



HAL
open science

Expression matricielle des drapeaux complets d'extensions riemanniennes sur une variété compacte connexe

Cyrille Dadi, Adolphe Codjia

► **To cite this version:**

Cyrille Dadi, Adolphe Codjia. Expression matricielle des drapeaux complets d'extensions riemanniennes sur une variété compacte connexe . 2014. hal-00931863

HAL Id: hal-00931863

<https://hal.science/hal-00931863>

Preprint submitted on 3 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Expression matricielle des drapeaux complets d'extensions riemanniennes sur une variété compacte connexe

*Cyrille Dadi⁽¹⁾ et Adolphe Codjia⁽²⁾
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
Université Félix Houphouët-Boigny, ENS
08 BP 10 Abidjan (Côte d'Ivoire)*

email⁽¹⁾ : cyriledadi@yahoo.fr , email⁽²⁾ : ad_wolf2000@yahoo.fr

September 3, 2016

Abstract

In this paper we express with a matrix a complete flag of riemannian extension on a riemannian compact manifold whose metric is bundlelike for any foliation of this flag.

Keywords: *transversely diagonal riemannian foliation, extension of a foliation, complete flag of riemannian extension.*

1 Introduction

Nous signalons avant tout propos que l'idée de ce papier nous est venue de la preuve du théorème de structure des drapeaux riemanniens complets de H. Diallo se trouvant dans [7].

Soit $(M_1, \mathcal{F}_1), (M_2, \mathcal{F}_2), \dots, (M_q, \mathcal{F}_q)$ q feuilletages riemanniens transversalement orientable de codimension un chacun, $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_q$, $\tilde{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_k \times M_{k+1} \times M_2 \times \dots \times M_q$, $(U_i^k, f_i^k, T^k, \gamma_{ij}^k)_{i \in I^k}$ un cocycle feuilleté définissant (M_k, \mathcal{F}_k) , $\tilde{T}^k = T^1 \times T^2 \times \dots \times T^k$, p_s la projection de M sur M_s , \bar{p}_s la projection de \tilde{T}^q sur T^s , $\tilde{U}_i^k = U_i^1 \times U_i^2 \times \dots \times U_i^k \times M_{k+1} \times M_2 \times \dots \times M_q$, $\tilde{f}_i^k = (f_i^1 \circ p_1, f_i^2 \circ p_2, \dots, f_i^k \circ p_k)$ et $\tilde{\gamma}_{ij}^k = (\gamma_{ij}^1 \circ \bar{p}_1, \gamma_{ij}^2 \circ \bar{p}_2, \dots, \gamma_{ij}^k \circ \bar{p}_k)$.

On vérifie aisément que $(\tilde{U}_i^k, \tilde{f}_i^k, \tilde{T}^k, \tilde{\gamma}_{ij}^k)$ est un cocycle feuilleté définissant le feuilletage riemannien $\tilde{\mathcal{F}}_k$ de codimension k .

On a $\tilde{\mathcal{F}}_q \subset \tilde{\mathcal{F}}_{q-1} \subset \dots \subset \tilde{\mathcal{F}}_1$. On dira que la suite $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{F}}_q} = (\tilde{\mathcal{F}}_q, \tilde{\mathcal{F}}_{q-1}, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_1)$ est un drapeau complet d'extension riemannienne du feuilletage riemannien $\tilde{\mathcal{F}}_q$ sur M .

De façon précise, étant donné un feuilletage \mathcal{F}_q de codimension q sur une variété M , un drapeau d'extension du feuilletage \mathcal{F}_q est une suite $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}^k = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_k)$ de feuilletages sur la variété M telle que $\mathcal{F}_q \subset \mathcal{F}_{q-1} \subset \mathcal{F}_{q-2} \subset \dots \subset \mathcal{F}_k$ et chaque feuilletage \mathcal{F}_s est de codimension s .

Pour $k = 1$, le drapeau d'extension $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}^k$ sera dit complet et sera noté $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}$.

Si chaque feuilletage \mathcal{F}_s est riemannien, le drapeau d'extension $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}^k$ sera appelé drapeau d'extension riemannienne du feuilletage \mathcal{F}_q .

Ceci dit, on désigne par X_k le champ unitaire de T^k orientant T^k et $(X_k)^{h_k}$ le relèvement de X_k sur le fibré tangent $T\tilde{T}^q$ de \tilde{T}^q .

On vérifie aisément [13] que $[(X_k)^{h_k}, (X_s)^{h_s}] = 0$ pour $k \neq s$. On obtient ainsi un système de coordonnées (x_q, \dots, x_1) sur \tilde{T}^q tel que $\frac{\partial}{\partial x_k} = (X_k)^{h_k}$. Comme chaque γ_{ij}^k est une isométrie locale de T^k alors relativement au système de coordonnées (x_q, \dots, x_1) la matrice jacobienne $J_{\tilde{\gamma}_{ij}^k}$ de $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ vérifie:

$$J_{\tilde{\gamma}_{ij}^k} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij}^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ij}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ij}^3 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{ij}^k \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_{ij}^r = \pm 1$.

De ce qui précède le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_k$ sera dit riemannien transversalement diagonal.

De façon précise un feuilletage \mathcal{F} sur une variété N est dit transversalement diagonal si et seulement s'il est défini par un cocycle feuilleté $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ tel que les ouverts U_i soient \mathcal{F} -distingués et sur chaque ouvert $f_i(U_i)$ il existe un système $(y_q^i, y_{2,\dots}^i, y_1^i)$ de coordonnées \mathcal{F} -transverses locales tel que relativement aux systèmes $((y_q^i, y_{2,\dots}^i, y_1^i))_{i \in I}$ de coordonnées \mathcal{F} -transverses locales sur les ouverts $f_i(U_i)$, la matrice jacobienne $J_{\gamma_{ij}}$ de γ_{ij} soit diagonale. Dans le cas où il existe une métrique g_T sur la variété transverse T telle que les γ_{ij} soient des isométries locales pour cette métrique, on dit que \mathcal{F} est riemannien transversalement diagonal.

Le premier but de ce papier est de montrer que l'existence d'un feuilletage transversalement diagonal \mathcal{F} sur une variété entraîne l'existence d'un drapeau complet d'extension de \mathcal{F} . Le second but de ce papier est de donner un exemple *non trivial* de feuilletage riemannien transversalement diagonal. On montre en effet que si \mathcal{F}_q est un feuilletage riemannien de codimension q admettant un drapeau complet d'extension riemannienne $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$ sur une variété compacte connexe N et s'il existe une métrique \mathcal{F}_s -quasifibrée commune g à tous les feuilletages \mathcal{F}_s alors chaque feuilletage \mathcal{F}_s est transversalement diagonal.

Dans tout ce qui suit, les variétés considérées sont supposées connexes et la différentiabilité C^∞ .

2 Rappels

Dans ce paragraphe, nous reformulons dans le sens qui nous est utile certaines définitions et certains théorèmes qui se trouvent dans ([2],[3], [4], [5], [7],[8] [9],[13,13]).

Définition 2.1 Une extension d'un feuilletage (M, \mathcal{F}) de codimension q est un feuilletage (M, \mathcal{F}') de codimension q' tel que $0 < q' < q$ et les feuilles de (M, \mathcal{F}') sont des réunions de feuilles de (M, \mathcal{F}) (on notera $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$).

On montre que si (M, \mathcal{F}') est une extension simple d'un feuilletage simple (M, \mathcal{F}) et si (M, \mathcal{F}) et (M, \mathcal{F}') sont définis respectivement par les submersions $\pi : M \rightarrow T$ et $\pi' : M \rightarrow T'$, alors il existe une submersion $\theta : T \rightarrow T'$ telle que $\pi' = \theta \circ \pi$.

On dira que la submersion θ est une liaison entre le feuilletage (M, \mathcal{F}) et son feuilletage extension (M, \mathcal{F}') .

On montre dans [4] que si le feuilletage (M, \mathcal{F}) et son extension (M, \mathcal{F}') sont définis respectivement par les cocycles $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ et $(U_i, f'_i, T', \gamma'_{ij})_{i \in I}$ alors on a

$$f'_i = \theta_i \circ f_i \quad \text{et} \quad \gamma'_{ij} \circ \theta_j = \theta_i \circ \gamma_{ij}$$

où θ_s est une liaison entre le feuilletage (U_s, \mathcal{F}) et son feuilletage extension (U_s, \mathcal{F}') .

Proposition 2.2 Etant donné un feuilletage (M, \mathcal{F}) de variété transverse modèle T , soit T' une variété de dimension $q' > 0$. Si les difféomorphismes locaux de transition de \mathcal{F} préservent les fibres d'une submersion de T sur T' , alors le feuilletage \mathcal{F} admet une extension de codimension q' et de variété modèle transverse T' .

En utilisant le théorème de décomposition de Blumenthal-Hebda [3], le théorème suivant se démontre de la même façon que le théorème de structure des drapeaux riemanniens complets se trouvant dans [7] :

Théorème 2.3 Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$ un drapeau complet d'extension riemannienne d'un feuilletage riemannien \mathcal{F}_q de codimension q sur une variété compacte connexe M et pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $\tilde{\mathcal{F}}_k$ désigne le feuilletage relevé de \mathcal{F}_k sur le revêtement universel \tilde{M} de M .

S'il existe une métrique g quasi-fibrée commune pour \mathcal{F}_q et pour chaque feuilletage du drapeau complet d'extension $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}$ alors:

1) Chaque feuilletage \mathcal{F}_k est transversalement intégrable et transversalement parallélisable. Les champs de vecteurs du parallélisme \mathcal{F}_k -transverse $(Y_s)_{0 \leq s \leq k-1}$ sont orthogonaux. Pour $s \neq 0$, chaque champ de vecteurs Y_s est une section unitaire de $(T\mathcal{F}_{s+1})^\perp \cap (T\mathcal{F}_s)$ et Y_0 est une section unitaire de $(T\mathcal{F}_1)^\perp$ où $(T\mathcal{F}_k)^\perp$ désigne le fibré orthogonal de $T\mathcal{F}_k$. De plus chaque champ de vecteurs Y_s oriente le flot qu'il engendre.

2) Le drapeau $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}$ se relève sur \widetilde{M} en un drapeau simple

$\mathcal{D}_{\widetilde{\mathcal{F}}_q} = (\widetilde{\mathcal{F}}_{q-1}, \widetilde{\mathcal{F}}_{q-2}, \dots, \widetilde{\mathcal{F}}_1)$ d'extension riemannien du feuilletage riemannien $\widetilde{\mathcal{F}}_q$. De plus le revêtement universel \widetilde{M} est difféomorphe à $\widetilde{L}_q \times \widetilde{L}_{Y_{q-1}} \times \widetilde{L}_{Y_{q-2}} \times \dots \times \widetilde{L}_{Y_0}$ où \widetilde{L}_q est une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_q$ et \widetilde{L}_{Y_k} est une feuille du flot relevé $\widetilde{\mathcal{F}}_{Y_k}$ du flot \mathcal{F}_{Y_k} de Y_k sur le revêtement universel \widetilde{M} de M .

Relativement à la métrique \widetilde{g} relevée de g sur le revêtement universel \widetilde{M} de M , chaque feuille \widetilde{L}_{Y_k} est orthogonal à \widetilde{L}_q et pour $k \neq s$ les feuilles \widetilde{L}_{Y_k} et \widetilde{L}_{Y_s} sont orthogonaux.

3) Toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ est difféomorphe à $\widetilde{L}_q \times \widetilde{L}_{Y_{q-1}} \times \widetilde{L}_{Y_{q-2}} \times \dots \times \widetilde{L}_{Y_k} \times \{p\}$ où $p \in \widetilde{L}_{Y_{k-1}} \times \widetilde{L}_{Y_{k-2}} \times \dots \times \widetilde{L}_{Y_0}$.

Toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_k^\perp$ est difféomorphe à $\{p\} \times \widetilde{L}_{Y_{k-1}} \times \widetilde{L}_{Y_{k-2}} \times \dots \times \widetilde{L}_{Y_0}$ où $p \in \widetilde{L}_q \times \widetilde{L}_{Y_{q-1}} \times \widetilde{L}_{Y_{q-2}} \times \dots \times \widetilde{L}_{Y_k}$.

On notera que le parallélisme \mathcal{F}_q -transverse $(Y_s)_{0 \leq s \leq q-1}$ sera dit parallélisme \mathcal{F}_q -transverse de Diallo associé à $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}$.

La version locale du théorème précédent est:

Corollaire 2.4 Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$ un drapeau complet d'extension riemannienne d'un feuilletage riemannien \mathcal{F}_q de codimension q sur une variété riemannienne compacte connexe (M, g) .

Si la métrique g est quasi-fibrée pour chacun des feuilletages, alors il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de la variété M et un unique parallélisme \mathcal{F}_q -transverse $(Y_s)_{0 \leq s \leq q-1}$ de M tel que:

i) Chaque ouvert U_i est difféomorphe au produit $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ où L_q^i est une feuille de la restriction \mathcal{F}_q^i à U_i de \mathcal{F}_q et $L_{Y_k}^i$ est une feuille de la restriction $\mathcal{F}_{Y_k}^i$ à U_i du flot \mathcal{F}_{Y_k} de Y_k . Toute feuille $L_{Y_k}^i$ est orthogonale à L_q^i et pour $k \neq s$ les feuilles $L_{Y_k}^i$ et $L_{Y_s}^i$ sont orthogonaux relativement à la métrique g de M .

ii) Toute feuille de la restriction \mathcal{F}_k^i à U_i de \mathcal{F}_k est difféomorphe à $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_k}^i \times \{p\}$ où $p \in L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ et toute feuille de $\mathcal{F}_k^{i\perp}$ est difféomorphe à $\{p\} \times L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ où $p \in L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_k}^i$. Le feuilletage $\mathcal{F}_k^{i\perp}$ étant la restriction à U_i du feuilletage transverse orthogonal \mathcal{F}_k^\perp de \mathcal{F}_k .

Nous terminons ces rappels par la proposition suivante se trouvant dans [13]. Elle nous permettra de construire un système de coordonnées locales dans la preuve du théorème 3.2 qui est le théorème principal de papier se trouvant dans le paragraphe suivant.

Proposition 2.5 Soit $M \times N$ le produit de deux variétés M et N , $X_i \in \mathcal{X}(M)$, $Y_j \in \mathcal{X}(N)$,

$$R^{h_1} : \begin{array}{ccc} T_x M & \rightarrow & T_{(x,y)} M \times N \\ u & \mapsto & u^{h_1} = (u, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad R^{h_2} : \begin{array}{ccc} T_x N & \rightarrow & T_{(x,y)} M \times N \\ w & \mapsto & w^{h_2} = (0, w) \end{array} .$$

Alors

$$\left[X_1^{h_1}, X_2^{h_1} \right] = [X_1, X_2]^{h_1}, \left[Y_1^{h_2}, Y_2^{h_2} \right] = [Y_1, Y_2]^{h_2} \text{ et } \left[X_1^{h_1}, Y_2^{h_2} \right] = 0.$$

3 Expression matricielle des drapeaux complets d'extensions riemanniennes sur une variété compacte connexe

Il y a un lien entre les feuilletages transversalement diagonaux et les drapeaux complets d'extension.

De façon précise on a:

Proposition 3.1 *Soit \mathcal{F}_q un feuilletage transversalement diagonal de codimension q sur une variété M .*

Alors \mathcal{F}_q admet un drapeau complet d'extension $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$.

Preuve. Soit $(U_i^q, f_i^q, T^q, \gamma_{ji}^q)_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant le feuilletage transversalement diagonal \mathcal{F}_q et $((y_q^i, y_{q-1}^i, \dots, y_1^i))_{i \in I}$ les systèmes de coordonnées \mathcal{F}_q -transverses sur les $f_i^q(U_i^q)$ suivant lesquels $J_{\gamma_{ij}^q}$ est diagonale. Soit également le système différentiel

$$P_x^{qi} = \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} f_{ik}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y_k^i}(x) / f_{ik} : f_i^q(U_i^q) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^\infty \right\}$$

intégrable sur $f_i^q(U_i^q)$ et \mathcal{U}_i^{q-1} une feuille de ce système différentiel.

Notons que $J_{\gamma_{ji}^q} = (\lambda_{jirs}^q)_{rs}$ étant une matrice inversible et diagonale à tous ses éléments diagonaux non nuls.

Ceci dit, quitte à réduire la "taille" des ouverts U_i^q , on peut considérer un recouvrement $(U_i^q)_{i \in I}$ de la variété M tel que dans chaque $f_i^q(U_i^q)$ le flot de $\frac{\partial}{\partial y_q^i}$ et le système différentiel intégrable $x \rightarrow P_x^{qi}$ définissent des feuilletages simples.

Soit $\theta_i^q : f_i^q(U_i^q) \rightarrow \mathcal{U}_i^{q-1}$ la projection sur \mathcal{U}_i^{q-1} suivant le flot $\mathcal{F}_{\theta_i^q}$ de $\frac{\partial}{\partial y_q^i}$.

Il est claire que \mathcal{U}_i^{q-1} est une variété quotient du feuilletage simple $\mathcal{F}_{\theta_i^q}$.

La variété T^q peut être considérée comme une union disjointe des $f_i^q(U_i^q)$. Par conséquent nous pouvons affirmer que les submersions θ_i^q définissent une submersion θ^q sur T^q dont la restriction à chaque $f_i^q(U_i^q)$ est θ_i^q .

Comme

$$\left(\gamma_{ji}^q \right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_q^i} \right) = (\lambda_{jirs}^q)_{rs} \left(\frac{\partial}{\partial y_q^j} \right) = \lambda_{ji11}^q \cdot \frac{\partial}{\partial y_q^j} \text{ et } \lambda_{ji11}^q \neq 0$$

alors les γ_{ji}^q préservent les fibres de la submersion θ^q .

Il résulte de cela ([4], [5]) (cf.prop.2.2) que le feuilletage \mathcal{F}_q de codimension q a une extension \mathcal{F}_{q-1} de codimension $q-1$.

On pose

$$f_i^{q-1} = \theta_i^q \circ f_i^q$$

et

$$T^{q-1} = \bigcup_{i \in I} \theta_i^q \circ f_i^q (U_i^q) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i^{q-1}$$

et

$$\theta_i^q \circ f_r^q (U_r^q \cap U_s^q) = \mathcal{V}_{rs}^{q-1}$$

pour $U_r^q \cap U_s^q \neq \emptyset$.

Comme γ_{ji}^q préserve les fibres de la submersion θ^q alors γ_{ji}^q induit un difféomorphisme local $\gamma_{ji}^{q-1} : \mathcal{V}_{ij}^{q-1} \rightarrow \mathcal{V}_{ji}^{q-1}$ et ce difféomorphisme vérifie ([4], [5]) (cf *def.2.1*) l'égalité

$$\gamma_{ji}^{q-1} \circ \theta_i^q = \theta_j^q \circ \gamma_{ji}^q.$$

On vérifie aisément que $(U_i^q, f_i^{q-1}, T^{q-1}, \gamma_{ji}^{q-1})_{i \in I}$ est un cocycle feuilleté définissant l'extension \mathcal{F}_{q-1} de \mathcal{F}_q .

Montrons maintenant que le feuilletage \mathcal{F}_{q-1} est transversalement diagonal.

On a $\left[\frac{\partial}{\partial y_i^q}, \frac{\partial}{\partial y_k^q} \right] = 0$ pour tout k . D'où les $q-1$ champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y_{q-1}^q}, \frac{\partial}{\partial y_{q-2}^q}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_1^q}$ sont feuilletés pour le flot de $\frac{\partial}{\partial y_i^q}$. Par conséquent $(\theta^q)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k^q} \right)$ est un champ de vecteurs sur \mathcal{U}_i^{q-1} pour tout $k \leq q-1$.

Or les $q-1$ champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y_{q-1}^q}, \frac{\partial}{\partial y_{q-2}^q}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_1^q}$ sont tangents à \mathcal{U}_i^{q-1} en tout point de \mathcal{U}_i^{q-1} donc pour $k \neq q$ et $a \in f_i^q (U_i^q)$ on a

$$(\theta_i^q)_{*a} \left(\frac{\partial}{\partial y_k^q} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k^q} (\theta_i^q (a)).$$

Par conséquent les $q-1$ champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y_{q-1}^q}, \frac{\partial}{\partial y_{q-2}^q}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_1^q}$ définissent un système de coordonnées $\mathcal{F}_{\theta_i^q}$ -transverse sur \mathcal{U}_i^{q-1} que l'on notera encore $(y_{q-1}^i, \dots, y_1^i)$.

Pour plus de clarté dans l'exposé on pose pour la suite

$$(\theta_i^q)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k^q} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k^i} / \mathcal{U}_i^{q-1}.$$

En utilisant l'égalité

$$\gamma_{ji}^{q-1} \circ \theta_i^q = \theta_j^q \circ \gamma_{ji}^q$$

on obtient pour $k \neq q$,

$$\begin{aligned}
\left(\gamma_{ji}^{q-1}\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k^i / \mathcal{U}_i^{q-1}}\right) &= \left(\gamma_{ji}^{q-1}\right)_* \circ (\theta_i^q)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k^i}\right) \\
&= (\theta_j^q)_* \circ \left(\gamma_{ji}^q\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k^i}\right) \\
&= (\theta_j^q)_* \left(\lambda_{ij(q-k+1)(q-k+1)}^q \cdot \frac{\partial}{\partial y_k^j}\right) \\
&= \lambda_{ij(q-k+1)(q-k+1)}^q (\theta_j^q)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_k^j}\right) \\
&= \lambda_{ij(q-k+1)(q-k+1)}^q \cdot \frac{\partial}{\partial y_k^j / \mathcal{U}_j^{q-1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi le feuilletage \mathcal{F}_{q-1} est transversalement diagonal.

Avant de terminer on notera que l'égalité

$$\gamma_{ji}^{q-1} \circ \theta_i^q = \theta_j^q \circ \gamma_{ji}^q$$

montre que

$$J_{\gamma_{ji}^{q-1}} \cdot J_{\theta_i^q} = J_{\theta_j^q} \cdot J_{\gamma_{ji}^q}$$

où $J_{\theta_s^q}$ est la matrice jacobienne de θ_s^q . Or

$$J_{\theta_s^q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $J_{\gamma_{ij}^{q-1}}$ s'obtient en supprimant la première ligne et la première colonne de $J_{\gamma_{ij}^q}$.

On construit $\mathcal{F}_{q-2}, \mathcal{F}_{q-3}, \dots, \mathcal{F}_1$ en utilisant la même technique de construction de \mathcal{F}_{q-1} .

On note que chaque feuilletage \mathcal{F}_k sera défini par $(U_i^q, f_i^k, T^k, \gamma_{ji}^k)_{i \in I}$ un cocycle feuilleté où θ_i^k est définie de façon analogue à θ_i^q , $f_i^{k-1} = \theta_i^k \circ f_i^k$, $T^k = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i^k$ avec \mathcal{U}_i^k définie de façon analogue à \mathcal{U}_i^{q-1} et $\gamma_{ji}^{k-1} \circ \theta_i^k = \theta_j^k \circ \gamma_{ji}^k$. ■

On notera que si le feuilletage \mathcal{F}_q transversalement diagonal est riemannien transversalement diagonal relativement à la métrique transverse g_T et si les champs de vecteurs locaux $\frac{\partial}{\partial y_k^i}$ sont des champs de killing pour la métrique g_T pour tout i et tout k alors les feuilletages du drapeau complet d'extension

$\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$ sont des feuilletages riemanniens transversalement diagonaux et il existe une métrique quasi-fibré commune à tous les feuilletages riemanniens \mathcal{F}_k . En effet dans ce cas les submersions θ_i^k sont des submersions riemanniennes pour tout i et tout k . Et, la relation $\gamma_{ji}^{k-1} \circ \theta_i^k = \theta_j^k \circ \gamma_{ji}^k$ entraîne que γ_{ji}^{k-1} est une isométrie locale dès que γ_{ji}^k est une isométrie locale.

Sous certaines conditions qui sont précisées dans le théorème 3.2, la proposition précédente admet une réciproque.

Dans la preuve du résultat qui suit on donne une expression matricielle des drapeaux complets d'extension riemannienne d'un feuilletage riemannien.

Théorème 3.2 *Soit \mathcal{F}_q un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte connexe M et h une métrique \mathcal{F}_q -quasi-fibré sur M .*

Si le feuilletage \mathcal{F}_q admet un drapeau complet d'extension riemannienne $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$ tel que la métrique h soit quasi-fibré commune à tous les feuilletages riemanniens \mathcal{F}_k alors chaque feuilletage \mathcal{F}_k est riemannien transversalement diagonal.

Preuve. On suppose que le feuilletage \mathcal{F}_q admet un drapeau complet d'extension riemannienne $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q} = (\mathcal{F}_{q-1}, \mathcal{F}_{q-2}, \dots, \mathcal{F}_1)$ tel que la métrique h soit quasi-fibré commune à tous les feuilletages riemanniens \mathcal{F}_k .

D'après le corollaire 2.4 il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de la variété M et un unique parallélisme \mathcal{F}_q -transverse $(Y_s)_{0 \leq s \leq q-1}$ de Diallo de M tel que:

i) Chaque ouvert U_i est diffeomorphe au produit $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ où L_q^i est une feuille de la restriction \mathcal{F}_q^i à U_i de \mathcal{F}_q et $L_{Y_k}^i$ est une feuille de la restriction $\mathcal{F}_{Y_k}^i$ à U_i du flot \mathcal{F}_{Y_k} de Y_k . Toute feuille $L_{Y_k}^i$ est orthogonale à L_q^i et pour $k \neq s$ les feuilles $L_{Y_k}^i$ et $L_{Y_s}^i$ sont orthogonaux relativement à la métrique h de M .

ii) Toute feuille de la restriction \mathcal{F}_k^i à U_i de \mathcal{F}_k est diffeomorphe à $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_k}^i \times \{p\}$ où $p \in L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ et toute feuille de $\mathcal{F}_k^{i\perp}$ est diffeomorphe à $\{p\} \times L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ où $p \in L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_k}^i$. Le feuilletage $\mathcal{F}_k^{i\perp}$ étant la restriction à U_i du feuilletage transverse orthogonal \mathcal{F}_k^\perp de \mathcal{F}_k .

Ceci dit, dans toute la suite $(U_i)_{i \in I}$ désignera un tel recouvrement d'ouverts de la variété M et $\varphi_i : U_i \rightarrow L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ désignera le diffeomorphisme existant entre U_i et $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$.

Soit $Y_{L_k}^i$ le champ de vecteurs unitaire tangent à la feuille $L_{Y_k}^i$ induit par le champ unitaire Y_k du parallélisme \mathcal{F}_q -transverse $(Y_s)_{0 \leq s \leq q-1}$ de Diallo de M .

On note en passant que les champs de vecteurs $Y_{L_k}^i$ sont orthogonaux deux à deux relativement à la métrique h .

Considérons maintenant $a = (a_q^i, a_{q-1}^i, \dots, a_0^i) \in L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$.

On pose

$$\begin{aligned} R_a^{h_k} : T_{a_k^i} L_{Y_k}^i &\rightarrow T_{a_q^i} L_q^i \times T_{a_{q-1}^i} L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times T_{a_0^i} L_{Y_0}^i \\ X_{a_k^i}^i &\mapsto \left(X_{a_k^i}^i \right)_{a^i}^{h_k} = \left(0_{a_q^i}, 0_{a_{q-1}^i}, \dots, 0_{a_{k+1}^i}, X_{a_k^i}^i, 0_{a_{k-1}^i}, \dots, 0_{a_0^i} \right) \end{aligned}$$

où $0_{a_t^i}$ est le vecteur nul de $T_{a_t^i}L_{Y_t}^i$ pour $t \neq q$ et est le vecteur nul de $T_{a_q^i}L_q^i$ pour $t = q$.

Soit $\mathcal{X}(L_{Y_k}^i)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à $L_{Y_k}^i$ et $X_k^i \in \mathcal{X}(L_{Y_k}^i)$.

En faisant varier $a_k^i \in L_{Y_k}^i$, les relèvements $R_a^{h_k} \left((X_k^i)_{a_k^i} \right)$ de $(X_k^i)_{a_k^i}$ dans $TL_q^i \times TL_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times TL_{Y_0}^i$ définissent un champ de vecteurs sur $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ qu'on notera $(X_k^i)^{h_k}$. On a donc

$$(X_k^i)_a^{h_k} = (X_k^i)^{h_k}(a) = R_a^{h_k} \left((X_k^i)_{a_k^i} \right).$$

On montre dans [13] (*cf. prop. 2.5*) que pour $X_k^i \in \mathcal{X}(L_{Y_k}^i)$ et $X_s^i \in \mathcal{X}(L_{Y_s}^i)$ on a

$$\left[(Y_k^i)^{h_k}, (Y_s^i)^{h_s} \right] = 0 \text{ pour } k \neq s.$$

Il résulte de cela, $Y_{L_r}^i$ étant le champ unitaire induit sur la feuille $L_{Y_r}^i$ par Y_r du parallélisme \mathcal{F}_q -transverse $(Y_s)_{0 \leq s \leq q-1}$ de Diallo, que

$$\left[(Y_{L_k}^i)^{h_k}, (Y_{L_s}^i)^{h_s} \right] = 0 \text{ pour } k \neq s.$$

Ainsi, l'ouvert U_i étant diffeomorphe au produit $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$, on a les champs de vecteurs $\left((\varphi_i)^{-1} \right)^* \left((Y_{L_s}^i)^{h_s} \right)$ qui définissent sur U_i un système de coordonnées \mathcal{F}_q -transverse $(\tilde{y}_{q-1}^i, \dots, \tilde{y}_0^i)$.

Dans la suite $\left((\varphi_i)^{-1} \right)^* \left((Y_{L_s}^i)^{h_s} \right)$ se notera $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_s^i}$.

Nous signalons en passant que si l'on désigne par Y_s^i la restriction de Y_s à U_i et $p_k^i : L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i \rightarrow L_{Y_k}^i$ la projection sur $L_{Y_k}^i$ suivant $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_{k+1}}^i \times L_{Y_{k-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ alors:

1) On a

$$(p_k^i)_* \left((Y_k^i)^{h_s} \right) = Y_{L_k}^i \text{ et } (p_k^i)_* \left((Y_s^i)^{h_s} \right) = 0 \text{ pour } s \neq k.$$

2) Les projections $(p_s^i)_*$ n'étant pas à priori des submersions riemanniennes, les champs de vecteurs $(Y_s^i)^{h_s}$ ne sont donc pas à priori unitaires (Relativement à la métrique $\left((\varphi_i)^{-1} \right)^* h$ sur le produit $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$) malgré le fait que les champs de vecteurs $Y_{L_s}^i$ soient unitaires sur les $L_{Y_s}^i$.

3) Pour tout $p \in L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_{s+1}}^i$ et $p' \in L_{Y_{s-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ on a $(\varphi_i)_* (Y_s^i)$ qui est tangent à $\{p\} \times L_{Y_s}^i \times \{p'\}$. D'où les champs de vecteurs $(Y_{L_s}^i)^{h_s}$ et $(\varphi_i)_* (Y_s^i)$ sont colinéaires. Et ceci entraîne que $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_s^i}$ et Y_s^i sont aussi colinéaires.

4) Y_s^i coïncide avec $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_s^i}$ sur $L_{Y_s^i}$ cependant les valeurs prises par ces deux champs sur $U_i \setminus L_{Y_s^i}$ ne sont pas forcément identiques.

On vérifie aisément que les champs de vecteurs $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y_s^i}$ sur U_i sont orthogonaux deux à deux.

Sur chaque ouvert U_i le feuilletage $\mathcal{F}_k^i = \mathcal{F}_k/U_i$ est défini par la submersion $p_{k-1}^{iq} \circ \varphi_i$ où φ_i est le difféomorphisme existant entre U_i et $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ et $p_{k-1}^{iq} : L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i \rightarrow L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ est la projection sur $L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ suivant $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_k}^i$.

Ceci dit, dans tout ce qui suit $(U_i, f_i^k, T^k, \gamma_{ij}^k)_{i \in I}$ est un cocycle feuilleté définissant le feuilletage riemannien \mathcal{F}_k .

Comme chaque feuille de $(\varphi_i^{-1})^* \mathcal{F}_k^i$ est de la forme $L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times L_{Y_{q-2}}^i \times \dots \times L_{Y_k}^i \times \{p\}$ avec $p \in L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ on peut alors affirmer qu'il existe un difféomorphe $\mu_k^i : f_i^k(U_i) \rightarrow L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ de sorte que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i \\ f_i^k \downarrow & & \downarrow p_{k-1}^{iq} \\ f_i^k(U_i) & \xrightarrow{\mu_k^i} & L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i \end{array} .$$

soit commutatif.

Le système de coordonnées \mathcal{F}_k -transverse $(\tilde{y}_{k-1}^i, \dots, \tilde{y}_0^i)$ sur U_i induit un système de coordonnées sur $f_i^k(U_i)$ que l'on notera $(y_{k-1}^i, \dots, y_0^i)$.

Soit $a = (a_q^i, a_{q-1}^i, \dots, a_0^i) \in L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ et $X_s^i \in \mathcal{X}(L_{Y_s^i}^i)$.

On a

$$(X_s^i)_a^{h_s} = (0_{a_q^i}, 0_{a_{q-1}^i}, \dots, 0_{a_{s+1}^i}, (X_s^i)_{a_s^i}, 0_{a_{s-1}^i}, \dots, 0_{a_0^i}).$$

Par conséquent pour $s < k$ on a

$$\left(p_{k-1}^{iq} \right)_* \left((X_s^i)_a^{h_s} \right) = (0_{a_{k-1}^i}, 0_{a_{k-2}^i}, \dots, 0_{a_{s+1}^i}, (X_s^i)_{a_s^i}, 0_{a_{s-1}^i}, \dots, 0_{a_0^i}).$$

Ce qui signifie que $\left(p_{k-1}^{iq} \right)_*$ envoie $(X_s^i)_a^{h_s}$ sur $(X_s^i)_{a_s^i}^{h_s}$ pour $s < k$. Ceci entraîne en utilisant le diagramme commutatif précédent que

$$\left(\mu_k^i \right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_s^i} \right) = (Y_{L_s^i}^i)^{h_s}$$

pour $s < k$.

Pour $s > k-1$ on vérifie aisément que

$$\left(p_{k-1}^{iq} \right)_* (X_s^i)^{h_s} = 0.$$

Soit θ_i^{k-1} la liaison riemannienne entre les feuilletages riemanniens (U_i, \mathcal{F}_k) et (U_i, \mathcal{F}_{k-1}) .

On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & L_q^i \times L_{Y_{q-1}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i \\
f_i^k \downarrow & & \downarrow p_{k-1}^{iq} \\
f_i^k(U_i) & \xrightarrow{\mu_k^i} & L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i \\
\theta_i^{k-1} \downarrow & & \downarrow p_{k-2}^{i(k-1)} \\
f_i^{k-1}(U_i) & \xrightarrow{\mu_{k-1}^i} & L_{Y_{k-2}}^i \times L_{Y_{k-3}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i
\end{array}$$

qui est commutatif. $p_{k-2}^{i(k-1)}$ étant la projection de $L_{Y_{k-1}}^i \times L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ sur $L_{Y_{k-2}}^i \times \dots \times L_{Y_0}^i$ suivant $L_{Y_{k-1}}^i$.

Il en résulte que

$$p_{k-2}^{i(k-1)} \circ \mu_k^i = \mu_{k-1}^i \circ \theta_i^{k-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(\theta_i^{k-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i} \right) &= \left((\mu_{k-1}^i)^{-1} \circ p_{k-2}^{i(k-1)} \circ \mu_k^i \right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i} \right) \\
&= \left((\mu_{k-1}^i)^{-1} \circ p_{k-2}^{i(k-1)i} \right)_* \left((Y_{L^{(k-1)}}^i)^{h^{(k-1)}} \right) \\
&= \left((\mu_{k-1}^i)^{-1} \right)_* (0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'égalité

$$\left(\theta_i^{k-1} \right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i} \right) = 0$$

montre que

$$\theta_i^{k-1} (y_{k-1}^i, y_{k-2}^i, \dots, y_0^i) = (y_{k-2}^i, \dots, y_0^i).$$

Pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on pose:

$$\gamma_{ij}^k (y_{k-1}^j, y_{k-2}^j, \dots, y_0^j) = (\gamma_{k-1}^i, \gamma_{k-2}^i, \dots, \gamma_0^i).$$

On a [4] les égalités,

$$f_i^{k-1} = \theta_i^{k-1} \circ f_i^k \quad \text{et} \quad \gamma_{ij}^{k-1} \circ \theta_j^{k-1} = \theta_i^{k-1} \circ \gamma_{ij}^k$$

c'est à dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_j^k} & f_j^k(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\theta_j^{k-1}} & f_j^{k-1}(U_i \cap U_j) \\
\text{Id}_{U_i \cap U_j} \downarrow & & \downarrow \gamma_{ij}^k & & \downarrow \gamma_{ij}^{k-1} \quad \dots \\
U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i^k} & f_i^k(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\theta_i^{k-1}} & f_i^{k-1}(U_i \cap U_j)
\end{array}$$

D'où l'égalité

$$\theta_i^{k-1} (y_{k-1}^i, y_{k-2}^i, \dots, y_0^i) = (y_{k-2}^i, \dots, y_0^i)$$

entraîne que:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{k-1} (y_{k-2}^j, \dots, y_0^j) &= \gamma_{ij}^{k-1} \circ \theta_j^{k-1} (y_{k-1}^j, y_{k-2}^j, \dots, y_0^j) \\ &= \theta_i^{k-1} \circ \gamma_{ij}^k (y_{k-1}^j, y_{k-2}^j, \dots, y_0^j) \\ &= \theta_i^{k-1} (\gamma_{k-1}^i, \gamma_{k-2}^i, \dots, \gamma_0^i) \\ &= (\gamma_{k-2}^i, \dots, \gamma_0^i) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\gamma_{ij}^k (y_{k-1}^j, y_{k-2}^j, \dots, y_0^j) = (\gamma_{k-1}^i, \gamma_{k-2}^i, \dots, \gamma_0^i)$$

avec

$$(\gamma_{k-s-1}^i, \gamma_{k-s-2}^i, \dots, \gamma_0^i) = \gamma_{ij}^{k-s} (y_{k-s-1}^j, \dots, y_0^j)$$

pour $s \in \{1, \dots, k-1\}$.

Il résulte de ce qui précède que la matrice jacobienne $J_{\gamma_{ij}^k}$ de γ_{ij}^k vérifie l'égalité:

$$J_{\gamma_{ij}^k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-1}^j} & \frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-2}^j} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_0^j} \\ 0 & \frac{\partial \gamma_{k-2}^i}{\partial y_{k-2}^j} & \frac{\partial \gamma_{k-2}^i}{\partial y_{k-3}^j} & \dots & \dots & \frac{\partial \gamma_{k-2}^i}{\partial y_0^j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \gamma_{k-3}^i}{\partial y_{k-3}^j} & \dots & \dots & \frac{\partial \gamma_{k-3}^i}{\partial y_0^j} \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \gamma_0^i}{\partial y_0^j} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\left(\gamma_{ij}^k \right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-r}^j} \right) = \sum_{t=1}^r \frac{\partial \gamma_{k-t}^i}{\partial y_{k-r}^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y_{k-t}^i}.$$

La matrice $J_{\gamma_{ij}^k}$ est inversible et triangulaire. D'où tout élément diagonal de $J_{\gamma_{ij}^k}$ est non nul c'est à dire que

$$\frac{\partial \gamma_{k-r}^i}{\partial y_{k-r}^j} \neq 0$$

pour tout r .

Comme γ_{ij}^k est une isométrie pour la métrique quasi-fibrée commune h et comme les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^j}$ sont orthogonaux deux à deux alors

$$\begin{aligned} 0 &= h\left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^j}, \frac{\partial}{\partial y_{k-2}^j}\right) \\ &= h\left(\left(\gamma_{ij}^k\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^j}\right), \left(\gamma_{ij}^k\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-2}^j}\right)\right) \\ &= \frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-2}^j} \cdot \frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-1}^j} h\left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i}, \frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-1}^j} \neq 0 \text{ et } h\left(\frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i}, \frac{\partial}{\partial y_{k-1}^i}\right) \neq 0$$

donc

$$\frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-2}^j} = 0$$

Soit $r_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$. Supposons par récurrence que pour tout $r \leq r_0$ et tout $s < r$,

$$\frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-r}^j} = 0.$$

On a pour tout $s < r_0 + 1$

$$\begin{aligned} 0 &= h\left(\frac{\partial}{\partial y_{k-s}^j}, \frac{\partial}{\partial y_{k-(r_0+1)}^j}\right) \\ &= h\left(\left(\gamma_{ij}^k\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-s}^j}\right), \left(\gamma_{ij}^k\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{k-(r_0+1)}^j}\right)\right) \\ &= h\left(\frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-s}^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y_{k-s}^i}, \sum_{t=1}^{r_0+1} \frac{\partial \gamma_{k-t}^i}{\partial y_{k-(r_0+1)}^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y_{k-t}^i}\right) \\ &= \frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-(r_0+1)}^j} \cdot \frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-s}^j} \cdot h\left(\frac{\partial}{\partial y_{k-s}^i}, \frac{\partial}{\partial y_{k-s}^i}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-s}^j} \neq 0 \text{ et } h\left(\frac{\partial}{\partial y_{k-s}^i}, \frac{\partial}{\partial y_{k-s}^i}\right) \neq 0$$

donc

$$\frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-(r_0+1)}^j} = 0$$

pour tout $s < r_0 + 1$.

En conclusion

$$\frac{\partial \gamma_{k-s}^i}{\partial y_{k-r}^j} = 0 \text{ pour tout } s < r \text{ et } \frac{\partial \gamma_{k-r}^i}{\partial y_{k-r}^j} \neq 0$$

pour tout r .

Il résulte de ce qui précède que

$$J_{\gamma_{ij}^k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_{k-1}^i}{\partial y_{k-1}^j} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \gamma_{k-2}^i}{\partial y_{k-2}^j} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \gamma_{k-3}^i}{\partial y_{k-3}^j} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \gamma_0^i}{\partial y_0^j} \end{pmatrix}$$

avec

$$\frac{\partial \gamma_{k-r}^i}{\partial y_{k-r}^j} \neq 0$$

pour tout r . Et ceci entraîne que \mathcal{F}_k est riemannien transversalement diagonal.

■

On dira que le recouvrement d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de la variété M et les coordonnées \mathcal{F}_k -transverses $((y_{k-1}^i, \dots, y_0^i))_{i \in I}$ sont compatibles avec le drapeau $\mathcal{D}_{\mathcal{F}_q}$.

References

- [1] **R.Almeida et P.Molino, 1986.** “*Flot riemanniens sur les 4-variétés compactes*” Tôhoku Mathematical Journal, The Second Series, Vol. 38, no. 2, pp. 313-326.
- [2] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002,** “*Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens*”. JP Journal of Geometry and Topology, 2,3, 281-288.
- [3] **R.A. Blumental and J.Hebda, 1983,** “*De Rham decomposition theorem for foliated manifolds*”. 33 (2), 133-198.
- [4] **C.Dadi, 2008.** “*Sur les extensions des feuilletages*”. Thèse unique, Université de Cocody, Abidjan.
- [5] **C.Dadi et H.Diallo, 2007.** “*Extension d’un feuilletage de Lie minimal d’une variété compacte*”. Afrika Matematika, Série 3, volume 18 pp 34-45.
- [6] **H.Diallo, 2002.** “*Caractérisation des C^r -fibrés vectoriels, variétés biriemanniennes, drapeaux riemanniens*”. Thèse d’Etat, Abidjan

- [7] **H.Diallo, 2009.** “*Structure d’un drapeau riemannien complet*”. African Diaspora Journal of Mathématiques, Volume 7, Issue 2. pp.135-149
- [8] **E.Fédida, 1974.** “*Sur l’existence des Feuilletages de Lie*”. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [9] **C.Godbillon, 1985.** “*Feuilletage; Etude géométriques I*”. Publ, IRMA, Strasbourg .
- [10] **P.Molino, 1988.** “*Riemannian foliations*”. Birkhäuser.
- [11] **P.Malliavin, 1972.** “*Géométrie différentielle intrinsèque*”. Hermann 293, rue Lecourbe, 75015 Paris.
- [12] **T.Masson, 2001.** “*Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*”, laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay Cedex France.
- [13] **R.Nasri et M.Djaa, 2006.** “*Sur la courbure des variétés riemanniennes produits*”, Laboratoire de géométrie.Centre universitaire de Saida, Algérie. M.S.C.2000:53C50-53C42. Sciences et Technologie A-N°24, Décembre, pp.15-20.