(0, t, x, v; b), V(0, t, x, v; b))$ assunto al tempo 0 dal processo $(X(s, t, x, v; b), V(s, t, x, v; b))$, $s \in [0, t]$, che al tempo t si trova in (x, v) , ottenuto risolvendo le equazioni (2.5) sui dati finali, sfruttando le proprietà di inversione della mappa Φ .

Le ipotesi sul dato iniziale f_0 del problema di Cauchy (2.3), coerenti con l'interpretazione fisica del modello Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, sono le seguenti:

$$f_0 \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n),$$

$$f_0(x, v) \geq 0 \quad \text{e} \quad \|f_0\|_{L^1(\mathbf{R}_{(x,v)}^{2n})} = 1 \quad \text{per ogni } (x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n,$$

f_0 ha supporto compatto rispetto alla variabile velocità.

Conseguenza della (2.8) è il *principio del massimo*,

$$\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^{2n})} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^{2n})}$$

e l'estensione alla soluzione f di tutte le eventuali condizioni su f_0 legate alle norme L^p , $p \in [1, \infty)$.

Poichè si è interessati a trattare questioni connesse allo studio del problema nell'ambito di una teoria non banale della risolubilità globale, concentreremo la nostra attenzione al sistema (VPFP) definito sullo spazio $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $n = 2, 3$. D'altra parte, già per $n = 4$, si può fornire un controesempio all'esistenza globale nel caso della dinamica stellare: in [NPT] si mostra che esistono dati iniziali regolari tali che le corrispondenti soluzioni esplodono in tempi finiti.

La prima proprietà del sistema (2.3) che vogliamo discutere, comunque valida nel caso del sistema (VPFP) con $\beta > 0$, riguarda il controllo dell' *energia cinetica* per tempi finiti.

La limitatezza dell' *energia cinetica* uniformemente nel tempo è il principale strumento per la dimostrazione dell'esistenza globale di soluzioni deboli del problema (VP) ordinario (si veda [A] e [IN]) e per la determinazione di stime a priori nello studio di soluzioni classiche. In assenza di stocasticità, essa segue direttamente dalla conservazione dell' *energia totale* nel caso $\gamma = +1$; la verifica nel caso $\gamma = -1$ è meno immediata e viene condotta da Horst in [H2].

Nel seguente lemma il risultato si estende all'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio tridimensionale.

Sottolineiamo che la scelta della dimensione $n = 3$ è un fatto esclusivamente tecnico. Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente, le stime sulle strutture del problema dipendono significativamente dalla dimensione dello spazio delle fasi $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, poichè varia con essa l'ordine della singolarità del nucleo K che definisce il campo di forze E . Nel caso bidimensionale, la tesi del Lemma (2.1) si verifica esattamente nello stesso modo, considerando le espressioni corrette per le grandezze; tuttavia, al di là dell'importanza dal punto di vista fisico di un controllo dell' *energia cinetica* per tutti i tempi, questo risultato non è determinante ai fini della risolubilità del sistema che, come vedremo, si basa su stime classiche. Per il caso tridimensionale, invece, è necessario utilizzare proprietà più forti, che si deducono proprio dalla stima sull' *energia cinetica*.

Lemma 2.1 *Per ogni $t \geq 0$, sia*

$$E_{cin}(t) := \frac{1}{2} \int \int |v|^2 f(t, x, v) dx dv;$$

le assunzioni sul dato iniziale f_0 garantiscono che sia soddisfatta la condizione

$$\frac{1}{2} \int \int |v|^2 f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Sia $T > 0$ arbitrario e si fissi $0 < \sigma_0 < 1$.

Allora esiste una costante K_1 , che dipende solo da f_0 e T , tale che

$$\sup_{t \in [0, T]} E_{cin}(t) \leq K_1$$

per ogni valore di $\sigma \in [0, \sigma_0]$.

Dimostrazione. Cominciamo con il provare che, per effetto della viscosità e del termine di diffusione presenti nel fenomeno stocasticizzato, l'energia totale del sistema (VPFP)

$$E_{tot}(t) = E_{cin}(t) + E_{pot}(t)$$

non si conserva, diversamente da quanto avviene nel caso ordinario.

Ricordiamo che l'energia potenziale del sistema in esame è definita da

$$\begin{aligned} E_{pot}(t) &:= \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E(t, x)|^2 dx = \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(t, y) dy \right) \rho(t, x) dx = \\ &= \frac{\gamma}{2} \int \int_{\mathbb{R}_{(x,v)}^6} \left(\int \int_{\mathbb{R}_{(y,w)}^6} \frac{1}{|x-y|} f(t, y, w) dy dw \right) f(t, x, v) dx dv. \end{aligned}$$

Allora

$$\dot{E}_{tot}(t) = \dot{E}_{cin}(t) + \dot{E}_{pot}(t)$$

e valutiamo separatamente i due termini.

Utilizzando l'equazione di evoluzione per la densità microscopica f (dove, per brevità, omettiamo di scrivere gli argomenti) e integrando per parti dove è opportuno, si ha

$$\begin{aligned} \dot{E}_{cin}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int \int |v|^2 f(t, x, v) dx dv \right) = \frac{1}{2} \int \int |v|^2 \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) dx dv = \\ &= \frac{1}{2} \int \int |v|^2 \left\{ -v \cdot \nabla_x f - \operatorname{div}_v [(E - \beta v) f] + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f \right\} dx dv = \\ &= -\frac{1}{2} \int |v|^2 \left(\int \operatorname{div}_x (v f) dx \right) dv - \frac{1}{2} \int \int \operatorname{div}_v [|v|^2 (E - \beta v) f] dx dv + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \int \nabla_v (|v|^2) \cdot [(E - \beta v) f] dx dv + \frac{1}{2} \int \int \Delta_v (|v|^2) f dx dv = \\ &= \int \int v \cdot [(E - \beta v) f] dx dv + 3\sigma^2 \int \int f dx dv = \\ &= 3\sigma^2 + \int \int (v \cdot E) f dx dv - \beta \int \int |v|^2 f dx dv = \end{aligned}$$

$$= 3\sigma^2 - 2\beta E_{cin}(t) + \int \int (v \cdot E) f dx dv;$$

nel conto si è fatto uso del *teorema della divergenza* e delle proprietà di decadenza della funzione di densità e delle sue derivate, per annullare i termini di bordo negli integrali.

Per il secondo termine, dopo aver derivato il prodotto nell'integranda, si procede in modo analogo e si ricava

$$\begin{aligned} \dot{E}_{pot}(t) &= 2 \left(\frac{\gamma}{2} \int \int \frac{1}{|x-y|} f(t, y, w) \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) dy dw dx dv \right) = \\ &= - \int \int (v \cdot E) f dx dv. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\dot{E}_{tot}(t) = 3\sigma^2 - 2\beta E_{cin}(t) \leq 3\sigma^2;$$

l'uguaglianza vale nel caso $\beta = 0$ che stiamo considerando.

Allora

$$E_{tot}(t) - E_{tot}(0) = \int_0^t \dot{E}_{tot}(s) ds \leq 3\sigma^2 t,$$

cioè

$$E_{tot}(t) \leq E_{tot}(0) + 3\sigma^2 T \leq cost(f_0, T)$$

per ogni $t \in [0, T]$ e uniformemente in $\sigma \in [0, \sigma_0]$.

Questo è sufficiente a verificare la tesi nel caso dell'equazione del plasma di cariche: per $\gamma = +1$, infatti, dalla definizione segue che $E_{pot}(t) \geq 0$ e $E_{cin}(t) \leq E_{tot}(t)$, per ogni tempo $t \geq 0$. Perciò, avendo scelto la distribuzione iniziale in modo tale che $E_{tot}(0) < +\infty$, si conclude ponendo $K_1 = cost(f_0, T)$.

La dimostrazione nel caso della dinamica stellare, per $\gamma = -1$, è più macchinosa e richiede l'utilizzo di strumenti analitici più sofisticati.

Supponiamo che esista una soluzione del problema (2.3) definita nell'intervallo $[0, T]$ ed a supporto compatto in \mathbf{R}_v^3 : per ogni $t \in [0, T]$ fissato, esiste finita $E_{cin}(t)$.

Procediamo considerando l'espressione della densità spaziale; fissato $R \geq 0$ arbitrariamente, decomponiamo su domini complementari in \mathbf{R}_v^3 ,

$$\begin{aligned} \rho(t, \bar{x}) &= \int_{|v| \leq R} f(t, \bar{x}, v) dv + \int_{|v| > R} f(t, \bar{x}, v) dv \leq \\ &\leq M \int_{|v| \leq R} dv + \int_{|v| > R} \frac{|v|^2}{|v|^2} f(t, \bar{x}, v) dv \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M \text{mis}_{\mathbf{R}^3} \{|v| \leq R\} + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dv \leq \\ &\leq M \frac{4}{3} \pi R^3 + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dv, \end{aligned}$$

dove $M := \|f_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^6)}$ è stata introdotta in virtù del *principio del massimo* e all'ultimo membro compare la *densità di energia cinetica*. Ottimizzando rispetto ad R otteniamo

$$\rho(t, x) \leq C \left(\int_{\mathbf{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dv \right)^{\frac{5}{6}},$$

con C costante opportuna e, quindi,

$$\left(\int_{\mathbf{R}^3} (\rho(t, x))^{\frac{5}{6}} dx \right)^{\frac{6}{5}} \leq C (E_{cin}(t))^{\frac{5}{6}}. \quad (2.10)$$

Applichiamo, adesso, un teorema tecnico notevole (la cui dimostrazione è data in [DP]) per verificare la maggiorazione

$$|E_{pot}(t)| = \frac{1}{2} \int \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(t, y) \rho(t, x) dy dx \leq C \left(\|\rho(t)\|_{L^{6/5}(\mathbf{R}_{\frac{x}{2}}^3)} \right)^2$$

ed osserviamo che, procedendo come per la (2.10), a meno di utilizzare una *disuguaglianza di Holder* sul primo addendo della decomposizione, si ha

$$\begin{aligned} \|\rho(t)\|_{L^{6/5}(\mathbf{R}_{\frac{x}{2}}^3)} &= \left(\int_{\mathbf{R}^3} (\rho(t, x))^{\frac{6}{5}} dx \right)^{\frac{5}{6}} \leq C \|f(t)\|_{L^{9/7}(\mathbf{R}_{(x,v)}^6)} (E_{cin}(t))^{\frac{1}{4}} \leq \\ &\leq C \|f_0\|_{L^{9/7}(\mathbf{R}_{(x,v)}^6)} (E_{cin}(t))^{\frac{1}{4}} \leq C (E_{cin}(t))^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Dunque,

$$|E_{pot}(t)| \leq C (E_{cin}(t))^{\frac{1}{2}}.$$

Nel caso $\gamma = -1$, $E_{pot}(t) \leq 0$ per ogni tempo $t \geq 0$, allora

$$\begin{aligned} E_{cin}(t) &= E_{tot}(t) - E_{pot}(t) = E_{tot}(t) + |E_{pot}(t)| \leq \\ &\leq \text{cost}(f_0, T) + C (E_{cin}(t))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

e $\text{cost}(f_0, T)$ ha un segno che dipende dal segno e dal valore della $E_{tot}(0)$.

In ogni caso, dalla (2.11) segue che

$$E_{cin}(t) \leq C(f_0, T) \quad \text{per ogni } t \in [0, T].$$

La tesi è, quindi, completamente dimostrata.

Nella prima parte del Lemma (3.1) abbiamo provato, per il sistema (VPFP) generale, che l'energia totale si mantiene finita in ogni istante di tempo se lo è per $t = 0$. Osserviamo che è il significato fisico stesso del problema a garantire questa proprietà ed, in particolare, che la $cost(f_0, T)$ della stima dipenda in modo "ingenuo" dal valore del parametro σ in un intorno dello zero, mantenendosi controllata per $\sigma \rightarrow 0$: nel limite di diffusione nulla, infatti, quando il sistema (VPFP) converge al suo analogo ordinario (VP), come dimostreremo, deve potersi ritrovare il *principio di conservazione dell'energia totale*.

Il risultato precedente comporta, come conseguenza, la validità di stime a priori sulle norme della densità spaziale ρ e del campo di forze E associati al sistema.

Lemma 2.2 *Sia $T > 0$ arbitrariamente fissato.*

Per $n = 2$, si assumano sul dato iniziale f_0 le ipotesi generali. Allora

$$\|E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \leq \left(\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.12)$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Per $n = 3$, f_0 soddisfi le condizioni necessarie alla validità del Lemma (2.1). Allora esistono due costanti K_2 e C_o , che dipendono esclusivamente da f_0 e T , tali che

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}_x^3)} \leq K_2 \quad (2.13)$$

e

$$\|E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^3)} \leq C_o \left(\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^3)} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (2.14)$$

uniformemente in $\sigma \in [0, \sigma_o]$ e per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Consideriamo l'espressione del campo E del sistema (VPFP) sullo spazio bidimensionale e procediamo nel modo standard, adottato per trattare le stime di questo tipo: fissiamo $R \geq 0$ e decomponiamo l'integrale della definizione su una coppia di domini complementari,

$$\begin{aligned} |E(t, x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|} \rho(t, y) dy = \int_{|x-y| \leq R} + \int_{|x-y| > R} \leq \\ &\leq \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \int_{|x-y| \leq R} \frac{1}{|x-y|} dy + \frac{1}{R} \int \rho(t, y) dy = \\ &= \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \int_0^R \frac{1}{\xi} \xi d\xi + \frac{1}{R} \|\rho(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x^2)} = \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} R + \frac{1}{R}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato una trasformazione in coordinate polari per calcolare l'integrale del primo addendo e la proprietà della densità $\|\rho(t)\|_{L^1(\mathbf{R}_x^3)} = 1$; ottimizzando il valore R otteniamo

$$|E(t, x)| \leq \left(\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^2)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

che chiude la verifica della (2.12).

La verifica della (2.13) segue direttamente dal conto fatto per la (2.10) nel lemma precedente, ponendo $K_2 = \hat{C}(K_1)^{\frac{3}{5}}$ in virtù della tesi del lemma stesso. Per la (2.14) si applica l'argomento standard,

$$\begin{aligned} |E(t, x)| &\leq \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \rho(t, y) dy = \int_{|x-y| \leq R} + \int_{|x-y| > R} \leq \\ &\leq \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^3)} \int_0^R \frac{1}{\xi^2} 4\pi \xi^2 d\xi + \left(\int_{\mathbf{R}^3} (\rho(t, x))^{\frac{5}{3}} dx \right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(\int_{|x-y| > R} \frac{1}{|x-y|^5} dy \right)^{\frac{2}{5}} \leq \\ &\leq 4\pi R \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^3)} + \|\rho(t)\|_{L^{5/3}(\mathbf{R}_x^3)} \left(\int_R^\infty \frac{1}{\xi^5} 4\pi \xi^2 d\xi \right)^{\frac{2}{5}} \leq \\ &\leq 4\pi \left[\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^3)} R + K_2 R^{-\frac{4}{5}} \right] \leq C_o \left(\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^3)} \right)^{\frac{4}{5}}, \end{aligned}$$

usando la *disuguaglianza di Holder* con $p = \frac{5}{3}$ sul secondo termine.

Vogliamo concludere questo paragrafo con un commento sul risultato del lemma precedente per il caso tridimensionale.

Se ci si limita a considerare le proprietà di regolarità naturali della densità spaziale, $\rho \in L^1(\mathbf{R}_x^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}_x^3)$ e si esegue il conto analogo a quello del caso bidimensionale per la (2.12), si verifica

$$\|E(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^3)} \leq C_o \left(\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^3)} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad (2.15)$$

per ogni $t \in [0, T]$ e C_o che non dipende da σ .

Poichè una stima di regolarità sul campo di forze E garantisce la risolubilità del sistema (2.4), secondo la teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie e la globalità della soluzione dipende dall'uniformità nel tempo di questa stima, il nostro obiettivo sarà ottenere un controllo sui valori della ρ per tutti i tempi.

Nella prima parte del Teorema (3.1) vedremo che la norma L^∞ della densità spaziale si maggiora in termini di una potenza della velocità pari alla dimensione n dello spazio delle fasi del sistema (VPFP); allora la norma di E (che,

grossolanamente parlando, rappresenta un massimo per le velocità, in virtù della forma integrale (2.5) del sistema delle caratteristiche) acquista una potenza $n \cdot q$, con q esponente definito dalla

$$\|E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \leq C_0 \left(\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \right)^q,$$

per i casi specifici. Se $n = 2$ allora $q = \frac{1}{2}$ dalla (2.12) e l'equazione si chiude con la risolubilità globale. Se $n = 3$ allora $q_1 = \frac{2}{3}$ dalla (2.15) e $q_2 = \frac{4}{9}$ dalla (2.14); in entrambi i casi la stima non riesce a fornire una condizione sufficiente per l'esistenza globale della soluzione, essendo $nq_1 = 2 > nq_2 = \frac{4}{3} > 1$. Tuttavia, la stima sulla norma $L^{5/3}$ della densità spaziale ρ ha già prodotto un miglioramento rispetto a quella naturale e, d'altra parte, dal conto fatto per la (2.10) si nota subito che è il massimo di raffinatezza che possiamo aspettarci dalle proprietà classiche con stime di tipo Holder. La potenza ideale nel caso tridimensionale è $q \leq \frac{1}{3}$, che otterremo solo tentando stime integrali sul campo di forze E .

2.3 Esistenza ed unicità della soluzione per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck nel caso bidimensionale

La principale difficoltà del problema è la singolarità del nucleo integrale K nella definizione del campo di forze E . Allora, una tecnica naturale per la costruzione di soluzioni si basa su un procedimento di "mollificazione" del nucleo singolare, che consente di trattare agevolmente il sistema, completato con una operazione di limite per rimuovere il parametro di regolarizzazione introdotto.

Numerosi lavori citati sull'equazione di Vlasov-Poisson utilizzano questo argomento (si veda, in particolare, [H1]). In [NPT], gli autori lo estendono efficacemente al problema dell'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio bidimensionale.

Si consideri una famiglia di nuclei regolari $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ con $K_\delta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, che approssima K nel modo seguente:

$$K_\delta(y) = K(y) \quad \text{per } |y| \geq \delta, \tag{2.16}$$

$$|\bar{K}_\delta(y)| \leq \frac{C_1}{|y|}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \bar{K}_\delta(y) \right| \leq \frac{C_2}{|y|^2} \quad (2.17)$$

per ogni $y \in \mathbf{R}^2$, $i = 1, 2$, $\delta > 0$, essendo C_1 e C_2 costanti reali positive. Approssimazioni di questa forma per il nucleo di Vlasov-Poisson si possono costruire materialmente a partire dall'espressione K_δ introdotta nel paragrafo 1.1, "addolcendo" la funzione valore assoluto per ottenere la regolarità richiesta. Come conseguenza delle proprietà (2.16) e (2.17), per ogni funzione $\psi \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, sono valide le stime

$$\|K_\delta * \psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq D_1 \left(\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.18)$$

$$\int |\psi(y)| |K_\delta(x-y) - K_\delta(x'-y)| dy \leq D_2 \varphi(|x-x'|) \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}, \quad (2.19)$$

dove

$$\varphi(r) := \begin{cases} r(1 - \ln r) & \text{per } r < 1 \\ 1 & \text{per } r \geq 1 \end{cases}$$

e le costanti D_1 e D_2 sono indipendenti da δ ed opportunamente scelte. La stima (2.18) si ottiene decomponendo l'integrale della convoluzione sui domini complementari

$$\int K_\delta(x-y)\psi(y)dy = \int_{|x-y| \leq R} + \int_{|x-y| > R},$$

per $R > 0$ arbitrariamente fissato; preso il modulo di ambo i membri dell'uguaglianza, si tratta separatamente ciascuno dei due integrali, sfruttando le proprietà del nucleo K_δ e della funzione test ψ ; infine, si ottimizza la stima intermedia rispetto ad R . Analogamente si può procedere per la verifica della stima (2.19), complicando opportunamente la decomposizione in modo da considerare la posizione del secondo centro (per i dettagli si veda [MP], Lemma (3.1)).

Per ognuno dei nuclei regolari K_δ della famiglia approssimante, si consideri il problema "modificato"

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^\delta(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f^\delta(t, x, v) + E_\delta(t, x) \cdot \nabla_v f^\delta(t, x, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f^\delta(t, x, v), \\ f_0^\delta(\cdot, \cdot) &= f_0(\cdot, \cdot), \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove

$$E_\delta(t, x) = \gamma \int_{\mathbf{R}^2} K_\delta(x-y) \rho^\delta(t, y) dy, \quad \rho^\delta(t, x) := \int_{\mathbf{R}^2} f^\delta(t, x, v) dv.$$

Il sistema delle caratteristiche stocastiche ad esso associato è definito come l'insieme dei processi stocastici $(X_\delta(t), V_\delta(t))_{t \geq 0}$ soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{cases} dX_\delta = V_\delta dt \\ dV_\delta = E_\delta(t, X_\delta)dt + \sigma db \end{cases} \quad (2.21)$$

al variare del dato iniziale, dove b è il moto browniano standard in due dimensioni. Per ogni singolo campione di moto browniano fissato, $(X_\delta(t, 0, x, v; b), V_\delta(t, 0, x, v; b))$, $t \geq 0$, è la traiettoria deterministica del processo, in accordo con le definizioni date nel paragrafo precedente.

Il risultato valido nella situazione appena descritta è dato dalla

Proposizione 2.1 *Sia μ° una misura di probabilità sullo spazio delle fasi $\mathbf{R}_x^2 \times \mathbf{R}_v^2$. Allora per ogni $T > 0$ fissato esiste una misura di probabilità μ_t^δ , $0 \leq t \leq T$, soluzione debole del problema (2.20)*

$$\frac{d}{dt} \mu_t^\delta(\phi) = \mu_t^\delta(v \cdot \nabla_x \phi) + \mu_t^\delta(E_\delta(t, x) \cdot \nabla_v \phi) + \frac{\sigma^2}{2} \mu_t^\delta(\Delta_v \phi),$$

$$\mu_0^\delta = \mu^\circ,$$

dove la funzione test $\phi = \phi(x, v)$ si suppone sia due volte differenziabile con continuità, con derivate fino al secondo ordine limitate.

Questa soluzione è unica ed espressa da

$$\begin{aligned} \mu_t^\delta(\phi) &= \int \int \phi(x, v) \mu_t^\delta(dx, dv) = \\ &= \mathbb{E} \left[\int \int \phi(X_\delta(t, 0, x, v; b), V_\delta(t, 0, x, v; b)) \mu^\circ(dx, dv) \right]. \end{aligned}$$

Se μ° è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, con funzione di densità $f_0 \in L^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$, allora anche la misura soluzione è assolutamente continua

$$\mu_t^\delta(dx, dv) = f^\delta(t, x, v) dx dv$$

e si ha $\|f^\delta(t)\|_{L^1(\mathbf{R}_{(x,v)}^4)} = \|f_0\|_{L^1(\mathbf{R}_{(x,v)}^4)}$, $\|f^\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^4)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^4)}$.

Per la dimostrazione si adotta un argomento standard, basato su un metodo di approssimazione costruttivo, sfruttando la regolarità del campo E_δ per la verifica delle stime di convergenza. Si costruisce una successione ricorsiva di misure definite per un intervallo limitato dei tempi e si introduce, sullo spazio a cui esse

appartengono, una particolare metrica rispetto alla quale definire la convergenza; l'arbitrarietà nella scelta dell'intervallo di esistenza consente di concludere la globalità della soluzione nel tempo.

Passaggi rigorosi per la dimostrazione si possono ricavare combinando la tecnica usata in [MK] con quelle in [D] e [N].

L'argomento principale di questa discussione consiste nella procedura di eliminazione del parametro δ dal sistema "mollificato", cioè lo studio del sistema limite per $\delta \searrow 0$. Nella dimostrazione del risultato di convergenza si fa uso di una stima sulla densità spaziale ρ^δ , che presentiamo nel

Lemma 2.3 *Sia $\mu^\circ(dx, dv) = f_0(x, v)dx dv$ una misura di probabilità assolutamente continua, assegnata come dato iniziale del problema (2.20), con $f_0 \in L^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ ed a supporto compatto rispetto alla variabile velocità. Sia $f^\delta \equiv f^\delta(t, x, v)$ la funzione di densità della soluzione μ_t^δ calcolata nella Proposizione (2.1) e $\rho^\delta(t, x) := \int_{\mathbf{R}^2} f^\delta(t, x, v)dv$ la densità spaziale del sistema ad essa associata. Allora esiste una costante C_T , che dipende da f_0 e T ma non da δ , tale che*

$$\|\rho^\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^2)} \leq C_T \text{ per ogni } t \in [0, T], \delta > 0. \quad (2.22)$$

La dimostrazione seguirà direttamente dalla prima parte del Teorema (3.1), opportunamente adattata al caso della dimensione $n = 2$, dove questa proprietà è attribuita alla densità spaziale ρ del sistema non modificato e, quindi vale, a maggior ragione, per quello regolarizzato.

Sottolineamo, fin da adesso, la profonda differenza tra i casi bidimensionale e tridimensionale rispetto alla validità di stime uniformi nel tempo sulle strutture del sistema (VPFP) e, quindi, alla questione della risolubilità globale del problema di Cauchy associato. Nel paragrafo precedente abbiamo già discusso gli aspetti tecnici di questa differenza, anticipando che la verifica dell'esistenza globale di soluzioni sullo spazio $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ richiede minori regolarità di quante ne esibisca il sistema (per la verifica del Lemma (2.3) non si utilizza, ad esempio, il controllo uniforme sull'*energia cinetica*); questo margine viene saturato quando si passa alla dimensione superiore $n = 3$, dove la singolarità del nucleo K rende addirittura insufficienti le stime che deriviamo da quella dell'*energia cinetica*. Per questa ragione, nella seconda parte del Teorema (3.1) introdurremo un nuovo argomento, basato sull'analisi dell'integrale temporale del campo E , che compare nelle

equazioni (2.5), per ridurre ulteriormente la potenza nella (2.14).

Osserviamo, in conclusione, che la situazione appena descritta è perfettamente analoga a quella che si presenta nel caso del sistema (VP) ordinario (discussa da Horst in [H1]), per il quale la risolubilità globale nel caso tridimensionale è stata provata solo di recente, mentre il caso bidimensionale risulta archiviato da tempo.

Con il risultato del Lemma (2.3) a disposizione, si può operare la rimozione della “mollificazione”.

Proposizione 2.2 *Si definisca*

$$D_t^{\delta, \delta'} := \Xi [|X_\delta(t) - X_{\delta'}(t)| + |V_\delta(t) - V_{\delta'}(t)|],$$

dove $0 < \delta' < \delta$ e $\{(X_\delta(t), V_\delta(t))\}_{\delta > 0}$ è la famiglia delle traiettorie che partono al tempo 0 dal medesimo punto $(x, v) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, sottoposte all'azione di un campione browniano assegnato (per semplicità di notazione, omettiamo di riportare i parametri del moto). Con Ξ si indica il valore medio atteso per una funzione della posizione del processo in un generico istante $t \in [0, T]$, definito

$$\begin{aligned} \Xi [\phi(X_\delta(t), V_\delta(t))] &:= \int \int \phi(x, v) f^\delta(t, x, v) dx dv = \\ &= \mathbb{E} \left[\int \int \phi(X_\delta(t, 0, x, v; b), V_\delta(t, 0, x, v; b)) f_0(x, v) dx dv \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Allora

$$\lim_{\delta \searrow 0} D_t^{\delta, \delta'} = 0$$

per tutti i valori $t \in [0, T]$, $T > 0$ arbitrariamente fissato.

Dimostrazione. Consideriamo due generici processi, con parametri δ e δ' rispettivamente, soluzioni del sistema (2.21) nei casi specifici; fissato il campione browniano $b \in \mathcal{C}_0^*([0, T])$, le loro traiettorie soddisfano le relazioni integrali

$$|X_\delta(t) - X_{\delta'}(t)| \leq \int_0^t |V_\delta(s) - V_{\delta'}(s)| ds, \quad (2.24)$$

$$|V_\delta(t) - V_{\delta'}(t)| \leq \int_0^t |E_\delta(s, X_\delta(s)) - E_{\delta'}(s, X_{\delta'}(s))| ds. \quad (2.25)$$

Aggiungendo e sottraendo le quantità opportune, il modulo della differenza dei campi, che compare al secondo membro della (2.25), può essere diviso nei tre termini seguenti:

$$I(s) = \left| \int K_\delta(X_\delta(s) - y) [\rho^\delta(s, y) - \rho^{\delta'}(s, y)] dy \right|,$$

$$II(s) = \left| \int [K_\delta(X_\delta(s) - y) - K_{\delta'}(X_\delta(s) - y)] \rho^{\delta'}(s, y) dy \right|,$$

$$III(s) = \left| \int [K_{\delta'}(X_\delta(s) - y) - K_{\delta'}(X_{\delta'}(s) - y)] \rho^{\delta'}(s, y) dy \right|.$$

Il Lemma (2.3) garantisce l'uniforme limitatezza della densità spaziale,

$$\|\rho^\delta(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \leq C_T$$

per ogni $s \in [0, t]$, $0 \leq t \leq T$, $\delta > 0$.

Da questa stima e sfruttando le proprietà di K_δ descritte nella (2.18) e (2.19), si ha

$$II(s) \leq C_\delta \quad \text{con } C_\delta \rightarrow 0 \text{ per } \delta \searrow 0, \quad (2.26)$$

$$III(s) \leq C\varphi(|X_\delta(s) - X_{\delta'}(s)|). \quad (2.27)$$

Al solito, C indica ogni generica costante positiva che dipenda unicamente da f_0 e da T .

Per stimare il termine $I(s)$ si renda esplicita la densità spaziale e si faccia uso della relazione (2.6) discussa nel paragrafo precedente,

$$\begin{aligned} & \left| \int \int K_\delta(X_\delta(s) - y) [f^\delta(s, y, w) - f^{\delta'}(s, y, w)] dy dw \right| = \\ & = \left| \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\int \int \left\{ K_\delta(X_\delta(s) - Y_\delta(s, 0, y, w; \bar{b})) - K_\delta(X_\delta(s) - Y_{\delta'}(s, 0, y, w; \bar{b})) \right\} \cdot \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot f_0(y, w) dy dw \right] \right|, \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto i processi $(Y_\delta(s), W_\delta(s))$ e $(Y_{\delta'}(s), W_{\delta'}(s))$, $s \in [0, t]$, con le definizioni note ed indicato con $\mathbb{E}_{\bar{b}}$ l'aspettazione rispetto al rumore browniano \bar{b} che li caratterizza, per distinguerla dalla $\mathbb{E} = \mathbb{E}_b$ sui processi di riferimento iniziali.

Maggiorando il modulo dell'integrale con l'integrale del modulo ed applicando la Ξ , si verifica

$$\begin{aligned} & \Xi \left[\mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\int \int |K_\delta(X_\delta(s) - Y_\delta(s) - K_\delta(X_\delta(s) - Y_{\delta'}(s))| f_0(y, w) dy dw \right] \right] = \\ & = \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\Xi \left[\int \int |K_\delta(X_\delta(s) - Y_\delta(s) - K_\delta(X_\delta(s) - Y_{\delta'}(s))| f_0(y, w) dy dw \right] \right] = \\ & = \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\mathbb{E} \left[\int \int |K_\delta(X_\delta(s) - Y_\delta(s) - K_\delta(X_\delta(s) - Y_{\delta'}(s))| \cdot \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot f_0(x, v) f_0(y, w) dx dv dy dw \right] \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\int \int |K_{\delta}(x - Y_{\delta}(s)) - K_{\delta}(x - Y_{\delta'}(s))| f^{\delta}(t, x, v) f_0(y, w) dx dv dy dw \right] = \\
&= \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\int \int \left(\int dx |K_{\delta}(x - Y_{\delta'}(s))| \rho^{\delta}(t, x) \right) f_0(y, w) dy dw \right] \leq \\
&\leq \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\int \int D_2 \|\rho^{\delta}(s)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x^2)} \varphi(|Y_{\delta}(s) - Y_{\delta'}(s)|) f_0(y, w) dy dw \right] \leq \\
&\leq C \mathbb{E}_{\bar{b}} \left[\int \int \varphi(|Y_{\delta}(s) - Y_{\delta'}(s)|) f_0(y, w) dy dw \right],
\end{aligned}$$

perciò

$$\mathbb{E}[I(s)] \leq C \mathbb{E}[\varphi(|Y_{\delta}(s) - Y_{\delta'}(s)|)]; \quad (2.28)$$

di nuovo ci siamo serviti della proprietà (2.19) del nucleo K_{δ} per risolvere la convoluzione in \mathbb{R}_x^2 .

Eseguendo, adesso, la media Ξ sulle disuguaglianze (2.24) e (2.25), in virtù delle stime (2.26), (2.27) e (2.28) ottenute,

$$\mathbb{E}[|X_{\delta}(t) - X_{\delta'}(t)|] \leq \int_0^t \mathbb{E}[|V_{\delta}(s) - V_{\delta'}(s)|] ds,$$

$$\mathbb{E}[|V_{\delta}(t) - V_{\delta'}(t)|] \leq C_{\delta} T + 2C \int_0^t \mathbb{E}[\varphi(|X_{\delta}(s) - X_{\delta'}(s)|)] ds$$

dove i contributi degli integrali $I(s)$ e $III(s)$ risultano identici una volta che si integra contro la misura $\mu(db)$ appropriata, per la generalità dei processi (X_{δ}, V_{δ}) , (Y_{δ}, W_{δ}) ed analoghi per δ' .

La *disuguaglianza di Jensen*, per ogni variabile aleatoria ξ e per ogni funzione φ concava, stabilisce che

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi)] \leq \varphi(\mathbb{E}[\xi]);$$

pertanto, per linearità dell'aspettazione,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|X_{\delta}(t) - X_{\delta'}(t)| + |V_{\delta}(t) - V_{\delta'}(t)|] = \\
&= \mathbb{E}[|X_{\delta}(t) - X_{\delta'}(t)|] + \mathbb{E}[|V_{\delta}(t) - V_{\delta'}(t)|] \leq \\
&\leq C_{\delta} T + C \int_0^t \{ \mathbb{E}[|V_{\delta}(s) - V_{\delta'}(s)|] + \mathbb{E}[\varphi(|X_{\delta}(s) - X_{\delta'}(s)|)] \} ds \leq \\
&\leq C_{\delta} T + C \left(\int_0^t \mathbb{E}[|V_{\delta}(s) - V_{\delta'}(s)|] ds + \int_0^t \varphi(\mathbb{E}[|X_{\delta}(s) - X_{\delta'}(s)|]) ds \right).
\end{aligned}$$

Infine, essendo Ξ e φ non decrescenti nei loro argomenti, dalla definizione

$$D_t^{\delta, \delta'} \leq C_{\delta} T + C \left(\int_0^t D_s^{\delta, \delta'} ds + \int_0^t \varphi(D_s^{\delta, \delta'}) ds \right).$$

Per la rappresentazione integrale di una equazione differenziale ordinaria, questa relazione implica che $D_t^{\delta, \delta'}$ sia maggiorata da una funzione $z_\delta(t)$, soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{z}_\delta(t) = C\bar{\varphi}(z_\delta(t)) \\ z_\delta(0) = C_\delta T, \end{cases}$$

dove

$$\bar{\varphi}(r) := \begin{cases} \varphi(r) & \text{per } 0 \leq r < 1 \\ r & \text{per } r \geq 1. \end{cases}$$

Eseguendo un conto esplicito si può verificare direttamente che

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sup_{t \in [0, T]} z_\delta(t) = 0,$$

da cui segue la tesi.

A partire dalla Proposizione (2.2) è facile concludere che $(X_\delta(t), V_\delta(t))$, soluzione del problema modificato, converge ad un processo limite $(X(t), V(t))$, la cui distribuzione di probabilità μ_t è limite debole della successione di misure $\{\mu_t^\delta\}_{\delta > 0}$; inoltre μ_t è descritta da una funzione di densità f soluzione debole dell'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Queste verifiche utilizzano procedimenti standard di limite negli integrali che descrivono le varie strutture, in virtù delle proprietà di convergenza garantite dalla Proposizione (2.2).

Risulta, quindi, provato il risultato che enunciamo nel

Teorema 2.1 *Sia $\mu^0(dx, dv) = f_0(x, v)dx dv$ una misura di probabilità iniziale, con $f_0 \in L^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ ed a supporto compatto in \mathbf{R}_v^2 .*

Per ogni $T > 0$ fissato arbitrariamente, esiste un'unica misura di probabilità $\mu_t(dx, dv) = f(t, x, v)dx dv$ che risolve il problema di Cauchy (2.3) sullo spazio bidimensionale: per ogni funzione regolare ϕ ,

$$\frac{d}{dt} \mu_t(\phi) = \mu_t(v \cdot \nabla_x \phi) + \mu_t((E(t, x) \cdot \nabla_v \phi) + \frac{\sigma^2}{2} \mu_t(\Delta_v \phi),$$

$$\mu_0(\phi) = \mu^0(\phi);$$

cioè $f = f(t, x, v)$ è una soluzione debole del sistema (VPFP).

Considerato il processo soluzione del sistema delle caratteristiche stocastiche associato all'equazione,

$$\begin{cases} dx = v dt \\ dv = E(t, x) dt + \sigma db, \end{cases}$$

si esprime

$$\begin{aligned} & \int \int \hat{f}(t, x, v) \phi(x, v) dx dv = \\ & = \mathbb{E} \left[\int \int f_0(x, v) \phi(X(t, 0, x, v; b), V(t, 0, x, v; b)) dx dv \right]. \end{aligned}$$

Infine, si ha

$$\mu_t = \lim_{\delta \searrow 0}^* \mu_t^\delta,$$

dove μ_t^δ è la soluzione del problema "modificato" (2.21) e " $\lim_{\delta \searrow 0}^*$ " denota la convergenza debole nello spazio delle misure.

Capitolo 3

Il problema di Cauchy per l'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck sullo spazio tridimensionale

Preparati gli strumenti necessari, si procede alla dimostrazione del risultato principale di questa trattazione: una stima sulla densità spaziale, uniforme rispetto al parametro di diffusione. Quindi, si prendono in esame le conseguenze di tale risultato in termini di regolarità delle strutture e risolubilità del problema considerato, provando la convergenza del sistema (VPFP) all'analogo sistema (VP) ordinario, nel limite di diffusione nulla.

3.1 La stima uniforme sulla densità spaziale

Il criterio di risolubilità formulato per il sistema di Vlasov-Poisson (VP) e basato sulla determinazione di una stima sulla crescita del supporto della soluzione nello spazio delle velocità, conserva validità anche nel caso dell'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck.

In quest'ultima circostanza diventa estremamente interessante poter dimostrare una stima a priori per la densità spaziale ρ che sia uniforme rispetto al parametro di diffusione σ , caratteristico del termine di stocasticità nel sistema. Importanti

sono le conseguenze di una tale proprietà per gli sviluppi della teoria sul problema (VPPF); esse saranno discusse in dettaglio nel prossimo paragrafo.

Avvalendoci dei risultati presentati nel paragrafo 2.2 ed adottando un argomento analogo a quello proposto da Schaeffer per lo studio del problema in dimensione $n = 3$ ordinario, siamo in grado di provare il

Teorema 3.1 *Sia $\mu^\circ(dx, dv) = f_0(x, v)dx dv$ una misura di probabilità assolutamente continua su $\mathbf{R}_{(x,v)}^6$, assegnata come dato iniziale del problema di Cauchy per (VPPF), con $f_0 \in L^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ ed a supporto compatto rispetto alla variabile velocità. Sia $f = f(t, x, v)$ la funzione di densità della soluzione μ_t del problema, $\mu_t(dx, dv) = f(t, x, v)dx dv$, che soddisfa il sistema (2.3). Per ogni $x \in \mathbf{R}^3$, $\rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, v)dv$ rappresenta la densità spaziale. Sia $T > 0$ arbitrariamente fissato e si definisca*

$$\mathbb{R} := \sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}.$$

Allora esiste una costante C_T , che dipende unicamente da f_0 e T , tale che

$$\mathbb{R} \leq C_T$$

uniformemente per $\sigma \in [0, \sigma_0]$, con $0 < \sigma_0 < 1$ fissato.

Indichiamo con Q_0 il raggio della palla di \mathbf{R}_v^3 che contiene il supporto della funzione f_0 , cioè tale che $f_0(x, v) = 0$ se $|v| > Q_0$.

Sia $(\hat{X}(t, 0, x, v; \hat{b}), \hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b}))$, $t \in [0, T]$, la traiettoria del processo stocastico, soluzione del sistema di equazioni (2.4), che parte al tempo 0 dal punto (x, v) , sottoposto all'azione del campione browniano \hat{b} .

Definiamo

$$Q(t) := \sup_{\substack{(x,v) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \\ \hat{b} \in \mathcal{C}^*([0, T])}} \left\{ |\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})| / |v| \leq Q_0 \text{ e } \sup_{s \in [0, t]} |\hat{b}(s)| \leq \frac{|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})|^\alpha}{40\sigma_0} \right\}$$

con $0 < \alpha < 1$ da determinare opportunamente.

Quella introdotta è, evidentemente, una definizione implicita, per il fatto che la condizione sul campione browniano è espressa mediante la quantità stessa da stimare; è necessario, allora, verificare che sia ben posta. D'altra parte, per valutare $Q(t)$ si può procedere nel modo seguente: fissato t , interpretando $\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})$

come un dato iniziale, si risolvono le equazioni (2.5) rispetto a v (operazione, questa, garantita dalle proprietà della mappa Φ descritta nel paragrafo 2.2)

$$v \equiv \hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b}) - \int_0^t E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b})) ds - \sigma \hat{b}(t),$$

con l'ipotesi che \hat{b} soddisfi la condizione $\left(\sup_{s \in [0, t]} |\hat{b}(s)| \leq \frac{|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})|^\alpha}{40\sigma_0} \right)$; si controlla, quindi, se il vettore v ottenuto verifica $|v| \leq Q_0$ e si esegue l'estremo superiore sui valori $\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})$ che assicurano questo risultato. Siamo, pertanto, certi che la quantità $Q(t)$ abbia significato.

Infine, sia

$$Q := 1 + \sup_{t \in [0, T]} Q(t).$$

La (2.9) consente di esprimere la densità spaziale ρ in un punto $x \in \mathbb{R}^3$, al tempo $t \in [0, T]$, mediante la relazione

$$\rho(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} dv f_0(X(0, t, x, v; b), V(0, t, x, v; b)) \right],$$

con $(X(0, t, x, v; b), V(0, t, x, v; b))$ valore che assume al tempo 0 il processo $(X(s, t, x, v; b), V(s, t, x, v; b))$, $s \in [0, t]$, definito nello stesso paragrafo 2.2.

Maggiorando la funzione f_0 con $M := \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}$, dalla definizione di Q_0 segue, allora,

$$\rho(t, x) \leq M \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) \right], \quad (3.1)$$

avendo indicato con \mathbb{I} la funzione caratteristica dell'evento descritto nel suo argomento. Decomponiamo l'integrale che compare all'interno dell'aspettazione \mathbb{E} rispetto ad una coppia di eventi disgiunti ed esaustivi,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) &= \int_{\mathbb{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) \mathbb{I}(|v| \leq Q) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) \mathbb{I}(|v| > Q) \end{aligned}$$

ed analizziamo separatamente i due termini in cui si divide il secondo membro della (3.1) per effetto di questa decomposizione.

Per il primo di essi si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) \mathbb{I}(|v| \leq Q) \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} dv \mathbb{I}(|v| \leq Q) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\text{mis}_{\mathbb{R}^3} \{|v| \leq Q\} \right] = \frac{4}{3} \pi Q^3, \end{aligned}$$

avendo maggiorato banalmente una delle funzioni caratteristiche nell'integrale e ricordando che il valore dell'aspettazione \mathbb{E} su una costante è pari alla costante stessa.

Osserviamo, adesso, il secondo termine

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) \mathbb{I}(|v| > Q) \right].$$

In questa espressione v rappresenta il dato finale (nelle velocità) di un processo che al tempo 0 si trova nella palla di \mathbf{R}_v^3 di raggio Q_0 : la definizione di Q impone, allora, che la condizione $|v| > Q$ si possa realizzare solo nel caso in cui il campione browniano b soddisfi una disuguaglianza opposta $(\sup_{s \in [0, t]} |b(s)| > \frac{|v|^\alpha}{40\sigma_0})$. Perciò, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{R}^3} dv \mathbb{I}(|V(0, t, x, v; b)| \leq Q_0) \mathbb{I}(|v| > Q) \right] &= \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} dv \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |b(s)| > \frac{|v|^\alpha}{40\sigma_0} \right]. \end{aligned}$$

Per stimare quest'ultima quantità facciamo uso di un importante risultato di Teoria della Probabilità riguardante il moto browniano:

$$\mathbb{E} \left[\max_{s \in [0, t]} |b(s)| \geq \lambda \right] = 2\mathbb{E} \left[|b(t)| \geq \lambda \right], \text{ per } \lambda \geq 0. \quad (3.2)$$

Di questa proprietà notevole ci basta, per i nostri scopi, una formulazione più debole, nota come *disuguaglianza di Lévy* per il moto browniano n -dimensionale:

$$\mathbb{E} \left[\max_{s \in [0, t]} |b(s)| \geq \lambda \right] \leq 2\mathbb{E} \left[|b(t)| \geq \lambda \right], \text{ per } \lambda \geq 0. \quad (3.3)$$

Risulta, quindi,

$$\int_{\mathbf{R}^3} dv \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |b(s)| > \frac{|v|^\alpha}{40\sigma_0} \right] \leq 2 \int_{\mathbf{R}^3} dv \mathbb{E} \left[|b(t)| > \frac{|v|^\alpha}{40\sigma_0} \right];$$

applicando disuguaglianze classiche della Teoria della Probabilità, combinate con le caratteristiche del moto browniano, si dimostra che $\mathbb{E} \left[|b(t)| \geq \lambda \right]$ decresce esponenzialmente in λ^2 e, pertanto, il secondo termine è uniformemente limitato da una costante, che si può rendere arbitrariamente piccola.

I semplici dettagli di questa dimostrazione sono riportati nell'Appendice A, dove vengono discusse anche le due relazioni (3.2) e (3.3).

Conclusione delle precedenti considerazioni è una stima intermedia sulla densità spaziale

$$\rho(t, x) \leq M \left(\frac{4}{3} \pi Q^3 + cost \right) \leq C Q^3,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$, cioè

$$\mathbb{R} \leq C Q^3, \quad (3.4)$$

con C costante che dipende solo da f_0 e T .

In quanto segue C indicherà ogni costante positiva, opportunamente specificata, che dipenda solo da dati assegnati del problema.

La verifica della tesi del teorema sarà completa una volta provato che Q è una grandezza finita, ovvero che $Q(t)$ si mantiene uniformemente limitato in $[0, T]$. Dalle equazioni integrali che definiscono il processo (\hat{X}, \hat{V}) si ottiene, immediatamente,

$$|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})| \leq |v| + \int_0^t |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds + \sigma |\hat{b}(t)|; \quad (3.5)$$

$\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})$ è il generico elemento dell'insieme introdotto nella definizione di $Q(t)$, perciò dalla (3.5) segue che

$$|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})| \leq Q_0 + \int_0^t |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds + \sigma \frac{|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})|^\alpha}{40\sigma_0} \quad (3.6)$$

con

$$\sigma \frac{|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})|^\alpha}{40\sigma_0} \leq \frac{1}{40} Q^\alpha \text{ per } \sigma \in [0, \sigma_0].$$

Quindi, per stimare la quantità Q , è necessario avere una stima opportuna del termine

$$\int_0^t |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds.$$

Il Lemma (2.2) fornisce una stima sulla norma uniforme del campo E in termini di norme della densità spaziale ρ , sulla quale si applica la (3.4) concludendo

$$\sup_{t \in [0, T]} \|E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^3)} \leq C_1 Q^{\frac{4}{3}}; \quad (3.7)$$

una maggiorazione banale dell'integrale utilizzando questa proprietà non è sufficiente a risolvere il nostro problema, poichè produce nella (3.6) un termine in Q di ordine almeno $\frac{4}{3} > 1$, che non consente di "chiudere" la stima.

Il procedimento per ottenere la (3.4) può essere ripetuto esattamente nel caso della dimensione $n = 2$.

Fissato $t \in [0, T]$, a partire dalla (3.1) si esegua il conto considerando l'espressione $Q(t)$ laddove compariva la Q (questa variazione ha un significato puramente tecnico); con le stesse considerazioni svolte precedentemente si giunge alla maggiorazione

$$\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \leq CQ^2(t). \quad (3.8)$$

In virtù della tesi del Lemma (2.2), per ogni $t \in [0, T]$

$$\|E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \leq CQ(t);$$

allora vale la relazione analoga della (3.6),

$$|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})| \leq Q_0 + C \int_0^t Q(s) ds + \sigma \frac{|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})|^\alpha}{40\sigma_0}$$

e, dalla definizione di $Q(t)$,

$$Q(t) \leq Q_0 + C \int_0^t Q(s) ds + \frac{1}{40} Q^\alpha(t),$$

avendo fissato $\alpha < 1$.

Dunque, per il *Lemma di Gronwall*, si conclude

$$Q(t) \leq cost + Q_0 \exp\{ct\} \leq C_T,$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Per la (3.8) segue

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^2)} \leq C_T,$$

che completa la dimostrazione del Lemma (2.3) del capitolo precedente, confermando le considerazioni svolte alla fine del paragrafo 2.2.

Per migliorare il risultato della (3.7) formuliamo un nuovo argomento, basato su una interpretazione critica dell'integrale temporale, sfruttando considerazioni sui moti relativi analoghe a quelle formulate per trattare il caso del sistema (VP) ordinario; lo schema fondamentale è quello proposto da Wollman in [W], dove si semplifica la partizione dello spazio \mathbb{R}_v^3 introdotta da Schaeffer [S2] e si impiega una procedura differente per sommare i contributi delle stime su piccoli intervalli di tempo.

Sia P il numero reale positivo $P := Q^\alpha$, dove $0 < \alpha < 1$ è l'esponente che compare nella definizione di $Q(t)$; allora $0 < P < Q$.

Definiamo

$$\Delta T := \min \left\{ T, \frac{P}{10C_1 Q^{\frac{4}{3}}} \right\},$$

essendo C_1 la costante nella relazione (3.7). Se $\frac{T}{\Delta T}$ è un numero intero sia $N = \frac{T}{\Delta T} - 1$, altrimenti $N = \lfloor \frac{T}{\Delta T} \rfloor$; decomponiamo l'intervallo $[0, T]$ mediante i traguardi $t_i = i\Delta T$, $i = 0, \dots, N$, cioè

$$[0, T] = \bigcup_{i=0}^N [t_i, t_{i+1}] \text{ con } |t_{i+1} - t_i| \leq \Delta T \text{ e } t_{N+1} = T.$$

Allora, per ogni valore $t \in [0, T]$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^t |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds &\leq \int_0^T |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds = \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Consideriamo l'espressione del campo E nel sistema (VPFP): su ciascun intervallino $[t_i, t_{i+1}]$ si avrà

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_{i+1}} |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds \leq \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int \int_{\mathbf{R}^6} f(s, y, w) \frac{1}{|y - \hat{X}(s)|^2} dy dw. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Per alleggerire la notazione, abbiamo indicato brevemente con $(\hat{X}(s), \hat{V}(s))$ i valori $(\hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}), \hat{V}(s, 0, x, v; \hat{b}))$, al tempo $s \in [t_i, t_{i+1}]$, del processo assegnato, i cui parametri sono fissati e non intervengono nel calcolo dell'integrale. Utilizzando la proprietà (2.6), il secondo membro della (3.10) risulta uguale a

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \mathbb{E} \left[\int \int_{\mathbf{R}^6} f(t_i, x, v) |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{-2} dx dv \right] = \\ &\int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_{\mathbf{R}^3} dx \int_{\mathbf{R}^3} dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{-2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

avendo introdotto un processo $(X(s, t_i, x, v; b), V(s, t_i, x, v; b))$, definito come in (2.5) a partire dal tempo t_i , sottoposto ad un campione browniano sul quale si esegue l'aspettazione \mathbb{E} .

Il dominio di integrazione nell'espressione (3.11) è rappresentato dallo spazio

$$S = [t_i, t_{i+1}] \times \mathbf{R}_{(x,v)}^6 \times \mathcal{C}_0^*([0, T]).$$

Eseguiamo una partizione delle velocità v rispetto alle grandezze P e Q ; essa induce una partizione di S nei sottodomini

$$S_1 := \left\{ (s, x, v, b) \in S / |v| \leq P \text{ oppure } |v - \hat{V}(t_i)| \leq P, \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| \leq \frac{P}{40\sigma_0} \right\},$$

$$S_2 := \left\{ (s, x, v, b) \in S / |v| \leq P \text{ oppure } |v - \hat{V}(t_i)| \leq P, \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right\},$$

$$S_3 := \left\{ (s, x, v, b) \in S / |v| > P \text{ e } |v - \hat{V}(t_i)| > P, \frac{1}{4} |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| \leq d \right\},$$

$$S_4 := \left\{ (s, x, v, b) \in S / |v| > P \text{ e } |v - \hat{V}(t_i)| > P, \frac{1}{4} |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| > d, \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| \leq \frac{P}{40\sigma_0} \right\},$$

$$S_5 := \left\{ (s, x, v, b) \in S / |v| > P \text{ e } |v - \hat{V}(t_i)| > P, \frac{1}{4} |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| > d, \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right\},$$

con d reale positivo da determinare (in funzione di Q , P e ΔT).

Allora

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |E(s, \hat{X}(s))| ds \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (3.12)$$

dove

$$I_j := \int_{S_j} f(t_i, x, v) |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{-2} ds dx dv \mu(db), \quad j = 1, \dots, 5.$$

Per ottenere una stima sulla (3.12) valutiamo separatamente ciascuno dei contributi I_j , $j = 1, \dots, 5$.

Cominciamo con l'osservare che per $(s, x, v, b) \in S_1$, se $|v| \leq P$, si ha

$$\begin{aligned} |V(s, t_i, x, v; b)| &\leq |v| + \int_{t_i}^s |E(\tau, X(\tau, t_i, x, v; b))| d\tau + \sigma |b(s) - b(t_i)| \leq \\ &\leq P + C_1 Q^{\frac{4}{3}} \Delta T + 2\sigma \frac{P}{40\sigma_0} < 2P, \end{aligned}$$

per $\sigma \in [0, \sigma_0]$, dove abbiamo fatto uso della (3.7) e reso esplicita la definizione di ΔT . Analogamente, se $|v - \hat{V}(t_i)| \leq P$,

$$|V(s, t_i, x, v; b) - \hat{V}(s)| \leq |v - \hat{V}(t_i)| + \left| \int_{t_i}^s E(\tau, X(\tau, t_i, x, v; b)) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_i}^s E(\tau, \hat{X}(\tau)) d\tau + \sigma |b(s) - b(t_i)| + \sigma |\hat{b}(s) - \hat{b}(t_i)| \leq \\
& \leq P + 2C_1 Q^{\frac{4}{3}} \Delta T + 2\sigma \left(\frac{P}{40\sigma_0} + \frac{Q^\alpha}{40\sigma_0} \right) < 2P,
\end{aligned}$$

per $\sigma \in [0, \sigma_0]$.

Avendo portato le stime di S_1 al tempo t_i sulle grandezze al tempo $s > t_i$, tornando alle variabili di integrazione originali,

$$\begin{aligned}
I_1 & \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int dx \int dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{-2} \cdot \\
& \cdot \left\{ \Pi(|V(s, t_i, x, v; b)| < 2P) + \Pi(|V(s, t_i, x, v; b) - \hat{V}(s)| < 2P) \right\} = \\
& = \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int dy \int dw f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \cdot \\
& \cdot \left\{ \Pi(|w| < 2P) + \Pi(|w - \hat{V}(s)| < 2P) \right\} = \\
& = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int dy \int dw f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \Pi(|w| < 2P),
\end{aligned}$$

essendo $\hat{V}(s)$ un valore fissato rispetto alle variabili di integrazione.

Sia l costante positiva; decomponiamo in due integrali ristretti ai domini complementari,

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \left[\int_{|y - \hat{X}(s)| \leq l} dy \int dw f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \Pi(|w| < 2P) + \right. \\
& \left. + \int_{|y - \hat{X}(s)| > l} dy \int dw f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \Pi(|w| < 2P) \right],
\end{aligned}$$

che trattiamo singolarmente. Nel primo termine facciamo uso del *principio del massimo*, $\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^6)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}_{(x,v)}^6)}$ e di una trasformazione in coordinate polari dell'integrale dy ; nel secondo, applicando la *disuguaglianza di Holder* con $p = \frac{5}{3}$,

$$\begin{aligned}
& \int_{|y - \hat{X}(s)| > l} dy \int dw f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \Pi(|w| < 2P) \leq \\
& \leq \int_{|y - \hat{X}(s)| > l} dy \int dw f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} = \\
& = \int_{|y - \hat{X}(s)| > l} dy \rho(s, y) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \leq \\
& \leq \left(\int \rho(s, y)^{\frac{5}{3}} dy \right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(\int_{|y - \hat{X}(s)| > l} \frac{1}{|y - \hat{X}(s)|^5} dy \right)^{\frac{2}{5}} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \|\rho(s)\|_{L^{5/3}(\mathbb{R}_y^3)} \cdot \left(\int_0^\infty \frac{1}{\xi^5} 4\pi \xi^2 d\xi \right)^{\frac{2}{5}} \leq \text{cost} K_2 l^{-\frac{4}{5}},$$

dove K_2 è la costante definita nel Lemma (2.2). Perciò

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \left[M \frac{4}{3} \pi (2P)^3 \int_0^l \frac{1}{\xi^2} 4\pi \xi^2 d\xi + \text{cost} K_2 l^{-\frac{4}{5}} \right] \leq \\ &\leq 2C(P^3 l + l^{-\frac{4}{5}}) \Delta T; \end{aligned}$$

ottimizzando la stima sul valore di l (per $l = P^{-\frac{5}{3}}$), concludiamo

$$I_1 \leq CP^{\frac{4}{3}} \Delta T. \quad (3.13)$$

Procediamo in un modo analogo per valutare il contributo dell'integrale I_2 .

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int dx \int dv \int \mu(db) \mathbb{I} \left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right) \cdot \\ &\cdot f(t_i, x, v) |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{-2} = I_2^\wedge + I_2^\vee, \end{aligned}$$

dove indichiamo con I_2^\wedge e I_2^\vee gli integrali ristretti ai domini complementari $\{|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| > l\}$ e $\{|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| \leq l\}$, rispettivamente. Tornando alle variabili originali e applicando di nuovo la *disuguaglianza di Holder*, abbiamo

$$\begin{aligned} I_2^\wedge &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_{|y - \hat{X}(s)| > l} dy \int dv f(s, y, w) |y - \hat{X}(s)|^{-2} = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_{|y - \hat{X}(s)| > l} dy \rho(s, y) |y - \hat{X}(s)|^{-2} \leq \text{cost} K_2 l^{-\frac{4}{5}} \Delta T. \end{aligned}$$

Ancora la *disuguaglianza di Holder* con $p = \frac{5}{4}$, applicata direttamente, ci da

$$\begin{aligned} I_2^\vee &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int dx \int dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) \cdot \\ &\cdot \frac{\mathbb{I} \left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right) \mathbb{I} \left(|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| \leq l \right)}{|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^2} \leq \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \left[\left(\int dx \int dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) \frac{\mathbb{I} \left(|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| \leq l \right)}{|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{4}{5}} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\int dx \int dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) \mathbb{I} \left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right) \right)^{\frac{1}{5}} \right]. \end{aligned}$$

Il secondo fattore nell'ultima espressione si riscrive nella forma

$$\begin{aligned} & \left(\|f(t_i)\|_{L^1(\mathbb{R}_{(x,v)}^6)} \right)^{\frac{1}{5}} \left(\int \mu(db) \mathbb{I} \left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right) \right)^{\frac{1}{5}} = \\ & = \left(\mathbb{E} \left[\mathbb{I} \left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right) \right] \right)^{\frac{1}{5}} ; \end{aligned}$$

le considerazioni, sviluppate a partire dalle relazioni (3.2) e (3.3) si ripetono esattamente in questo caso: il termine precedente è esponenzialmente piccolo in P^2 e può essere maggiorato con una costante. Lo stesso carattere è assunto da tutto l'integrale I_2^Y , se si trova una stima finita sul primo fattore. D'altra parte

$$\begin{aligned} & \left(\int dx \int dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) \frac{\mathbb{I}(|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)| \leq l)}{|X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{4}{5}} = \\ & = \left(\int dy \int dw f(s, y, w) \frac{\mathbb{I}(|y - \hat{X}(s)| \leq l)}{|y - \hat{X}(s)|^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{4}{5}} = \\ & = \left(\int dy \rho(s, y) \frac{\mathbb{I}(|y - \hat{X}(s)| \leq l)}{|y - \hat{X}(s)|^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{4}{5}} \leq CQ^{\frac{12}{5}} \left(\int_0^l \frac{1}{\xi^{\frac{5}{2}}} 4\pi\xi^2 d\xi \right)^{\frac{4}{5}} = CQ^{\frac{12}{5}} l^{\frac{4}{10}} ; \end{aligned}$$

perciò

$$I_2^Y \leq CQ^{\frac{12}{5}} l^{\frac{4}{10}} \exp\{-costP^2\} \Delta T.$$

Fissato $l = P^{-\frac{5}{8}}$, per avere il termine I_2^{\wedge} omogeneo a quello nella stima di I_1 , si ha

$$I_2^Y \leq CQ^{\frac{16}{15}} P^{\frac{1}{8}} \exp\{-costP^2\} \leq CP^{\frac{16+5\alpha}{15\alpha}} \exp\{-costP^2\}.$$

In definitiva I_2^Y rappresenta un contributo trascurabile, rispetto a I_2^{\wedge} , nella determinazione del valore I_2 e non perturba l'ordine della stima

$$I_2 \leq CP^{\frac{4}{3}} \Delta T. \quad (3.14)$$

Per gli integrali I_3 e I_5 le stime sono, adesso, pressoché immediate;

$$\begin{aligned} I_3 & \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_{|y - \hat{X}(s)| \leq d} dy \int dw f(s, y, w) \frac{1}{|y - \hat{X}(s)|^2} \leq \\ & \leq CQ^3 d \Delta T \end{aligned} \quad (3.15)$$

e

$$I_5 \leq \frac{1}{d^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int \int dx dv f(t_i, x, v) \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |b(s)| > \frac{P}{40\sigma_0} \right] \leq \frac{\Delta T}{d^2} \exp \{ -cost P^2 \}. \quad (3.16)$$

Ci resta da trattare il termine

$$I_4 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int dx \int dv \int \mu(db) f(t_i, x, v) |X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s)|^{-2} \mathbb{I}_{S_4}(s, x, v, b),$$

dove abbiamo indicato con \mathbb{I}_A la funzione caratteristica dell'insieme A. Per esso adottiamo un diverso procedimento nella valutazione dell'integrale temporale.

Se $(s, x, v, b) \in S_4$ allora

$$\begin{aligned} |V(s, t_i, x, v; b) - \hat{V}(s)| &\geq |v - \hat{V}(t_i)| - \int_{t_i}^s d\tau |E(\tau, X(\tau, t_i, x, v; b)) + \\ &\quad - E(\tau, \hat{X}(\tau))| - \sigma |b(s) - b(t_i)| - \sigma |\hat{b}(s) - \hat{b}(t_i)| \geq \\ &\geq P - 2C_1 Q^{\frac{4}{3}} \Delta T - 4\sigma \frac{P}{40\sigma_0} \geq \frac{17}{10} P. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Fissate le variabili (x, v, b) in S_4 , sia

$$Z(s) = X(s, t_i, x, v; b) - \hat{X}(s);$$

per le proprietà di continuità dei processi (X, V) e (\hat{X}, \hat{V}) , esiste $s_0 = s_0(t_i, x, v; b) \in [t_i, t_{i+1}]$ tale che

$$|Z(s_0)| \leq |Z(s)| \text{ per ogni } s \in [t_i, t_{i+1}].$$

Dalle definizioni segue, inoltre,

$$\begin{aligned} \dot{Z}(s) &= \dot{Z}(s_0) + \int_{s_0}^s [E(\tau, X(\tau, t_i, x, v; b)) - E(\tau, \hat{X}(\tau))] d\tau + \\ &\quad + \sigma [b(s) - b(s_0)] - \sigma [\hat{b}(s) - \hat{b}(s_0)]. \end{aligned}$$

Introdotta la funzione

$$\bar{Z}(s) = Z(s_0) + \dot{Z}(s_0)(s - s_0),$$

poichè $\bar{Z}(s_0) = Z(s_0)$ e $\dot{\bar{Z}}(s_0) = \dot{Z}(s_0)$, si ha

$$Z(s) - \bar{Z}(s) = \int_{s_0}^s [\dot{Z}(\tau) - \dot{\bar{Z}}(\tau)] d\tau = \int_{s_0}^s d\tau \int_{s_0}^{\tau} d\tau' [E(\tau', X(\tau', t_i, x, v; b)) +$$

$$-E(\tau', \hat{X}(\tau')) + \sigma \int_{s_0}^s [b(\tau) - b(s_0)] d\tau + \sigma \int_{s_0}^s [\dot{b}(\tau) - \dot{b}(s_0)] d\tau.$$

Usando maggiorazioni ingenuie sulle grandezze al secondo membro e le condizioni in S_4 , otteniamo

$$\begin{aligned} |Z(s) - \bar{Z}(s)| &\leq \frac{1}{2}(s - s_0)^2 C_1 Q^{\frac{4}{3}} + 4\sigma \frac{P}{40\sigma_0}(s - s_0) \leq \\ &\leq \frac{C_1}{2}(s - s_0) Q^{\frac{4}{3}} \Delta T + \frac{1}{10} P(s - s_0) \leq \frac{1}{5} P(s - s_0); \end{aligned}$$

allora

$$|Z(s)| \geq |\bar{Z}(s)| - \frac{1}{5} P|s - s_0|. \quad (3.18)$$

Una stima dal basso per $\bar{Z}(s)$ si ricava nel seguente modo: se $s_0 = t_i$ allora $Z(s_0) \cdot \dot{Z}(s_0) \geq 0$, se $s_0 = t_{i+1}$ allora $Z(s_0) \cdot \dot{Z}(s_0) \leq 0$, se infine $s_0 \in (t_i, t_{i+1})$ allora $Z(s_0) \cdot \dot{Z}(s_0) = 0$; in ogni caso $(s - s_0)Z(s_0) \cdot \dot{Z}(s_0) \geq 0$ per $s \in [t_i, t_{i+1}]$, perciò

$$\begin{aligned} |\bar{Z}(s)|^2 &= |Z(s_0)|^2 + |\dot{Z}(s_0)(s - s_0)|^2 + 2(s - s_0)Z(s_0) \cdot \dot{Z}(s_0) \geq \\ &\geq |\dot{Z}(s_0)|^2 |s - s_0|^2 \geq \left(\frac{17}{10}P\right)^2 |s - s_0|^2, \end{aligned}$$

avendo applicato la (3.17) su $|\dot{Z}(s_0)|$.

In conclusione

$$|Z(s)| \geq \frac{P}{2}|s - s_0|, \text{ per ogni } s \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (3.19)$$

Usiamo la (3.19) per stimare

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} ds |Z(s)|^{-2} \mathbb{I}_{S_4}(s, x, v, b).$$

Per costruzione $\mathbb{I}_{S_4}(s, x, v, b) = 0$ se $|Z(s)| \leq d$; definiamo, allora, l'applicazione $\Sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\Sigma(r) = \begin{cases} d^{-2} & \text{per } 0 \leq r \leq d \\ r^{-2} & \text{per } r > d \end{cases}$$

ed osserviamo che (dalla (3.19) e poichè Σ è non crescente)

$$|Z(s)|^{-2} \mathbb{I}_{S_4}(s, x, v, b) \leq \Sigma(|Z(s)|) \leq \Sigma\left(\frac{P}{2}(s - s_0)\right).$$

Con un facile conto si verifica, allora, che

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} ds |Z(s)|^{-2} \mathbb{I}_{S_4}(s, x, v, b) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma\left(\frac{P}{2}(s - s_0)\right) ds \leq$$

$$\leq 2 \int_0^\infty \Sigma \left(\frac{P}{2} s \right) ds = 2 \left[\int_0^{\frac{2d}{P}} \frac{1}{d^2} ds + \int_{\frac{2d}{P}}^\infty \frac{1}{\left(\frac{P}{2}s\right)^2} ds \right] = \frac{2}{Pd}.$$

Si noti che l'integrale temporale riduce l'ordine della singolarità del nucleo K da due ad uno: questo è il punto cruciale in cui il nuovo argomento migliora quelli classici per la stima sul campo E .

Sostituendo nell'espressione di I_4 , si conclude

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \frac{2}{Pd} \int \mu(db) \int \int f(t_i, x, v) dx dv \leq \\ &\leq \frac{2}{Pd} P^{-2} \int \mu(db) \int \int |v|^2 f(t_i, x, v) dx dv \leq 2K_1 P^{-3} d^{-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove K_1 è la costante del Lemma (2.1), che maggiora l'energia cinetica del sistema uniformemente nel tempo.

Possiamo, adesso, ritornare alla (3.12); in virtù delle (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) e (3.20) scriviamo

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_{i+1}} |E(s, \hat{X}(s))| ds \leq \\ &\leq C \left(P^{\frac{4}{3}} \Delta T + Q^3 d \Delta T + d^{-2} \Delta T \exp \left\{ -cost P^2 \right\} + P^{-3} d^{-1} \right). \end{aligned}$$

Prendendo $d = P^{-\frac{3}{2}} Q^{-\frac{3}{2}} \Delta T^{-\frac{1}{2}}$, che ottimizza secondo e quarto termine, si ha

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_{i+1}} |E(s, \hat{X}(s))| ds \leq \\ &\leq C \left(P^{\frac{4}{3}} \Delta T + Q^{\frac{3}{2}} P^{-\frac{3}{2}} \Delta T^{\frac{1}{2}} + Q^3 \Delta T^2 P^3 \exp \left\{ -cost P^2 \right\} \right) \leq \\ &\leq C \left(P^{\frac{7}{3}} Q^{-\frac{4}{3}} + P^{-1} Q^{-\frac{5}{3}} + Q^{\frac{1}{3}} P^5 \exp \left\{ -cost P^2 \right\} \right), \end{aligned}$$

dalla definizione di ΔT .

Qualunque sia il valore di Q , esso è legato a quello di P dalla relazione $Q \equiv P^{\frac{1}{\alpha}}$; è, allora, evidente che il terzo termine di questa stima può essere trascurato rispetto agli altri, per effetto della decadenza esponenziale. Esplicitando P come funzione di Q , abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |E(s, \hat{X}(s))| ds &\leq C \left(Q^{-\frac{4}{3} + \frac{7}{3}\alpha} + Q^{-\alpha - \frac{5}{3}} \right) \leq \\ &\leq C Q^{-\frac{4}{3} + \frac{7}{3}\alpha}. \end{aligned}$$

Riportando quest'ultima stima nella (3.9),

$$\int_0^t |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds \leq (N+1) C Q^{-\frac{4}{3} + \frac{7}{3}\alpha}. \quad (3.21)$$

Osserviamo che, se $T \leq P/10C_1Q^{\frac{4}{3}}$ allora $\Delta T = T$ e $N = 0$, mentre se $T > P/10C_1Q^{\frac{4}{3}}$ allora $\Delta T = P/10C_1Q^{\frac{4}{3}} = Q^{\alpha - \frac{4}{3}}/10C_1$ e $N < \frac{T}{\Delta T} = 10C_1TQ^{\frac{4}{3} - \alpha}$; in ogni caso

$$N + 1 \leq 1 + CTQ^{\frac{4}{3} - \alpha} \leq C(T + 1)Q^{\frac{4}{3} - \alpha}.$$

Quindi completiamo la (3.21),

$$\int_0^t |E(s, \hat{X}(s, 0, x, v; \hat{b}))| ds \leq C(T + 1)Q^{\frac{4}{3}\alpha}. \quad (3.22)$$

Indichiamo con γ l'esponente nella (3.22), $\gamma = \frac{4}{3}\alpha$; per $0 < \alpha < \frac{3}{4}$ risulta $\gamma < 1$. Finalmente, dalla (3.6),

$$|\hat{V}(t, 0, x, v; \hat{b})| \leq Q_\circ + C(T + 1)Q^\gamma + \frac{1}{40}Q^\alpha \leq Q_\circ + C(T + 1)Q^\beta, \quad (3.23)$$

con $\beta := \max\{\alpha, \gamma\}$, $0 < \beta < 1$.

La quantità al secondo membro della (3.23) è indipendente dalla scelta del campione (\hat{X}, \hat{V}) del processo, perciò, per l'estremo superiore al primo membro vale

$$Q \leq Q_\circ + C(T + 1)Q^\beta,$$

da cui segue

$$Q \leq [Q_\circ + C(T + 1)]^{\frac{1}{1 - \beta}}.$$

Questo garantisce che Q è una grandezza finita, per ogni $T > 0$ fissato e conclude la dimostrazione del teorema.

3.2 Convergenza al sistema di Vlasov-Poisson nel limite di diffusione nulla

La verifica di una stima a priori sulla norma uniforme della densità spaziale ρ , valida per ogni intervallo di tempo $[0, T]$, $T > 0$ arbitrariamente fissato, è il passo fondamentale nella teoria della risolubilità globale del problema di Cauchy associato ai sistemi (VP) e (VPFP). Su questo argomento si basano gli studi condotti da Pfaffelmoser, Schaeffer e Wollman per completare la dimostrazione dell'esistenza globale di soluzioni classiche del problema ordinario; nella stessa

direzione sono orientati i recenti lavori sul problema stocasticizzato, indipendentemente dal tipo di approccio costruttivo proposto da ciascun autore per ottenere un risultato.

D'altra parte, una volta noto che la soluzione esiste regolare e globalmente nel caso tridimensionale ordinario, ovvero il supporto della densità microscopica non esplose per tempi finiti, ci si aspetta lo stesso comportamento per il sistema in presenza di stocasticità: rispetto all'equazione di Vlasov-Poisson deterministica, che è di tipo iperbolico, la Fokker-Planck corrispondente, ottenuta per diffusione stocastica delle velocità, assume una struttura parabolica più regolare, che dovrebbe favorire lo sviluppo di una teoria della risolubilità. Questo in parte è vero ed, infatti, si ritrovano per il problema (VPFP) tutti i risultati classici; tuttavia, non si hanno semplificazioni significative nella trattazione poiché quella che agisce sul sistema è una diffusione degenera, che interessa solo le velocità e, perciò, non ha un effetto vistoso di regolarizzazione sul dominio della soluzione.

Attraverso il Lemma (2.2), la stima sulla densità spaziale garantisce un controllo a priori sulla norma uniforme del campo di forze del sistema,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|E(t, x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^3)} \leq K_3,$$

con $K_3 = C_0(C_T)^{\frac{1}{2}}$.

Si ha, quindi, una proprietà di regolarità per le strutture nelle equazioni di Langevin

$$\begin{cases} dx = v dt \\ dv = E(t, x) dt + \sigma db, \end{cases} \quad (3.24)$$

che consente di risolvere per iterazioni successive le equazioni integrali associate (per ulteriori commenti si rimanda all'Appendice B). Si noti l'analogia tra quanto detto ed il criterio classico di integrabilità del sistema delle caratteristiche, definito per lo studio delle EDP in generale ed, in particolare, del problema (VP). L'argomento di analisi delle traiettorie caratteristiche, ispirato ad un punto di vista Euleriano della teoria, si rivela efficace anche in questo contesto, per concludere la risolubilità dell'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck.

Con lo stesso procedimento adottato nel paragrafo 2.3 per provare esistenza globale ed unicità della soluzione del problema (VPFP) sullo spazio bidimensionale, modificando opportunamente l'espressione delle grandezze per la dimensione $n = 3$, si dimostra il

Teorema 3.2 Sia $f_0 = f_0(x, v)$ la funzione di densità di una misura di probabilità su $\mathbf{R}_{(x,v)}^6$ assolutamente continua, assegnata come dato iniziale del problema di Cauchy (2.3), con $f_0 \in L^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ ed a supporto compatto rispetto alla variabile velocità. Allora, fissato arbitrariamente $T > 0$, esiste un'unica funzione $f = f(t, x, v)$ soluzione debole del sistema (VPFP) sullo spazio tridimensionale

$$\int \int f(t, x, v) \phi(x, v) dx dv = \\ = \mathbb{E} \left[\int \int f_0(x, v) \phi(X(t, 0, x, v; b), V(t, 0, x, v; b)) dx dv \right],$$

per ogni $t \in [0, T]$, $(x, v) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ e per ogni funzione test $\phi = \phi(x, v)$. Se f_0 è ulteriormente regolare, f diventa una soluzione classica.

Il processo sulle cui traiettorie è integrato il dato iniziale f_0 soddisfa le definizioni date nel paragrafo 2.2 e la sua esistenza è garantita per tutti i tempi, in virtù delle considerazioni svolte sopra.

La differenza sostanziale tra il risultato del Teorema (3.2) e quelli analoghi dovuti a Bouchut [B1] e Victory [V] risiede, come è già stato sottolineato, nel diverso approccio costruttivo al problema.

I teoremi di risolubilità classici per equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine sfruttano procedimenti di linearizzazione, che privilegiano l'effetto dell'operatore Laplaciano rispetto ai termini non lineari del sistema; ciò comporta, inevitabilmente, una dipendenza singolare dal parametro di diffusione σ delle stime sulla densità spaziale ρ e sul campo E .

L'originalità del metodo proposto in questa trattazione, basato sull'analisi delle traiettorie caratteristiche e sulla verifica di stime integrali del campo di forze, sta nel garantire la stabilità della soluzione rispetto alle perturbazioni stocastiche. In questa particolare circostanza si ottengono stime indipendenti dal coefficiente σ , che conservano validità anche dopo aver eseguito una operazione di limite per la rimozione del rumore browniano dal sistema. Allora, la teoria della risolubilità globale del sistema di Vlasov-Poisson segue passando per il problema stocasticizzato.

Da un punto di vista assolutamente formale l'equazione di Vlasov-Poisson,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \quad (3.25)$$

si ricava dall'equazione Vlasov-Poisson-Fokker-Planck,

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + E(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta_v f(t, x, v), \quad (3.26)$$

al limite per $\sigma \rightarrow 0$. Ciò in perfetto accordo con l'interpretazione fisica dei due modelli, secondo la quale il sistema (VP) descrive un fenomeno evolutivo che è l'analogo di quello schematizzato dal sistema (VPFP), in ipotesi di assenza di stocasticità.

Una verifica rigorosa, dal punto di vista matematico, di questa proprietà viene data provando che la soluzione del problema di Cauchy associato alla (3.26) converge nel $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$ alla corrispondente soluzione del problema di Cauchy associato alla (3.25), nel senso della convergenza debole per le funzioni di densità; ovvero, che il sistema delle caratteristiche stocastiche soluzione di (3.24) converge, traiettoria per traiettoria sull'intervallo $[0, T]$, $T > 0$ arbitrariamente fissato, al sistema delle caratteristiche classiche soluzione di

$$\begin{cases} dx = v dt \\ dv = E(t, x) dt, \end{cases} \quad (3.27)$$

nel $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$. Di entrambi i sistemi esiste una soluzione globale per ogni dato iniziale $(x_0, v_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $n = 2, 3$, in virtù della stima uniforme sul campo di forze E e la relazione (2.8) la lega a quella della EDP ad essi associata.

Teorema 3.3 *Sia $(X(t, 0, x_0, v_0; b), V(t, 0, x_0, v_0; b))$, $t \in [0, T]$, la traiettoria del processo stocastico soluzione del sistema (3.24) che parte al tempo 0 dal punto (x_0, v_0) , sottoposta all'azione del campione browniano $b \in \mathcal{C}_0^*([0, T])$. Sia $(X(t, 0, x_0, v_0), V(t, 0, x_0, v_0))$ il processo deterministico soluzione del sistema (3.27) con i medesimi parametri assegnati. Indicheremo, per brevità, queste grandezze con $(X_\sigma(t), V_\sigma(t))$ e $(X(t), V(t))$, rispettivamente.*

Allora

$$D_t^\sigma := \Xi [|X_\sigma(t) - X(t)| + |V_\sigma(t) - V(t)|],$$

con Ξ definita come in (2.23), verifica

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} D_t^\sigma = 0.$$

Dimostrazione. La tecnica è quella adottata per dimostrare la tesi della Proposizione (2.2) nel capitolo precedente.

Dalle relazioni integrali equivalenti ai sistemi differenziali ordinari (3.24) e (3.27) si ricava, per $t \in [0, T]$,

$$|X_\sigma(t) - X(t)| \leq \int_0^t |V_\sigma(s) - V(s)| ds, \quad (3.28)$$

$$|V_\sigma(t) - V(t)| \leq \int_0^t |E_\sigma(s, X_\sigma(s)) - E(s, X(s))| ds + \sigma |b(t)|. \quad (3.29)$$

Il modulo della differenza dei campi nella (3.29) si decompone nella somma di due termini,

$$\begin{aligned} |E_\sigma(s, X_\sigma(s)) - E(s, X(s))| &\leq \left| \int K(X_\sigma(s) - y) [\rho_\sigma(s, y) - \rho(s, y)] dy \right| + \\ &+ \left| \int [K(X_\sigma(s) - y) - K(X(s) - y)] \rho(s, y) dy \right| = I(s) + II(s), \end{aligned}$$

dove abbiamo attribuito un indice σ alle grandezze relative al sistema (VPFP). Ricordiamo l'espressione del nucleo integrale K nel caso tridimensionale, comune ai sistemi (VP) e (VPFP),

$$K(y) = \frac{y}{|y|^3}, \quad y \in \mathbf{R}^3.$$

L'applicazione K soddisfa le condizioni

$$|K(y)| \leq \frac{1}{|y|^2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial y_i} K(y) \right| \leq \frac{C}{|y|^3},$$

per ogni $(x, v) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, essendo C una costante reale positiva; da queste, nell'Appendice B, si deducono le stime di convoluzione su ogni funzione $\psi \in L^1(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$:

$$\|K * \psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq C_1 \left(\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.30)$$

e

$$\int |\psi(y)| |K(x - y) - K(x' - y)| dy \leq C_2 \varphi(|x - x'|) \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}, \quad (3.31)$$

dove

$$\varphi(r) := \begin{cases} r(1 - \ln r) & \text{per } r < 1 \\ 1 & \text{per } r \geq 1 \end{cases}$$

e le costanti C_1 e C_2 sono indipendenti opportunamente scelte.

Osserviamo che le proprietà appena descritte per il nucleo K tridimensionale costituiscono l'equivalente di quelle discusse nel paragrafo 2.3 per lo spazio bidimensionale. D'altra parte, il teorema che stiamo provando deve essere valido

anche in quest'ultimo caso, con una dimostrazione parallela a quella che stiamo dando.

La relazione (3.31), accompagnata dalla stima uniforme sulla densità spaziale per il problema (VP) ordinario, implica

$$II(s) \leq C_T \varphi(|X_\sigma(s) - X(s)|). \quad (3.32)$$

Per il termine $I(s)$ sviluppiamo il medesimo argomento per ottenere la (2.28) nella Proposizione (2.2); naturalmente, per il processo deterministico $(Y(s, 0, y, w), W(s, 0, y, w))$, $s \in [0, t]$, si utilizza la rappresentazione della densità (2.7) data nel paragrafo 2.2, su cui l'aspettazione agisce in modo banale. A meno di rinominare le variabili, concludiamo

$$\Xi[I(s)] \leq C \Xi[\varphi(|X_\sigma(s) - X(s)|)]. \quad (3.33)$$

Allora, applicando la Ξ sulle (3.28) e (3.29),

$$\begin{aligned} & \Xi[|X_\sigma(t) - X(t)| + |V_\sigma(t) - V(t)|] \leq \\ & \leq \int_0^t \Xi[|V_\sigma(s) - V(s)|] ds + 2C_T \int_0^t \Xi[\varphi(|X_\sigma(s) - X(s)|)] ds + \sigma \Xi[|b(t)|] \leq \\ & \leq C \left(\int_0^t \Xi[|V_\sigma(s) - V(s)|] ds + \int_0^t \varphi(\Xi[|X_\sigma(s) - X(s)|]) ds \right) + \sigma \Xi[|b(t)|], \end{aligned}$$

avendo utilizzato la (3.32), la (3.33) e la *disuguaglianza di Jensen* sul secondo addendo.

Perciò

$$D_t^\sigma \leq C \left(\int_0^t D_s^\sigma ds + \int_0^t \varphi(D_s^\sigma) ds \right) + \sigma \Xi[|b(t)|].$$

Sebbene la quantità $|b(t)|$ non sia uniformemente limitata per ogni singolo campione di moto browniano, potendo diventare arbitrariamente grande per l'irregolarità stessa del moto, essa lo è in media, quando si integra contro la misura $\mu(db)$, come si chiarisce dalle considerazioni svolte, per la prima parte del Teorema (3.1), nell'Appendice A.

Quindi

$$D_t^\sigma \leq \sigma C_T + C \left(\int_0^t D_s^\sigma ds + \int_0^t \varphi(D_s^\sigma) ds \right)$$

ed il *Lemma di Gronwall* consente di concludere che

$$D_t^\sigma \leq z_\sigma(t), \quad t \in [0, T],$$

con

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} z_\sigma(t) = 0,$$

Da questo segue immediatamente la tesi.

Dal risultato del Teorema (3.3) segue facilmente che, assegnata la funzione $f_0 = f_0(x, v)$ come dato iniziale per i problemi di Cauchy associati alle equazioni di Vlasov-Poisson e di Vlasov-Poisson-Fokker-Planck ed indicate con $f = f(t, x, v)$ e $f_\sigma = f_\sigma(t, x, v)$ le rispettive soluzioni (durante l'evoluzione del fenomeno la funzione di densità acquista dipendenza dai parametri del sistema), allora

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0}^* f_\sigma(t, x, v) = f(t, x, v)$$

per ogni $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $T > 0$ arbitrariamente fissato. Con $\lim_{\sigma \rightarrow 0}^*$ si intende la convergenza debole nel senso degli spazi L^p .

Questa proprietà vale identicamente per il problema sullo spazio bidimensionale. Possiamo, dunque, concludere che il sistema (VP) deriva dal sistema (VPFP) nel limite di diffusione nulla.

Appendice A

L'unico lemma probabilistico non elementare di cui si fa uso nel corso della trattazione è quello relativo alla proprietà del moto browniano

$$\mathbb{E}[\max_{s \in [0, t]} |b(s)| \geq \lambda] \leq 2\mathbb{E}[|b(t)| \geq \lambda], \quad \text{per } \lambda \geq 0,$$

introdotta nella (3.3) del paragrafo 3.1.

Si tratta di una disuguaglianza forte, che rappresenta l'estensione al continuo di un risultato, noto come *disuguaglianza massimale di Lévy*, valido per successioni discrete di variabili aleatorie a valori in \mathbf{R}^n , $n \geq 1$, la cui distribuzione di probabilità congiunta è invariante rispetto ad ogni cambio di segno per ciascuna di esse (enunciato rigoroso e dimostrazione si trovano in [SB], Teorema 3.6.5). Le ipotesi sono valide nel caso del moto browniano, per una discretizzazione dei tempi, poichè ciascun $b(t)$ è somma di incrementi indipendenti distribuiti secondo gaussiane ed il prodotto di gaussiane è chiaramente invariante per cambi di segno; per la rimozione della discretizzazione è determinante la proprietà di continuità delle traiettorie.

Particolarmente interessante è che si possa, addirittura, provare una uguaglianza: la dimostrazione in questa circostanza richiede di introdurre nuove nozioni relative ai processi stocastici ed alle loro traiettorie (definizione di *tempo di arresto*, *proprietà di Markov forte*); per i dettagli della discussione si rimanda a [SB].

Procediamo, adesso, alla verifica della decadenza esponenziale della quantità

$$\mathbb{E}[|b(t)| \geq \lambda],$$

nella costante $\lambda \geq 0$, per ogni $t \in [0, T]$ fissato.

Ricordiamo, per una corretta interpretazione, che l'aspettazione su un evento (più precisamente sulla sua funzione caratteristica) rappresenta la probabilità attribuita all'evento stesso rispetto alla misura che definisce l'aspettazione, perciò

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|b(t)| \geq \lambda] &= \text{Prob}\{|b(t)| \geq \lambda\} = 1 - \text{Prob}\{|b(t)| < \lambda\} = \\ &= 1 - \text{Prob}\{-\lambda < b(t) < \lambda\}. \end{aligned}$$

Nell'ultimo termine compare la probabilità che la variabile aleatoria $b(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ assuma valori nell'intervallo $(-\lambda, \lambda)$, che si esprime mediante un integrale della

funzione di densità di distribuzione della variabile stessa,

$$Prob\{-\lambda < b(t) < \lambda\} = \int_{-\lambda}^{\lambda} g_t(x) dx;$$

dunque

$$\begin{aligned} 1 - Prob\{-\lambda < b(t) < \lambda\} &= 1 - \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\} dx = \\ &= 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t}\right\} dx \end{aligned}$$

e quest'ultimo decresce esponenzialmente in λ^2 .

Abbiamo, allora, provato la proprietà

$$\mathbb{E}[|b(t)| \geq \lambda] \leq C_T e^{-\lambda^2}, \quad \lambda \geq 0.$$

Questa stima, nel caso in cui sia $\lambda = cost|v|$, giustifica l'affermazione secondo la quale "le zone a velocità elevate sono poco probabili"

$$\int dv \mathbb{E}[|b(t)| \geq cost|v|] \leq C_T \int dv \exp\{-cost|v|^2\} \leq C_T$$

e consente di controllare facilmente i termini di probabilità pura, dovuti ai cam-
pioni degeneri del moto browniano, nelle stime del Teorema (3.1).

Appendice B

Si vogliono dimostrare le disuguaglianze (3.30) e (3.31), utilizzate nella verifica del Teorema (3.3).

Sulla loro validità è basato il criterio di risolubilità per il sistema differenziale (3.24). Queste, infatti, garantiscono l'uniforme limitatezza del campo di forze E , in virtù della stima uniforme sulla densità spaziale ρ . Sebbene E non soddisfi la condizione di Lipschitz, dalla (3.31) segue la maggiorazione

$$|E(t, x) - E(t, y)| = |[K * \rho](t, x) - [K * \rho](t, y)| \leq C_2 \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \varphi(|x - y|),$$

detta *condizione quasi-Lipschitz*, che corregge quella classica per un fattore con divergenza logaritmica. Ovviamente, essa è più debole della condizione di Lipschitz, ma è sufficiente per provare (con il classico metodo iterativo della *variazione*

delle costanti) esistenza ed unicità della soluzione del problema differenziale ordinario (3.24), per ogni fissato campione browniano $b \in \mathcal{C}_0^*$.

La situazione è analoga, almeno sotto il profilo tecnico, a quella che si presenta nello studio dell'equazione di Eulero della fluidodinamica.

Sia $R \geq 0$ arbitrariamente fissato, allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^3} K(x-y)\psi(y)dy \right| &\leq \int_{\mathbf{R}^3} |K(x-y)||\psi(y)|dy \leq \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} |\psi(y)|dy = \\ &= \int_{|x-y| \leq R} + \int_{|x-y| > R} \leq \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \int_0^R \frac{1}{\xi^2} 4\pi\xi^2 d\xi + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{R}^3} |\psi(y)|dy = \\ &= 4\pi R \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} + \frac{1}{R^2} \|\psi\|_{L^1(\mathbf{R}^3)}; \end{aligned}$$

ottimizzando il valore di R ,

$$|[K * \psi](x)| \leq C_1 \left(\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \right)^{\frac{2}{3}},$$

che conclude la dimostrazione della (3.30).

Per la (3.31), fissiamo $r = |x - x'|$ e distinguiamo i due casi $r \geq 1$ ed $r < 1$. Nel primo caso maggioriamo il modulo della differenza con la somma dei moduli e concludiamo dalla (3.30),

$$\int |\psi(y)||K(x-y) - K(x'-y)|dy \leq 2C_1 \left(\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \right)^{\frac{2}{3}} \leq C_2 \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)},$$

con C_2 determinata opportunamente in funzione del valore, finito, della $\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}$. Nel secondo caso, introduciamo

$$A := \left\{ y \in \mathbf{R}^3 / |x - y| \leq 2r \right\}$$

e decomponiamo

$$\int |\psi(y)||K(x-y) - K(x'-y)|dy = \int_A + \int_{A^c},$$

con A^c complementare di A in \mathbf{R}_y^3 . Allora, per le proprietà del nucleo K ,

$$\begin{aligned} &\int_A |\psi(y)||K(x-y) - K(x'-y)|dy \leq \\ &\leq \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \int_A (|K(x-y)| + |K(x'-y)|) dy \leq \\ &\leq \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \int_{|x-y| \leq 2r} \left(\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x'-y|^2} \right) dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \int_{|x-y|\leq 3r} \frac{1}{|x-y|^2} dy = \\
&= 2\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \int_0^{3r} \frac{1}{\xi^2} 4\pi\xi^2 d\xi = C_2\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} r.
\end{aligned}$$

Rispetto al secondo centro x' , un punto $y \in A^c$ verifica la condizione $|x' - y| \geq \frac{1}{2}|x - y|$, perciò

$$\begin{aligned}
&\int_{A^c} |\psi(y)| |K(x - y) - K(x' - y)| dy \leq \int_{A^c} |\psi(y)| |\nabla K(x' - y)| |x - x'| dy \leq \\
&\leq r \int_{A^c} |\psi(y)| |\nabla K(x' - y)| dy \leq Cr \int_{A^c} |\psi(y)| \frac{1}{|x' - y|^3} dy = \\
&= Cr \left[\int_{r < |x' - y| < 2} |\psi(y)| \frac{1}{|x' - y|^3} dy + \int_{|x' - y| \geq 2} |\psi(y)| \frac{1}{|x' - y|^3} dy \right] \leq \\
&\leq Cr \left[\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \int_r^2 \frac{1}{\xi^3} 4\pi\xi^2 d\xi + \frac{1}{8} \|\psi\|_{L^1(\mathbf{R}^3)} \right] \leq \\
&\leq Cr \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \left[4\pi \ln \xi \Big|_r^2 + \frac{\|\psi\|_{L^1(\mathbf{R}^3)}}{8\|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}} \right] \leq \\
&\leq C_2 r \|\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} (1 - \ln r),
\end{aligned}$$

con C_2 opportunamente scelta.

Questo completa la verifica.

Bibliografia

- [A] ARSENEV, A.A., *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, U.S.S.R. Comput. Math. Phys., **15** (1975), 131-143
- [B] BATT, J., *Global Symmetric Solutions of the Initial Value Problem of Stellar Dynamics*, J. Differential Equations, **25** (1977), 342-364
- [BD] BARDOS, C. e DEGOND, P., *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, **2** (1985), 101-118
- [BH] BRAUN, W. e HEPP, K., *The Vlasov Dynamics and its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles*, Commun. Math. Phys., **56** (1977), 101-113
- [BI] BILLINGSLEY, P., *Probability and measure*, 3rd ed., Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1995, 498-525
- [B1] BOUCHUT, F., *Existence and Uniqueness of a Global Smooth Solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System in three Dimensions*, J. Funct. Anal., **111** (1993), no.1, 239-258
- [B2] BOUCHUT, F., *Smoothing Effect for the Non-linear Vlasov-Poisson-Fokker-Planck System*, J. Differential Equations, **122** (1995), 225-238
- [C] CHANDRASEKHAR, S., *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Rev. Mod. Phys., **15** (1943)

ristampato in

WAX,N., editore, *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, New York, Dover publications, Inc., 1954

- [CS] CARRILLO,J.A. e SOLER,J., *On the initial value problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with initial data in L^p spaces*, Math. Methods Appl. Sci., **18** (1995), no.10, 825-839
- [D] DOBRUSHIN,R.L., *Vlasov Equations*, Funct. Anal. and Appl., **13** (1979), 115-123
- [DE] DEGOND,P., *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimentionis*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **19** (1986), no.4, 519-542
- [DP] DU PLESSIS,N., *Some theorems about the Riesz fractional integral*, Trans. Amer. Math. Soc., **80** (1955), 124-134
- [DPL] DI PERNA, R.J. e LIONS, P.L., *Global weak solutions of kinetic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **46** (1988), no.3, 259-288
- [GLS] GLASSEY,R. e SCHAEFFER,J., *On Symmetric Solutions of the Relativistic Vlasov-Poisson System*, Commun. Math. Phys., **101** (1985), 459-473
- [GS] GIHMAN,I.I. e SKOROHOD,A.V., *Stochastic Differential Equations*, Berlin, Springer-Verlag, 1972
- [H1] HORST,E., *On the Classical Solutions of the Initial Value Problem for the Unmodified Non-linear Vlasov Equation I.*, Math. Meth. Appl. Sci., **3** (1981), 229-248

- [H2] HORST,E., *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation II.*, Math. Meth. Appl. Sci., **4** (1982), 19-32
- [HH] HORST,E. e HUNZE,R., *Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation*, Math. Meth. Appl. Sci., **6** (1984), 262-279
- [I] IORDANSKII,S.V., *The Cauchy Problem for the kinetic equation of plasma*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser.2, **35** (1964), 351-363
- [IN] ILLNER,R. e NEUNZERT,H., *An existence theorem for the unmodified Vlasov equation*, Math. Meth. Appl. Sci., **1** (1979), 530-540
- [MP] MARCHIORO,C. e PULVIRENTI,M., *Hydrodynamics in Two Dimentions and Vortex Theory*, Commun. Math. Phys., **84** (1982), 483-503
- [MK] MCKEAN JR.,H.P., *Propagation of Chaos for a Class of Nonlinear Parabolic Equations*, Lectures in Differential Equations (ed. A.K.Aziz), vol II.(1969), 177-194
- [N] NEUNZERT,H., *An Introduction to the Nonlinear Boltzmann-Vlasov Equation*, Kinetic theories and the Boltzmann equation (Montecatini, 1981), Lecture Notes in Mathematics, Berlin-New York, Springer, 1984, 60-110
- [NPT] NEUNZERT,H., PULVIRENTI,M. e TRIOLO,L., *On the Vlasov-Fokker-Planck Equation*, Math. Meth. Appl. Sci., **6** (1984), 527-538
- [OU] OKABE,S. e UKAI,T., *On classical solutions in the large in time of the two-dimentional Vlasov's equation*, Osaka J. Math., **15** (1978), 245-261
- [P] PFAFFELMOSER,K., *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimentions for general initial data*, J. Differential Equations, **95** (1992), no.2, 281-303

- [S1] SCHAEFFER, J., *Global existence for the Vlasov-Poisson system with nearly symmetric data*, J. Differential Equations, **69** (1987), 111-148
- [S2] SCHAEFFER, J., *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1313-1335
- [SB] SIMON, B., *Functional Integration and Quantum Physics*, Pure and Applied Mathematics, New York, Academic Press, 1979, 25, 64-67
- [V] VICTORY, H.D., Jr., *On the existence of global weak solutions for Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems*, J. Math. Anal. Appl., **160** (1991), no.2, 525-555
- [VD] VICTORY, H.D., Jr. e O'DWYER, B.P., *On classical solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, Indiana Univ. Math. J., **39** (1990), no.1, 105-156
- [W] WOLLMAN, S., *Global-in-Time Solutions to the Three-Dimensional Vlasov-Poisson System*, J. Math. Anal. Appl., **176** (1993), no.1, 76-91