



HAL
open science

Solution au sens des moindres carrées pour l'équation du transport et principe du Maximum

Khadidja Benmansour, Loic Piffet, Jérôme Pousin, Fethi Abi Ayad

► **To cite this version:**

Khadidja Benmansour, Loic Piffet, Jérôme Pousin, Fethi Abi Ayad. Solution au sens des moindres carrées pour l'équation du transport et principe du Maximum. Les tendances dans les applications Mathématiques en Tunisie, Algérie, Maroc, Apr 2013, Alger, Algérie. pp.94. hal-00931251

HAL Id: hal-00931251

<https://hal.science/hal-00931251>

Submitted on 17 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Solution au sens des moindres carrés

Pour l'équation du Transport Et principe du maximum

K. Benmansour^{*,**} — L. Piffet^{*} — J. Pousin^{*} — F. Abi Ayed^{**}

^{*} Université de Lyon , INSA de Lyon ICJ UMR CNRS 5208

20 Av. A. Einstein

France

Email:khadidja.benmansour@insa-lyon.fr

loic.piffet@insa-lyon.fr

jerome.pousin@insa-lyon.fr

^{**} Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen

Département de mathématiques Faculté des sciences Université de Tlemcen BP 119

Algerie

Email:f-abiyad@mail.univ-tlemcen.dz

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous considérons une formulation de l'équation du transport au sens des moindres carrés. Nous rappelons que le principe du maximum faible est vérifié par la formulation continue, et nous proposons des méthodes numériques pour que le principe du maximum discret soit satisfait en introduisant des problèmes de minimisation sous contraintes.

ABSTRACT. In this note, we deal with a least squares formulation for the transport equation. Some numerical schemes are proposed in order that a discret maximum principle hold true. This schemes are obtained by considering optimization problems subject to constraints.

MOTS-CLÉS : équation de transport, les méthodes espaces-temps au sens moindres carrés, variation totale .

KEYWORDS : transport equation, space-time least squares methods, total variation.

1. Introduction

Résoudre l'équation du Transport au sens des moindres carrés est nécessaire dans de nombreuses applications physiques, et en imagerie par exemple, où il est souvent nécessaire de rajouter des contraintes à l'équation du Transport (appelée flot optique) comme une condition finale dans le cas du recalage.

Le principe du maximum est satisfait par la formulation continue au sens des moindres carrés, et sa démonstration demande un argument de type perturbation singulière. Le problème approché par une méthode d'éléments finis de Lagrange y compris à l'ordre n n'est pas vérifié. Afin d'imposer le principe du maximum discret (PMD) nous proposons une modification de la méthode de Galerkin en y adjoignant des contraintes d'inégalité. Mentionnons [4] et [2] où une stratégie similaire a été utilisée et analysée, dans un contexte algébrique pour le premier et pour des méthodes ALE pour le second. Dans ce travail, nous proposons d'introduire une contrainte de non négativité pour la solution afin d'éviter les undershooting, et de rajouter une contrainte de régularité concernant la variation totale de la solution pour éviter les overshooting.

Le papier est organisé de la manière suivante. A la section 2 le problème au sens des moindres carrés est introduit. La section 3 commence par quelques expérimentations numériques, et la contrainte de non négativité des solutions est introduite. Dans la section 4, une contrainte sur la variation totale est introduite pour contrôler les overshooting par exemple et les oscillations. La précision de la méthode est étudiée.

2. Principe du Maximum pour le problème continu

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ satisfaisant la propriété du cône. Si $T > 0$ est donnée, soit $Q = \Omega \times]0, T[$. Considérons une vitesse d'advection $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(Q)$ un terme source donné. Dans tout ce papier la vitesse v vérifie au moins la régularité suivante : $v \in L^\infty(Q)^d$; et $\operatorname{div} v \in L^\infty(Q)$. Soit $\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x, t) \mid n(x)) < 0\}$ où $n(x)$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$ au point x . On suppose que Γ_- ne dépend pas de t .

Le problème consiste à trouver une fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (v(x, t) \mid \nabla u(x, t)) = f & \text{dans } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) & \text{pour } x \text{ sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1)$$

Quand u_1 , u_0 , et u sont suffisamment régulières, en changeant le terme source f si nécessaire, on peut supposer que $u_1 = 0$ sur Γ_- , et $u_0 = 0$ sur Ω . Le cadre fonctionnel pour une formulation variationnelle du problème (1) est donné, pour v régulière. On dé-

finit \tilde{v} par $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \dots, v_d)^t$ et pour une fonction suffisamment régulière φ définie sur Q , soit $\tilde{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d} \right)^t$, le produit scalaire euclidien est noté $(\cdot | \cdot)$. Soit

$$\partial Q_- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{v} | \tilde{n}) < 0\} = \Gamma_- \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\},$$

où \tilde{n} désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur ∂Q , et

$$u_b(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ u_1(x) & \text{si } (x, t) \in \Gamma_- \times (0, T). \end{cases}$$

Les espaces de Sobolev anisotropiques

$$H(\partial Q_-) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}\varphi \right) \in L^2(Q), \varphi|_{\partial Q_-} \in L^2(\partial Q_-, |(\tilde{v} | \tilde{n})| d\bar{\sigma}) \right\}$$

et $H_0(\partial Q_-) = \{\varphi \in H(\partial Q_-), \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_-\}$ sont introduits. Une formulation du problème (1) au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\rho = \operatorname{argmin}_{w \in H_0(\partial Q_-)} \int_Q \left(\left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}w \right) - f \right)^2 dt dx = \operatorname{argmin}_{w \in H_0(\partial Q_-)} J(w).$$

La fonctionnelle J est convexe, continue et dérivable. La dérivée de Gâteaux de J est $DJ(\rho)\varphi = \int_Q \left(\left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}\rho \right) - f \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}\varphi \right) dx dt$. Donc, une condition suffisante pour obtenir la solution au sens des moindres carrés de (1) est la *formulation faible* suivante : Trouver $\rho \in H_0(\partial Q_-)$ tel que

$$\int_Q \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}\rho \right) \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}\varphi \right) dx dt = \int_Q f \left(\tilde{v} | \tilde{\nabla}\varphi \right) dx dt \quad (2)$$

pour tout $\varphi \in H_0(\partial Q_-)$.

Théorème 2.1 Pour v régulière, et $f \in L^2(Q)$, le problème (1) admet une unique solution $u = \rho + (1 - t)u_b$. En outre, pour $f = 0$, u satisfait le principe du maximum : $\inf u_b \leq u \leq \sup u_b$.

Preuve. La démonstration du principe du maximum demande d'utiliser une méthode de perturbation singulière, elle est donnée dans [5] \square

3. Problème discrétisé

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ une base du sous-espace d'éléments finis $V_h \subset H_0(\partial Q_-)$, obtenue, par exemple, pour un maillage du domaine Q , avec des éléments finis du type

Q1. Une approximation du problème consiste à trouver $\rho_h = \sum_{j=1}^N \varphi_j(t, x) \cdot \rho_j$ tel que $\forall \varphi_i, \sum_{j=1}^N \rho_j \int_Q (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_j) (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt = \int_Q f (\tilde{v} | \tilde{\nabla} \varphi_i) dx dt$.

La méthode que nous proposons est une méthode de marche en temps. En effet cela est possible, car on suppose que $\tilde{v}_1 > 0$, alors toutes les courbes sont croissantes par rapport au temps. Le principe de cette méthode : À chaque pas de temps on résout un problème "local en temps", où l'état initial est l'état au pas de temps courant et l'inconnu est l'état au pas de temps suivant. Nous calculons la matrice de rigidité A du système pour un domaine $\Omega \times (t^n, t^{n+1})$. La solution est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} Au^{n+1} &= F(t^{n+1}) \\ u^{n+1} &= \begin{cases} u^{n+1} & \text{sur } \Omega \\ u^n & \text{sur } \Gamma_- \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

3.1. Exemple numérique

Considérons le problème de l'équation de transport avec condition initiale non nulle et une vitesse constante pour $\Omega = (0, 1)$

$$\partial_t u + \partial_x u = 0 \quad \text{dans } Q \quad (4)$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(100x - 50))$, et on résout par la méthode de marche en temps pour un seul pas de temps et pour 20 pas de temps avec 80 points en espace, en respectant le CFL on peut obtenir le pas de temps maximal (ici, le pas de temps est égale au pas d'espace). La figure 1(a) représente la solution pour un seul pas de temps, la figure 1(b) représente la solution pour 20 pas de temps. Malgré les oscillation présentes en (a) et (b), la méthode converge comme il est montré en figure 1(c) où nous avons 1000 points en espaces.

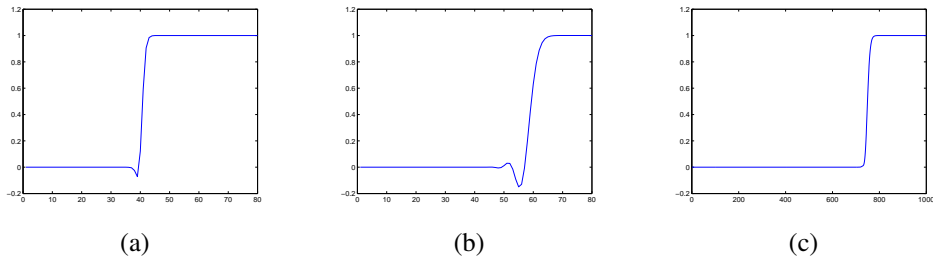


Figure 1. (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps. (c) Convergence de la solution

3.2. Principe du maximum

Afin d'avoir une solution positive on transforme le problème en un problème de minimisation sous contrainte.

Trouver $\rho_p \in \mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\begin{cases} A\rho_p = F \\ \rho_p \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

On utilise les conditions de complémentarité données pour le problème dans \mathbb{R}^N (voir par exemple [6]), puisque le problème peut être considéré comme la minimisation de la fonctionnelle : $\frac{1}{2}X^tAX - X^tF$ sur le cône \mathbb{R}_+^N . En notant $\Lambda = (A\rho_p - F)$ nous devons satisfaire : $0 \leq \Lambda$; $0 \leq (A\rho_p - F)$; $\rho_p \perp (A\rho_p - F)$.

Nous notons que les trois conditions sont équivalentes pour tout réel $0 < r$ à : $\Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+$. Une formulation avec multiplicateur de Lagrange généralisé s'écrit

$$\begin{cases} A\rho_p = F + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+ \end{cases}$$

que l'on résout itérativement avec : $\rho_p^0 = 0$; $\Lambda^0 = 0$

$$\begin{cases} A\rho_p^{n+1} = F + \Lambda^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} = (\Lambda^n - r\rho_p^n)^+ \end{cases}$$

Nous prenons le même exemple que précédemment, où la solution est représentée à la figure 2 pour un pas de temps et pour 20 pas de temps.

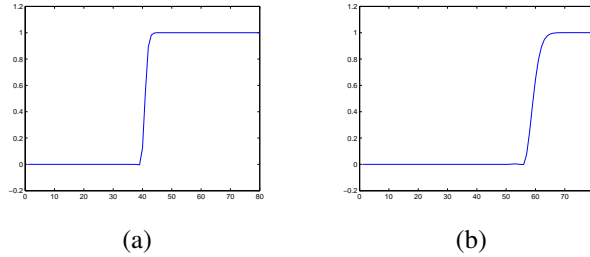


Figure 2. (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps.

4. Contrainte de régularité sur la variation totale

Le fait d'imposer une condition finale implique, d'un point de vue numérique, de résoudre le problème de façon globale en temps. Ceci fait apparaître en plus du phénomène

d'undershooting, un phénomène d'overshooting au voisinage des sauts (voir figure 3. (a)). Afin de contrôler ces artefacts, on propose d'imposer la positivité de la solution tout en pénalisant sa variation totale. Ceci revient à résoudre le problème discrétisé suivant :

$$\min_{V_h} \frac{1}{2} \int_Q (\partial_t u + (v(x, t) | \nabla u(x, t)) - f)^2 dt dx + I_{C_h}(u) + \lambda TV(u) \quad (6)$$

avec $\lambda > 0$, où $C_h = \left\{ u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \geq 0, \forall i \right\}$ et où $TV(u) = \int_Q |\nabla u(x, t)| dx dt$. On propose, pour résoudre ce problème d'utiliser un algorithme de descente de gradient alterné de type ISTA (cf. [1]). La figure suivante illustre les résultats obtenus à $t = 0.3$.

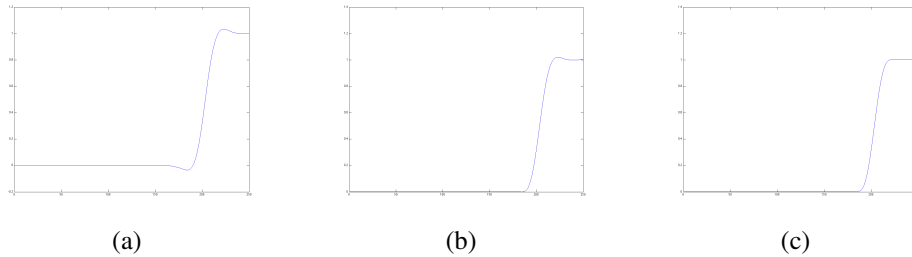


Figure 3. (a) Solution du problème global. (b) Solution du problème avec la contrainte I_{C_h} , persistance de l'overshooting. (c) Solution du problème avec contrainte et régularisation TV pour $\lambda = 2.10^{-4}$.

Bibliographie

- [1] A. Beck, M. Teboulle, A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, *SIAM J. Img. Sci.*, (2009), 183-202
- [2] P. Bochev., D. Ridz al, G. Scovazzi, M. Shashkov, Formulation, analysis and numerical study of an optimization-based conservative interpolation(remap) od sacalr fields for arbitrary Lagrangien-Eulerian method, *Jour. Comp. Phys.*, **230** (2011), 5199-5225.
- [3] Horn., B. Schunck, Determining optical flow, *Artificial Intelligence.*, (1981).
- [4] D. Kuzmin, Linearity-preserving flux correction and convergence acceleration for constraine Galerkin schemes, *Jour. of Comp. and Applied Math.*, **236** (2012), 2317-2337.
- [5] J. Pousin., O. Besson ,Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159- 175 .
- [6] M. Rokafellar., Variational analysis, *Springer*, (2008).