

# Solution au sens des moindres carrés pour l'équation du Transport Et principe du maximum

Khadidja Benmansour  
Loic Piffet, Jérôme Pousin et Fethi Abi Ayed

Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen , INSA de Lyon, France

Sixième colloque sur les tendances dans les applications  
mathématiques en Tunisie, Algérie, Maroc (TAMTAM)  
27-30 Avril 2013

# Plan de la présentation

## 1 Motivation

# Plan de la présentation

- 1 Motivation
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum

# Plan de la présentation

- 1 Motivation
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum
- 3 Approximation par éléments finis

# Plan de la présentation

- 1 Motivation
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum
- 3 Approximation par éléments finis
- 4 méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé

# Plan de la présentation

- 1 Motivation
- 2 Formulation moindre carrés espace-temps et principe du maximum
- 3 Approximation par éléments finis
- 4 méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé
- 5 Contrainte de régularité sur la variation totale



$$\begin{cases} \partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) = 0 & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) & \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1)$$

où  $(. | .)$  désigne le produit scalaire euclidien,  $v$  la vitesse et  $Q = \Omega \times ]0, 1[$ .

Une formulation moindre carrés si :

$$\begin{cases} \partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) = 0 & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) & \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1)$$

où  $(\cdot | \cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien,  $v$  la vitesse et  $Q = \Omega \times ]0, 1[$ .

Une formulation moindre carrés si :

- 1 La vitesse  $v$  est peu régulière.

# Formulation moindre carrés dans un espace de Sobolev anisotropique

- $\partial Q_- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} | \tilde{n}) < 0\}$ , la partie entrante du bord de  $Q$ .



$$f = \partial_t(t-1)u_0(x) + (v(x, t) | \nabla(t-1)u_0(x, t))$$

- $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t$ ,  $\tilde{\nabla}$  le gradient espace-temps et  $\tilde{n}$  désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur  $\partial Q$ .

## 1 espaces de Sobolev anisotropiques

- $H(\partial Q_-) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) \in L^2(Q), \varphi|_{\partial Q_-} \in L^2(\partial Q_-, |(\tilde{v} | \tilde{n})| d\tilde{\sigma}) \right\}$
- $H_0(\partial Q_-) = \{\varphi \in H(\partial Q_-), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_-\}$

# Formulation moindres carrés dans un espace de Sobolev anisotropique

- $\partial Q_- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} | \tilde{n}) < 0\}$ , la partie entrante du bord de  $Q$ .



$$f = \partial_t(t-1)u_0(x) + (v(x, t) | \nabla(t-1)u_0(x, t))$$

- $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t$ ,  $\tilde{\nabla}$  le gradient espace-temps et  $\tilde{n}$  désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur  $\partial Q$ .

## 1 espaces de Sobolev anisotropiques

- $H(\partial Q_-) =$

$$\left\{ \varphi \in L^2(Q), (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) \in L^2(Q), \varphi|_{\partial Q_-} \in L^2(\partial Q_-, |(\tilde{v} | \tilde{n})| d\tilde{\sigma}) \right\}$$

- $H_0(\partial Q_-) = \{\varphi \in H(\partial Q_-), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_-\}$

## 2 la formulation au sens des moindres carrés

$$\rho = \operatorname{argmin}_{w \in H_0(\partial Q_-)} \int_Q ((\tilde{v} | \tilde{\nabla} w) - f)^2 dt dx.$$

# Formulation variationnelle et principe du maximum

- ① La dérivée de Gâteaux s'annule, donc

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q \left( \tilde{\mathbf{v}} | \tilde{\nabla} \rho \right) \left( \tilde{\mathbf{v}} | \tilde{\nabla} \varphi \right) dx dt = \int_Q f \left( \tilde{\mathbf{v}} | \tilde{\nabla} \varphi \right) dx dt \quad (2)$$

pour tout  $\varphi \in H_0(\partial Q_-)$ . Sous forme matricielle:

$$A\rho = B \quad (3)$$

avec  $A = a(., .)$  et  $B$ .

# Formulation variationnelle et principe du maximum

- 1 La dérivée de Gâteaux s'annule, donc

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \rho) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi) dx dt \quad (2)$$

pour tout  $\varphi \in H_0(\partial Q_-)$ . Sous forme matricielle:

$$A\rho = B \quad (3)$$

avec  $A = a(., .)$  et  $B$ .

- 2 Principe du maximum

- Le problème admet une unique solution  $u = \rho + (1 - t)u_b$ .
- Pour  $f = 0$ ,  $\inf u_b \leq u \leq \sup u_b$ .

$$u_b(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{if } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ u_1(t, x) & \text{if } (x, t) \in \Gamma_- \times (0, T). \end{cases} \quad (4)$$

où

$$\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x, t) | n(x)) < 0\}$$

- Une formulation pénalisée :

$$\int_Q \left( \tilde{\nu} | \tilde{\nabla} u^m \right) \left( \tilde{\nu} | \tilde{\nabla} \varphi \right) dx dt - m \int_{\partial Q_-} (u^m - u_b) \cdot \varphi \left( \tilde{\nu} | \tilde{n} \right) d\tilde{\sigma} = 0$$

- $M = \sup_{\partial Q_-} u_b$ .
- prendre:  $\varphi = (u^m - M)^+$ .
- $\int_Q \left( \tilde{\nu} | \tilde{\nabla} (u^m - M)^+ \right)^2 dx dt \leq 0$ .

J. Pousin., O. Besson ,Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159- 175

# Approximation par éléments finis

- $V_h \subset H_0(\partial Q_-)$  sous-espace d'éléments finis quadrangulaires de Lagrange  $Q_1$ .
- Trouver  $c_h \in V_h$  tel que

$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h) dx dt; \forall \varphi_h \in V_h \quad (5)$$

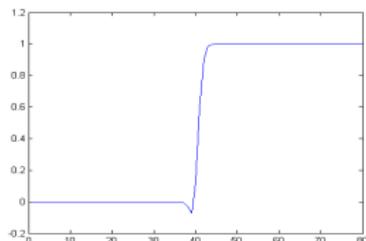
- puisque  $\tilde{v}_1 \neq 0$ , on peut marcher en temps de  $t^n$  à  $t^{n+1}$

# Approximation par éléments finis

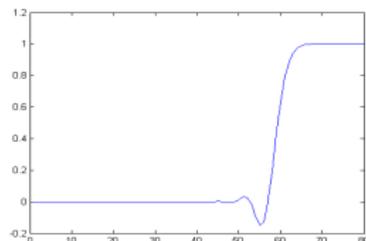
- $V_h \subset H_0(\partial Q_-)$  sous-espace d'éléments finis quadrangulaires de Lagrange  $Q_1$ .
- Trouver  $c_h \in V_h$  tel que

$$a(\varphi_h, c_h) = \int_Q f(\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_h) dx dt; \forall \varphi_h \in V_h \quad (5)$$

- puisque  $\tilde{v}_1 \neq 0$ , on peut marcher en temps de  $t^n$  à  $t^{n+1}$
- Exemple numérique :  $\tilde{v} = 1$  pour  $\Omega = (0, 1)$  et  $u(x, 0) = u_0(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(100x - 50))$ ,  $h = \tau = 1/80$ .



(a)



(b)

Figure : (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps

## Convergence de la solution :

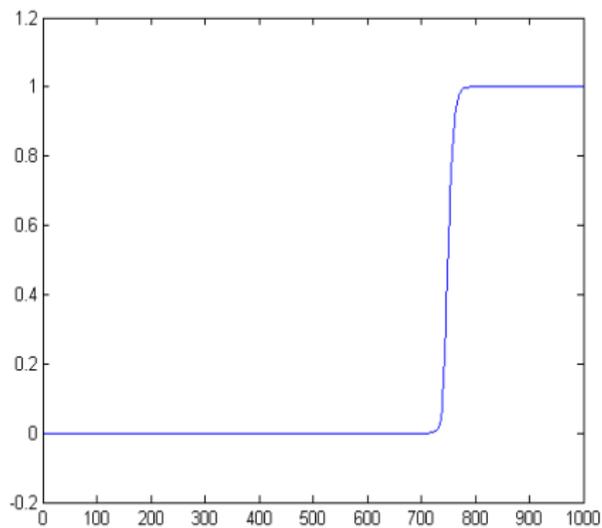


Figure : convergence de la solution pour  $n=1000$ .

# méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé

- 1 Formulons le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte dans  $\mathbb{R}^N$ .

$$\begin{cases} AC_p = B \\ C_p \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- problème de minimisation sur le cône  $\mathbb{R}_+^N$ :

$$u_p = \underset{X \in \mathbb{R}_+^N}{\text{Agmin}} \quad \frac{1}{2} X^t A X - X^t B. \quad (7)$$

- le problème est bien posé, on utilise les conditions de complémentarité

$$0 \leq (AC_p - B); C_p \perp (AC_p - B) \quad (8)$$

# méthode de multiplicateur de Lagrange généralisé

- 1 Formulons le problème comme un problème d'optimisation sous contrainte dans  $\mathbb{R}^N$ .

$$\begin{cases} AC_p = B \\ C_p \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- problème de minimisation sur le cône  $\mathbb{R}_+^N$ :

$$u_p = \underset{X \in \mathbb{R}_+^N}{\text{Agmin}} \quad \frac{1}{2} X^t A X - X^t B. \quad (7)$$

- le problème est bien posé, on utilise les conditions de complémentarité

$$0 \leq (AC_p - B); C_p \perp (AC_p - B) \quad (8)$$

- 2 En utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange:

$$C_p, \Lambda \in \mathbb{R}_+^N, \forall 0 < r \in \mathbb{R} \begin{cases} AC_p = B + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - rC_p)^+ \end{cases} \quad (9)$$

- Un algorithme itératif est proposé pour résoudre le problème: Pour  $C_p^0 = 0_{\mathbb{R}^N}; \Lambda^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$ , calculer:

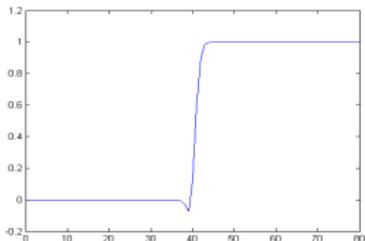
$$\begin{cases} AC_p^{k+1} = B + \Lambda^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} = (\Lambda^k - rC_p^k)^+ \end{cases}$$

- La méthode converge.

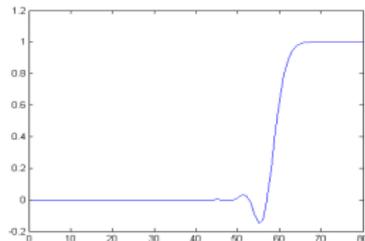
- Un algorithme itératif est proposé pour résoudre le problème: Pour  $C_p^0 = 0_{\mathbb{R}^N}; \Lambda^0 = 0_{\mathbb{R}^N}$ , calculer:

$$\begin{cases} AC_p^{k+1} = B + \Lambda^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} = (\Lambda^k - rC_p^k)^+ \end{cases}$$

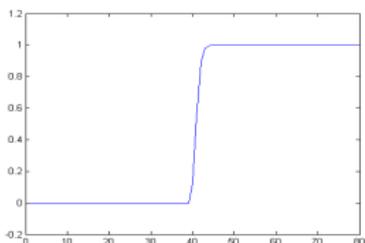
- La méthode converge.
- Considérons comme plus haut l'exemple 1D :



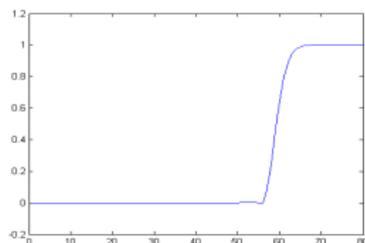
(a)



(b)

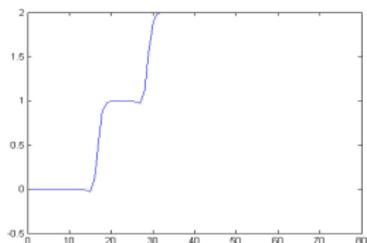


(g)

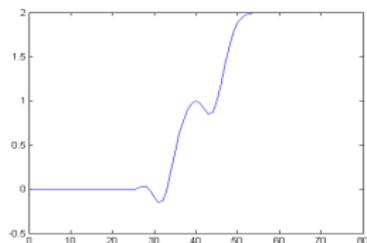


(h)

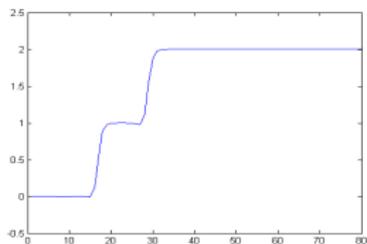
- Considérons un autre exemple numérique:  $\tilde{v} = 1$  pour  $\Omega = (0, 1)$  et  $u(x, 0) = u_0(x) = 1/2 + (1/2 \tanh(100x - 20)) + 1/2 + (1/2 \tanh(100x - 35))$ ,  $h = \tau = 1/80$ .



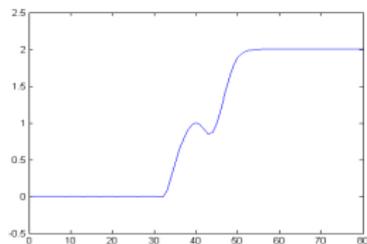
(a)



(b)



(g)



(h)

Figure : (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps

# Contrainte de régularité sur la variation totale

- Résoudre le problème globale en temps.

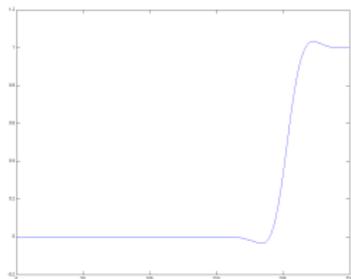
# Contrainte de régularité sur la variation totale

- Résoudre le problème globale en temps.
- Afin de contrôler ces artefacts, on propose d'imposer la positivité de la solution tout en pénalisant sa variation totale. Ceci revient à résoudre le problème discrétisé suivant :

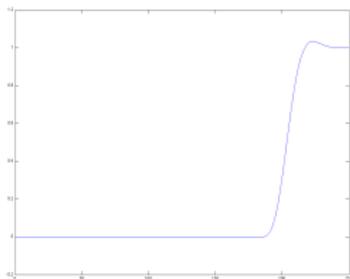
$$\min_{V_h} \frac{1}{2} \int_Q (\partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) - f)^2 dt dx + I_{C_h}(u) + \lambda TV(u) \quad (10)$$

avec  $\lambda > 0$ , où  $C_h = \left\{ u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \geq 0, \forall i \right\}$  et où  $TV(u) = \int_Q |\nabla u(x, t)| dx dt$ .

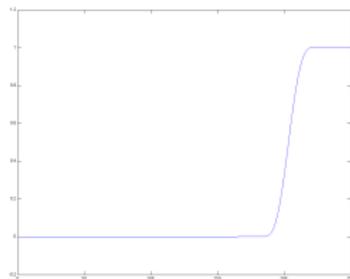
La figure suivante illustre les résultats obtenus à  $t = 0.3$ .



(a)



(b)



(c)

**Figure :** (a) Solution du problème global . (b) Solution du problème avec la contrainte  $I_{C_h}$ , persistance de l'overshooting. (c) Solution du problème avec contrainte et régularisation  $TV$  pour  $\lambda = 2.10^{-4}$ .

-  A. Beck, M. Teboulle, A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, *SIAM J. Img. Sci.*, (2009), 183-202
-  P. Bochev., D. Ridz al, G. Scovazzi, M. Shashkov, Formulation, analysis and numerical study of an optimization-based conservative interpolation(remap) od sacalr fields for arbitrary Lagrangien-Eulerian method, *Jour. Comp. Phys.*, **230** (2011), 5199-5225.
-  Horn., B. Schunck, Determining optical flow, *Artificial Intelligence.*, (1981).
-  D. Kuzmin, Linearity-preserving flux correction and convergence acceleration for constraine Galerkin schemees, *Jour. of Comp. and Applied Math.*, **236** (2012), 2317-2337.
-  J. Pousin., O. Besson ,Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159- 175 .