Equation du transport, formulation au sens des moindres carrés espace-temps et principe du maximum

K. Benmansour et J. Pousin

Troisième Congrès de la SM2A, Marrakech-Maroc, 10-13 Septembre 2012

Plan de la présentation

Plan de la présentation

1. Motivations

Plan de la présentation

1. Motivations
2. Formulation moindres carrés dans un espace de Sobolev anisotropique

Plan de la présentation

1. Motivations
2. Formulation moindres carrés dans un espace de Sobolev anisotropique
3. Formulation MC et éléments finis espace-temps 1D

Plan de la présentation

1. Motivations
2. Formulation moindres carrés dans un espace de Sobolev anisotropique
3. Formulation MC et éléments finis espace-temps 1D
4. Formulation MC et éléments finis espace-temps 2D

Motivations

Motivations

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \big(v(x,t)/\nabla u(x,t)\big) = 0; \text{ dans } \Omega \times (0,1) = \mathrm{Q} \\ u = \rho_0; \text{ sur } \partial Q_- \text{ la partie entrante de } \partial Q. \end{cases} \tag{1}$$

$\big(\cdot / \cdot \big)$ désigne le produit scalaire euclidien, v est la vitesse, ρ_0 la condition entrante.
Modélise le transport d'espèces chimiques sans diffusion ni réaction.
Une formulation moindres carrés si

Motivations

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \big(v(x,t)/\nabla u(x,t)\big) = 0; \text{ dans } \Omega \times (0,1) = \mathrm{Q} \\ u = \rho_0; \text{ sur } \partial Q_- \text{ la partie entrante de } \partial Q. \end{cases} \tag{1}$$

$\big(\cdot \,/\, \cdot \big)$ désigne le produit scalaire euclidien, v est la vitesse, ρ_0 la condition entrante.
Modélise le transport d'espèces chimiques sans diffusion ni réaction.
Une formulation moindres carrés si

1. la vitesse v est peu régulière ;

Motivations

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \big(v(x,t)/\nabla u(x,t)\big) = 0; \text{ dans } \Omega \times (0,1) = \mathrm{Q} \\ u = \rho_0; \text{ sur } \partial Q_- \text{ la partie entrante de } \partial Q. \end{cases} \tag{1}$$

$\big(\cdot / \cdot\big)$ désigne le produit scalaire euclidien, v est la vitesse, ρ_0 la condition entrante.
Modélise le transport d'espèces chimiques sans diffusion ni réaction.
Une formulation moindres carrés si

1. la vitesse v est peu régulière ;
2. on ajoute une condition finale : $u(x,1) = \rho_1$.O. Besson et JP Jour. of Inverse Problems, 27 2011

Formulation moindres carrés dans un espace de Sobolev anisotropique

1. espace de Sobolev anisotropique
   - ∂Q_- la partie entrante du bord de Q $\left(\tilde{v}/n\right) < 0$;
   - $$f = \partial_t(t-1)\rho_0(x) + \left(v(x,t)/\nabla(t-1)\rho_0(x)\right).$$
   - $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{\nabla}$ le gradient espace temps
   - $H(\partial Q_-) = \{\varphi \in L^2(Q), \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) \in L^2(Q), \varphi = 0 \,\mathrm{sur}\, \partial \mathrm{Q}_-\}.$

Formulation moindres carrés dans un espace de Sobolev anisotropique

1. espace de Sobolev anisotropique
   - ∂Q_- la partie entrante du bord de Q $\left(\tilde{v}/n\right) < 0$;
   - $$f = \partial_t(t-1)\rho_0(x) + \left(v(x,t)/\nabla(t-1)\rho_0(x)\right).$$
   - $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{\nabla}$ le gradient espace temps
   - $H(\partial Q_-) = \{\varphi \in L^2(Q), \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) \in L^2(Q), \varphi = 0 \,\mathrm{sur}\, \partial \mathrm{Q}_-\}$.
2. $$\rho = \underset{w \in H(\partial Q_-)}{\mathrm{Argmin}} \int_Q \left(\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} w\right) - f\right)^2 dtdx.$$
   - Le problème de minimisation est bien posé car la semi norme $\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} w\right)^2 dtdx$ est une norme O. Besson et JP Archive of Ration. Mech. and Ana., 186(1) 2007.
   - On a existence et unicité de $u = \rho + (1-t)\rho_0$ solution de (1).

Formulation variationnelle et Principe du maximum

1. La dérivée de Gateau s'annule donc
   - $$a(\rho,\varphi) = \int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho\right)\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) dxdt = \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) dxdt; \forall\varphi \in H(\partial Q_-); \tag{2}$$

Formulation variationnelle et Principe du maximum

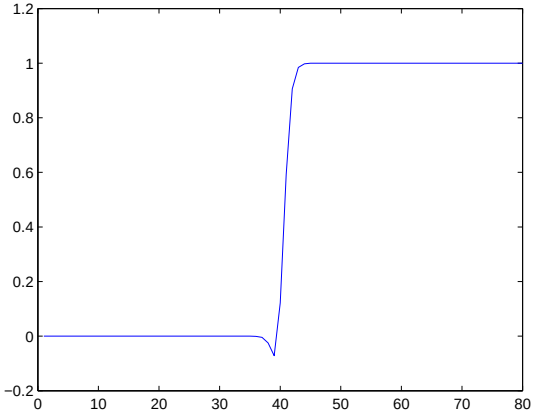
1. La dérivée de Gateau s'annule donc
   - $$a(\rho,\varphi)=\int_Q (\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho)(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi)\,dxdt=\int_Q f(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi)\,dxdt;\forall\varphi\in H(\partial Q_-); \tag{2}$$
2. PM $\min\rho_0\leq\rho\leq\max\rho_0$ O. Besson et JP Archive of Ration. Mech. and Ana., 186(1) 2007..
   - une formulation pénalisée ;
   $$\int_Q (\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho^m)(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi)\,dxdt-m\int_{\partial Q_-}(\rho^m-\rho_0)\varphi(\tilde{v}/\tilde{n})\,dxdt=0;$$
   - $(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho^m)=0$ sur $\{(x,t)\in Q;\rho^m=0\}$ Stampacchia
   - prendre $\varphi=(\rho^m-\sup_{\partial}Q_-\rho_0)^+$
   $$\int_Q (\tilde{v}/\widetilde{\nabla}((\rho^m-\sup_{\partial}Q_-\rho_0)^+)^2\leq 0.$$

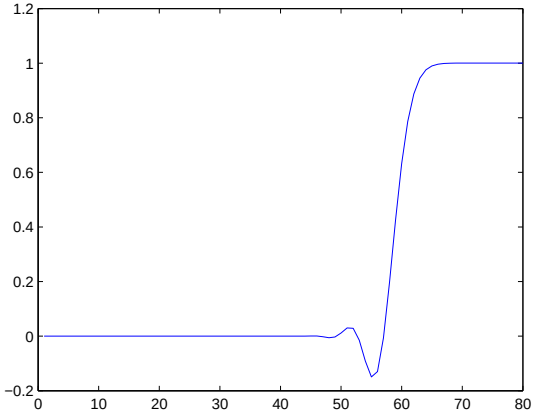
Formulation éléments finis espace-temps 1D

1. $Q = (0, 1 = \times(0, 1)$; V_h espace construit avec des E.F. quadrangulaires de Lagrange $Q1$
2. $$\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho_h\right)\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt = \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt; \forall \varphi_h \in V_h; \quad (3)$$
3. On peut marcher en temps : résoudre de t_n à t_{n+1} car $\tilde{v}_1 \neq 0$ a une composante en temps.

Formulation éléments finis espace-temps 1D

1. $Q = (0,1 = \times(0,1)$; V_h espace construit avec des E.F. quadrangulaires de Lagrange $Q1$
2. $$\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho_h\right)\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt = \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt; \forall \varphi_h \in V_h; \quad (3)$$
3. On peut marcher en temps : résoudre de t_n à t_{n+1} car $\tilde{v}_1 \neq 0$ a une composante en temps.
4. Cas simple $\tilde{v}$ n'a que 1 comme composante, $u_0(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\left(100x - 50\right)\right)$ $h = \tau = 1/80$.





Projection sur les fonctions positives éléments finis espace-temps 1D

1. Intégrons par parties le second membre :

$$\int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt = -\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} f\right)\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} f\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds \quad (4)$$

   - Le cone K_h des fonctions positives est généré par $\{\varphi_i\}$; $\varphi \in V_h$, notons $u_p \in K_h$

$$\begin{aligned}
&a(\rho-\rho_p,\varphi-\rho_p) \leq 0\, forall \varphi \in K_h;\ a(\rho-\rho_p,\varphi) \leq 0\\
&a(\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q g\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} h\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds\\
&a(\rho-\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q \left(-\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} f\right) - g\right)\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+}(f-h)\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds\\
&g = \left(\widetilde{\nabla} f\right)^- ; h = f^+\\
&a(\rho-\rho_p,\varphi) \leq 0\, forall \varphi \in K_h;\\
&a(\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q \left(\widetilde{\nabla} f\right)^- \varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} f^+\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds
\end{aligned} \quad (5)$$

Projection sur les fonctions positives éléments finis espace-temps 1D

1. Intégrons par parties le second membre :

$$\int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt = -\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} f\right)\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} f\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds \quad (4)$$

   - Le cone K_h des fonctions positives est généré par $\{\varphi_i\}$; $\varphi \in V_h$, notons $u_p \in K_h$

$$\begin{aligned}
&a(\rho-\rho_p,\varphi-\rho_p) \leq 0\, forall \varphi \in K_h;\ a(\rho-\rho_p,\varphi) \leq 0\\
&a(\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q g\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} h\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds\\
&a(\rho-\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q \left(-\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} f\right) - g\right)\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+}(f-h)\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds\\
&g = \left(\widetilde{\nabla} f\right)^- ; h = f^+\\
&a(\rho-\rho_p,\varphi) \leq 0\, forall \varphi \in K_h;\\
&a(\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q \left(\widetilde{\nabla} f\right)^- \varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} f^+\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds
\end{aligned} \quad (5)$$

2. $\rho_p \in K_h$ si la matrice $A = a(\cdot,\cdot)$ est une M-matrice.

Projection sur les fonctions positives éléments finis espace-temps 1D

1. Intégrons par parties le second membre :

$$\int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt = -\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} f\right)\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} f\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds \quad (4)$$

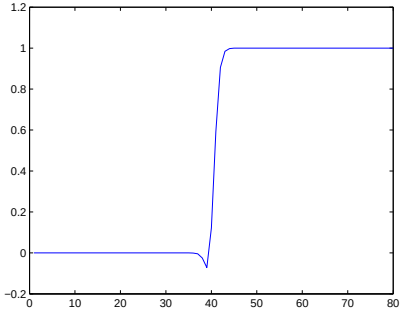
   - Le cone K_h des fonctions positives est généré par $\{\varphi_i\}$; $\varphi \in V_h$, notons $u_p \in K_h$

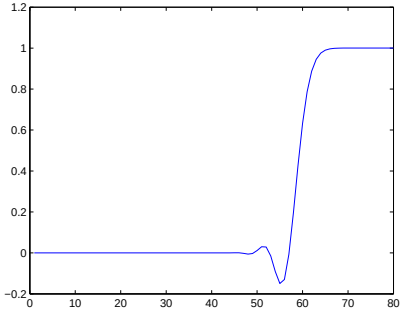
$$\begin{aligned}
&a(\rho-\rho_p,\varphi-\rho_p) \leq 0\, forall \varphi \in K_h;\ a(\rho-\rho_p,\varphi) \leq 0\\
&a(\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q g\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} h\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds\\
&a(\rho-\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q \left(-\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} f\right) - g\right)\varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+}(f-h)\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds\\
&g = \left(\widetilde{\nabla} f\right)^- ; h = f^+\\
&a(\rho-\rho_p,\varphi) \leq 0\, forall \varphi \in K_h;\\
&a(\rho_p,\varphi) = \textstyle\int_Q \left(\widetilde{\nabla} f\right)^- \varphi\, dxdt + \int_{\partial Q_+} f^+\varphi\left(\tilde{v}/\widetilde{n}\right) ds
\end{aligned} \quad (5)$$

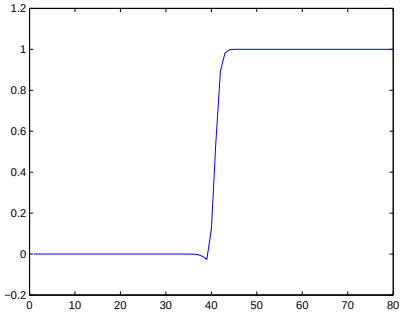
2. $\rho_p \in K_h$ si la matrice $A = a(\cdot,\cdot)$ est une M-matrice.
3. pour $v = c^{st}$, A est une M-matrice.

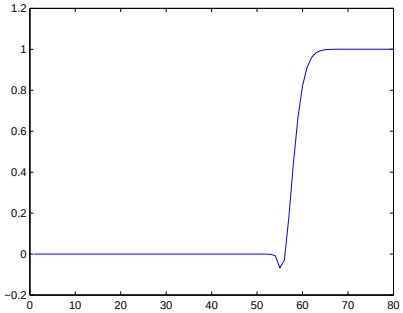
Exemple numérique éléments finis espace-temps 1D

1. Nous reprenons l'exemple considéré plus haut.



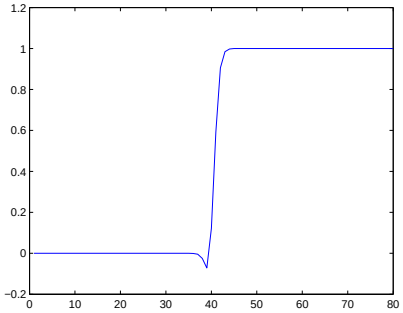


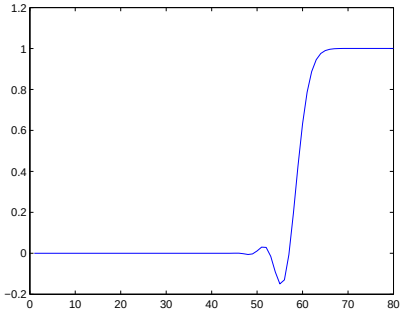


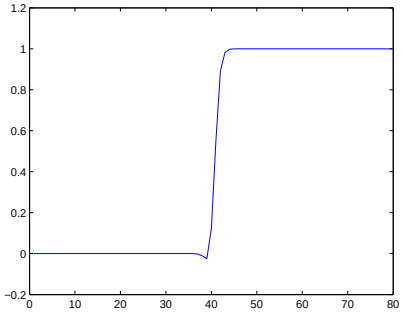


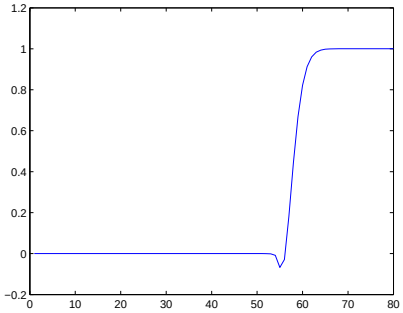
Exemple numérique éléments finis espace-temps 1D

1. Nous reprenons l'exemple considéré plus haut.





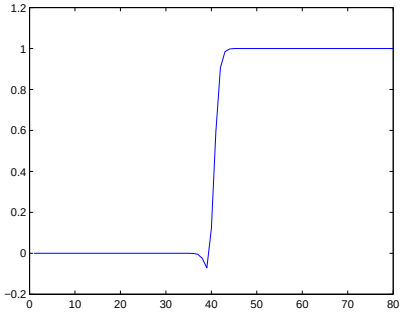


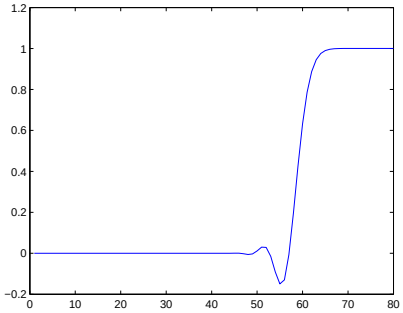


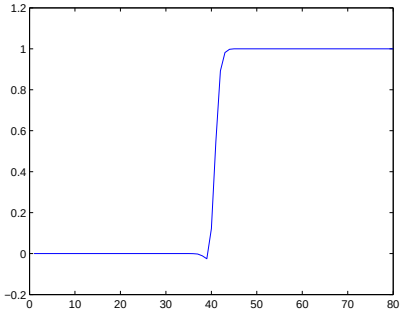
2. On sait que $z \mapsto z^{\pm}$ n'est pas stable dans K_h ; mais nous avons convergence. Cela valide la marche en temps.

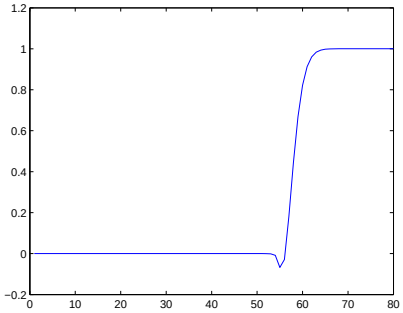
Exemple numérique éléments finis espace-temps 1D

1. Nous reprenons l'exemple considéré plus haut.

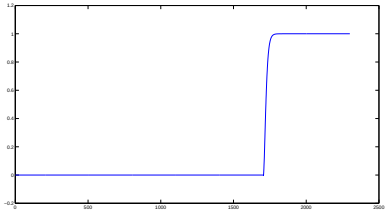








2. On sait que $z \mapsto z^{\pm}$ n'est pas stable dans K_h ; mais nous avons convergence. Cela valide la marche en temps.

3. 

Projection sur les fonctions positives sans M-matrice

1. Nous partons de la formulation variationnelle : :

$$\begin{aligned} &\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho_p\right)\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) dxdt = \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt \, \forall \varphi \in K_h \\ &A\rho_p = F; \end{aligned} \tag{6}$$

   - C'est problème de minimisation dans le cone $\mathbb{R}_+^N$
   - On utilise les conditions de complémentarité Rokafellar et Wets Variational analysis P ; 208 springer 2004

$$\rho_p \in \mathbb{R}_+^N;\ (A\rho_p - F) \in \mathbb{R}_+^N \text{ et de plus } \rho_p \perp (A\rho_p - F) \text{ ps euclidien}$$

Projection sur les fonctions positives sans M-matrice

1. Nous partons de la formulation variationnelle : :

$$\begin{array}{l} \int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho_p\right)\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) dxdt = \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt \, \forall \varphi \in K_h \\ A\rho_p = F; \end{array} \tag{6}$$

   - C'est problème de minimisation dans le cone $\mathbb{R}^N_+$
   - On utilise les conditions de complémentarité Rokafellar et Wets Variational analysis P ; 208 springer 2004

$$\rho_p \in \mathbb{R}^N_+;\ (A\rho_p - F) \in \mathbb{R}^N_+ \text{ et de plus } \rho_p \perp (A\rho_p - F) \text{ ps euclidien}$$

2. On utilise une méthode de multiplicateur de Lagrange : $F - A\rho_p \in N_{\mathbb{R}^N_+}(\rho_p)$

$$\rho_p;\ \Lambda \in \mathbb{R}^N_+; \forall 0 < r \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} A\rho_p = F + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+ \end{array} \right.$$

Projection sur les fonctions positives sans M-matrice

1. Nous partons de la formulation variationnelle : :

$$\begin{aligned} &\int_Q \left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho_p\right)\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\right) dxdt = \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi_h\right) dxdt \, \forall \varphi \in K_h \\ &A\rho_p = F; \end{aligned} \tag{6}$$

   - C'est problème de minimisation dans le cone $\mathbb{R}_+^N$
   - On utilise les conditions de complémentarité Rokafellar et Wets Variational analysis P ; 208 springer 2004

$$\rho_p \in \mathbb{R}_+^N;\ (A\rho_p - F) \in \mathbb{R}_+^N \text{ et de plus } \rho_p \perp (A\rho_p - F) \text{ ps euclidien}$$

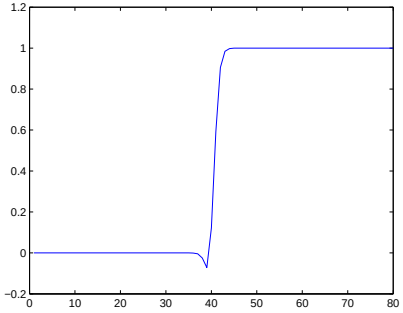
2. On utilise une méthode de multiplicateur de Lagrange : $F - A\rho_p \in N_{\mathbb{R}_+^N}(\rho_p)$

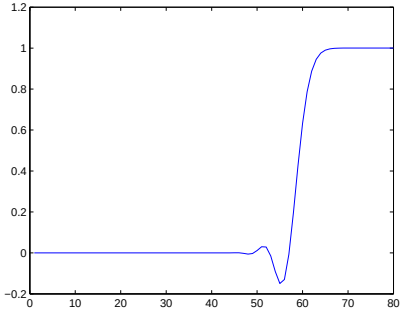
$$\rho_p;\ \Lambda \in \mathbb{R}_+^N; \forall 0 < r \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} A\rho_p = F + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+ \end{array} \right.$$

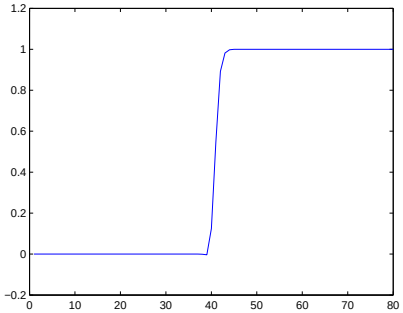
3. $$\rho_p^{n+1};\ \Lambda^{n+1} \in \mathbb{R}_+^N; \forall 0 < r \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} A\rho_p^{n+1} = F + \Lambda^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} = (\Lambda^n - r\rho^n)^+ \end{array} \right.$$

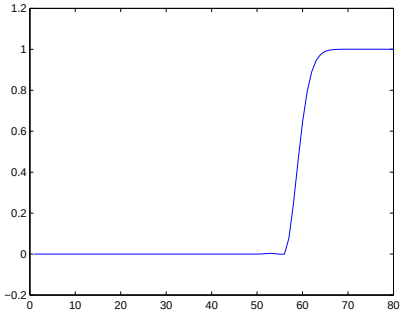
Exemple numérique éléments finis espace-temps 1D

1. Nous reprenons l'exemple considéré plus haut.



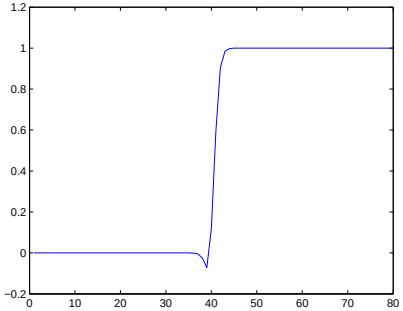


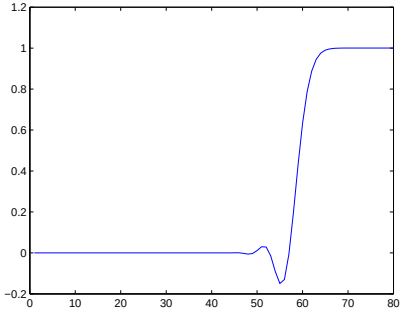


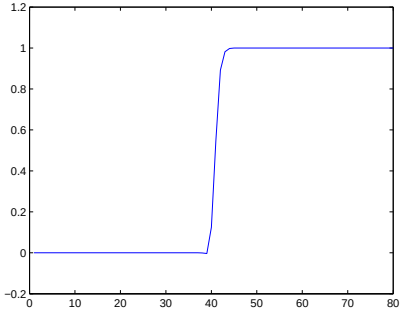


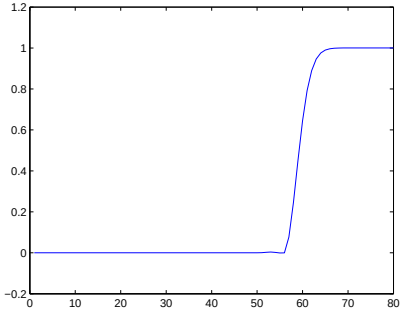
Exemple numérique éléments finis espace-temps 1D

1. Nous reprenons l'exemple considéré plus haut.









2. Convergence du point fixe :

itérations	résidu	min	atteint noeud
30	4.8610^{-5}	$-6.9\,10^{-4}$	55
60	8.710^{-6}	$-1.3\,10^{-4}$	55
240	4.810^{-10}	$-6.\,10^{-9}$	55

A faire formulation Variation totale décroissante

1. Nous partons du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(u,q) = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} u\right) dxdt - \int_Q q\left(\nabla(\rho_0 - v)\right)^- dxdt \tag{7}$$

   - On minimise par rapprot à u et on maximise par rapport à q
   - C est problème de MinMax $D_1\mathcal{L}(\rho_p,\Lambda) = 0$ $D_2\mathcal{L}(\rho_p,\Lambda) = 0$ Rokafellar et Wets Variational analysis P ; 208 springer 2004

$$\frac{1}{2}a(\rho_p,w) - \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} w\right) dxdt + \int_Q \mathrm{sgn}^-\left(\nabla(\rho_0 - \rho_p)\right)\Lambda\, dxdt = 0\,\forall w \in V_h;$$
$$\int_Q q\left(\nabla(\rho_0 - \rho_p)\right)^- dxdt = 0\,\forall q$$

A faire formulation Variation totale décroissante

1. Nous partons du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(u,q) = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} u\right) dxdt - \int_Q q\left(\nabla(\rho_0 - v)\right)^- dxdt \tag{7}$$

   - On minimise par rapprot à u et on maximise par rapport à q
   - C est problème de MinMax $D_1\mathcal{L}(\rho_p,\Lambda) = 0$ $D_2\mathcal{L}(\rho_p,\Lambda) = 0$ Rokafellar et Wets Variational analysis P ; 208 springer 2004

$$\frac{1}{2}a(\rho_p,w) - \int_Q f\left(\tilde{v}/\widetilde{\nabla} w\right) dxdt + \int_Q \mathrm{sgn}^-\left(\nabla(\rho_0 - \rho_p)\right)\Lambda\, dxdt = 0\,\forall w \in V_h;$$
$$\int_Q q\left(\nabla(\rho_0 - \rho_p)\right)^- dxdt = 0\,\forall q$$

2. $sgn^-(z)$ vaut 1 si $z \leq 0$ et sinon est nulle. Matriciellement

$$\begin{cases} A\rho_p^{k+1} = F - M\Lambda^{k+1};\ M = diag(||\mathrm{sgn}^-\left(\nabla(\rho_0 - \rho_p^k)\right)||_{Q_i}) \\ \Lambda^{k+1} = \Lambda^k + \left(\nabla(\rho_0 - \rho_p^{k+1})\right)^- \end{cases}$$

3. On initialise par $\rho_p^0 = \rho_0$; $\Lambda_0 = 0$. La dimension de Λ est le nombre de quadrangles.