

Principe du maximum discret pour une solution au sens des moindres carrées espace-temps pour l'équation de transport avec des éléments finis

Khadidja Benmansour
Loic Piffet, Jérôme Pousin

INSA de Lyon, France, Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen

10 ème Edition des Journées d'Analyse Numérique et
d'Optimisation, Essaouira-Maroc
du 31 Octobre au 2 Novembre 2013



Plan de la présentation

Plan de la présentation

1 Motivation.

Plan de la présentation

- 1 Motivation.
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum.

Plan de la présentation

- 1 Motivation.
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum.
- 3 Approximation par éléments finis.

Plan de la présentation

- 1 Motivation.
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum.
- 3 Approximation par éléments finis.
- 4 Méthode de Nitsche.

Plan de la présentation

- 1 Motivation.
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum.
- 3 Approximation par éléments finis.
- 4 Méthode de Nitsche.
- 5 Méthodes d'Optimisation avec contraintes.
 - méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé
 - Contrainte de régularité sur la variation totale

Motivation

Motivation

$$\begin{cases} \partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) = 0 & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) & \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1)$$

où $(. | .)$ désigne le produit scalaire euclidien, v la vitesse,
 $\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x, t) | n(x)) < 0\}$ avec $n(x)$ est la normale
extérieure de $\partial\Omega$ au point x et $Q = \Omega \times]0, 1[$.

Une formulation moindre carrés si :

Motivation

$$\begin{cases} \partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) = 0 & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) & \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1)$$

où $(. | .)$ désigne le produit scalaire euclidien, v la vitesse,
 $\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x, t) | n(x)) < 0\}$ avec $n(x)$ est la normale
extérieure de $\partial\Omega$ au point x et $Q = \Omega \times]0, 1[$.

Une formulation moindre carrés si :

- 1 La vitesse v est peu régulière.

Formulation moindre carrés dans un espace de Sobolev anisotrope



$$\partial Q_- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} | \tilde{n}) < 0\} = \Gamma_- \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\},$$

la partie entrante du bord de Q .



$$f = \partial_t(t-1)u_0(x) + (v(x, t) | \nabla(t-1)u_0(x, t))$$

- $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t$, $\tilde{\nabla}$ le gradient espace-temps et \tilde{n} désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur ∂Q .

① espaces de Sobolev anisotropiques

- $H(v, Q) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) \in L^2(Q), \right\}$
- $H_0 = H_0(v, Q, \partial Q_-) = \{ \varphi \in H(v, Q), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_- \}$

Formulation moindre carrés dans un espace de Sobolev anisotrope



$$\partial Q_- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} | \tilde{n}) < 0\} = \Gamma_- \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\},$$

la partie entrante du bord de Q .



$$f = \partial_t(t-1)u_0(x) + (v(x, t) | \nabla(t-1)u_0(x, t))$$

- $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t$, $\tilde{\nabla}$ le gradient espace-temps et \tilde{n} désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur ∂Q .

1 espaces de Sobolev anisotropiques

- $H(v, Q) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) \in L^2(Q), \right\}$
- $H_0 = H_0(v, Q, \partial Q_-) = \{ \varphi \in H(v, Q), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_- \}$

2 la formulation au sens des moindres carrés

$$\rho = \operatorname{argmin}_{w \in H_0} \int_Q ((\tilde{v} | \tilde{\nabla} w) - f)^2 dt dx = \operatorname{argmin}_{w \in H_0} J(w).$$

Formulation variationnelle et principe du maximum

- 1 La dérivée de Gâteaux de J s'annule.

Trouver $\rho \in H_0$ tel que

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt = \int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt \quad (2)$$

pour tout $\varphi \in H_0$.

Formulation variationnelle et principe du maximum

- 1 La dérivée de Gâteaux de J s'annule.

Trouver $\rho \in H_0$ tel que

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt = \int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt \quad (2)$$

pour tout $\varphi \in H_0$.

- 2 Principe du maximum

- Le problème admet une unique solution $u = \rho + (1 - t)u_b$.
- Pour $f = 0$, u satisfait $\inf u_b \leq u \leq \sup u_b$

$$u_b(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{if } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ u_1(t, x) & \text{if } (x, t) \in \Gamma_- \times (0, T). \end{cases} \quad (3)$$

- Une formulation pénalisée :

$$\int_Q \left(\tilde{\nu} | \tilde{\nabla} u^m \right) \left(\tilde{\nu} | \tilde{\nabla} \varphi \right) dx dt - m \int_{\partial Q_-} (u^m - u_b) \cdot \varphi \left(\tilde{\nu} | \tilde{n} \right) d\tilde{\sigma} = 0$$

- $M = \sup_{\partial Q_-} u_b$.
- prendre: $\varphi = (u^m - M)^+$.
- $\int_Q \left(\tilde{\nu} | \tilde{\nabla} (u^m - M)^+ \right)^2 dx dt \leq 0$.

J. Pousin., O. Besson , Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159-175

Approximation par éléments finis

- $V_h \subset H_0$ sous-espace d'éléments finis quadrangulaires de Lagrange Q_1 .

- Trouver $c_h \in V_h$ tel que

$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h) dx dt; \forall \varphi_h \in V_h \quad (4)$$

- Sous forme matricielle: $A\rho = B$ (5)

avec $A = a(., .)$ et B

Approximation par éléments finis

- $V_h \subset H_0$ sous-espace d'éléments finis quadrangulaires de Lagrange Q_1 .

- Trouver $c_h \in V_h$ tel que

$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h) dx dt; \forall \varphi_h \in V_h \quad (4)$$

- Sous forme matricielle: $A\rho = B$ (5)

avec $A = a(.,.)$ et B

- puisque $\tilde{v}_1 \neq 0$, on peut résoudre par la méthode de marche en temps.

Approximation par éléments finis

- $V_h \subset H_0$ sous-espace d'éléments finis quadrangulaires de Lagrange Q_1 .

- Trouver $c_h \in V_h$ tel que

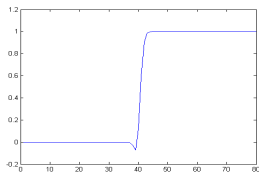
$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h) dx dt; \forall \varphi_h \in V_h \quad (4)$$

- Sous forme matricielle: $A\rho = B$ (5)

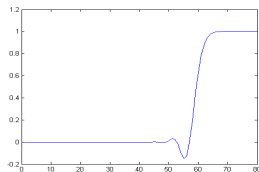
avec $A = a(.,.)$ et B

- puisque $\tilde{v}_1 \neq 0$, on peut résoudre par la méthode de marche en temps.

- Exemple numérique : $\tilde{v} = 1$ pour $\Omega = (0, 1)$ et $u(x, 0) = u_0(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(100x - 50))$, $h = \tau = 1/80$.



(a)



(b)

Convergence de la solution :

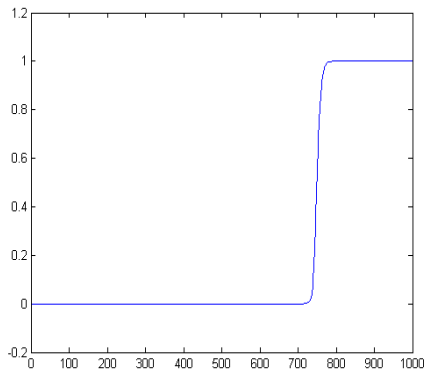


Figure : convergence de la solution pour $n=1000$.

Méthode de Nitsche

Déterminer l'approximation de la solution dans un sous espace d'éléments finis $V_h \subset H(v, Q)$ tel que: $\forall \varphi_i$,

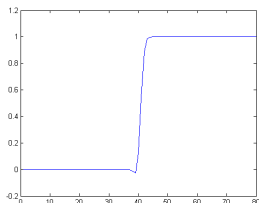
$$\sum_{j=1}^N \rho_j \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt + 1/\gamma \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i - \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\partial Q_-} (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) \varphi_i = 1/\gamma \sum_{j=1}^N u_{bj} \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i$$

Méthode de Nitsche

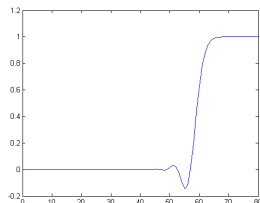
Déterminer l'approximation de la solution dans un sous espace d'éléments finis $V_h \subset H(v, Q)$ tel que: $\forall \varphi_i$,

$$\sum_{j=1}^N \rho_j \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt + 1/\gamma \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i - \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\partial Q_-} (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) \varphi_i = 1/\gamma \sum_{j=1}^N u_{bj} \int_{\partial Q_-} \varphi_j \varphi_i$$

- Considérons le même exemple numérique



(a)



(b)

Figure : (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps.

Méthodes d'optimisation avec contraintes

méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé

- 1 Formulons le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte dans \mathbb{R}^N .

$$\begin{cases} AC_p = B \\ C_p \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- problème de minimisation sur le cône \mathbb{R}_+^N :

$$u_p = \underset{X \in \mathbb{R}_+^N}{\text{Agmin}} \frac{1}{2} X^t A X - X^t B. \quad (7)$$

- le problème est bien posé, on utilise les conditions de complémentarité

$$0 \leq (AC_p - B); C_p \perp (AC_p - B) \quad (8)$$

Méthodes d'optimisation avec contraintes

méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé

- 1 Formulons le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte dans \mathbb{R}^N .

$$\begin{cases} AC_p = B \\ C_p \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- problème de minimisation sur le cône \mathbb{R}_+^N :

$$u_p = \underset{X \in \mathbb{R}_+^N}{\text{Agmin}} \frac{1}{2} X^t A X - X^t B. \quad (7)$$

- le problème est bien posé, on utilise les conditions de complémentarité

$$0 \leq (AC_p - B); C_p \perp (AC_p - B) \quad (8)$$

- 2 En utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange:

$$C_p, \Lambda \in \mathbb{R}_+^N, \forall 0 < r \in \mathbb{R} \begin{cases} AC_p = B + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - rC_p)^+ \end{cases} \quad (9)$$

- Un algorithme itératif est proposé pour résoudre le problème:

Pour $C_p^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$; $\Lambda^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$, calculer:

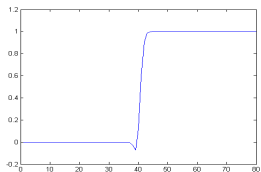
$$\begin{cases} AC_p^{k+1} = B + \Lambda^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} = (\Lambda^k - rC_p^k)^+ \end{cases}$$

- On démontre que la méthode converge.

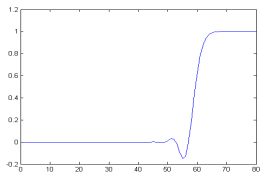
- Un algorithme itératif est proposé pour résoudre le problème:
Pour $C_p^0 = 0_{\mathbb{R}^N}; \Lambda^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$, calculer:

$$\begin{cases} AC_p^{k+1} = B + \Lambda^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} = (\Lambda^k - rC_p^k)^+ \end{cases}$$

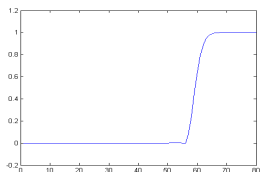
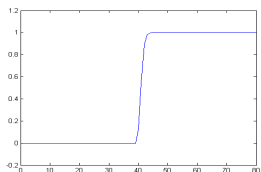
- On démontre que la méthode converge.
- Considérons comme plus haut l'exemple 1D :



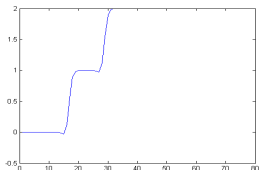
(a)



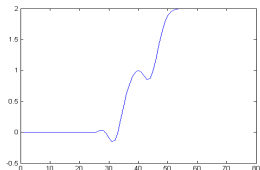
(b)



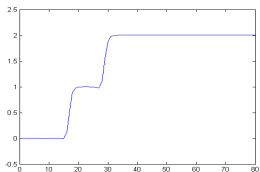
- Considérons un autre exemple numérique: $\tilde{v} = 1$ pour $\Omega = (0, 1)$ et $u(x, 0) = u_0(x) = 1/2 + (1/2 \tanh(100x - 20)) + 1/2 + (1/2 \tanh(100x - 35))$, $h = \tau = 1/80$.



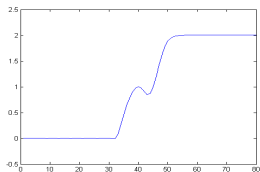
(a)



(b)



(g)



(h)

Contrainte de régularité sur la variation totale

- Résoudre le problème globale en temps.

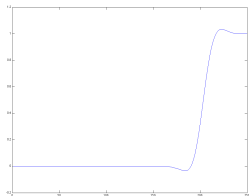
Contrainte de régularité sur la variation totale

- Résoudre le problème globale en temps.
- Afin de contrôler ces artefacts, on propose d'imposer la positivité de la solution tout en pénalisant sa variation totale. Ceci revient à résoudre le problème discrétisé suivant :

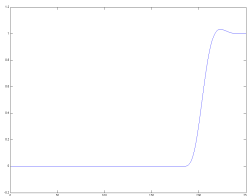
$$\min_{V_h} \frac{1}{2} \int_Q (\partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) - f)^2 dt dx + I_{C_h}(u) + \lambda TV(u) \quad (10)$$

avec $\lambda > 0$, où $C_h = \left\{ u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \geq 0, \forall i \right\}$ et où $TV(u) = \int_Q |\nabla u(x, t)| dx dt$.

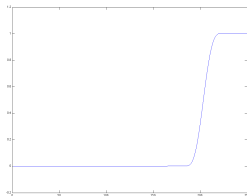
La figure suivante illustre les résultats obtenus à $t = 0.3$.



(a)



(b)



(c)

Figure : (a) Solution du problème global . (b) Solution du problème avec la contrainte I_{C_h} , persistance de l'overshooting. (c) Solution du problème avec contrainte et régularisation TV pour $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$.

Conclusion

Conclusion

- Incapacité de satisfaire un principe du maximum sur des maillages globaux pour une formulation standard de Galerkin.

Conclusion

- Incapacité de satisfaire un principe du maximum sur des maillages globaux pour une formulation standard de Galerkin.
- Oscillations parasites (undershooting ou overshooting) ce qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides.

Conclusion


- Incapacité de satisfaire un principe du maximum sur des maillages globaux pour une formulation standard de Galerkin.
- Oscillations parasites (undershooting ou overshooting) ce qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides.
- La méthode de Nitsche est incapables d'éliminer ces oscillations.

Conclusion

- Incapacité de satisfaire un principe du maximum sur des maillages globaux pour une formulation standard de Galerkin.
- Oscillations parasites (undershooting ou overshooting) ce qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides.
- La méthode de Nitsche est incapables d'éliminer ces oscillations.
- La méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée permet d'éliminer les undershooting.

Conclusion

- Incapacité de satisfaire un principe du maximum sur des maillages globaux pour une formulation standard de Galerkin.
- Oscillations parasites (undershooting ou overshooting) ce qui est bien connue depuis longtemps dans la littérature de la dynamique des fluides.
- La méthode de Nitsche est incapables d'éliminer ces oscillations.
- La méthode de multiplicateur de Lagrange généralisée permet d'éliminer les undershooting.
- La méthode avec variation totale et contrainte de positivité est donc la meilleure méthode pour contrôler ces artefacts.

-  A. Beck, M. Teboulle, A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, *SIAM J. Img. Sci.*, (2009), 183-202
-  P. Bochev., D. Ridz al, G. Scovazzi, M. Shashkov, Formulation, analysis and numerical study of an optimization-based conservative interpolation(remap) od sacalr fields for arbitrary Lagrangien-Eulerian method, *Jour. Comp. Phys.*, **230** (2011), 5199-5225.
-  Horn., B. Schunck, Determining optical flow, *Artificial Intelligence.*, (1981).
-  D. Kuzmin, Linearity-preserving flux correction and convergence acceleration for constraine Galerkin schemees, *Jour. of Comp. and Applied Math.*, **236** (2012), 2317-2337.
-  J. Pousin., O. Besson ,Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159- 175 .