



HAL
open science

Lois de conservation en Mécanique des Milieux Discrets

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

| Jean-Paul Caltagirone. Lois de conservation en Mécanique des Milieux Discrets. 2014. hal-00927279

HAL Id: hal-00927279

<https://hal.science/hal-00927279>

Preprint submitted on 12 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lois de conservation en Mécanique des Milieux Discrets

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
6 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé

La modélisation physique des effets de compressibilité, de viscosité, de dilatation thermique dans les milieux fluides ou solides est réalisée à partir de la loi de Newton sur la base de la Mécanique des Milieux Discrets [8]. L'observation des résultats d'expériences élémentaires de Couette, de Poiseuille ou sur l'équilibre d'un fluide dans une cavité permettent une modélisation des notions de pression et de viscosité comme les composantes essentielles des lois de conservation de la quantité de mouvement ou du flux de chaleur. Ces effets introduisent deux coefficients, la résistance à la compression et la viscosité de rotation, caractéristiques du milieu, positifs et parfaitement mesurables. Deux potentiels associés à la quantité d'accélération correspondant aux effets de pression et de viscosité permettent l'accumulation des contraintes, un potentiel scalaire p et un potentiel vectoriel ω . Ces deux potentiels définissent formellement une décomposition de Hodge-Helmholtz de la quantité de mouvement en une partie à rotationnel nul et une partie à divergence nulle.

L'approche basée sur la géométrie différentielle utilise le théorème de Stokes pour dériver les lois de conservation vectorielles, quantité de mouvement et flux de chaleur, et le théorème de la divergence pour les lois de conservation scalaires, énergie et masse. La vitesse pour les fluides, le déplacement pour les solides et le flux ne sont définis que par leurs seules composantes. Les lois de conservation discrètes obtenues ne nécessitent pas le recours aux tenseurs d'ordre supérieurs et s'écrivent uniquement sous forme vectorielle; de ce fait la formulation n'introduit aucun coefficient qui ne soit pas strictement défini. Les lois de conservation obtenues sont analysées en comparaison des équations de la Mécanique des Milieux Continus.

Mots clés

Mécanique des milieux discrets, mécanique des milieux continus, thermodynamique des milieux continus, équation de Navier-Stokes, lois de Cauchy, décomposition de Hodge-Helmholtz.

Conservation laws in Discrete Mechanics

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
6 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Abstract

Physical modeling of the effects of compressibility, viscosity, thermal expansion in the fluid or solid media is dealt from Newton's law on the basis of the Discrete Mechanics [8]. Observing the results of basic experiments Couette flow, Poiseuille flow or the equilibrium of fluid in cavity allow modeling concepts of pressure and viscosity as essential components of the conservation laws for momentum. These effects introduce two coefficients, the compressibility module and the rotational viscosity which are characteristic of the medium and fully positive and measurable. Two potentials associated to quantity of acceleration and correspond to the effects of pressure and viscosity. They allow the accumulation of constraints through a scalar potential p and vector potential ω . The decomposition of the equation of motion into rotation-free and divergence-free components, leads to the formulation of momentum as the sum of these two terms. This is a formally exact Hodge-Helmholtz decomposition of equation of motion.

The approach is based on differential geometry using the Stokes theorem to derive the vector conservation laws, momentum and heat flux, and the divergence theorem for scalar conservation laws, energy and mass. Velocity for fluid, displacement for solid and flux are defined only by their components. The discrete conservation laws so obtained do not require the use of higher order tensors; they are write only in vector form, thereby the formulation does not rely on any coefficient that is not strictly defined. Conservation laws finally obtained are analyzed in comparison to the equations of Continuum Mechanics.

Keywords

Discrete Mechanics, Continuum Mechanics, Navier-Stokes equation, Cauchy's laws, Hodge-Helmholtz decomposition

Table des matières

1	Introduction	5
2	Notion de Milieu Discret	8
2.1	Définitions	8
2.1.1	Vecteurs et composantes	9
2.1.2	Quantités tensorielles	12
2.1.3	Les potentiels scalaire et vectoriel	12
2.2	Les caractéristiques physiques	13
2.3	Non équilibre thermodynamique	14
2.3.1	Forces et Flux	15
2.4	Conservation de la masse	16
3	Conservation de la quantité de mouvement	18
3.1	Classification des forces	18
3.2	Trois expériences fondatrices	19
3.2.1	Equilibre d'un verre d'eau	19
3.2.2	Ecoulement de Couette	24
3.2.3	Ecoulement de Poiseuille	26
3.3	Postulats	28
3.4	Modélisation des forces de pression	29
3.5	Modélisation des efforts visqueux	31
3.5.1	Modélisation des effets visqueux de volume	32
3.5.2	Modélisation des effets visqueux de surface	33
3.5.3	Etat de contrainte	35
3.6	Objectivité	36
3.7	Equation du mouvement discrète	37
3.7.1	Loi fondamentale de la dynamique	37
3.7.2	Remontée eulérienne	40
3.8	Formulation en masse volumique et température	41
4	Conservation du flux et de l'énergie	44
4.1	Introduction	44
4.2	Conservation du flux	44
4.3	Conservation de l'énergie	46
4.3.1	Conservation de l'énergie totale	46
4.3.2	Conservation de l'énergie cinétique	46
4.3.3	Conservation de l'énergie interne	47
4.4	Equations discrètes du flux et de l'énergie	47
5	Propriétés des équations discrètes	49
5.1	Physique représentée	49
5.2	Conditions aux limites	50
5.2.1	Surface de contact	50
5.2.2	Onde de choc	52
5.2.3	Conditions de bord	53
5.2.4	Glissement	53
5.2.5	Effets capillaires	54
5.3	Pénalisation des potentiels	56
5.4	Milieu Continu et Milieu Discret	58

5.4.1	Différences avec l'équation de Navier-Stokes	58
5.4.2	Dissipation	60
5.4.3	Cas des mouvements rigidifiants	61
5.4.4	Un exemple de dissipation de l'énergie	62
5.5	Décomposition de Hodge-Helmholtz	63
5.6	Approximations	65
5.6.1	Loi de Bernoulli	65
5.6.2	Écoulement irrotationnel	65
5.6.3	Fluide parfait	66
5.6.4	Écoulement incompressible	67
5.7	Viscoélasticité linéaire	68
5.7.1	Compression pure	70
5.7.2	Cisaillement pur	71
5.7.3	Fluide de Bingham	72
5.8	Multiphysique : écoulement autour d'un cylindre en milieu infini	73
5.8.1	Modèle de Darcy	74
5.8.2	Modèle de Stokes	76
5.8.3	Modèle de Fluide Parfait	77
5.8.4	Modèle de Brinkman	77
6	Conclusions	79

1 Introduction

Les lois de conservation de la mécanique ont été établies depuis plus de deux siècles et n'ont que peu évoluées depuis. Les apports importants de C. Truesdell et de W. Noll [24, 25] pour intégrer les lois de la thermodynamique dans les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie ont cependant conduit à des équations de Navier-Stokes très représentatives de la réalité physique des phénomènes observés. Bien d'autres contributions importantes ont permis de constituer le corpus des équations de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) telle qu'elle est enseignée aujourd'hui [21, 6, 22, 16, 12, 17].

On constate cependant un certain nombre de difficultés inhérentes à la théorie des milieux continus :

- la notion même de milieu continu pose un problème important : la réduction à un point du volume élémentaire pour définir scalaires, vecteurs et tenseurs supprime toute référence à la direction et à l'orientation. Afin de rétablir ces notions il est nécessaire de placer le domaine dans un référentiel, par exemple pour définir une vitesse en un point à partir de ses composantes.
- l'introduction du tenseur de Cauchy pour exprimer la contrainte locale $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ induit, pour un fluide isotrope, deux coefficients de viscosité μ et λ qui sont liés par la loi de Stokes $3\lambda + 2\mu \geq 0$; nous reviendrons sur ce point plus loin. La valeur de λ reste très difficilement mesurable pour les fluides en général et varie très fortement suivant les auteurs et les méthodes de mesure. Cette loi n'est pas valable en général [15]. Il est d'ailleurs à noter que l'existence de ce coefficient en solide ne pose par contre pas de problème.
- l'apparition de la notion de tenseur à la fin du 19^{ème} siècle et son développement s'est faite dans le cadre de la mécanique des milieux continus avant d'être utilisée dans d'autres secteurs de la physique. L'absolue nécessité d'utiliser les tenseurs dans le domaine de la mécanique pour décrire les relations entre les contraintes et les déformations peut légitimement être discutée. C'est en fait l'interprétation simpliste de certaines expériences en fluide et en solide qui a orienté ce choix qui est depuis resté figé. Les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy n'ont pu être réduites que grâce au principe d'invariance matérielle pour un milieu isotrope [22, 16, 12]. Malgré ces réductions les coefficients restants ne sont liés que par une inégalité confirmée par une approche thermodynamique.
- le lien formel entre les équations de conservation et la décomposition de Hodge-Helmholtz n'est pas établi. Si le théorème de Helmholtz assure que tout champ vectoriel peut être décomposé en une partie irrotationnelle et une partie solénoïdale dans \mathcal{R}^3 pour un champ qui décroît à l'infini, son application s'est limitée aux champs vectoriels eux-mêmes comme la vitesse par exemple qui peut être décomposée en deux termes qui sont les potentiels scalaire et vectoriel.
- Le niveau de modélisation des effets de pression et des effets de viscosité ne sont pas modélisés au même niveau dans l'équation de Navier-Stokes [22]. Si les effets visqueux ont reçu une attention particulière qui permet de décrire les transferts de quantité de mouvement dans un fluide, les effets de compression ou de détente ne sont pris en compte que par un scalaire, la pression, sans qu'aucun lien ne soit établi au premier ordre entre celle-ci et la vitesse. Pour assurer ce lien il est nécessaire de faire appel à d'autres lois de conservation, celles de la masse et de l'énergie.
- la thermodynamique a longtemps joué un rôle important qui a justement été contesté par Truesdell [24] au siècle dernier. Elle a élevée au statut de loi la relation entre les différentes grandeurs mesurables comme la masse volumique, la pression, la température par exemple. Les liens structurels de couplage entre les équations du mouvement, la conservation de

la masse et la loi d'état mènent à une confusion sur le rôle de chacune de ces relations. Par exemple la conservation de la masse doit servir à faire évoluer la masse volumique en fonction des actions extérieures mais pas à calculer la pression. De plus rien n'impose que la loi d'état doit être vérifiée en tout point et à tout instant.

- la conservation de l'énergie porte seule la notion de flux et celle de l'énergie et la conservation du flux est complètement absente du formalisme classique de la mécanique des milieux continus. Alors que l'équation de conservation de la quantité de mouvement est associée à la conservation de la masse le flux de chaleur y est simplement introduit par une loi simpliste reliant le flux et le gradient de température, la loi de Fourier.
- les conditions aux limites entre deux fluides non miscibles ou sur le bord d'un domaine s'écrivent à partir des contraintes définies par le tenseur de Cauchy et sont difficiles à appliquer de manière pratique ; elles doivent être complétées par des relations de compatibilité par exemple dans le cas des ondes de choc. Elles sont de plus imposées de manière forte, par exemple pour un débit de fluide entrant dans un domaine on impose la vitesse normale violant au passage les équilibres décrits par les différents termes de l'équation de conservation.

Le formalisme du milieu continu est essentiellement lié aux relations entre déformations et contraintes qui sont représentés par un tenseur des contraintes plus ou moins complexes ; les plus complets comme le tenseur de Green-Lagrange permet d'appréhender des grandes déformations alors que certains tenseurs issus d'une linéarisation comme le tenseur de Cauchy est limité aux petites transformations. Le gradient du champ de déplacement introduit de fait la notion de tenseur qui pourra être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Cette opération vise à filtrer le mouvement rigide de translation qui ne créera pas de force dans le matériau.

La problématique abordée en mécanique des milieux discrets (MMD) est basée sur l'abandon du milieu continu où toutes les variables scalaire ou vectorielle sont définies en un point. En MMD les grandeurs scalaires seront associées à un point tandis que les quantités vectorielles seront définies sur un segment dont la longueur pourra être aussi petite que nécessaire tout en gardant sa direction. Nous placerons d'emblée dans le cadre des petits déplacements et pour pallier les inconvénients de cette approche nous introduirons le principe d'accumulation où chaque état d'équilibre sera conservé pour représenter l'évolution du système physique.

Un certain nombre de principes nous semblent indispensables pour modéliser tous les effets mécaniques :

- le milieu est en équilibre dans l'espace s'il n'est soumis à aucune force à distance ou de contact,
- le principe de l'action et de la réaction, même si la contrainte surfacique n'aura pas la même signification qu'en MMC,
- les mouvements rigidifiants de translation et rotation d'ensemble pourront conduire à mettre en défaut la formulation où la rotation jouera un rôle important. Nous supposons que le taux rotation est nul à l'infini, une des conditions d'utilisation du théorème de Stokes. Il est seulement essentiel que tout mouvement rigidifiant, translation ou rotation rigides, n'affecte pas la quantité d'accélération.
- la dissipation des effets mécaniques, propagation des ondes et effets visqueux devra être positive et satisfaire à l'inégalité de Clausius-Duhem.

La théorie développée ici repart de la loi fondamentale de la dynamique et de quelques expériences élémentaires pour bâtir des modélisations cohérentes et équilibrées des effets principaux observés, la diffusion de la quantité de mouvement et la propagation des ondes en particulier. Elle reprend certains éléments établis dans un premier document sur le sujet [8] pour préciser

et compléter la dérivation des équations de conservation scalaires et vectorielles sans faire appel aux tenseurs d'ordre deux.

Les propriétés générales de ces équations seront ensuite exposées. Notamment les différences entre l'équation de Navier-Stokes et l'équation du mouvement issue de cette théorie seront mises en évidence ; de même les deux formes du terme de dissipation seront comparées.

2 Notion de Milieu Discret

2.1 Définitions

La Mécanique des Milieux Discrets développée ici propose une approche très différente de celle de la Mécanique des Milieux Continus. Elle consiste à considérer de manière différenciée des objets de natures différentes, des points, des segments orientés, des surfaces orientées et des volumes.

La figure (Fig. 1) montre un volume de contrôle Ω composé de points, de segments et de surfaces. S'il est nécessaire de faire tendre vers zéro le volume Ω alors les différents éléments y tendront de la même manière. La réduction vers zéro du volume sera homothétique et l'objet sera homologue à l'original à toutes les échelles intermédiaires.

L'application de ce concept subit la même restriction que celle relative à la Mécanique des Milieux Continus, les équations de conservation discrètes ne resteront valides que tant que la longueur de chaque segment sera grande devant le libre parcours moyen des molécules.

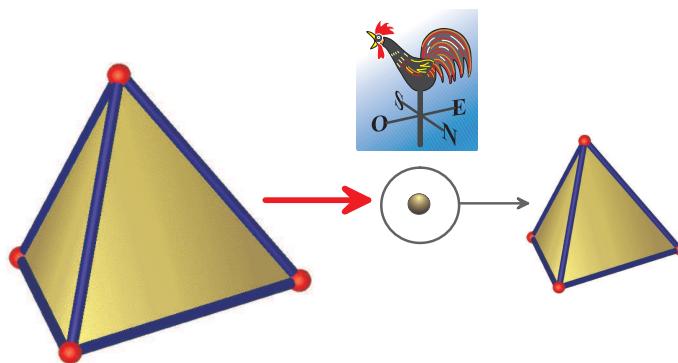


FIGURE 1 – La Mécanique des Milieux Continus réduit un volume élémentaire à un point et nécessite de positionner ce point dans un référentiel absolu ; en Mécanique des Milieux Discrets l'examen de la topologie à toutes les échelles sauvegarde les directions.

Ainsi la structure microscopique (molécules, atomes, ...) de la matière sera ignorée. Le vocable discret utilisé tout au long de ce document fera référence à la topologie du volume de référence composé de points, de segments, de surfaces et de volumes. L'exposé qui suit sera formel et ne fera en aucun cas référence à des méthodologies numériques visant à discrétiser l'espace en volumes.

Considérons donc la topologie élémentaire de la Mécanique des Milieux Discrets (Fig. 2). Elle est composée de deux points reliés par un segment et d'un volume autour d'un point que nous appellerons volume dual. Le segment sera orienté de manière arbitraire et le volume dual sera muni d'une normale extérieure. L'assemblage de segments reliant tous les noeuds d'une même surface sera appelée topologie primale.

Aucune condition n'est fixée pour définir les éléments de la topologie élémentaire, les segments peuvent être curvilignes et les surfaces duales peuvent être elles-mêmes quelconques. Toutefois si l'on considère que les dimensions de cet objet tendent vers zéro la surface primale sera au premier ordre une surface plane. Dans le cas où la surface primale est composée de plus de trois points elle pourra toujours être décomposée en triangles. Les théorèmes de la géométrie différentielle

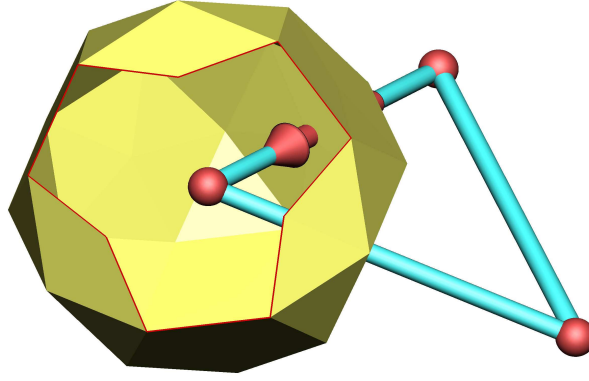


FIGURE 2 – Définition de la topologie élémentaire, points (en rouge) reliés par des segments (en bleu) et volume dual (en jaune).

s'appliquant pour tous types de surfaces la portée de cet exposé ne sera pas réduite par ces aspects géométriques. Cette approche formalise théoriquement le concept introduit par Harlow et Welch sur la localisation des inconnues sur une topologie primale cartésienne [18]. Dans l'esprit elle rejoint le travail de Tonti [23] qui remet en cause la nécessité de discrétiser numériquement les équations de la physique pour proposer un lien direct entre le modèle physique et une description algébrique.

2.1.1 Vecteurs et composantes

En mathématiques la notion de vecteur est bien définie à l'aide d'une base. Du point de vue physique la notion de vecteur est plus délicate à appréhender car elle ne se mesure pas directement, on sait mesurer ses composantes dans des directions privilégiées par exemple avec un anémomètre laser-doppler. Sa reconstitution permet d'avoir un champ de vecteurs dans l'espace à trois dimensions.

Maintenant la question est de savoir si la connaissance de ses seules composantes permettra de se passer de sa reconstitution pour accéder directement aux lois de la mécanique. Si l'on appelle \mathbf{W} la vitesse, sa composante suivant la direction δ de vecteur unitaire \mathbf{t} sera $\mathbf{V} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$ est aussi un vecteur. Toute la Mécanique des Milieux Discrets est basée sur ce concept, la vitesse restera non définie, seules ses composantes seront définies sur chaque segment de la topologie primale.

La figure (Fig. 3) permet d'introduire l'ensemble des notations utilisées plus loin.

Les symboles et notations de la figure (Fig. 3) ont les significations suivantes :

- $\mathbf{W} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$ le vecteur vitesse dans un système cartésien orthonormé,
- $\mathbf{P} = \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \varphi_3 \mathbf{e}_3$ le flux de chaleur dans un système cartésien orthonormé,
- \mathbf{t} , le vecteur unitaire porté par δ ,
- \mathbf{m} , le vecteur unitaire en M normal au plan A ,
- \mathbf{n} , le vecteur unitaire normal à la surface de la topologie duale,
- $\mathbf{V} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$, le vecteur vitesse projeté sur l'axe δ ,
- $\Phi = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$, le vecteur flux projeté sur l'axe δ ,
- $\mathbf{U} = dt \mathbf{V}$, le vecteur déplacement projeté sur l'axe Δ ,
- P et R , les noeuds limitant les segments
- $\Gamma = [P R]$, le segment porté par δ ,

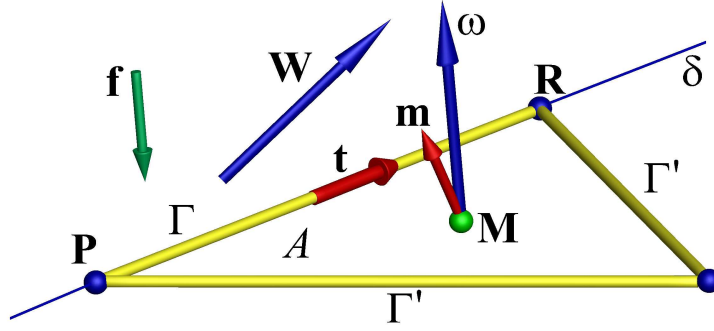


FIGURE 3 – Définition du système physique

- \mathbf{f} , le vecteur représentant les forces de volume,
- p , la pression sur les noeuds de la topologie primale,
- T , la température sur les noeuds de la topologie primale,
- ω , le vecteur rotationnel du vecteur vitesse sur le contour primal $\Gamma + \Gamma'$,
- $\boldsymbol{\omega} = \mu \nabla \times \mathbf{V}$, le potentiel vecteur de la quantité d'accélération,
- Ω , le volume de la topologie duale autour du point P ,
- S , la surface de la topologie duale autour de P
- A , la surface de la topologie primale de contour $\Gamma + \Gamma'$.

Considérons une ligne δ de l'espace et un segment orienté Γ défini par ses extrémités P et R deux points de la ligne Δ . Celui-ci est rectiligne comme sur la figure (Fig. 3) ou curviligne. Le vecteur unitaire \mathbf{t} porté par δ est orienté dans le même sens que Γ . C'est sur ce segment que sera exprimé l'équilibre des différentes actions mécaniques.

La topologie primale est construite à partir d'autres segments curvilignes ou rectilignes Γ' ayant pour extrémités P et R . Le contour $\Gamma + \Gamma'$ est fermé et définit une surface non nécessairement plane A elle-même orientée de normale \mathbf{m} qui permettront le calcul du rotationnel d'un vecteur.

La topologie duale non représentée ici définit autour du point P une surface fermée S dont la normale extérieure est \mathbf{n} . Le volume associé à R possède la même portion de surface que le point P ; cette surface curviligne ou composée de facettes permettra le calcul des flux échangés entre les points P et R .

La vitesse \mathbf{W} est définie par rapport à une base orthonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ composée des vecteurs unitaires dans chacune des directions de l'espace. Le point capital de la description du mouvement mécanique décrite dans les chapitres suivants réside dans la non nécessité de considérer le vecteur vitesse \mathbf{W} en lui-même et donc d'oublier le référentiel cartésien orthonormé nécessaire à sa définition. Seule sa composante $\mathbf{V} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$ sur le segment Γ sera utilisée pour décrire le mouvement. A partir des différentes composantes il sera possible de déterminer le vecteur \mathbf{W} dans un référentiel adéquat.

En effet les opérateurs de la géométrie différentielle $\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$ sont invariants aux changements de base. Il est alors possible de réaliser un certain nombre de transformations à partir de la connaissance des seules composantes. Par exemple prenons le calcul du rotationnel du vecteur \mathbf{W} à partir du théorème de Stokes (1) :

$$\iint_A \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{m} \, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_A \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{m} \, ds \quad (1)$$

Les vecteurs \mathbf{W} et \mathbf{V} ont le même rotationnel $\omega = \nabla \times \mathbf{W} = \nabla \times \mathbf{V}$. Le rotationnel discret sera

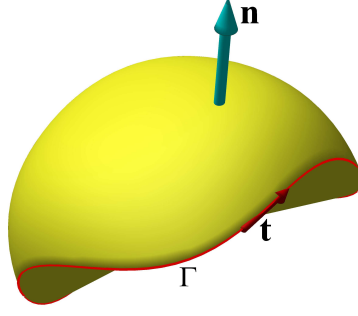


FIGURE 4 – Théorème de Stokes sur le contour Γ .

d'ailleurs défini par :

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{[A]} \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (2)$$

où $[A]$ est la mesure de la surface courbe A .

De même le théorème de la divergence est basée sur la projection du vecteur \mathbf{W} sur la normale à la surface orientée S :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{W} \, dv = \iint_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3)$$

et la divergence discrète sera définie comme

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{1}{[V]} \iint_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (4)$$

où $[V]$ est la mesure du volume dual V . Dans ce cas le flux du vecteur \mathbf{W} s'écrira à partir des composantes \mathbf{V} sur l'ensemble des portions de la surface duale S associées à chaque segment Γ autour du point P .

Enfin le gradient discret d'une quantité scalaire p est calculé très simplement sur le segment Γ par la relation :

$$\nabla p = \frac{1}{[L]} \int_{\Gamma} \nabla p \, dl \quad (5)$$

où $[L]$ est la distance PR . Par la suite ce gradient sera supposé constant tout le long du segment Γ pour donner :

$$(p_R - p_P) = \frac{1}{L} \int_P^R dp \, dl = \int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (6)$$

Il existe une différence importante dans l'utilisation des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski ; les opérateurs gradient et rotationnel seront les seuls à décrire l'équilibre mécanique. L'opérateur divergence est secondaire dans ce contexte et permettra de calculer les flux pour ensuite remonter les variables scalaires. Cette distinction est déjà présente dans la décomposition de Hodge-Helmholtz puisque celle-ci permet de décomposer tout vecteur en un gradient et un rotationnel.

Il sera nécessaire de définir le vecteur quantité de mouvement $\rho \mathbf{V}$ le long du segment. Nous supposerons que la masse volumique le long du segment est une constante $\bar{\rho}$:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{[L]} \int_L \rho \, dl \quad (7)$$

et que la composante $\overline{\mathbf{V}}$ est aussi constante sur le segment ; la quantité de mouvement noté indifféremment $\rho\mathbf{V} = \overline{\rho\mathbf{V}} = \overline{\rho}\overline{\mathbf{V}}$. Il sera possible de calculer exactement théoriquement la valeur de $\overline{\rho}$ pour une conservation de la quantité de mouvement dans le cadre d'une formulation non conservative des équations du mouvement.

Les forces de volume sont représentées par leur densité volumique \mathbf{f} . Leurs effets sur le mouvement seront perçus par la projection $\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}$. Ces forces peuvent être associées à un potentiel scalaire tel que $\mathbf{g} = \nabla\phi$ comme pour la gravité pour un masse volumique constante par exemple ou bien à un potentiel vecteur ; dans le cas général elles comporteront les deux composantes.

2.1.2 Quantités tensorielles

La notion de tenseur est nécessaire que si l'on souhaite associer des variations d'une même quantité en un même point à la direction d'observation. Dans la mesure où la direction d'observation Δ est fixée les différentes quantités, propriétés mécaniques, contraintes, ... seront de simples scalaires ou des vecteurs orientés sur Γ . Certains matériaux disposent de propriétés tensorielles comme la conductivité thermique, la perméabilité, certaines propriétés mécaniques, etc. Comme les composantes du flux de chaleur, du déplacement ou de la vitesse, les quantités tensorielles seront portées par le segment Γ par projection.

Considérons par exemple le cas de la diffusion du flux de chaleur Φ dans un matériau anisotrope. La matrice Λ représentant le tenseur de conductivité thermique peut être diagonalisée et ses vecteurs propres définissent les directions principales du tenseur Λ ; dans sa base principale la matrice est diagonale $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Le flux porté par le segment \mathbf{t} peut s'écrire formellement $\Phi \cdot \mathbf{t} = -k(T_R - T_P)/L$ où k est le scalaire représentant la conductivité sur le segment et $(T_R - T_P)/L$ le gradient discret. On peut ainsi identifier le flux de chaleur suivant \mathbf{t} et calculer la valeur de k :

$$k = \lambda \cdot \mathbf{t} \quad (8)$$

où \mathbf{t} est ici représenté dans la base principale. Cette propriété sera constante tout le long du segment.

Il est à noter que toute quantité supportée par le segment orienté de vecteur unitaire \mathbf{t} , sera notée indifféremment comme un scalaire constant sur tout le segment ou comme un vecteur orienté.

2.1.3 Les potentiels scalaire et vectoriel

Les quantités physiques adoptées pour décrire les évolutions du système physique sont

- les variables vectorielles localisées sur le segment orienté de vecteur unitaire \mathbf{t} ; par exemple la vitesse \mathbf{V} , le déplacement \mathbf{U} , le flux de chaleur Φ , ... seront définis au milieu du segment $[PR]$. Ces quantités seront constantes sur tout le segment.
- les potentiels scalaires des contraintes liées aux vitesses, déplacements, flux, ... localisés sur les points de la topologie primale. Ces quantités seront constantes dans tout le volume dual mais affectés au point. Ces quantités scalaires sont des variables à part entière comme la masse volumique ρ , la pression p ou la température absolue T . Elles sont définies en P et dépendent directement des variables vectorielles qui les alimentent, la vitesse \mathbf{V} et le flux de chaleur Φ . Lorsque les effets mécaniques associées aux comportements solides sont pris en compte il faudra introduire l'accumulateur lié au cisaillement ω .

Le potentiel scalaire p comporte deux termes, le potentiel d'accumulation p^o correspondant à l'équilibre et son déviateur qui représente l'ensemble des contributions qui vont modifier la

pression, la vitesse, le flux, etc. De même le potentiel vectoriel $\boldsymbol{\omega}$ sera la somme d'un accumulateur $\boldsymbol{\omega}^o$ et d'un déviateur qui sera fonction du rotationnel de la vitesse. Toutes ces quantités seront précisées par la suite. Il est à noter que l'accumulation des contraintes de cisaillement est négligeable pour les milieux fluides. Ce terme $\boldsymbol{\omega}^o$ permettra cependant de représenter les comportements fluide et solide de manière continue et de décrire des comportements rhéologiques complexes.

En fonction de la physique appréhendée bien d'autres variables peuvent être définies mais l'exposé sera limité pour des raisons de clarté aux seuls effets mécanique visqueux et élastiques. La pression considérée ici sera la pression thermodynamique correspondant à l'équilibre mécanique appelée p^o . Pour décrire les effets de compression il sera nécessaire de prendre en compte les évolutions thermodynamiques et thermiques du système. Ces aspects sont déjà décrits dans le premier exposé sur la Mécanique des Milieux Discrets [8].

Les quantités que nous appellerons potentiels $(\rho, p, T, \boldsymbol{\omega})$ seront mis à jour en fonction des flux de matière et de chaleur. Par exemple la masse volumique d'un fluide contenu dans une enveloppe indéformable augmentera au cours du temps en fonction du débit de quantité de mouvement $\rho \mathbf{V}$ injecté. Ces quantités se présentent donc sous la forme d'accumulateurs remontés par la divergence des flux entrants et sortants du volume dual à travers la surface duale S . L'accumulateur vectoriel $\boldsymbol{\omega}$ est réactualisé à partir du rotationnel du déplacement $\nabla \times \mathbf{U} = dt \nabla \times \mathbf{V}$.

Ces quantités physiques définies au point P ne sont pas des variables et ne font l'objet d'aucune résolution d'équations. Les lois de conservation scalaires ne serviront qu'à remonter ces quantités aux valeurs nécessaires pour traduire l'équilibre mécanique. Dans l'approche lagrangienne adoptée on considère que l'équilibre initial au temps t défini par les quantités $(\rho^o, p^o, T^o, \boldsymbol{\omega}^o)$ décrit par les équations vectorielles sur les flux peut être rompu par différentes causes (sources, conditions aux limites, évolution en temps, ...) et évoluer vers un autre équilibre au temps $t + dt$.

2.2 Les caractéristiques physiques

Les quantités scalaires sont définies au point P , une des extrémités du segment Γ . Celles-ci pourront faire partie des propriétés thermodynamique comme le coefficient de compressibilité du matériau χ_T , son coefficient d'expansion thermique β , ses chaleurs massiques à pression ou à volume constant c_p ou c_v , etc. On ajoutera la conductivité thermique k . Ces propriétés absolument indépendantes des variables vectorielles, vitesse ou flux; elles pourront bien sûr dépendre des quantités scalaires, pression, température, ... Ces caractéristiques physiques seront connues localement et obtenues par n'importe quel moyen (mesures, tables, lois, ...).

En élasticité linéaire les coefficients mécaniques de Lamé λ coefficient de viscosité de compression et μ , coefficient de viscosité de cisaillement sont liés à des quantités mesurables, le module d'Young E et le coefficient de Poisson σ par des lois simples. Pour un matériau isotrope en déformation plane, les coefficients de Lamé s'expriment par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{E \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad \mu_e = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \\ E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu_e)}{\lambda + \mu} \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{array} \right. \quad (9)$$

Si la signification physique du coefficient λ pour un matériau solide possède un sens physique incontestable il n'en est pas de même pour les fluides. La mesure de λ , généralement par des méthodes ultrasonores, fournissent des résultats extrêmement disparates et dépendent du mode opératoire. La MMD [8] montre que le seul coefficient physique lié aux effets de compression

incontestable est le coefficient de compressibilité dont la mesure en fluide et en solide ne pose aucun problème.

L'hypothèse de milieu continu est associée à la notion d'affectation au point P de toute variable, scalaire, vectorielle ou tensorielle, définie sur un volume de contrôle fini autour du point considéré. Par exemple la masse volumique moyenne est la moyenne volumique calculée sur le volume :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{[V]} \iiint_{\Omega} \rho \, dv \quad (10)$$

L'hypothèse de milieu continu permet réduire le volume à un point en adoptant $\rho = \bar{\rho}$.

Si cette hypothèse ne pose pas de difficulté pour un scalaire son application à des quantités vectorielles et tensorielles fait perdre toute notion de direction. Pour définir un vecteur dans l'espace il sera ainsi nécessaire de créer une base pour y exprimer ses trois composantes. Pire, pour conserver les vecteurs sur une surface orientée il sera nécessaire d'avoir recours à une forme tensorielle pour y exprimer le produit scalaire et obtenir le vecteur recherché pour une direction donnée.

2.3 Non équilibre thermodynamique

Afin d'éviter les confusions résultant du langage courant utilisé pour chaque discipline, le non équilibre local défini ici n'est pas celui rencontré en physique moléculaire ([11]). La matière sera toujours considérée comme continue afin de pouvoir utiliser les concepts de pression, de masse volumique ou de température locales. La longueur du segment sera très supérieur au libre parcours moyen des molécules $\Gamma \gg l$. On perçoit d'ailleurs l'intérêt de considérer des segments à la place des points comme en mécanique des milieux continus.

L'équilibre Thermodynamique Local (ETL) est généralement utilisé pour décrire la relation existante entre les variables thermodynamiques traditionnelles, par exemple la pression, la température, la masse volumique pour un fluide divariant. Cette relation est appelée loi d'état et si on limite les variables à celles déjà données elle s'explicitera sous la forme $f(\rho, p, T) = 0$ où p et T sont la pression thermodynamique et la température thermodynamique.

Bien qu'aucun principe ne lie explicitement ces potentiels les lois d'état sont communément utilisées pour des raisons de commodité. Seuls les coefficients thermodynamiques ont une réalité incontestable, coefficient de compressibilité χ_T , coefficient de dilatation β , etc. Qu'ils peuvent aisément être déduits d'une loi pourquoi pas mais en aucun cas ces lois peuvent constituer une fermeture des équations de conservation. Nous verrons que chaque équation de conservation possède son propre potentiel et que la loi d'état n'est pas nécessaire pour fermer le système. Son utilisation directe met même en défaut la conservation des différentes quantités notamment la conservation de la masse.

Ansi l'établissement des équations discrètes en MMD n'invoquera pas cette hypothèse, seules les caractéristiques thermophysiques qui ont une signification incontestable seront utilisées.

La Mécanique des Milieux Discrets est basée sur le fait que les équations qui sont issues de cette approche décrivent l'équilibre mécanique. Nous définirons les grandeurs vectorielles principales que sont la vitesse \mathbf{V} et le vecteur flux de chaleur Φ . Ces flux sont admis dans le domaine à travers la surface de celui-ci munie d'une normale extérieure \mathbf{n} . Toute équation issue de cette théorie décrit un équilibre associé aux valeurs des potentiels d'équilibre $\rho^o, p^o, T^o, \omega^o$. Si l'équilibre est rompu par la suite de la modification d'une condition à la limite, d'un terme source, ..., alors le système d'équations rétablira l'équilibre mécanique en modifiant la vitesse, le flux, etc. Symboliquement si une équation s'écrit

$$\mathbf{L}(\rho^o, p^o, T^o, \omega^o, \mathbf{V}^o, \Phi^o) = 0 \quad (11)$$

alors c'est un état d'équilibre mécanique.

Les potentiels d'équilibre $(\rho^o, p^o, T^o, \omega^o)$ sont strictement indépendants et donc non liées par une quelconque loi d'état. Cette assertion est bien sûr admise lorsque les constantes du temps du phénomènes sont très petites (ondes de choc, explosions, ...) mais elle sera adoptée ici dans le cas général.

La figure (Fig. 5) montre le schéma décrivant le suivi lagrangien d'un système à l'équilibre au temps t et évoluant vers un autre état d'équilibre au temps $t + dt$.

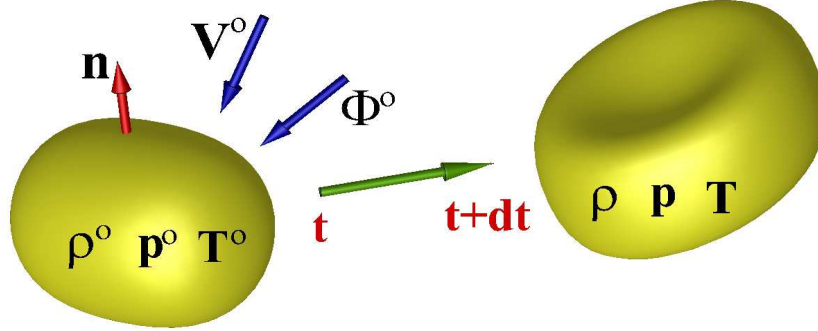


FIGURE 5 – Définition du système physique et observation de ce système entre deux états d'équilibre mécanique t et $t + dt$.

Le choix du symbole dt peut surprendre mais ce n'est ni un temps caractéristique qui aurait pu être noté τ ni un pas de temps d'origine numérique qui serait noté Δt . C'est donc un temps de passage d'un équilibre à un autre et le symbole est celui utilisé pour écrire la dérivée particulaire ou matérielle.

Au cours de l'évolution du système du temps t au temps $t + dt$ les potentiels évolueront de ρ à $\rho + d\rho$, de p à $p + dp$, de T à $T + dT$ et de ω à $\omega + d\omega$. Le nouvel état sera un autre état d'équilibre mécanique si l'équation est satisfaite exactement.

A aucun moment la loi d'état ne sera invoquée, il n'existe aucune raison pour que l'équilibre thermodynamique soit vérifié à tout instant et localement. Le système est fermé par la masse volumique qui est remontée par la conservation de la masse tandis pression et le potentiel vecteur ω sont remontés par l'équation de conservation de la quantité de mouvement et la température par la conservation du flux de chaleur.

Il est à noter que si les propriétés des matériaux, coefficients et propriétés de transport, influent sur la solution elles n'impliquent aucun lien structurel entre elles. Elles doivent simplement être connues en fonction des potentiels.

2.3.1 Forces et Flux

Considérons le système (5) à un instant t ; c'est un état d'équilibre instantané défini par la relation (11). \mathbf{V}_o et Φ_o sont les flux, vitesse et flux de chaleur à travers la surface S de Ω . Au sein du système ces flux seront notés \mathbf{V}^o et Φ^o . Les potentiels à cet instants sont (ρ^o, p^o, T^o) , masse volumique, pression et température.

Le système matériel sera suivi au cours de son mouvement entre les instants t et $t + dt$. Le système évoluera en fonction des flux \mathbf{V}_o et Φ_o à la surface mais aussi à cause de forces exercées au sein du système, forces de pression, forces de friction, forces de volume ou bien de sources internes au système. Le système évoluera vers un autre état d'équilibre toujours défini par la relation (11) où les nouveaux potentiels seront (ρ, p, T, ω) . Les flux de matière et de chaleur

auront aussi évolués vers les valeurs \mathbf{V} et Φ calculés à partir des dérivées particulières. Pour retrouver les évolutions temporelles des potentiels et des flux il sera nécessaire de passer à une description eulérienne en exprimant les dérivées partielles.

Traditionnellement les variables thermodynamiques utilisées sont des quantités scalaires, température T , enthalpie h , énergie interne e , entropie s , etc. Il y a autant de formes de la conservation de l'énergie que de potentiels thermodynamiques. L'approche retenue ici est différente, c'est le flux de chaleur Φ qui sera conservé, les autres scalaires ne sont que des accumulateurs de l'énergie. Ces quantités scalaires seront fonction des flux de matière et de chaleur définis par \mathbf{V} et Φ . Parmi toutes ces quantités scalaires nous choisirons la température T pour quantifier les évolutions de l'énergie du système.

L'évolution de la température du système sera fonction de la divergence des flux, $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\nabla \cdot \Phi$ et des différentes sources thermiques (production) ou mécaniques (dissipation) introduites dans le domaine.

Ainsi, pour des phénomènes limités aux seuls effets mécaniques et thermiques, les seules variables sont vectorielles \mathbf{V} et Φ et les seuls accumulateurs seront les potentiels (ρ, p, T, ω) . Enfin les caractéristiques thermophysiques associées $(\chi_T, \beta, c_v, c_p)$ et les coefficients de transfert (μ, k) pourront dépendre ou non des seuls potentiels.

2.4 Conservation de la masse

La conservation de la masse pour un domaine fermé que l'on suit au cours de son mouvement conduit à une forme identique de la loi de conservation lorsque l'on considère un volume constant que l'on suit dans son mouvement où l'on introduit un flux de matière à travers sa surface.

On considère ici que le volume dual est constant dans le temps (Fig. 5) et que le flux de masse à travers la frontière permet de calculer l'évolution de la masse pour un système ouvert :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \, dv = - \iint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (12)$$

soit

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \iint_{\Sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (13)$$

on trouve alors

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \, dv = 0 \quad (14)$$

Soit la loi locale de la conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (15)$$

Cette relation exprime que l'évolution locale de la masse volumique lorsque l'on suit un point matériel au cours de son mouvement n'est due qu'à des compressions ou détentes locale de toutes origines (mécanique, thermique, massique, ...).

Bien que le modèle se limite au cas d'un fluide pur ou d'un mélange homogène ou pseudo-fluide, l'extension à un mélange multiconstituant est possible. Dans ce cas il est nécessaire de connaître les vitesses de chaque constituant \mathbf{V}_i avec autant d'équations du mouvement que de constituant. Le relèvement s'effectue alors sur chaque masse volumique partielle ρ_i et la conservation de la masse totale du mélange serait ainsi assurée exactement.

La masse volumique ρ est un potentiel d'accumulation du flux de matière au sein du volume dual ; un débit de fluide positif pour le système à travers la surface conduira à une divergence de la vitesse négative et ainsi à une augmentation de la masse volumique.

Si ρ^o est la masse volumique à l'état d'équilibre de l'instant t on pourra calculer la masse volumique d'équilibre à l'instant $t + dt$ en intégrant la loi précédente

$$\rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \quad (16)$$

en considérant $\nabla \cdot \mathbf{V}$ constant pendant le temps dt . On peut voir simplement le calcul de ρ comme une réactualisation de l'accumulateur :

$$\rho = \rho^o - dt \rho^o \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (17)$$

Comme on le verra la loi de conservation de la masse ne servira qu'à calculer l'évolution lagrangienne de la masse volumique et non à créer une pseudo-équation sur la pression.

3 Conservation de la quantité de mouvement

3.1 Classification des forces

La figure (Fig. 6) montre la topologie principale utilisée pour établir la loi de conservation de la quantité de mouvement. En effet l'ensemble des forces d'inertie, de viscosité, ... seront projetées sur le segment orienté Γ . La somme de ces forces sur Γ permettra d'équilibrer l'évolution lagrangienne de la quantité de mouvement : c'est tout l'objet de la loi fondamentale de la dynamique dérivée sur un contour.

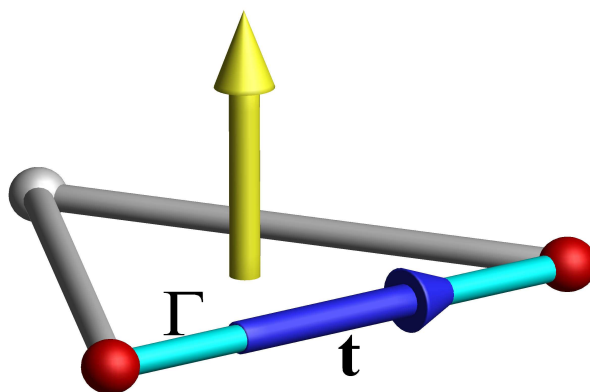


FIGURE 6 – Topologie élémentaire composée d'un segment orienté Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} et de deux autres segments formant une surface primale plane ; la circulation calculée sur le contour permet de calculer le rotationnel orthogonal (en jaune) à la surface primale.

Les forces seront classifiées de manière différente de celle de la mécanique classique ; même si toutes les forces seront finalement projetées sur Γ nous pourrons distinguer les forces originelles suivantes :

- les forces de surface,
- les forces de volume définies par leur densité volumique \mathbf{f} .

Les forces de surface

Ces forces sont nature très différente, la force de pression en est un exemple ; comme la pression est définie sur les extrémités du segment, la force sera proportionnelle à l'écart de pression entre les extrémités multipliée par une surface. Cette surface ou portion de surface de la topologie duale de normale \mathbf{n} qui n'est pas nécessairement orthogonale au segment Γ sera projetée sur le plan orthogonal à Γ passant par le milieu du segment.

Comme on le verra les forces de viscosité à courtes distances seront calculées sur la surface primale et sont orthogonales à celle-ci si elle est plane. Celles-ci ne contribuent pas directement au mouvement mais engendrent les conditions du mouvement.

Les forces de volume

Les forces à très longues distances peuvent se traduire par des forces volumiques comme la gravité par exemple ; si la longueur du segment Γ est petite devant le système qui génère cette force alors l'action de volume sera projetée et aura une valeur constante.

Parmi les forces de volume on trouve aussi certaines forces de viscosité comme celles générées par la présence de particules fixes de dimensions très petites devant la longueur de Γ au sein du fluide. Elles se traduisent par une traînée volumique assimilable à celle d'un milieu poreux. Ces forces volumiques peuvent agir à très courtes distances, un milieu poreux dense, ou à très longues distances, lorsque la longueur moyenne entre particules est grande devant la longueur du segment.

Comme on le sait toutes les forces s'expriment finalement par unité de volume. L'évolution lagrangienne de la quantité de mouvement $\rho \mathbf{V}$ est portée par Γ et toutes les forces seront ainsi projetées sur ce segment. Bien d'autres actions, rotation, tensions de surfaces, ... peuvent être modélisées pour être intégrées à l'équation du mouvement.

3.2 Trois expériences fondatrices

Afin d'introduire la modélisation des effets visqueux et des effets de pression dans le formalisme de la Mécanique des Milieux Discrets trois expériences classiques sont revisitées, une compression isotherme d'un milieu élastique, un écoulement de Couette et l'écoulement de Poiseuille dans des configurations planes. La compression isotherme permet d'introduire la notion de potentiel scalaire comme un accumulateur des forces de pression. L'écoulement de Couette permet de définir la notion de viscosité de rotation dont la valeur est d'ailleurs mesurable par un rhéomètre du même nom. L'écoulement de Poiseuille introduit le premier lien existant entre la pression et les effets de viscosité qui seront définis par un autre potentiel ω , le potentiel vecteur.

Si ces expériences, essentielles pour la modélisation des différents effets en vue de l'établissement des lois de conservation sont classiques, leur interprétation dans ce nouveau cadre de la mécanique est très différente.

3.2.1 Equilibre d'un verre d'eau

Considérons donc le milieu élastique, isotrope et homogène, ici de l'eau dans un verre parfaitement indéformable, rempli jusqu'à une hauteur égale à h . Cette expérience simule le comportement d'une couche d'eau de même hauteur et d'extensions latérales infinies suivant x et z de la figure (Fig. 7), initialement en équilibre mécanique, soumis, à l'instant $t = 0$ à la seule force de gravité. La pression au-dessus de la surface libre est égale à p_0 . Dans un premier temps le milieu "tombe" sous l'effet de la gravité à la vitesse $v = -\rho g t$ comme un solide dans le vide.

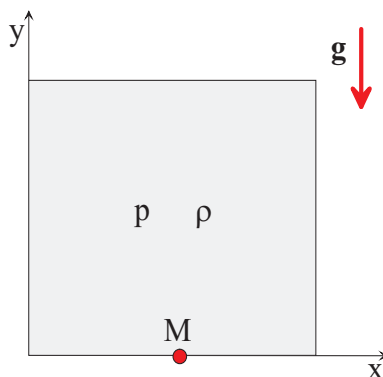


FIGURE 7 – Schéma de l'expérience de mise en gravité d'une cavité d'eau de hauteur $h = 0.1 m$.

La condition à la limite inférieure impose une vitesse nulle $\mathbf{V} = 0$ et une première compression du fluide est observée au fond du verre puis la détente vers la surface libre de l'eau. Comme les

impédances acoustiques de l'air et de l'eau sont très différentes, l'onde se réfléchit sur la surface libre pour revenir vers le fond du verre ; environ 1/1000 de l'intensité de l'onde traverse l'interface. La mesure des déplacements verticaux du fluide montrent l'existence d'ondes verticales dont la célérité est celle du son dans le milieu c .

Les mesures virtuelles portent sur les enregistrements de la pression au point M , au fond du verre. La propagation dans le milieu s'effectue uniquement suivant y et les ondes se réfléchissent sur le plan inférieur et sur la surface libre du liquide pour s'atténuer progressivement au cours du temps. La figure (Fig. 8a) montre l'évolution de la pression au point M au cours du temps ; la propagation des ondes s'effectue à la vitesse du son dans le milieu (ici $c \approx 1500 \text{ m/s}$ pour l'eau). L'équilibre mécanique final traduit la compensation entre les forces de pression et les forces de gravité représentée par la loi de la statique des fluides. A l'équilibre final la pression en M est égale à $p(M) - p_0 = \rho g h$ soit 981 Pa si l'on suppose que la masse volumique de l'eau varie très peu sur une hauteur de 0.1 m .

On constate que les oscillations de la pression s'atténuent très peu dans l'eau celle-ci est en effet très peu dissipative sur des distances aussi faibles. Sur des temps beaucoup plus grands l'amplitude des oscillations diminuerait et tendrait vers zéro. Le retour à l'équilibre mécanique s'accompagne donc d'un processus de dissipation de l'énergie mécanique en chaleur. La figure (Fig. 8b) montre la décroissance des ondes lorsque on augmente artificiellement le coefficient d'atténuation en ajoutant par exemple à l'eau des particules solides ou des bulles. La propagation des ondes dans un milieu élastique n'est pas un phénomène réversible et conduit à une augmentation de l'entropie. La loi de conservation de l'énergie fera apparaître cette contribution lors de sa dérivation. D'un point de vue pragmatique il est heureux que toute perturbation sonore finisse par s'atténuer !

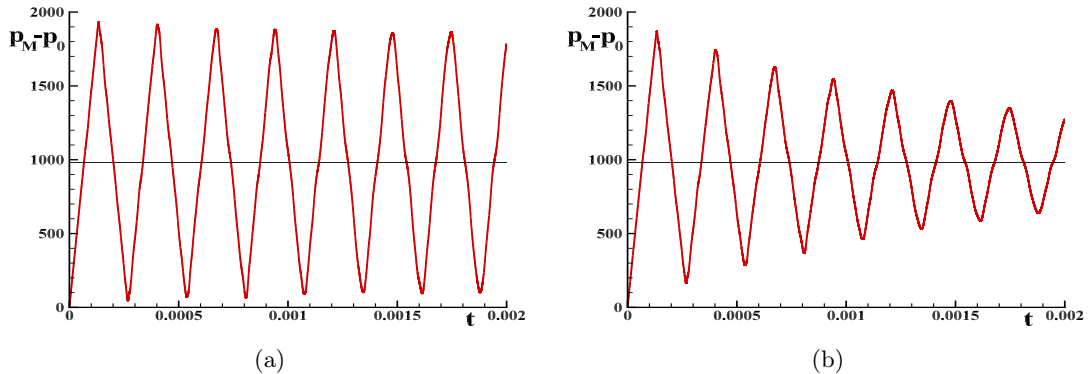


FIGURE 8 – Evolution de la pression en fonction du temps $p_M(t)$ à la base de la cavité de hauteur d'eau $h = 0.1 \text{ m}$; (a) sans atténuation des ondes et (b) avec un terme de dissipation.

La propagation des ondes acoustiques dans l'eau s'accompagne d'une atténuation observée pour tous les milieux qui sont ainsi absorbants. L'atténuation des ondes est définie par un coefficient linéaire d'atténuation du milieu absorbant η qui apparaît dans l'expression de l'intensité acoustique $I(t)$ en fonction de la coordonnée y :

$$I = I_0 e^{-\eta y} \quad (18)$$

Dans la pratique on définit plutôt l'atténuation acoustique par le coefficient $\alpha = 10 \log(I_0/I(t))$ avec $\alpha = 10 \eta/2.3$.

Recherchons la variation de volume locale dont la mesure est $\nabla \cdot \mathbf{V}$. Si p^o est la pression d'équilibre mécanique en un point, l'effondrement de la colonne du milieu au-dessus de ce point

engendrera une surpression dp pour un temps dt fixé qui dépendra de la compressibilité isotherme du milieu χ_T et de la divergence du déplacement. Il est à noter qu'une compression conduit à une divergence négative. La variation simultanée de la masse volumique locale $d\rho$ est obtenue en suivant une particule à volume constant au cours de son déplacement :

$$\begin{cases} dp = -\frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ d\rho = -\rho dt \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (19)$$

Pour un solide le résultat serait le même en termes de déplacement :

$$\begin{cases} dp = -\frac{1}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{U} \\ d\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U} \end{cases} \quad (20)$$

où le déplacement remplace la vitesse \mathbf{V} .

La compression d'un fluide ou celle d'un solide est exactement de même nature au temps d'observation dt près. Il faut rappeler que le déplacement ou la vitesse suivant x est supposée strictement nulle.

En remarquant que l'état final résultant de la compression isotherme sur un temps dt est lui aussi un état d'équilibre on peut écrire la pression et la masse volumique pour celui-ci :

$$\begin{cases} p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - \rho dt \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (21)$$

Tout d'abord on peut remarquer que cette dernière expression n'est autre que la loi de conservation de la masse. La première relation peut être déduite de la seconde en considérant que le mouvement est isotherme. Si la conservation de la masse restera sous cette forme pour tout autre phénomène physique associé il n'en sera pas de même pour la pression qui pourra évoluer pour toute une série de raisons liées aux phénomènes physiques pris en compte.

Dans cet exemple seuls les effets de compressibilité interviennent, les effets visqueux γ sont totalement absents du fait de l'absence de rotation du milieu.

Recherchons maintenant la solution stationnaire de l'équilibre mécanique à partir de l'équation (19) en mesurant le déplacement et la pression en chaque point du milieu suivant y en considérant que le coefficient de compressibilité est constant. L'intégration de y à h donne la pression en ce point :

$$p(z) - p_0 = - \int_y^h \frac{dt}{\chi_T} \frac{dv}{dz} \quad (22)$$

où p_0 est la pression au-dessus de la couche d'eau.

La pression doit équilibrer le poids de la colonne du milieu au-dessus du point y considéré ; on considère ici que la masse volumique est constante ce qui est vérifié pour de petits déplacements soit $p(y) - p_0 = \rho g (h - y)$. En tenant compte des conditions aux limites, déplacement nul en $z = 0$ et contrainte nulle $dv/dz = 0$ en $y = h$ et en égalant les deux expressions de la pression on trouve :

$$v(y) = -\rho g \chi_T h \left(y - \frac{y^2}{2h} \right) \quad (23)$$

L'équilibre en la Mécanique des Milieux Continus

Examinons la solution du problème avec le formalisme de Cauchy et de Navier-Stokes pour un état stationnaire. Le déplacement d'une particule fluide ou solide par compression du milieu sous l'effet de son propre poids est exactement identique.

Reprenons le tenseur des taux de déformations visqueuses et trouvons la solution de ce même problème pour le cas d'un solide. Les conditions aux limites satisfont aux contraintes :

$$\begin{cases} v = 0 & \text{en } y = 0 \\ \tau_{yy} = 0 & \text{en } y = h \end{cases} \quad (24)$$

Les taux déformations $d_{xx} = d_{xz} = d_{zz} = d_{zx} = d_{yz} = 0$, la dernière, non nulle d_{yy} est :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} \quad (25)$$

La composante de la contrainte s'écrit :

$$\tau_{yy} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2 \mu d_{yy} = (\lambda + 2 \mu) \frac{dv}{dy} \quad (26)$$

en tenant compte du calcul de $\nabla \cdot \mathbf{V}$. Les conditions aux limites se réduisent à $dv = 0$ en $y = h$.

Compte tenu des hypothèses l'équation de Navier devient :

$$\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{\rho g \cos \delta}{(\lambda + 2 \mu)} = 0 \quad (27)$$

En tenant compte des conditions aux limites pour calculer les constantes d'intégration on trouve la solution du déplacement vertical en régime stationnaire :

$$v(y) = \frac{\rho g H}{(\lambda + 2 \mu)} \left(y - \frac{y^2}{2 h} \right) \quad (28)$$

La contrainte τ_{yy} est ainsi :

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2 \mu) \frac{dv}{dy} = -\rho g h \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (29)$$

Le déplacement du milieu correspond à une compression suivant y .

Malgré la compression du milieu sous l'action de son propre poids, la masse volumique a été considérée comme constante ce qui a permis d'obtenir une solution simple au problème posé.

Discussion

Comparons les solutions obtenues par l'expérience décrite plus haut et par la mécanique classique :

$$\begin{cases} v(z) = -\rho g \chi_T h \left(y - \frac{y^2}{2 h} \right) \\ v(z) = \frac{\rho g h}{(\lambda + 2 \mu)} \left(h - \frac{y^2}{2 h} \right) \end{cases} \quad (30)$$

Ces résultats sont parfaitement cohérents si l'on identifie le coefficient de compressibilité :

$$\chi_T = \frac{1}{(\lambda + 2 \mu)} \quad (31)$$

Le fait que $(\lambda + 2\mu)$ n'est qu'un seul et même coefficient montre que le tenseur de Cauchy ne sépare pas les effets de compressibilité et de viscosité. Alors que le terme sphérique de pression $-p\mathbf{I}$ du tenseur des contraintes est associé aux forces de pression, le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ contient une partie relative aux effets de compression. La soustraction de la trace du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ pour faire apparaître une pression mécanique n'y changera rien.

Plus important encore : si le coefficient de viscosité de cisaillement est parfaitement mesurable pour un fluide et un solide, la viscosité de compression peut être déterminée précisément pour un solide. Dans le cas d'un fluide le coefficient de viscosité de compression prend des valeurs très différentes suivant les auteurs pour un même fluide. Pour un gaz monoatomique sa valeur est égale à $-2/3\mu$, valeur obtenue dans le cadre de la théorie cinétique des gaz pour un modèle de sphères dures. Le principe de Clausius-Duhem sur l'augmentation de l'entropie conduit à l'inégalité $3\lambda + 2\mu \geq 0$. Le principe d'objectivité appliqué au tenseur des contraintes de Cauchy conduit au même résultat. La loi de Stokes définit la pression mécanique en admettant que la viscosité de volume est nulle $\zeta = 3\lambda + 2\mu = 0$.

L'interprétation de l'expérience de compression est plus complexe à appréhender pour un état stationnaire. En effet la solution du problème fluide en régime stationnaire conduit à une vitesse nulle. La divergence de la vitesse est donc aussi nulle et de ce fait la pression reste à sa valeur initiale.

La solution est contenue dans l'expression de la pression (19) qui permet de réactualiser la pression au cours du temps à l'aide de la divergence de la vitesse. Dans un problème d'évolution $\nabla \cdot \mathbf{V}$ n'est pas égale à zéro et la pression augmente au cours du temps pour se stabiliser à la valeur prévue lorsque la divergence devient nulle.

La formulation de ce problème pour une version unifiée de la mécanique nécessite une loi d'évolution sur une formulation en vitesse en associant la dérivée particulaire au premier membre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \end{array} \right. \quad (32)$$

Ce système (32) est formé d'une équation vectorielle sur la vitesse \mathbf{V} et de deux relèvements de la pression et de la masse volumique considérés comme des accumulateurs. Le coefficient dt/χ_T a bien la dimension d'une viscosité mais contrairement à la viscosité de compression le coefficient de compressibilité est parfaitement mesurable quel que soit le milieu solide ou fluide. Pour un milieu compressible dans une évolution adiabatique irréversible c'est le coefficient de compressibilité isentropique χ_S qui doit être choisi.

On remarque par ailleurs que :

- le temps caractéristique dt entre deux états d'équilibre apparaît au numérateur de l'équation ce qui introduit la notion très importante de temps de relaxation ainsi que la notion de propagation car le coefficient de compressibilité est lié à la vitesse du son, $c^2 = 1/\rho \chi_S$,
- la formulation est valable pour un matériau solide mais c'est le déplacement qui est calculé $\mathbf{U} = dt \mathbf{V}$,
- tous les phénomènes sont représentés aux différentes constantes de temps, ondes de choc, propagation acoustique, écoulements à faibles vitesses, etc.
- tous les écoulements de gaz à grandes vitesses aux écoulements incompressibles peuvent être représentés.

Le paramètre dt/χ_T introduit une notion très importante : un milieu est plus ou moins compressible en fonction de la constante de temps avec laquelle le phénomène est observé. Un liquide, de l'eau par exemple où $\chi_T \approx 0.444 \cdot 10^{-9}$, peut être considéré comme incompressible à grandes constantes de temps alors que celui-ci propage les ondes acoustiques à la vitesse de $c = 1500 \text{ m/s}$.

Bien sûr la solution en pression peut être obtenue directement par intégration de l'équation de la statique des fluides pour un fluide à masse volumique constante :

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (33)$$

Dans le cas où la masse volumique dépend de la pression et de la température il faut se donner en plus une évolution thermodynamique et une loi d'état.

Le système (32) a l'avantage de ne pas utiliser directement de loi d'état et de ne pas nécessiter de conditions aux limites sur p ou sur ρ . Seules les conditions aux limites sur la vitesse ou le déplacement sont nécessaires.

Le coefficient dt/χ_T n'a pas de raison d'être constant, pour les gaz parfait il dépend du potentiel scalaire p , $\chi_T = 1/p$. Dans le cas général il est facilement accessible par la mesure. Il est à remarquer que ce terme dt/χ_T permet de rendre compte de la propagation des ondes linéaires ou non linéaires comme les ondes de choc par exemple. Le mécanisme de production d'un choc est justement dû à la variation de χ_S avec la pression.

Remarque : dans de très nombreux ouvrages les auteurs, qui considèrent un écoulement incompressible, annulent purement et simplement les termes en $\nabla \cdot \mathbf{V}$ dans les équations. Le cas incompressible est en fait une approximation qui est souhaitée et non vérifiée. La pression devient un simple lagrangien qui est remonté justement par la divergence de la vitesse qui n'est pas nulle tant que p ne prend pas la valeur correspondant à l'équilibre mécanique.

3.2.2 Ecoulement de Couette

Considérons l'expérience fondamentale montrée sur la figure (Fig. 9) où un milieu viscoélastique contenu dans une cavité rectangulaire est soumis à une contrainte de rotation sur sa face supérieure. Deux parois horizontales, une surface inférieure solide impose une vitesse nulle et une paroi supérieure dont le taux de rotation est maintenu constant $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$. Les parois verticales seront supposées libres. La pression est identiquement constante dans tout le système $p = p_0$.

Cette expérience diffère de celle de Couette par la condition à la limite supérieure ; dans l'expérience de Couette la paroi supérieure est maintenue à vitesse constante. L'interprétation commune de cette expérience conclut, à partir de l'existence d'un gradient de vitesse axiale constant, à une loi linéaire entre contrainte et ce gradient de vitesse et conduit à introduire un coefficient de proportionnalité, la viscosité dynamique μ . Ce coefficient est appelé viscosité de cisaillement même si la contrainte appliquée induit un taux de rotation non nul.

Dans l'expérience de la figure (Fig. 9) le taux de rotation $\boldsymbol{\omega}_0$ est maintenu sur la surface supérieure en réalisant par exemple un entraînement de celle-ci par un cylindre de grande dimension par rapport à l'épaisseur de la couche fluide piloté sur son axe avec un couple constant. La quantité $\boldsymbol{\omega}_0$ est la composante normale au plan (xy) du vecteur contrainte de rotation.

En régime stationnaire, l'équilibre mécanique atteint, la vitesse $u(y)$ est linéaire sur la hauteur de la couche. Le rotationnel de la vitesse ou du déplacement quant à lui est constant dans tout le milieu $\nabla \times \mathbf{V} = Cte$. La circulation du vecteur vitesse (déplacement) le long de n'importe quel contour Γ est constant. Le taux de rotation peut être mesuré directement dans le milieu à l'aide d'un anémomètre à moulinet ou un moyen équivalent permettant d'accéder au rotationnel.

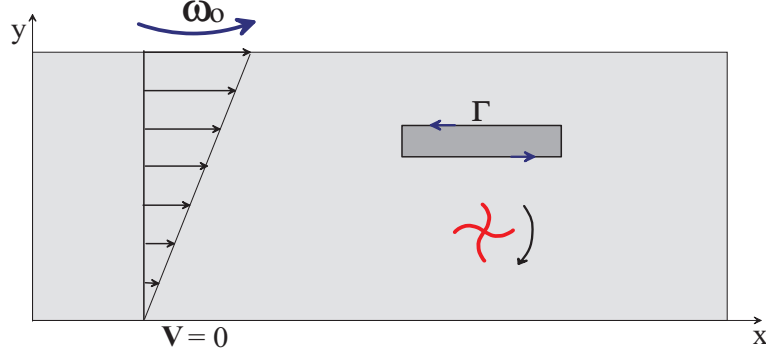


FIGURE 9 – Expérience de Couette : une contrainte de rotation est appliquée sur la paroi supérieure et une vitesse ou un déplacement nul sur la paroi inférieure.

$$\begin{cases} u(y) = a y \\ \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_z = a \end{cases} \quad (34)$$

Comme la vitesse n'est pas imposée sur la paroi supérieure la constante a est déterminée par la loi linéaire

$$\omega_0 = \mu \nabla \times \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_z = \mu \frac{du}{dy} = Cte \quad (35)$$

soit $a = \omega_0/\mu$.

Par extension à l'échelle locale nous définirons donc ω^o qui sera appelé par la suite potentiel vecteur d'accumulation des contraintes de rotation en équilibre mécanique au même titre que p^o est le potentiel scalaire d'accumulation des contraintes de pression :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{U} \quad (36)$$

Le paramètre μ correspond au coefficient de Lamé appelé viscosité de cisaillement. Ici ce coefficient de viscosité est défini sur la surface primale et possède une valeur constante sur celle-ci. Bien entendu c'est le même coefficient pour l'élasticité linéaire à un temps près et la vitesse devient un déplacement. Le rhéogramme du comportement en terme de rotation est représenté sur la figure (Fig. 10).

Lorsque le système est hors d'équilibre mécanique l'évolution lagrangienne du potentiel s'écrit sous la forme :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\mu \nabla \times \mathbf{V} \quad (37)$$

Pour un fluide newtonien la contrainte de rotation ne s'accumule pas, au moins au premier ordre, toute contrainte appliquée au fluide engendre un mouvement et le retour à l'état initial n'est pas possible. Pour un solide élastique tant que la contrainte de rotation ne dépasse pas une éventuelle contrainte seuil le solide accumule celle-ci au sein du potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}$ pour ensuite restituer l'énergie accumulée lorsque la force a disparu.

Comme on peut le voir l'interprétation de Cauchy de cette expérience l'a conduit à formuler la relation contrainte-déplacement comme le gradient de celui-ci alors qu'ici c'est la relation entre

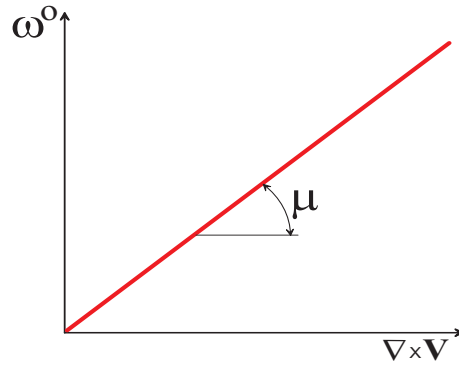


FIGURE 10 – Loi de fluide newtonien en contrainte de rotation - rotationnel

contrainte de rotation et rotationnel qui permet d'introduire la notion de viscosité. C'est un des points essentiels de bifurcation entre Mécanique des Milieux Continus et Mécanique des Milieux Discrets.

3.2.3 Ecoulement de Poiseuille

L'expérience de la figure (Fig. 11) dans un canal à parois parallèles de longueur L et où la variable verticale y varie de $\pm e$ correspond à un écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux induit par un gradient de pression imposé à l'aide des parois verticales. Les parois horizontales sont maintenues immobiles. L'expérience serait identique pour un milieu élastique où l'on rechercherait le déplacement $u(y)$. Les mesures portent sur l'évolution de la pression le long du canal et la vitesse axiale u suivant la coordonnée verticale. Celle-ci montre un profil parabolique et la pression mesurée montre quant à elle une distribution axiale linéaire $p(x) \propto x$. Il est possible de mesurer aussi le taux de rotation à l'aide d'un anémomètre d'axe orthogonal au plan de l'écoulement permettant ainsi d'accéder au rotationnel $\nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_z$.

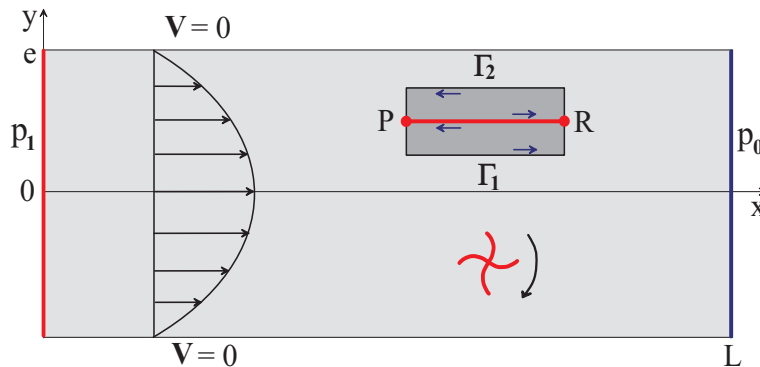


FIGURE 11 – Expérience de Poiseuille : un gradient de pression axial est imposé alors que les deux parois horizontales sont à vitesse ou déplacement imposé.

Des mesures précises donnent une distribution de type parabolique de la vitesse dont la moyenne est proportionnelle au gradient de pression imposé $\Delta p/L = (p_1 - p_0)/L$ où L est la

longueur de la cavité plane et le rotationnel :

$$\begin{cases} p(x) = p_1 - (p_1 - p_0) \frac{x}{L} \\ u(y) = \frac{3 V_0}{2} \left(1 - \frac{y^2}{e^2}\right) \\ \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_z = -\frac{3 V_0}{2} y \end{cases} \quad (38)$$

où V_0 est la vitesse de débit obtenue par intégration suivant y .

Ces mesures expérimentales permettent de relier la vitesse de débit V_0 au gradient de pression imposé, seules quantités mesurables facilement. On constate que V_0 et $\Delta p/L$ sont liés par une relation linéaire. L'établissement du lien formel n'est possible que si l'on introduit un coefficient de proportionnalité entre vitesse de débit et gradient de pression :

$$\frac{\Delta p}{L} \propto \frac{V_0}{e^2} \quad (39)$$

Ce coefficient appelé μ viscosité de cisaillement/rotation dépend de la nature du milieu. On peut ainsi en inversant le propos mesurer le coefficient de viscosité de Lamé μ à l'aide de la relation :

$$\mu = \frac{\Delta p}{L} \frac{e^2}{3 V_0} \quad (40)$$

Les résultats peuvent alors être exprimés en fonction de cette quantité :

$$\begin{cases} p(x) = p_1 - (p_1 - p_0) \frac{x}{L} \\ u(y) = \frac{3 V_0}{2} \left(1 - \frac{y^2}{e^2}\right) = \frac{\Delta p e^2}{2 \mu L} \left(1 - \frac{y^2}{e^2}\right) \\ \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_z = -\frac{\Delta p}{\mu L} y \end{cases} \quad (41)$$

A ce stade on introduit le potentiel vecteur de l'écoulement $\boldsymbol{\omega}$, produit du rotationnel et de la viscosité dont on montrera l'importance plus loin.

$$\boldsymbol{\omega} = -\mu \nabla \times \mathbf{V} \quad (42)$$

Dans le cas présent on obtient :

$$\boldsymbol{\omega} = -\mu \nabla \times \mathbf{V} = -\frac{\Delta p}{L} y \mathbf{e}_z \quad (43)$$

On perçoit déjà l'intérêt de lier localement le potentiel au gradient de pression axial.

Tous ces résultats sont conformes à ceux de la Mécanique des Milieux Continus mais la contrainte dans la direction normale \mathbf{e}_y suivant \mathbf{e}_x est exprimée par la composante σ_{xy} du tenseur des contraintes. Le tenseur de Cauchy retransmet le gradient de vitesse vertical dans la direction de l'écoulement afin de calculer la force exercée sur la paroi par le fluide. Le gradient de vitesse vertical n'induit pour autant aucune action dans cette direction. Il est à remarquer que toutes les composantes non nulles du tenseur des contraintes visqueuses sont relatives au plan (xy) de l'écoulement de Poiseuille.

On peut s'étonner que le potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}$ soit orthogonal au plan (xy) mais on peut se rappeler que l'anémomètre mesure le rotationnel porté par le vecteur \mathbf{e}_z et qui n'est autre que la circulation sur le contour Γ . Comme pour le gradient de vitesse pour la modélisation de Cauchy $\boldsymbol{\omega}$ n'a pas d'action directe sur l'équilibre mécanique.

De plus la contrainte \mathbf{T}_{xy} et le potentiel $\boldsymbol{\omega}$ sont deux vecteurs orthogonaux mais leurs actions, différentes, vont pourtant donner lieu à une projection des efforts suivant x qui sera la même. Par ailleurs ∇p et $\boldsymbol{\omega}$ sont deux vecteurs orthogonaux alors que ∇p et \mathbf{T}_{xy} sont colinéaires.

Le choix de Cauchy d'exprimer la contrainte \mathbf{T} dans la direction de la force était naturel ; il fallait exprimer une contrainte dans la direction de l'écoulement pour ensuite calculer les efforts locaux. L'opérateur divergence étant effectivement appliqué à la contrainte \mathbf{T} renvoyait la force dans la même direction.

Dans la modélisation des effets visqueux qui va être développée la contrainte de rotation est renvoyée dans la direction de l'écoulement à l'aide de l'opérateur rotationnel du potentiel $\boldsymbol{\omega}$. L'intérêt de cette approche est très important, il est inutile de créer un opérateur d'ordre deux, le tenseur de Cauchy, pour revenir ensuite à un vecteur. Les conséquences de ce choix qui seront détaillées plus loin sont multiples et permettront notamment de lever des indéterminations liées au choix de Cauchy. Toutefois, pour l'exemple considéré, la force exercée par le fluide sur la paroi sera la même.

La dualité entre le potentiel scalaire, la pression p , et le potentiel vecteur, $\boldsymbol{\omega}$ est intimement attachée à l'équilibre mécanique dans un milieu. Pour l'écoulement de Poiseuille stationnaire les forces de pression équilibrent les forces de viscosité et celles-ci s'expriment sur le segment $[P R]$ de la figure (Fig. 11) sous la forme :

$$\nabla p = \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (44)$$

Le rotationnel de $\boldsymbol{\omega}$ s'applique sur la topologie duale, c'est à dire sur une surface orthogonale au segment $[P R]$ et calculé à l'aide de la circulation sur le contour délimitant cette surface.

Ces trois exemples qui font partie des fondements de la Mécanique des Milieux Continus sont interprétés de manière très différente. A partir de celles-ci les effets de pression et les forces de viscosité vont être modélisées en tenant compte d'autres effets physiques de viscosité à courtes distances.

3.3 Postulats

A l'issue de ces trois expériences fondamentales un certain nombre d'hypothèses basées sur la compréhension de celles-ci vont être émises et discutées. Comme les expériences ne font pas la généralité les hypothèses deviendront des postulats.

Postulat 1 : *les effets de pression et les effets visqueux sont séparés.*

En effet la contrainte de pression et la contrainte visqueuse sont portées par des directions orthogonales. Nous verrons que la contrainte de pression sera représentée par l'opérateur gradient et la contrainte visqueuse par le rotationnel. Ces deux champs, s'ils sont égaux, ne peuvent différer que d'un champ constant pour un domaine simplement connexe.

Postulat 2 : *il existe deux potentiels de la quantité d'accélération, l'un scalaire, la pression p^o qui est l'accumulateur des effets de compression et l'autre vectoriel, le potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}^o$ qui est l'accumulateur des effets visqueux de rotation.*

Cette partition introduit la possibilité d'exprimer l'accélération de la quantité de mouvement comme la somme d'un gradient et d'un rotationnel. Cette décomposition de Hodge-Helmholtz à deux termes est l'un des principes de base de la mécanique des milieux discrets.

Postulat 3 : *deux coefficients strictement positifs, dt/χ_S et μ , permettent de décrire le comportement des effets de compression et des effets de viscosité.*

χ_S est le coefficient de compressibilité isentropique du fluide ; les transformations isothermes seront aussi représentés par ce coefficient et par le rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants. μ est aussi appelée communément viscosité de cisaillement. Ces deux paramètres physiques sont parfaitement mesurables.

Les forces de pression et les forces visqueuses sont les composantes de la contrainte mécanique appliquée à un milieu élastique.

Il existe deux potentiels, un potentiel scalaire, p^o et un potentiel vecteur ω^o qui sont respectivement les potentiels d'accumulation de la pression et des effets visqueux. Le gradient du potentiel scalaire ∇p et le rotationnel du potentiel vecteur ω sont deux champs indépendants. La décomposition de Hodge-Helmholtz définit ces deux champs comme orthogonaux.

Les trois expériences analysées précédemment montrent que les potentiels p et ω peuvent être considérés comme des accumulateurs des effets de compression et de rotation. Leurs interactions respectives avec $dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\mu \nabla \times \mathbf{V}$ permet la restitution de l'énergie correspondante à ces effets pour permettre la propagation des ondes longitudinales ou transversales dans un milieu. Les coefficients dt/χ_S et μ s'expriment avec les mêmes unités qu'une viscosité et peuvent être assimilées à des viscosités de compression de rotation. Ces phénomènes de dissipation vont bien entendu apparaître au sein des lois de conservation de l'énergie cinétique ou de l'énergie totale traduisant les mécanismes de transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique. Comme les variations d'entropie ne peuvent être que positives les termes correspondants devront l'être aussi.

3.4 Modélisation des forces de pression

Les potentiels scalaire et vectoriel vont être maintenant modélisés en s'inspirant des trois expériences décrites plus haut. Il ne s'agit pas ici de considérer ces expériences comme des lois phénoménologiques, ce sont à la fois des aides à la modélisation et des cas de validation à reproduire par le modèle élaboré. Il n'y aurait pas d'un côté des lois qui sont modélisées à partir de concepts théoriques et de l'autre des lois expérimentales. Seuls les coefficients physiques comme la compressibilité, la viscosité de rotation, la dilatation thermique, ... seront mesurés par des moyens appropriés.

Les lois de conservation seront ainsi établies à partir des seules modélisations des différents effets qui agissent sur la quantité de mouvement.

Reprenons le schéma des topologies primale et duale sur lesquelles vont être exprimés les différents termes et notamment l'action des variations de pression dans le milieu sur la variation de la quantité de mouvement $\rho \mathbf{V}$ au cours du temps. La figure (Fig. 12) montre le segment Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} sur lesquels sera exprimé la force de pression. Comme on peut le prévoir la topologie duale est quelconque dans le cas général et la surface Δ ne sera ni plane ni centrée sur Γ . Les forces de pression s'exerceront sur la portion Δ mais seule leur projection sur \mathbf{t} contribuera aux efforts résultants dans cette direction.

La contrainte de pression T_p sur le segment $[PR]$ sera modélisée ici très simplement par la

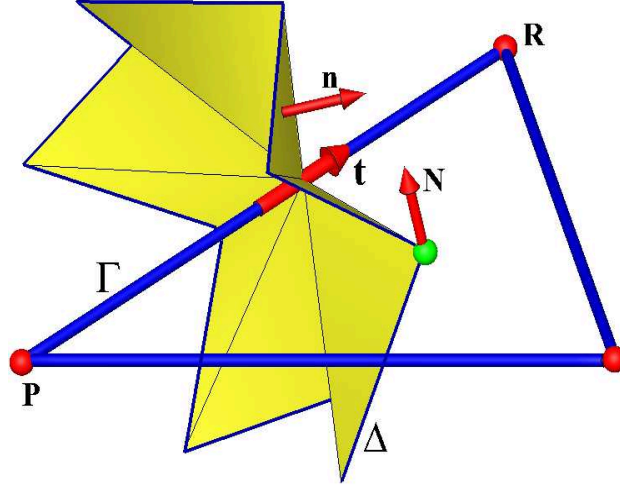


FIGURE 12 – Contribution de la pression aux efforts projetés sur le segment Γ .

différence de pression entre les deux extrémités du segment.

$$T_p = -(p_R - p_P) = -\frac{1}{[L]} \int_P^R dp \implies T_p = -\int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} dl \quad (45)$$

La condition nécessaire et suffisante pour admettre que l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi est que dp est une différentielle totale. La pression étant définie comme un potentiel scalaire la circulation du vecteur ∇p le long du contour Γ est indépendante de celui-ci et ne dépend que des valeurs aux extrémités.

Le potentiel scalaire est la pression thermodynamique classique, il accumule les contraintes mécaniques, thermiques, chimiques, etc. Nous reprendrons le formalisme décrit dans le premier document sur la Mécanique des Milieux Discrets [8].

Physiquement l'état du système va varier en fonction des flux de quantité de mouvement et de chaleur. La pression et la température évolueront donc en fonction de \mathbf{V} et de Φ . Par exemple un flux de chaleur fourni au système fera augmenter la pression dans la cavité ou une compression mécanique du système conduira à une élévation de la température. Plus exactement ce sont les différences de vitesses ou de flux qui engendrent les variations ou plutôt la divergence de la vitesse et la divergence du flux. Nous allons nous intéresser dans un premier temps aux seuls effets mécaniques et supposer que le flux de chaleur Φ est nul ainsi que toutes les autres contributions autre que mécaniques de l'évolution de la pression.

La différentielle du potentiel scalaire p peut s'écrire de manière générale sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT \\ d\rho = -dt \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (46)$$

où $d\rho$ représente la variation de la masse volumique attachée au point au cours du temps.

Comme $dT = 0$ la variation de pression entre deux états d'équilibre obtenue en suivant la particule au cours de son mouvement devient :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho \quad (47)$$

On recherche maintenant une équation d'évolution de la pression thermodynamique à partir de celles de la masse et de la température. On part de la définition de la dérivée particulaire de la masse volumique :

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (48)$$

pour obtenir celle de la pression :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (49)$$

Si l'on considère les évolutions non plus isothermes ($dT = 0$) mais isentropique ($dS = 0$) la pression d'excès due aux variations de la température due aux évolutions adiabatiques du système sera pondérée par le rapport des chaleurs massiques c_p/c_v . C'est donc la compressibilité isentropique χ_S qui remplacera le coefficient de compressibilité isotherme. Comme tenu des expressions établies précédemment les dérivées particulaires des potentiels ρ, p définis sur les extrémités des segments s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (50)$$

La seconde relation n'est autre que la loi de conservation de la masse mais elle exprime, comme toutes les autres lois de conservation sur les scalaires, le relèvement de la quantité, ici la masse volumique par le flux sur la surface duale. Même si la pression obéit à une loi du même type bien d'autres termes correspondant à différents phénomènes sont à rajouter.

La séparation des termes de pression et des termes visqueux fixée par le postulat (1) et la décomposition de Hodge-Helmholtz permettent d'écrire l'équilibre mécanique des effets de pression sous la forme

$$\nabla \left(p - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) = 0 \quad (51)$$

Lorsque la divergence sera égale à zéro ou tendra vers zéro la pression deviendra une constante sur le segment Γ . En présence d'autres forces définies par un potentiel, gravité ou inertie ($\rho \mathbf{V}^2/2$), celles-ci viendront équilibrer les forces de pression.

Le premier terme de l'équation (51) représente la pression d'équilibre que nous appellerons p^o quant au second c'est l'incrément de pression à l'issue du transport lagrangien de la particule au cours de son mouvement dp . La nouvelle pression d'équilibre p sera obtenue par l'accumulation pendant le temps dt :

$$p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (52)$$

On retrouve sans surprise le coefficient dt/χ_S représentant la propagation des ondes dans un fluide. Dans le cas d'un milieu élastique solide isotherme le module de compression s'écrira $1/\chi_T$ et la vitesse sera remplacée par le déplacement.

3.5 Modélisation des efforts visqueux

La représentation physique de la viscosité dans les milieux fluides viscoélastiques ou dans les solides est complexe car la nature continue du milieu doit être remplacée par un concept discret permettant de retrouver les principaux comportements du milieu continu.

La réponse de la Mécanique des Milieux Continus consiste à établir des lois de conservation locales ; cette approche paraît la plus adaptée mais les opérateurs gradients, rotationnel, ... n'ont pas de sens immédiat pour un point et doivent ensuite être interprétés pour créer un modèle mathématique utilisable adapté aux méthodes de résolution classiques, éléments finis, volumes finis, etc.

La Mécanique des Milieux Discrets permet d'établir des lois de conservations et des équations discrètes ; chaque terme sera associé à une série d'opérateurs qui ont une signification précise dans le cadre de la géométrie différentielle. Le passage au modèle numérique ne nécessite pas d'adaptation, elle devient immédiate.

Nous distinguerons deux types d'effets visqueux, le premier porté directement par la segment Γ d'ordre de grandeur en \mathbf{V} comme tout effet visqueux et le second qui traduit le lien de tous les segments de la topologie primale sur le segment considéré.

3.5.1 Modélisation des effets visqueux de volume

La loi de Darcy est perçue comme une loi essentiellement expérimentale pour les milieux poreux liant linéairement le gradient de pression à la vitesse. Le coefficient de proportionnalité est la mobilité μ/K où μ est la viscosité du fluide et K un paramètre physique dont l'inverse traduit la résistance du substrat solide sur la mobilité du fluide.

On peut légitimement se poser la question suivante : pourquoi la loi de Stokes est issue d'une modélisation alors que la loi de Darcy est considérée comme une loi expérimentale ? En fait toutes ces approches sont légitimes si on les replace dans le contexte de l'époque où elles ont été établies.

Nous prendrons le parti de modéliser les lois qui correspondent aux effets visqueux dans les milieux. Les différents termes n'auront probablement pas la même importance en fonction du milieu considéré mais leur présence sera strictement requise pour une modélisation complète.

Comme tous les effets visqueux la force par unité de longueur \mathbf{F}_l est fonction de la vitesse :

$$\mathbf{F}_l \propto \mu \mathbf{V} \quad (53)$$

où \mathbf{V} est la composante de la vitesse \mathbf{W} projetée sur le segment Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} .

La modélisation des effets de type darcéen peut être obtenue à partir de la traînée d'une sphère dans un fluide mesurée par un moyen approprié ; on trouve

$$F_s = 6 \pi r \mu V \quad (54)$$

où r est le rayon de la sphère.

Si l'on considère maintenant que l'espace est rempli de sphères de même diamètre dont la distance moyenne les séparant est égal à l avec $l \gg d$ (Fig. 13) on peut évaluer le nombre N occupant un volume \mathcal{V} .

Il est alors possible par identification avec la loi linéaire de Darcy de calculer la perméabilité

$$K = \frac{\mathcal{V}}{6 \pi r N} \quad (55)$$

pour traduire les efforts de pression et de viscosité à l'équilibre mécanique :

$$-\nabla p = \frac{\mu}{K} \mathbf{V} \quad (56)$$

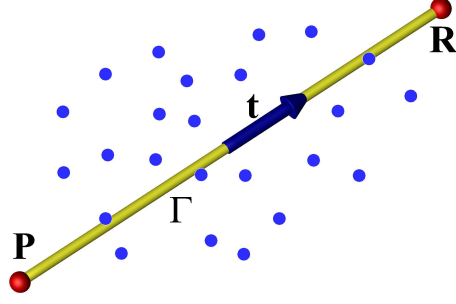


FIGURE 13 – Modélisation des effets visqueux sur le segment.

Ces deux contributions à l'équilibre se traduisent par des vecteurs colinéaires à \mathbf{t} sur le segment Γ .

Lorsque r tend vers zéro la perméabilité tend vers l'infini et la force visqueuse devient évanescence. Avec ce modèle l'espace est occupé par des particules solides fixes induisant une résistance volumique à l'avancement d'un fluide. Pour un milieu poreux classique (tas de sable, roche, isolant fibreux, ...) ce terme sera essentiel tandis qu'en fluide pur il tendra vers zéro. Cependant ce terme ne peut être supprimé sans changer la nature de la loi de conservation. En particulier les paradoxes liés à l'équation de Stokes pourront être levés par l'existence de ce terme dans l'équation du mouvement.

3.5.2 Modélisation des effets visqueux de surface

La modélisation des effets visqueux au voisinage de Γ est basée sur les deux expériences de Couette et de Poiseuille. La figure (Fig. 14) montre la schématisation discrète de la viscosité ; le segment Γ et ses voisins directs forment la topologie primale délimitant la surface \mathcal{A} tandis que le contour Δ définit une portion de la surface duale \mathcal{S} .

L'objectif est de déterminer l'action exercée sur le segment $[PR]$ par le voisinage de celui-ci. De fait ce sont des actions mutuelles entre un ensemble de segments qui définira le terme traduisant les effets de viscosité au sein de l'équation du mouvement.

Au premier ordre la force exercée par unité de longueur par le fluide du voisinage immédiat de Γ est égale à

$$\mathbf{F}_l = \mu \mathbf{V} \quad (57)$$

où \mathbf{V} est la projection du vecteur vitesse \mathbf{W} . C'est effectivement la force qu'il faudrait exercer sur un fil pour le tirer dans un fluide visqueux.

La circulation du vecteur \mathbf{F}_l le long du contour primal Γ' , Γ' désignant les différents segments Γ de ce contour, est égale à

$$\int_{\Gamma'} \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{\mathcal{A}} \mu \nabla_p \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{m} ds \quad (58)$$

L'application du théorème de Stokes permet ainsi de transformer une circulation en flux à travers une surface ; nous appellerons l'opérateur $\nabla_p \times \mathbf{V}$ le rotationnel primal.

Le second terme de cette expression représente le flux du vecteur \mathbf{F}_l à travers la surface \mathcal{A} . Ce flux représente une force sur la surface \mathcal{A} qui s'exerce normalement à celle-ci pour une surface plane. Si la surface primale n'est pas plane elle peut être décomposée en surfaces élémentaires qui le sont. Dans le processus qui consiste à écrire une équation locale les surfaces sont d'autant plus planes que les dimensions sont petites. Dans le cas général il suffit de considérer la projection de

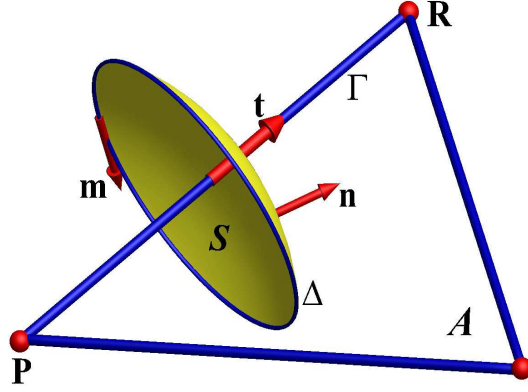


FIGURE 14 – Modélisation des effets visqueux sur le segment dus à l’action des contraintes définies sur chaque facette.

cette force \mathbf{F}_s sur une direction orthogonale au segment Γ .

L’ensemble des topologies primales supportées par le segment Γ forment un ensemble de forces surfaciques dont les projections orthogonales à Γ permettent d’appliquer à nouveau le théorème de Stokes pour calculer le flux sur la surface duale \mathcal{S} et de définir la force volumique \mathbf{F}_v dont la projection sur le contour Γ permet d’obtenir enfin l’action recherchée.

$$\int_{\Delta} \mu \nabla_p \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{m} dl = \iint_{\mathcal{S}} \nabla_d \times (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (59)$$

Cette action représente la force visqueuse exercée sur le segment $[PR]$.

Le schéma ci-dessous permet de montrer les différentes phases du calcul de la contrainte visqueuse sur le contour Γ :

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \Gamma \\ \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} & \longrightarrow & \mu \nabla_p \times \mathbf{V} & \longrightarrow & \mu \nabla_p \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{m} & \longrightarrow & \nabla_d (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) & \longrightarrow & \nabla_d (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{t} \end{array}$$

Ainsi le cadre de la Mécanique des Milieux Discrets bâtie sur des concepts élémentaires de la géométrie différentielle conduit à une formulation élégante des termes visqueux pour une équation du mouvement discrète.

Les différences avec la Mécanique des Milieux Continus pour ces effets visqueux peuvent se résumer par le tableau 1 :

	Milieu Continu	Milieu Discret
Force / longueur	-	$\mu \mathbf{V}$
Force / surface	$\mu \frac{du}{dy}$	$\mu \nabla \times \mathbf{V}$
Force / volume	$\mu \frac{d^2u}{dy^2}$	$\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$

TABLE 1 – Modélisation des effets visqueux pour un milieu continu et un milieu discret

La séparation des termes de pression et des termes visqueux fixée par le postulat (1) et la décomposition de Hodge-Helmholtz permettent d’écrire l’équilibre mécanique des effets de

viscosité sous la forme

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (60)$$

où $\boldsymbol{\omega}^o$ est le potentiel vecteur d'accumulation et $\mu \nabla \times \mathbf{V}$ le relèvement des effets de rotation qui sont accumulés dans $\boldsymbol{\omega}$.

De manière identique que pour les effets de pression la ré-actualisation du potentiel vecteur est réalisée par un relèvement de $\boldsymbol{\omega}$ par la relation :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \quad (61)$$

où $\boldsymbol{\omega}^o$ est le potentiel vecteur d'équilibre. Comme on peut le voir ce potentiel est constant ou nul sur un segment curviligne où le rotationnel n'a pas de sens. Contrairement aux effets de pression la notion de temps n'intervient ici qu'au premier ordre par les échanges entre les deux termes de cette expression. Les contraintes de cisaillement dans un milieu solide finissent par s'amortir plus ou moins rapidement suivant les valeurs de μ .

3.5.3 Etat de contrainte

L'état de contrainte au sein d'un domaine Ω autour du point P dans la direction \mathbf{n} est défini comme étant l'effort à maintenir sur une des parties du domaine lorsque l'on supprime l'autre pour maintenir la première dans un état d'équilibre mécanique. La figure (Fig. 15) montre l'élément de surface ds de normale \mathbf{n} sur la partie en équilibre.

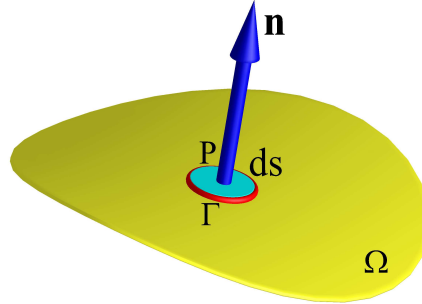


FIGURE 15 – Etat de contrainte sur un élément de surface ds de normale \mathbf{n} et de contour Γ .

En MMD les efforts sont dissociés en une partie relative aux effets de pression et une autre associée aux effets visqueux. Les deux contributions sont portées par la seule normale \mathbf{n} ; en effet les efforts visqueux dans toute direction ne s'exprime que par un vecteur orthogonal à celle-ci à l'aide de l'opérateur rotationnel.

Compte tenu des principes exposés les contraintes en un point sont définies par les potentiels scalaire et vectoriel :

$$\begin{cases} p \mathbf{n} = \left(p^o - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{cases} \quad (62)$$

Pour obtenir la contrainte en un point quelconque dans une direction donnée il suffit de connaître la pression en ce point et la circulation du vecteur vitesse sur le contour de l'élément de surface ds pour pouvoir calculer la composante du rotationnel orthogonale à celle-ci.

Pour un milieu fluide la contrainte résiduelle $\boldsymbol{\omega}^o$ étant négligeable la contrainte visqueuse deviendra $\boldsymbol{\omega} = -\mu \nabla \times \mathbf{V}$. Pour un solide, à un instant donné considéré comme un état d'équilibre mécanique, les efforts seront définis par p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$.

Cette définition de la contrainte en un point relativement à une direction donnée est probablement moins intuitive qu'en MMC où le déplacement est bien dans la direction de la force ; en MMD il faut exercer une rotation d'axe orthogonal à la direction du déplacement. Pour un déplacement infinitésimal, hypothèse adoptée pour le tenseur de Cauchy, les deux formulations sont équivalentes. Par exemple pour un cisaillement simple où la composante de la vitesse suivant \mathbf{e}_x , dans un système cartésien orthonormé, ne dépendant que de y soit $\mathbf{V} = u(y) \mathbf{e}_x$, le potentiel vectoriel $\boldsymbol{\omega} = -\mu du/dy$ sera porté par \mathbf{e}_z .

Le potentiel $\boldsymbol{\omega} = -\mu \nabla \times \mathbf{V}$ n'est défini, comme le rotationnel lui-même, que par plans. Trois plans quelconques non parallèles permettent ainsi de définir entièrement l'état de contrainte dans un milieu, il n'est pas nécessaire que ces plans soient orthogonaux entre-eux. Les notions de base et de référentiel ne sont pas absolument nécessaires dans cette formulation vectorielle.

Rappelons par ailleurs qu'il est toujours possible de calculer le déplacement \mathbf{U} (ou la vitesse \mathbf{V}) par la loi de Biot et Savart pour définir de manière biunivoque la relation entre contrainte et déplacement.

3.6 Objectivité

La mécanique newtonienne est basée sur des principes issus d'expériences formulées sous formes de postulats. Cette mécanique est basée sur l'existence d'un référentiel dit galiléen ou tout point matériel en équilibre est immobile ou en translation rectiligne uniforme.

Le Principe Fondamental de la Dynamique exprime que dans un référentiel galiléen la quantité d'accélération $m \boldsymbol{\gamma}$ d'un point matériel de masse m est égale à la somme des forces extérieures \mathbf{F}_e . Ce principe est complété par celui des actions réciproques.

L'extension de la mécanique du point à celle du milieu continu conduit au Principe Fondamental de la Dynamique sous la forme $\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}$ où \mathbf{f} est une force par unité de volume.

La Mécanique des Milieux Discrets conduit à réduire le nombre de degrés de liberté d'un point matériel à 1 comme par exemple un train sur des rails. Tout objet soumis par exemple à la force de gravité terrestre dans un wagon aura globalement la direction définie par les rails et sa vitesse par celle du train. Toute force à distance pourra se projeter sur l'axe sur lequel s'exprime l'accélération.

Rappelons qu'un vecteur \mathbf{W} dans un référentiel déterminé peut engendrer un autre vecteur $\mathbf{V} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$ ou être lui-même déjà une projection d'un autre vecteur $\mathbf{W} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s}$. Ainsi il n'est pas nécessaire de connaître \mathbf{W} pour en déterminer son action sur le segment Γ .

En Mécanique des Milieux Continus, pour un espace homogène et isotrope, deux observateurs liés à des référentiels différents doivent percevoir la même information, c'est le principe d'objectivité. Quelque soit l'ordre de tensorialité et la variance d'une grandeur sa valeur ne dépend pas d'un changement de repère [22]. La loi fondamentale de la dynamique par exemple n'est valable qu'en repère galiléen.

L'importance de cette notion d'objectivité est surtout liée à l'existence de tenseurs de la physique où par exemple, la contrainte exercée par un fluide sur une surface ne doit pas dépendre du repère. Comme la multiplicité des coefficients introduits formellement dans le tenseur ne sont pas tous indépendants, ce principe permet de déterminer leur dépendance et d'en réduire le nombre.

Pour la Mécanique des Milieux Discrets la restriction à une seule direction curviligne de l'espace la question ne se pose pas dans les mêmes termes. Ce repère particulier reste par ailleurs

galiléen puisque tout élément matériel porté par le segment Γ sera en équilibre mécanique ou en mouvement de translation uniforme sur celui-ci. Rappelons que la vitesse \mathbf{V} et la quantité de mouvement \mathbf{V} sont constantes sur ce segment. Comme la dérivation de la loi de la dynamique discrète n'introduit que des vecteurs orientés il n'y aura pas d'introduction de tenseur pour pallier l'insuffisance de la modélisation physique.

La loi Fondamentale de la Dynamique pour un Milieu Discret sera ainsi établie sur le segment Γ que l'on supposera rectiligne ce qui sera vérifié si sa longueur tend vers zéro tout en restant orienté.

3.7 Equation du mouvement discrète

3.7.1 Loi fondamentale de la dynamique

La formulation de la loi fondamentale de la Mécanique exprimée pour un élément de volume n'est pas complètement satisfaisante dans le contexte discret. Essayons d'établir une forme discrète de cette loi sur un segment curviligne Γ (Fig. 16).

Reprenons la loi fondamentale pour un point $\mathbf{F} = m \boldsymbol{\gamma}$ et étendons celle-ci au contour curviligne Γ entre les deux points P et R . Celle-ci s'écrit :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f} \quad (63)$$

où ρ et $\boldsymbol{\gamma}$ sont constants tout le long du segment tout comme \mathbf{f} qui représente l'ensemble des forces projetées sur \mathbf{t} .

Exprimons maintenant la conservation de la quantité de mouvement $\rho \boldsymbol{\gamma}$ lorsque l'on suit ce segment au cours de son mouvement :

$$\int_{\Gamma} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{\Gamma} \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{\Gamma} \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{\Gamma} \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (64)$$

où $\rho = \bar{\rho}$ est la moyenne intégrale définie plus haut de la masse volumique sur le segment, \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent orienté de Γ . Les forces représentent respectivement \mathbf{T}_p la force de pression, \mathbf{T}_v , la force visqueuse et \mathbf{T}_g les autres forces par unité de longueur.

La loi de la dynamique discrète curviligne pourrait ainsi s'écrire :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} + \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{t} \quad (65)$$

Cette expression traduit l'équilibre des forces et de l'accélération sur une ligne. Compte tenu de la définition de ρ elle représente aussi la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{\Gamma} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{\Gamma} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (66)$$

La dérivée d'une intégrale curviligne du premier membre peut être développée de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{b} \times \mathbf{V} + \nabla (\mathbf{b} \cdot \mathbf{V}) \right) \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (67)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \int_P^R \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_P^R \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{b} \times \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{t} \, dl + [\mathbf{b} \cdot \mathbf{V}]_P^R \quad (68)$$

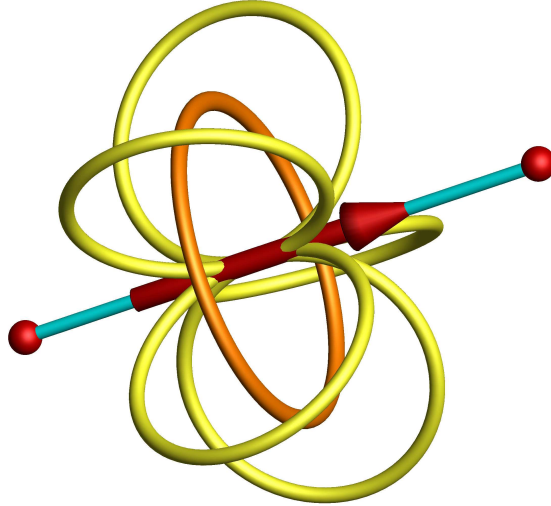


FIGURE 16 – Moteur virtuel du mouvement ; l'accélération du fluide le long du segment Γ est due aux forces de pression définies par le gradient de celle-ci aux extrémités et par les forces visqueuses dues au voisinage.

L'application à la quantité de mouvement $\bar{\rho} \mathbf{V}$ donne, en tenant compte de la définition de la masse volumique sur le segment :

$$\frac{d}{dt} \int_P^R \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_P^R \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{t} dl + \left[\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right]_P^R = \int_P^R \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} dl + \left[\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right]_P^R \quad (69)$$

Le dernier terme représente la composante de la quantité de mouvement qui est par définition considérée comme constante sur le segment PR . Le dernier terme est donc nul et nous définirons la dérivée particulaire discrète de circulation de l'accélération sur un segment comme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} dl \quad (70)$$

ou encore, en développant la dérivée particulaire de la vitesse en coordonnées eulérienne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right) \cdot \mathbf{t} dl \quad (71)$$

Reprenons maintenant l'examen des autres termes de la loi fondamentale de la dynamique. La dernière intégrale curviligne correspond simplement à la projection de la force sur le segment orienté PR de vecteur unitaire \mathbf{t} .

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} dl \quad (72)$$

où \mathbf{f} est la somme des termes sources des différents effets, gravité rotation, capillaires, etc.

Le terme des forces de pression \mathbf{T}_p est défini sur le segment comme la différence de pression entre P et R :

$$\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} = -(p_R - p_P) = -\frac{1}{L} \int_P^R dp dl = - \int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} dl \quad (73)$$

La pression elle-même est définie sur les sommets du polyèdre élémentaire et il est ainsi logique de calculer les forces de pression sur une surface \mathcal{S} de la topologie duale orthogonale au vecteur \mathbf{t} .

La contrainte de pression $\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t}$ des effets de pression s'écrit finalement :

$$\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} = - \int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} dl \quad (74)$$

La contrainte visqueuse \mathbf{T}_v est bâtie sur le rotationnel des composantes d'une facette et sur la viscosité de cisaillement μ pour les topologies primale et duale. Deux opérateurs seront ainsi définis :

$$\begin{cases} \nabla_p \times (\mu \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{[\mathcal{A}]} \int_{\Phi} \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{m} dl \\ \nabla_d \times \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{[\mathcal{S}]} \int_{\Delta} (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dl \end{cases} \quad (75)$$

où μ est toujours constante sur la facette \mathcal{A}

Il est à noter que la projection de la contrainte visqueuse pour une facette peut s'écrire avec le produit mixte :

$$\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = (-\mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = (-\mu \nabla \times \mathbf{V}, \mathbf{n}, \mathbf{t}) \quad (76)$$

où $\boldsymbol{\omega} = -\mu \nabla \times \mathbf{V}$ est le potentiel vecteur.

L'équation discrète du mouvement sur le contour Γ et plus exactement sur le segment $[PR]$ s'écrit en reprenant l'ensemble des termes :

$$\int_{\Gamma} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{t} dl = - \int_{\Gamma} \nabla_p p \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\Gamma} \nabla_d \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\Gamma} \frac{\mu}{K} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} dl \quad (77)$$

soit

$$\int_{\Gamma} \left(\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla_p p - \nabla_d \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\mu}{K} \mathbf{V} - \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{t} dl = 0 \quad (78)$$

Les projections de l'accélération, de la vitesse, du gradient de pression et de la force volumique sont constantes par définition sur le segment $[PR]$. On peut ainsi extraire une formulation discrète de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_p p + \nabla_d \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f} \quad (79)$$

où les rotationnels $\nabla_p \times \mathbf{V}$ et $\nabla_d \times \mathbf{T}_v$ correspondent respectivement aux circulations du vecteur \mathbf{V} pour la topologie primale sur le contour Γ et du vecteur \mathbf{T}_v pour la topologie duale sur le contour Γ . Ces notations ne seront pas reprises par la suite mais l'utilisation de ces opérateurs pour les topologies primale et duale est essentielle.

L'équation discrète du mouvement s'écrit finalement :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f}}$$

A ce stade les potentiels p et $\boldsymbol{\omega}$ actuels sont remplacés par les potentiels d'équilibre p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$ et par leur relèvement $dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\mu \nabla \times \mathbf{V}$.

Cette relation exprime l'équilibre mécanique et p et ω sont des potentiels d'équilibre et la loi est vérifiée exactement. Toute perturbation liée à \mathbf{V} par sa divergence ou son rotationnel va conduire le système vers un autre état d'équilibre.

Ainsi on écrira la loi vectorielle du mouvement en intégrant les relèvements ; par ailleurs on associe les trois lois de conservation locales de la pression, du potentiel vecteur et de la masse volumique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times \left(\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f} \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - \rho^o \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \omega = \omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (80)$$

En comparant cette expression (80) à la loi de Cauchy on note des différences fondamentales. Tout d'abord la notion de tenseur n'est pas nécessaire pour définir les contraintes et seul le coefficient de viscosité de rotation a été introduit comme une grandeur positive pour la contrainte visqueuse. Le second coefficient de viscosité λ n'apparaît plus dans l'équation du mouvement à ce stade de la formulation. Par ailleurs, compte tenu de la définition de la masse volumique $\rho = \bar{\rho}$ le terme correspondant à l'énergie cinétique peut être intégré dans le gradient de pression de manière formelle pour donner la pression de Bernoulli.

Sous cette forme (80) la loi de conservation de la quantité de mouvement fait apparaître des traitements similaires des effets de viscosité et des effets de pression qui sont pris ici au premier ordre ; en effet l'augmentation de pression correspond d'abord à une augmentation de matière à travers la surface duale traduite par la divergence de la vitesse. On peut remarquer que seuls les opérateurs gradient et rotationnel apparaissent dans l'équation du mouvement alors que l'opérateur divergence n'est utilisé que pour relever les potentiels. Même s'ils sont présentés de manière similaire dans la théorie du calcul extérieur pour décrire le passage d'un complexe à un autre, leur rôle en physique est différencié.

Cette loi de conservation de la quantité de mouvement discrète fait apparaître des termes qui ont été modélisés formellement ; toutefois certaines situations particulières pourront être examinées, par exemple le cas d'un fluide newtonien classique ; dans ce cas le terme d'accumulation de la contrainte de rotation disparaît $\omega^o = 0$ et les effets visqueux seront représentés par $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$. De même en l'absence d'un milieu poreux le terme correspondant sera supprimé.

Toutefois même si l'un des termes paraît négligeable sa suppression brutale s'accompagnera du changement de la nature de l'équation. Les cas de paradoxes de certaines équations en sont des exemples édifiants qui seront examinés plus loin.

Le terme $dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ ne doit en aucun cas être supprimé parce que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ est souhaité ! Si c'est le cas c'est χ_S qui doit être imposé à une valeur très faible pour obtenir un comportement incompressible de l'écoulement. Dans les autres cas l'ensemble des coefficients de la modélisation ont des valeurs appropriées s'ils sont bien mesurés.

3.7.2 Remontée eulérienne

L'équation vectorielle du système (80) peut être résolue telle quelle pour obtenir la vitesse eulérienne au temps $t + dt$. Il est cependant plus cohérent de calculer la quantité de mouvement

$\rho \gamma$ en fonction de toutes les actions qui agissent sur le système ; comparons les deux formes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f} \\ \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f} \end{array} \right. \quad (81)$$

Cette seconde forme permet de dissocier le calcul de la vitesse lorsque l'on suit le système au cours du mouvement de la vitesse définie de manière eulérienne. En effet mis à part l'inertie, l'ensemble des autres termes agissent sur l'évolution de la vitesse lors du mouvement lagrangien. L'advection de toutes les quantités scalaires et vectorielles peut alors être réalisée dans une seconde étape. En effet les potentiels scalaires, pression, masse volumique, température doivent aussi être remontés pour assurer la cohérence entre équations vectorielles et scalaires.

Cette étape est nécessaire pour tous les problèmes traités mais prend une importance certaine pour des phénomènes rapides où la vitesse du fluide n'est plus négligeable devant la célérité des ondes, pour les ondes de choc tout particulièrement.

En l'absence de flux thermique l'advection des différentes quantités s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla \rho \end{array} \right. \quad (82)$$

La question de l'advection du potentiel $\boldsymbol{\omega}$ ne se pose pas pour les fluides dont l'accumulation des contraintes de cisaillement est négligeable. Pour les solides élastiques la question ne se pose pas non plus dans l'hypothèse des petits déplacements. En revanche l'étude des grandes déformations pourrait être analysée de manière cohérente sans avoir recours au tenseur de Green-Lagrange. Comme la conservation de la masse est assurée exactement avec la formulation vectorielle présentée ici les défauts inhérents à l'utilisation du tenseur de Cauchy pourraient être éliminés pour les grandes déformations. Toutefois la formulation présentée est essentiellement instationnaire et le temps caractéristiques dt entre deux états d'équilibre doit être en adéquation avec la physique du phénomène. Les grands déplacements sont alors obtenus par une succession d'états d'équilibres mécaniques. De ce point de vue la MMD se situe dans le cadre de la théorie des petits déplacements.

Le passage de la dérivée totale à la dérivée partielle puis aux valeurs des quantités à l'instant $d + dt$ nécessite le recours à des méthodes et des schémas qui n'entrent pas dans le cadre de cet exposé sur la physique des phénomènes.

3.8 Formulation en masse volumique et température

Il est possible d'obtenir une forme des équations qui ne fait apparaître que la masse volumique et une variable associée à l'énergie (température, énergie interne, enthalpie, entropie, ...). Il suffit pour cela de reprendre l'expression correspondante de la variation de la pression pour un fluide homogène et d'écrire le gradient de pression en fonction de ces variables. On prendra ici la température :

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \nabla \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \nabla T = \frac{1}{\rho \chi_T} \nabla \rho + \frac{\beta}{\chi_T} \nabla T \quad (83)$$

Reprenons la seconde équation du système (79) et introduisons l'expression de la pression ainsi obtenue.

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho \chi_T} \nabla \rho - \frac{\beta}{\chi_T} \nabla T + \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f} \quad (84)$$

Dans cette équation (84) la conservation de l'énergie permet d'exprimer la température avec un certain nombre de termes que l'on précisera. Il en est un directement lié à la compression ou à la détente réversible du fluide qui apparaît sous la forme $-p \nabla \cdot \mathbf{V}$ que nous retiendrons. Par contre le flux de diffusion $\Phi = 0$ et d'autres termes seront omis dans cette partie de l'exposé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho \chi_T} \nabla \left(\rho^\circ - dt \rho^\circ \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \frac{\beta}{\chi_T} \nabla \left(T^\circ - \frac{dt \beta T}{\rho c_v \chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega}^\circ - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) + \mathbf{f} \\ \rho = \rho^\circ - dt \rho^\circ \nabla \cdot \mathbf{V} \\ T = T^\circ - \frac{dt \beta T}{\rho c_v \chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^\circ - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (85)$$

Comme on peut le constater cette formulation (85) n'est pas très compacte car elle fait apparaître des coefficients qui dépendent de certaines variables à l'extérieur de l'opérateur ∇ .

Dans le cas d'une évolution adiabatique, sans échange de chaleur avec l'extérieur, la compression ou la détente du fluide vont engendrer une variation de température et donc une variation d'excès de la pression caractérisée par la quantité $(\gamma - 1)$. On fera ainsi apparaître le rapport des chaleurs massiques pour le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = \chi_T / \gamma$ pour le gaz parfait. On montre cependant que l'on a dans le cas général :

$$\frac{1}{\chi_S} = \frac{1}{\chi_T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi_T^2} \quad (86)$$

D'autres phénomènes thermiques, massiques ou physicochimiques sont susceptibles de faire apparaître une contribution sur l'expression de la pression.

Nous privilégieront finalement une formulation en pression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^\circ - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega}^\circ - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) + \mathbf{f} \\ p = p^\circ - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^\circ - dt \rho^\circ \nabla \cdot \mathbf{V} \\ T = T^\circ - \frac{dt \beta T}{\rho c_v \chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^\circ - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (87)$$

Ce système possède l'avantage de rester dans la forme initiale de la décomposition de Hodge-Helmholtz où $\rho \boldsymbol{\gamma}$ est la somme d'un gradient et d'un rotationnel. Nous retiendrons par contre les remontées des potentiels p , ρ , T et $\boldsymbol{\omega}$ à partir de la divergence et du rotationnel de la vitesse.

Lorsque le flux Φ sera défini un terme en $\nabla \cdot \Phi$ viendra s'ajouter aux relèvements des potentiels (p, ρ, T, ω) de manière semblable à $\nabla \cdot \mathbf{V}$.

Les potentiels (p, ρ, T) sont bien sûr liés par les expressions des différentielles de ces quantités et les coefficients thermodynamiques. Il est toutefois essentiel de ne pas utiliser directement une loi d'état. En effet celle-ci jouerait le rôle d'équation et imposerait la valeur d'une des variables de manière non cohérente avec la formulation élaborée (87). Seules les équations vectorielles sont résolues, ici la vitesse \mathbf{V} , les potentiels sont quant à eux relevés. Un exemple d'utilisation du formalisme présenté concerne les évolutions transcritiques, le passage d'un fluide de son état supercritique à un état diphasique ([1]).

4 Conservation du flux et de l'énergie

4.1 Introduction

4.2 Conservation du flux

Considérons le vecteur flux de chaleur Φ porté par le segment Γ traversant la surface duale représentée sur la figure (Fig. 2). Nous reprendrons ici les notations introduites plus haut à propos de la notion de Mécanique des Milieux Discrets.

Nous allons nous intéresser ici à la conservation du flux Φ . Généralement seule la conservation de l'énergie basée sur le premier principe de la thermodynamique est prise en compte. En dynamique des fluides la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement sont deux lois séparées. De manière symétrique la conservation de l'énergie et la conservation du flux sont aussi deux lois indépendantes.

La conservation du flux de chaleur peut être écartée comme en Mécanique des Milieux Continus en considérant que le flux et l'énergie sont liées par une loi linéaire directe. C'est le cas si l'on considère que la loi phénoménologique de Fourier est le modèle exact :

$$\Phi = -k \nabla T \quad (88)$$

Or on sait que cette loi linéaire n'est qu'une approximation de la réalité qui, certes est très bien vérifiée dans les cas courants, ne représente pas par exemple les phénomènes aux temps courts.

Même dans le cas où on se situe dans le domaine de validité de la loi de Fourier il est essentiel d'élaborer une loi spécifique sur le flux de chaleur pour mettre en évidence la dualité entre quantités vectorielle et scalaire, ici entre flux et énergie.

La loi de conservation du flux nécessite de traduire l'évolution de celui-ci au cours de l'évolution du système lorsque l'on suit le domaine au cours de son mouvement et donc l'introduction de la dérivée particulaire du flux Φ . Les échelles de temps concernées par l'évolution en temps sont très faible, de l'ordre de 10^{-11} s et traduisent les échanges entre phonons. Nous définirons un coefficient ε devant la dérivée particulaire afin de rendre compte de la nature hyperbolique du phénomène. L'écart à la loi de Fourier a souvent été introduit par l'ajout d'un terme en dérivée seconde du temps dans l'équation de l'énergie, la dérivée particulaire du flux aboutit au même comportement, au premier ordre.

Nous laisserons aussi de côté dans cet exposé les termes sources issus par exemple de la modélisation des effets chimiques exothermiques ou endothermiques. Le changement de phase ne sera pas non plus pris en compte bien que ce phénomène conduise à un choc du flux dû à l'absorption ou à la production de flux localisé ; sa modélisation effectuée à partir de la relation de Clapeyron conduira à l'écriture d'une discontinuité sous la forme suivante :

$$\frac{k L}{c_p} \nabla \xi \quad (89)$$

où ξ est une fonction de phase unitaire précisant l'existence d'un front sur le segment Γ . L est la chaleur latente de changement de phase.

Examinons l'ensemble des autres flux à travers la surface duale \mathcal{S} dus à
– la diffusion de la chaleur définie sur le segment Γ ,

- la production surfacique des contraintes mécaniques exercées sur \mathcal{S} ,
- la dissipation directionnelle des ondes.

Le flux de chaleur due à la seule diffusion thermique est décrit comme étant proportionnelle au gradient de la température ou plutôt à sa composante projetée sur le segment Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} . Le coefficient de proportionnalité est ici la conductivité thermique k , un scalaire, qui est elle-même la projection sur \mathbf{t} d'une éventuelle quantité tensorielle ; k est constant sur tout le segment. En l'absence des termes sources on retrouverait la loi de Fourier discrète $\Phi \cdot \mathbf{t} = -k \nabla T \cdot \mathbf{t}$. La loi de Fourier est utilisée ici comme une aide à la modélisation du flux et non pas comme une loi de conservation ; d'ailleurs celle-ci ne sera vérifiée qu'au premier ordre car il existe d'autres contributions non nulles dans la conservation du flux.

La dissipation de l'énergie mécanique en énergie thermique participe au bilan de flux sur la topologie primale et le flux Φ sera modifié par cet apport d'origine mécanique. Bien sûr le bilan de l'énergie elle-même tiendra compte de cette dissipation dans le bilan d'énergie interne. Bilan de flux et bilan d'énergie sont indissociables et doivent être cohérents ; chaque flux participe à la variation de l'énergie contenue au sein du volume dual.

La première cause de dissipation de l'énergie mécanique est due aux effets visqueux représentés dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $\omega = -\mu \nabla \times \mathbf{V}$ le potentiel vecteur de la quantité d'accélération. Le flux de la dissipation correspondant s'écrit comme le produit vectoriel $\omega \times \mathbf{V}$. Le vecteur ω est orthogonal à la surface primale définie par les segments Γ qui la composent, le flux n'a donc pas de raison d'être nul.

La seconde contribution au flux Φ résulte des effets de compression (détente) unidirectionnels sur Γ . Ceux-ci sont quantifiés par le terme $(dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}$ ou $(\gamma dt/\chi_T \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}$ où γ est le rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants pour un gaz parfait. Le paramètre $(\gamma - 1)$ représente l'augmentation relative de la pression d'excès due à l'augmentation de la température locale.

En fait il existe aussi une contribution qui ne peut être considérée comme une dissipation et qui correspond à des phénomènes de détente ou compression réversibles ; elle sera représentée par le terme $p^o \mathbf{V}$ où p^o est la pression d'équilibre mécanique.

L'évolution au cours du temps du flux Φ est ainsi égale la somme des contributions :

$$\int_{\Gamma} \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} \cdot \mathbf{t} dl = - \int_{\Gamma} \Phi^o \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\Gamma} k \nabla T \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\Gamma} p \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\Gamma} \omega \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl \quad (90)$$

où p est la nouvelle pression d'équilibre :

$$p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (91)$$

L'équation discrète du flux de chaleur s'écrit alors

$$\varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -\Phi^o - k \nabla T - \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \mathbf{V} + \omega \times \mathbf{V} \quad (92)$$

où ω est le potentiel vectoriel $\omega = -\mu \nabla \times \mathbf{V}$.

Comme on le voit le flux Φ n'a pas de raison d'être égal à $-k \nabla T$ même lorsque les temps caractéristiques des phénomènes sont grands. Dans ce dernier cas le terme de gauche de cette égalité (92) est égal à zéro et on obtient une expression directe sur le flux qui contient trois contributions *a priori* non nulles. Il est d'ailleurs naturel que le flux dissipé par les actions mécaniques sort (ou entre) du volume dual. Même si ces contributions sont prises en compte dans le bilan de l'énergie le fait d'écrire le flux Φ comme uniquement associé à la diffusion est une approximation.

4.3 Conservation de l'énergie

4.3.1 Conservation de l'énergie totale

La conservation de l'énergie totale, interne et cinétique est déduite du premier principe de la thermodynamique sous la forme de puissances :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} E(t) dv = \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_m \quad (93)$$

où $E = \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right)$ est l'énergie totale et \mathcal{P}_c et \mathcal{P}_m les puissances calorifiques et mécaniques introduites au sein du volume dual par sa surface ou produite directement dans le volume.

La puissance calorifique produite dans le volume dual est représentée par une puissance par unité de volume q et celle qui est introduite par la surface vers le volume est égale à $-\Phi$, le flux de chaleur surfacique. f une force par unité de volume. La puissance mécanique des forces s'exprime par deux termes, l'un correspondant aux forces de pression et l'autre aux forces de viscosité représentées respectivement par p , le potentiel scalaire et ω , le potentiel vecteur. La puissance des forces de pression sera égale à $-p \mathbf{V}$ tandis que la puissance des forces visqueuses sera donnée par le produit vectoriel $\omega \times \mathbf{V}$ où ω représente la contrainte visqueuse.

Le bilan d'énergie totale est ainsi donné par la dérivée particulière suivante :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) dv = \iiint_{\mathcal{V}} q dv - \iint_S \Phi \mathbf{n} ds + \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dv - \iint_S p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_S (\omega \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (94)$$

La puissance des efforts mécaniques interne est opposée à celle sur l'énergie cinétique :

$$\mathcal{P}_{mv}^i = -\mathcal{P}_{cv}^i \quad (95)$$

où \mathcal{P}_{mv}^i est la puissance totale des efforts intérieurs d'origine visqueuse et \mathcal{P}_{cv}^i est la puissance correspondante à l'énergie cinétique des efforts intérieurs. Cette dernière hypothèse sera vérifiée un peu plus loin sur le bilan de l'énergie interne.

En exprimant la dérivée particulière de l'intégrale de volume du premier membre et en utilisant la conservation de la masse on arrive à :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) - q + \nabla \cdot \Phi - \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (p \mathbf{V}) - \nabla \cdot (\omega \times \mathbf{V}) \right) dv = 0 \quad (96)$$

Pour une fonction continue l'intégrale de volume sur \mathcal{V} se réduit à une équation locale appliquée au point P , une des extrémités du segment Γ :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = -\nabla \cdot \Phi - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\omega \times \mathbf{V}) + q \quad (97)$$

A ce stade seul le potentiel scalaire correspondant à l'équilibre mécanique au temps $t + dt$ est introduit dans cette loi de conservation de l'énergie totale. Nous le développerons pour faire apparaître le relèvement de celui-ci ainsi que sa valeur p^o au temps t . On fera clairement apparaître la dissipation mécanique due aux variations de pression dans le milieu.

4.3.2 Conservation de l'énergie cinétique

Pour établir le théorème de l'énergie cinétique reprenons la loi de la dynamique de la MMD écrite sur le segment Γ :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \times \omega + \mathbf{f} \quad (98)$$

et multiplions les deux membres de cette relation par $\mathbf{V} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$, la projection du vecteur vitesse \mathbf{W} . On trouve ainsi

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{V}^2}{dt} = -\mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{V} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (99)$$

mais comme

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{V} \\ \nabla \cdot (p \mathbf{V}) = p \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla p \end{cases} \quad (100)$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{V}^2}{dt} = -\nabla \cdot (p \mathbf{V}) + p \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (101)$$

L'existence de frottements, au sein du volume, sur des particules solides nécessiterait d'introduire un terme de type Darcy et une traînée volumique définie à partir de la perméabilité K .

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{V}^2}{dt} = -\nabla \cdot (p \mathbf{V}) + p \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}^2 \quad (102)$$

4.3.3 Conservation de l'énergie interne

Reprenons les deux lois de conservation de l'énergie totale et de l'énergie cinétique :

$$\begin{cases} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = -\nabla \cdot \Phi - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + q \\ \frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{V}^2}{dt} = -\nabla \cdot (p \mathbf{V}) + p \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}^2 \end{cases} \quad (103)$$

La différence donne accès à la loi de conservation de l'énergie interne :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \Phi + q - p \nabla \cdot \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \frac{\mu}{K} \mathbf{V}^2 \quad (104)$$

Le terme $p \nabla \cdot \mathbf{V}$ représente les effets compressibles réversibles et le dernier terme correspond à la partie irréversible de la transformation de l'énergie mécanique en énergie interne.

En remplaçant $\boldsymbol{\omega}$ par sa valeur $\boldsymbol{\omega} = -\mu \nabla \times \mathbf{V}$ et en introduisant la pression d'équilibre p^o :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \Phi + q - p^o \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{dt}{\chi S} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 + \frac{\mu}{K} \mathbf{V}^2 \quad (105)$$

La conservation de l'énergie en formulation énergie interne peut être remplacée sans difficulté par d'autres formes en enthalpie, entropie ou en température. Dans tous les cas on met en évidence le terme d'échange réversible entre les effets mécaniques et thermiques mais aussi les termes de dissipation de l'énergie mécanique non réversible, tous positifs.

Le terme en $(\nabla \cdot \mathbf{V})^2$ correspond à l'énergie dissipée par atténuation des ondes et le terme en $(\nabla \times \mathbf{V})^2$ est quant à lui lié à la dissipation visqueuse.

4.4 Equations discrètes du flux et de l'énergie

Ecrivons la conservation du flux et la conservation de l'énergie en utilisant l'une des formes de l'énergie, la température :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -\Phi^o - k \nabla T - \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \\ \rho c_v \frac{dT}{dt} = -\frac{\beta T}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \Phi + q + \frac{dt}{\chi_S} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 + \frac{\mu}{K} \mathbf{V}^2 \end{array} \right. \quad (106)$$

L'une n'est pas exclusive de l'autre ; comme pour la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la masse, les deux sont nécessaires. Classiquement le flux Φ n'est pas calculé et celui-ci est simplement remplacé dans la conservation de l'énergie par la loi phénoménologique de Fourier (88).

Une loi peut être établie à partir d'expériences et d'un formalisme qui consiste à écrire une relation entre flux et force à l'aide d'un coefficient adéquat ; c'est le cas de la loi de Fourier et de bien d'autres relations linéaires en physique. La thermodynamique en a fait un principe. Cette approche simpliste ne doit pas faire oublier le caractère complexe des phénomènes physiques. Par exemple les effets de viscosité ne peuvent pas répondre à ce schéma simple, la relation entre pression et vitesse n'est pas proportionnelle sauf pour un milieu poreux. Pour le flux il n'y a pas de raison, *a priori* d'adopter cette stratégie.

Les expériences sont cependant indispensables mais doivent être considérées comme des guides pour l'élaboration de modèles représentatifs de la réalité, si possible, à toutes les échelles de temps. Cette démarche a été adoptée depuis très longtemps pour les effets visqueux, il n'y a pas de raison de ne pas l'appliquer pour les ondes ou pour le flux thermique.

Le système d'équations (106) est ainsi composé d'une loi de conservation vectorielle du flux thermique Φ et d'une loi scalaire de conservation de l'énergie issue du premier principe de la thermodynamique. La température apparaît ici comme un potentiel scalaire qui peut être réactualisé à partir des flux dynamique et thermique représentés par les contributions $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\nabla \cdot \Phi$ sur le volume dual. Il est à noter que l'opérateur $\nabla \cdot$ n'est utilisé que pour la transformation des flux en potentiels alors que les opérateurs ∇ et $\nabla \times$ apparaissent dans le bilan de vecteurs.

5 Propriétés des équations discrètes

5.1 Physique représentée

La physique représentée par l'équation du mouvement discrète intègre déjà un certain nombre de phénomènes observés et modélisés au sein de cette équation : diffusion de la quantité de mouvement, propagation des ondes, dissipation, etc. Des termes sources, éventuellement décomposés préalablement en une partie à divergence nulle et une autre à rotationnel nul viendront compléter des effets annexes comme la gravité, les effets de rotation, les effets capillaires, ...

Les effets dynamiques de la modification de la quantité d'accélération $\rho\boldsymbol{\gamma}$ sont essentiellement dus aux échanges internes au sein de chaque potentiel scalaire et vectoriel :

$$\begin{cases} p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{cases} \quad (107)$$

p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$ sont les accumulateurs et les derniers termes de ces expressions sont les déviateurs des potentiels scalaire et vectoriel. Les ondes qui se propagent à la vitesse du son dans le milieu sont générées par des échanges entre accumulateur et déviateur modifiant ainsi l'accélération instantanée. De même les ondes transversales sont induites par des échanges entre l'accumulateur vectoriel $\boldsymbol{\omega}^o$ et son déviateur.

L'équation du mouvement peut ainsi se décomposer en une suite de termes parfaitement cohérents qui interagissent directement :

$$\underbrace{\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}}_{\text{accélération}} = -\nabla \left(\underbrace{p^o}_{\text{accu-p}} - \underbrace{\frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V}}_{\text{propagation}} + \underbrace{\phi_d}_{\text{dissipation}} \right) + \nabla \times \left(\underbrace{\boldsymbol{\omega}^o}_{\text{accu-r}} - \underbrace{(\mu \nabla \times \mathbf{V})}_{\text{diffusion}} \right) + \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{source}} \quad (108)$$

Le premier membre de cette relation (108) représente la variation de la quantité de mouvement lorsque l'on suit le système au cours de son mouvement de t à $t + dt$. Les termes p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$ sont respectivement les accumulateurs des effets de pression et de rotation ; ils restituent les énergies correspondantes lorsque les contraintes changent.

Le terme $\nabla(dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V})$ est un terme de propagation : il génère les ondes et leurs évolutions au cours du temps. Ces ondes progressent à la vitesse du son définie par la célérité $c = \sqrt{1/\rho \chi_S}$ et sont susceptibles de prendre en compte des phénomènes linéaires ou non linéaires. Les ondes non linéaires et en particulier les ondes de choc sont dues aux variations de la compressibilité isentropique en fonction des caractéristiques locales de l'écoulement notamment la pression. Ce terme est associé à une propagation de compression ou de détente longitudinale à l'exclusion du cisaillement ou de la rotation.

La diffusion de la quantité de mouvement $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$ de l'équation (108) n'est pas une dissipation mais bien une diffusion par viscosité au sein du système Ω . La viscosité de rotation ou de rotation-cisaillement est un scalaire positif défini sur le contour primal est étroitement associée à la circulation du vecteur vitesse sur ce contour. Ce terme permet la propagation d'ondes transversales dans les milieux solides, pour les fluides ces effets sont négligeables. L'interaction entre $\boldsymbol{\omega}^o$ l'accumulation des contraintes de rotation et ce terme de diffusion conduit à la propagation des ondes transversales.

La force volumique \mathbf{f} est un terme source traduisant les forces à distance comme la gravité, les effets de la rotation, les effets capillaires et bien d'autres effets modélisés par un terme dans l'équation du mouvement. Quel que soit son origine ce terme peut être décomposé d'après le théorème de Hodge-Helmholtz en une partie à divergence nulle et une autre à rotationnel nul. En dehors de quelques cas connus comme par exemple la statique des fluides à masse volumique constante où cette force dérive d'un potentiel les deux contributions sont non nulles. Lorsque par exemple la masse volumique dépend d'une autre variable, le terme $\rho \mathbf{g}$ n'a aucune raison de dériver d'un potentiel scalaire.

Un terme source qui s'écrit comme un gradient ne génère aucun mouvement, il s'intègre dans le terme de pression pour en redéfinir une autre qui s'équilibre avec le terme source lui-même. Seul un terme source de type rotationnel engendre un mouvement. Il reste les termes sources qui peuvent être interprétés à la fois comme un rotationnel et un gradient, ce sont les champs harmoniques qui doivent être associés à des conditions aux limites aux bords du domaine. Par exemple un terme source constant est à la fois un gradient et un rotationnel de deux fonctions différentes. Les conditions aux limites pour la décomposition de Hodge-Helmholtz restent encore un problème ouvert qui ne sera pas précisé ici.

L'équation (108) contient d'autres termes liés à la dissipation des ondes et celle due à la viscosité. Comme on l'a vu ces deux contributions viennent modifier les équilibres de pression :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{dt}{\chi S} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 \right) + \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) \quad (109)$$

Ces deux scalaires correspondant aux dissipations sont ici du second ordre pour cette équation ; ils deviennent cependant importants dans certaines situations fortement non linéaires ; ces termes apparaissent au sein de l'équation de l'énergie pour compenser la dégradation de l'énergie cinétique.

5.2 Conditions aux limites

5.2.1 Surface de contact

La séparation formelle introduite comme un des postulats de la Mécanique des Milieux Discrets conduit à écrire les conditions de raccordement de deux portions du même milieu séparées par une interface virtuelle Σ ou la condition à la limite de deux milieux non miscibles en séparant les conditions de pression de celles sur la viscosité.

Considérons le cas de deux milieux non miscibles ① et ② séparés par une interface (Fig. 17). Les conditions aux limites ne s'expriment pas à partir des vitesses mais à partir des potentiels scalaire et vectoriel ; ainsi on écrira : $p_1 = p_2$ et $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$ au point M . Il est à noter ici que l'interface est sur le segment Γ reliant les deux points P et R . La condition sur la pression s'applique ainsi pour chacun de ces points sur l'interface.

Cette notion est essentielle, les conditions aux limites ne portent ni sur la vitesse ni sur ses gradients dans les directions normales ou tangentielles mais sur les potentiels. En un point M de l'interface on écrit l'égalité de ceux-ci :

$$\begin{cases} p_1 = p_2 & \Rightarrow & \frac{dt}{\chi T_1} \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \frac{dt}{\chi T_2} \nabla \cdot \mathbf{V}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 & \Rightarrow & \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2 \end{cases} \quad (110)$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ sont colinéaires et orthogonaux à la facette \mathcal{A} . Leur valeur est calculée par la circulation du vecteur vitesse sur les deux portions de la facette \mathcal{A} séparées par l'interface Γ .

Pour une discontinuité entre deux milieux non miscibles, celle-ci est appelée surface de contact où la vitesse normale à l'interface est la même dans les deux milieux $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. Mais la seule composante portée par l'interface est la composante tangentielle située sur l'interface et la valeur de celle-ci est bien entendu la même pour les deux milieux. Pour un écoulement quelconque la pression est unique sur l'interface et la compressibilité relative des deux milieux est assurée par leurs coefficients de compressibilité.

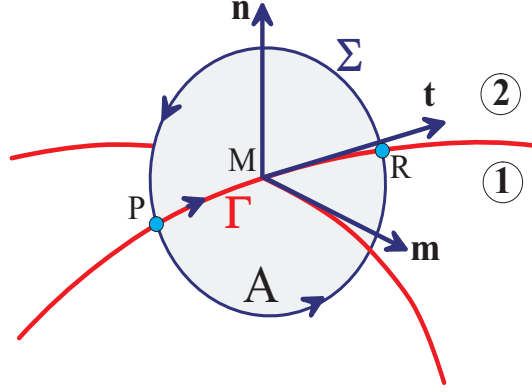


FIGURE 17 – Conditions aux limites entre deux milieux ; le plan \mathcal{A} est défini par le vecteur tangent \mathbf{t} et la normale à l'interface \mathbf{n} .

En Mécanique des Milieux Discrets le segment Γ est une portion de l'interface Σ elle-même. La vitesse \mathbf{V} est unique, c'est la vitesse de l'interface suivant \mathbf{t} . La vitesse normale n'est donc pas représentée. Par contre les actions dynamiques entre les deux fluides sont représentées par la circulation du vecteur vitesse le long de deux contours où leur parcours commun est situé sur l'interface. Le potentiel vecteur des deux côtés de l'interface est le même. Ces vecteurs $\mu_k \nabla \times \mathbf{V}_k$ sont orthogonaux à la facette \mathcal{A} et portés par le vecteur unitaire \mathbf{m} .

Les deux vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{t} sont orthogonaux, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{t} = 0$, et les conditions (110) sont vérifiées quel que soit le plan \mathcal{A} choisi.

Remarque 1 : non seulement la vitesse n'est pas explicitement utilisée dans cette formulation mais les conditions aux limites ne portent pas sur celle-ci ni sur ses composantes. Les actions physiques imposées portent ainsi sur le débit injecté à chaque point P du domaine ou de la surface et sur la rotation imposée par l'intermédiaire du potentiel vecteur.

Remarque 2 : les conditions aux limites (110) sont déjà intégrées dans la formulation (80) de la loi de conservation de la quantité de mouvement. Il n'y a donc pas nécessité de les écrire explicitement, elles sont vérifiées lors de la résolution de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times \left(\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \right) - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f} \quad (111)$$

En effet les conditions aux limites (110) sont implicitement réalisées lors de la résolution de cette équation, elles sont en cohérence avec la formulation de l'équation du mouvement.

Cette formulation permet de séparer les conditions introduites par les effets visqueux classiques de ceux induits par la présence d'un milieu poreux de type $\mu / K \mathbf{V}$. De fait il n'y a pas lieu d'imposer une condition à la limite sur la vitesse suivant \mathbf{t} dans le cas d'un milieu poreux.

5.2.2 Onde de choc

Considérons maintenant un même milieu traversé par une interface Σ (Fig. (18)) le séparant en deux parties ① et ②, c'est le cas d'une onde de choc. Tous les écoulements ou les transferts où apparaît une interface qui est traversée par le flux de matière ou de chaleur entrent dans cette catégorie des ondes de choc. C'est le cas par exemple d'un front de fusion ou de solidification qui est traversé par le flux de chaleur ; dans cette situation les deux milieux ont en plus des propriétés différentes et le flux est utilisé en partie sur l'interface pour fondre ou solidifier une partie du milieu.

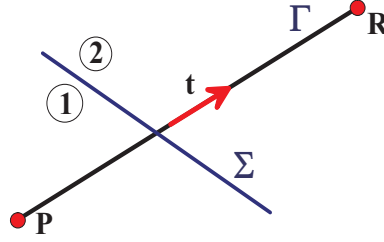


FIGURE 18 – Conditions aux limites pour un choc traversant le segment Γ .

Examinons le cas plus simple d'une onde de choc dans un fluide, la surface Σ est ici traversée intégralement par le même débit de chaque côté de l'interface. Les conditions reliant les quantités de chaque côté de l'interface traduisent les sauts de vitesse, de quantité de mouvement et d'énergie :

$$\begin{cases} \rho_1 \mathbf{D}_1 = \rho_2 \mathbf{D}_2 \\ p_1 + \rho_1 \mathbf{D}_1^2 = p_2 + \rho_2 \mathbf{D}_2^2 \\ h_1 + \frac{1}{2} \mathbf{D}_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} \mathbf{D}_2^2 \end{cases} \quad (112)$$

où $\mathbf{D} = -\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{N}$ est le champ des célérités et $\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_\Sigma$ la différences des vitesses du fluide et de l'interface ; le vecteur \mathbf{N} est normal à l'interface Σ . La fonction de point h est l'enthalpie massique spécifique $h = e + p/\rho$. L'élimination de la célérité \mathbf{D} permet d'obtenir l'équation de Rankine-Hugoniot.

Pour une formulation basée sur la conservation le long d'un contour Γ on a :

$$\begin{cases} \rho_1 \mathbf{V}_1 = \rho_2 \mathbf{V}_2 \\ p_1 + \rho_1 \mathbf{V}_{s1}^2 = p_2 + \rho_2 \mathbf{V}_{s2}^2 \\ h_1 + \frac{1}{2} \mathbf{V}_{s1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} \mathbf{V}_{s2}^2 \end{cases} \quad (113)$$

où \mathbf{V}_s est la vitesse aux extrémités des segments. Nous verrons à la fin de ce chapitre comment l'équation discrète du mouvement tient compte implicitement de ces relations de saut. Notamment le terme $-dt/\chi_T \nabla \cdot \mathbf{V}$, ou $-\gamma dt/\chi_T \nabla \cdot \mathbf{V}$ pour une évolution adiabatique, intégré à l'équation du mouvement permettra de rendre compte de la production d'un choc pour des conditions d'écoulements appropriées.

5.2.3 Conditions de bord

Lorsque le domaine est borné il est nécessaire de fixer des conditions supplémentaires pour obtenir une solution particulière du problème posé. Contrairement à l'usage courant pour un problème dit "bien posé" les conditions ne doivent pas porter sur la vitesse ou chacune de ses composantes ni même sur ses gradients.

Pour être bien posées en Mécanique des Milieux Discrets les conditions aux limites de bord porteront sur les potentiels scalaire et vectoriel p et $\boldsymbol{\omega}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} = p_e = \frac{dt}{\chi_{Te}} D \\ \mu \nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}_e = \mu_e \mathbf{R} \end{array} \right. \quad (114)$$

où p_e est la pression de fluide injecté dans le domaine par le milieu extérieur et $\boldsymbol{\omega}_e$ est le potentiel vecteur imposé par le milieu extérieur sur un segment Γ de bord. On peut relier ces potentiels au débit par unité de surface injecté aux noeuds de bord D et au rotationnel par unité de surface \mathbf{R} imposé au bord.

Il n'y a pas d'autres conditions possibles que celles proposées ici. Toutes les conditions d'intérêt physique ou non pourront être écrites à partir de ces deux conditions (114).

Par exemple la condition de symétrie écrite habituellement $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ deviendra ici $D = 0$, un condition de débit nul au bord. De même une condition d'adhérence sur une paroi solide fixe $\mathbf{V} = 0$ deviendra $\mathbf{R} = (\mu/\mu_e) \nabla \times \mathbf{V}$. Si l'on considère que c'est le même fluide à l'extérieur et à l'intérieur du domaine, l'application du rotationnel dual dans l'opérateur $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$ tenant compte des conditions de signe sur le segment et les surfaces orientées maintiendra bien implicitement la vitesse à zéro sur ce segment de bord. Bien que formellement on puisse imposer $\mu_e \rightarrow \infty$ il sera à noter que le produit $\mu_e \nabla \times \mathbf{V}$ ne peut être nul.

La notion de conditions aux limites sur la vitesse ou ses gradients pour la mécanique des milieux continus est remplacée en mécanique des milieux discrets par la connaissance du voisinage du domaine considéré. Même si on pourra toujours interpréter des conditions sur la vitesse par des conditions sur les potentiels cette dernière approche permet d'éviter la pénalisation forte des conditions de bord, en imposant une vitesse nulle par exemple.

La formulation décrite ici introduit une conformité entre équations vectorielles et conditions aux limites. Elle est tout à fait générale et évite d'écrire des conditions sur les composantes de la vitesse ce qui fige toute interaction avec le potentiel scalaire. Si par exemple les composantes de la vitesse sont nulles au bord, la pression restera égale à zéro car la divergence sera nulle.

5.2.4 Glissement

Lorsque la pression dans un gaz est faible, la dimension caractéristique du domaine considéré d peut devenir d'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules l . De même le glissement sec entre deux solides ou entre un fluide non newtonien et une paroi mène à écrire une condition différente de l'adhérence. Pour représenter ce glissement on insert une couche dont le rotationnel est fixé entre les deux matériaux comme dans l'exemple représenté sur les figures (Fig. 19a, 19b). Le déplacement d'une charge lourde est facilité par des rouleaux insérés entre la charge et le sol. La formalisation de ce problème conduit à insérer une couche de rotationnel entre les deux milieux pour représenter le glissement.

La modélisation du glissement conduira à la détermination du rotationnel imposé $\mathbf{R} = (\mu/\mu_e) \nabla \times \mathbf{V}$ en fonction des propriétés des matériaux des rouleaux utilisés pour ce déplacement. Du caoutchouc ou de l'acier ne donneront pas les mêmes résultats.

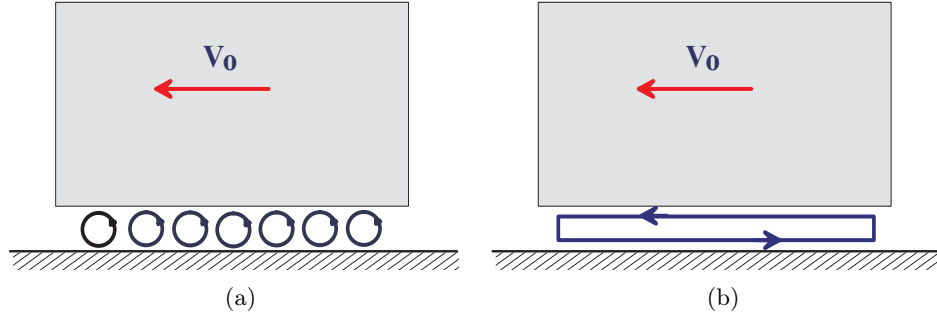


FIGURE 19 – Modélisation des conditions de glissement (a) entre deux solides par une couche de rotationnel (b).

5.2.5 Effets capillaires

En présence d'une interface Σ séparant deux fluides non miscibles une force capillaire doit être prise en compte sur l'interface; cette force de surface s'écrit $\sigma \kappa \mathbf{n} \delta$ où σ est la tension superficielle du couple de fluide, κ est la courbure moyenne, \mathbf{n} la normale à l'interface et δ une fonction de présence de l'interface.

La décomposition de Hodge-Helmholtz permet de séparer l'effet de surpression capillaire des effets de mouvement des fluides générés par le terme en rotationnel :

$$\sigma \kappa \mathbf{n} \delta = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad (115)$$

La condition à la limite généralisée aux forces capillaires s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} p_1 = p_2 + \Phi \\ \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2 + \nabla \times \Psi \end{cases} \quad (116)$$

La fonction Ψ est non nulle chaque fois que la tension de surface $\sigma(T)$ est une fonction de la température non uniforme à l'interface (effet Marangoni) ou que la courbure n'est pas une constante (comme dans le cas d'une sphère par exemple).

Dans le cas statique où les vitesses sont nulles et sans effet Marangoni on retrouve la loi de Laplace :

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (117)$$

où R et R' sont les deux rayons de courbure principaux de l'interface (Fig. 20). Cet écart exprime la surpression due à la courbure de l'interface. Celle-ci est localisée dans le fluide qui a sa surface convexe.

Pour une goutte sphérique de rayon R on obtient :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (118)$$

et pour une bulle, qui comprend deux interfaces, on a :

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} \quad (119)$$

L'intégration d'un terme capillaire $\sigma \kappa \mathbf{n} \delta$ où δ est une fonction de présence, au sein de l'équation du mouvement doit être compatible avec l'approche discrète adoptée. Notamment la normale \mathbf{n} est le vecteur unitaire orthogonal à la véritable interface en chacun de ses points mais les efforts capillaires doivent se projeter sur le vecteur \mathbf{t} de chaque segment intersecté par l'interface. La normale discrète sera donc écrite sous la forme :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} = \mathbf{t} \quad (120)$$

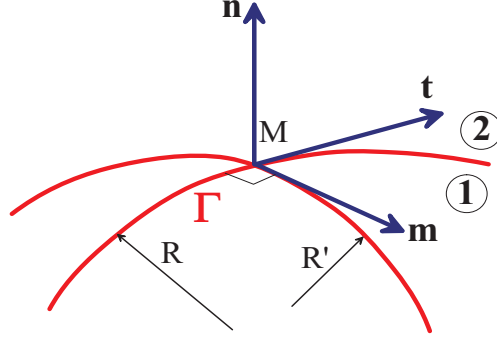


FIGURE 20 – Interface entre deux fluides non miscibles ① et ②; R et R' sont les rayons de courbure principaux.

Ce n'est qu'à la condition d'écrire le terme capillaire sous la forme $\sigma \kappa \mathbf{N} \delta$, que par exemple, une goutte parfaitement sphérique de courbure $\kappa = 2/R$ n'engendrera aucun mouvement. La pression dans la goutte sera alors $p + p_c$ où p_c est la pression capillaire donnée plus haut. Tout autre choix conduira à l'existence d'un rotationnel et donc à un mouvement du fluide déformant l'interface.

Lorsqu'une surface de discontinuité traverse le volume élémentaire il est nécessaire de revoir les lois de conservations en équations aux discontinuités. Pour une interface entre deux fluides immiscibles il est nécessaire d'ajouter un terme dans l'équation du mouvement qui corresponde au saut du terme capillaire.

Avec le modèle présenté, l'intégration du terme capillaire dans l'équation du mouvement devient ainsi complètement cohérente. Le terme volumique s'écrirait ainsi :

$$\mathbf{F}_C = \sigma \kappa \nabla \xi \quad (121)$$

où ξ est la fonction indicatrice de la phase, par exemple $\xi = 1$ dans le fluide ① et $\xi = 0$ dans le fluide ②.

Si σ et κ sont des constantes alors $\sigma \kappa \nabla \xi$ sera un vrai gradient ; dans le cas contraire ce terme se répartira entre un gradient et un rotationnel qui, calculé dans la topologie duale, génèrera un mouvement du fluide.

Lorsque le terme capillaire est intégré dans l'équation du mouvement sans une décomposition préalable en parties à divergence et à rotationnel nuls, c'est celle-ci qui réalise naturellement la décomposition en séparant le terme de pression capillaire qui vient modifier la pression thermodynamique et le terme rotationnel qui modifie l'accélération du fluide sur le segment.

Lorsque la topologie de l'interface réelle Γ coïncide avec le vecteur tangent \mathbf{t} les forces capillaires s'écrivent directement en reprenant la définition de l'un des vecteurs de courbures principales en fonction de l'arc curviligne s :

$$\mathbf{K}_1 = \frac{d \mathbf{t}_1}{d s} = (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla) \mathbf{t}_1 \quad (122)$$

où la courbure principale s'écrit $\kappa_1 = \|\mathbf{K}_1\|$ et de même pour \mathbf{K}_2 . La courbure moyenne est égale à $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$.

Si, de plus, la tension superficielle dépend de la température c'est la variation du produit $\sigma \mathbf{t}$ le long de l'arc qui doit être considérée.

5.3 Pénalisation des potentiels

La pénalisation des inconnues introduite en 1984 par ([5]) et par d'autres auteurs ([2], [9]), dans diverses variantes n'est pas cohérente avec la formulation des équations de conservation. Elle assure le maintien de la variable pénalisée, et c'est son but, mais elle écrase trop fortement tous les autres termes de l'équation.

Comme pour les conditions aux limites il ne faut pas imposer les variables vectorielles, vitesse, flux, etc. Il est plus cohérent de maintenir les potentiels scalaires et vectoriels, p , $\boldsymbol{\omega}$, et T si la conservation de l'énergie est utilisée.

On introduit alors la notion de débit $D = -\nabla \cdot \mathbf{V}_1$ où \mathbf{V}_1 est la vitesse injectée ou extraite d'un point du domaine. De même on définit une rotation par $\mathbf{R} = -\nabla \times \mathbf{V}_2$ qui représente le taux de rotation imposée sur la topologie primale; cette grandeur est aussi la circulation du vecteur \mathbf{V}_2 sur le contour de la facette de la surface primale.

Le système d'équations complété par l'introduction des potentiels scalaire et vectoriel s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} + D \right) + \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \right) - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} + D \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \end{array} \right. \quad (123)$$

Le système (123) permet d'appréhender tout type de problème couplant les écoulements, les ondes, les solides, ... en y ajoutant maintenant la gestion des objets fixes, mobiles en translation ou en rotation, l'injection localisée de matière, etc. L'application des conditions aux limites est aussi directement assurée par le système (123). L'introduction de D et de \mathbf{R} rend le système complètement autonome et ne nécessite pas d'y adjoindre des conditions aux limites. Comme on peut le constater sur l'équation (123) la vitesse n'est pas modifiée ni même imposée de manière forte; elle résulte de l'imposition des potentiels scalaire et vectoriel avec des valeurs D et \mathbf{R} qui sont définis physiquement et n'est pas un simple artifice numérique.

La pénalisation par les potentiels se décline de différentes manières; par exemple dans le cas de surfaces libres séparant deux milieux de propriétés différentes le plus simple est que celles-ci soit composées de segments qui suivent l'interface au cours de leur mouvement. Dans ce cas chaque facette où est définie la viscosité μ appartient à l'un ou à l'autre des milieux et les conditions aux limites (110) s'appliquent directement.

Une autre possibilité offerte par la formulation consiste à superposer une topologie primale non conforme à la géométrie réelle du problème considéré. Il est alors possible de réaliser une homogénéisation des viscosités à l'intérieur d'une même surface primale pour représenter le fait que l'interface physique la traverse.

Le premier cas montré sur la figure (Fig. 21a) correspond à une injection ponctuelle avec un débit D dans un domaine circulaire où la pression à l'extérieur est imposée à zéro. Les lignes de courant sont des lignes radiales issues du point d'injection.

De même il est possible d'imposer un taux de rotation \mathbf{R} constant au sein d'une ou de plusieurs cellules primales pour simuler un objet en rotation. C'est le cas pour l'exemple de la

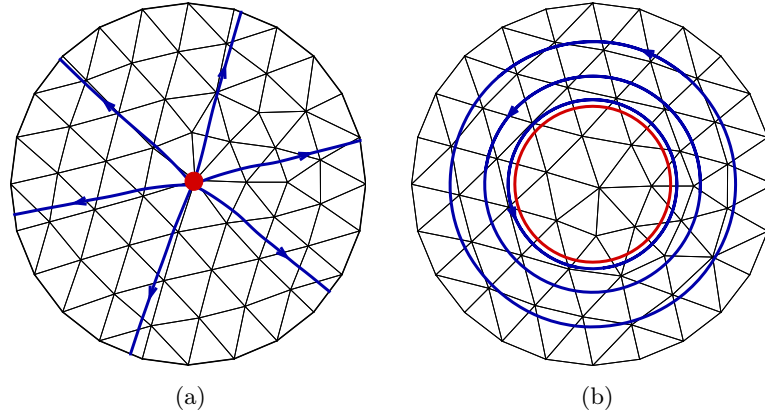


FIGURE 21 – (a) injection de fluide sur un point avec un débit D et (b) écoulement de Couette généré par la rotation du cylindre interne par l'imposition d'un taux de rotation \mathbf{R} ; les cercles orientés sont des lignes de courant.

figure (Fig. 21b) où l'écoulement de Couette est induit par la pénalisation alors que le cylindre extérieur est maintenu à vitesse nulle.

L'exemple suivant montre l'intérêt de ce type de pénalisation; il s'agit du problème de Couette avec deux fluides de viscosité différentes μ_1 et μ_2 . Ces valeurs peuvent être quelconques y compris infinies ou nulles. L'imposition du potentiel vectoriel \mathbf{R} sur la paroi supérieure du domaine physique permet d'obtenir de fait une vitesse V_0 constante. De même pour la paroi inférieure qui est maintenue à une valeur nulle. Le profil de vitesse formé de deux lois linéaires dont les pentes sont inversement proportionnelles au rapport de viscosité correspond à la solution attendue.

La figure (Fig. 22a) montre la solution de la vitesse axiale $u(y)$ dans le cas où l'interface est située à $y = 0.04583$ dans une topologie à base de triangles.

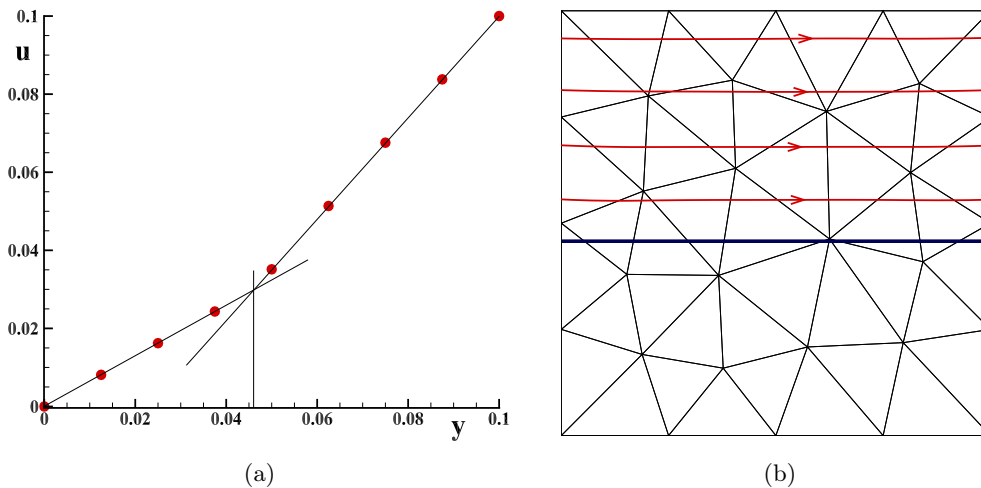


FIGURE 22 – Ecoulement de bi-Couette plan de part et d'autre de l'interface horizontale; (a) vitesse axiale suivant y pour un rapport de viscosité $\mu_2/\mu_1 = 2$, les points représentent la solution exacte et la ligne continue est la solution par pénalisation. La figure (b) représente la solution obtenue pour un grand rapport de viscosité $\mu_2/\mu_1 = 10^6$.

Le champ de vitesse dans le cas où le rapport de viscosité est plus grand, $\mu_2/\mu_1 = 10^6$, est représenté sous forme de lignes de courant sur la figure (Fig. 22b) ; on constate que la solution correspond à la solution théorique y compris pour une topologie qui n'est pas conforme à la géométrie du problème ; dans ce cas la vitesse dans le fluide de la partie inférieure est d'ordre de grandeur de $V_0 \mu_1/\mu_2 \approx 10^{-6}$. Des zones solides seraient ainsi représentés sans difficulté avec une viscosité $\mu_2 \rightarrow \infty$.

En MMD les conditions aux limites sont issues directement de la formulation des équations de conservation, elles en font partie intégrante. Cette cohérence permet de définir tout type de conditions aux limites uniquement à partir des potentiels scalaire et vectoriel indépendamment de l'action sur les composantes de la vitesse ou sur la vitesse elle-même qui reste indéterminée.

5.4 Milieu Continu et Milieu Discret

Les différences entre Mécanique des Milieux Continus et Mécanique des Milieux Discrets sont importantes ; elles portent sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement, les coefficients de viscosité mais aussi sur la conservation de l'énergie. On peut citer les points suivants qui seront développés ensuite :

- quel que soit la formulation utilisée, l'équation de Navier-Stokes et l'équation du mouvement issue de la MMD sont différentes. Toutefois lorsque les propriétés du milieu sont constantes on retrouve la formulation en $\nabla \times \nabla \times$ de Navier-Stokes,
- Le coefficient de viscosité de cisaillement μ ici appelé coefficient de viscosité de rotation est le même dans les deux formulations. Comme les effets de pression et de viscosité ont été séparés d'emblée, le coefficient de viscosité de compression λ n'existe pas en MMD. On définit un autre coefficient basé sur la compressibilité du milieu χ_S parfaitement mesurable pour tous les matériaux,
- la conservation de l'énergie est associée à une autre loi, la conservation du flux,
- la dissipation de l'énergie sont différentes ; en MMD ce terme est positif et les coefficients sont strictement positifs. L'inégalité de Clausius-Duhem est bien sûr vérifiée mais la production d'entropie est ici parfaitement déterminée.

5.4.1 Différences avec l'équation de Navier-Stokes

L'équation du mouvement issue du formalisme de la mécanique des milieux discrets a été établie à partir de la loi de Newton sur la base d'interprétations différentes de la relation linéaire entre contrainte et vitesse ou déplacement. L'équation est vectorielle et ne pas fait appel à la notion de tenseur. Elle conduit par ailleurs à une séparation formelle entre effets de pression et effets de viscosité correspondant à la décomposition de Hodge-Helmholtz.

La question examinée ici concerne la validité de l'approche proposée en mécanique des milieux discrets. L'analyse est compliquée du fait que l'équation de Navier-Stokes est accompagnée d'une autre loi, la conservation de la masse, mais aussi d'une loi d'état liant certaines variables scalaires, pression, masse volumique, température.

Si l'on reprend l'équation de Navier-Stokes sous sa forme la plus classique :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})) + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{f} \quad (124)$$

on remarque que le traitement des effets de pression n'est pas au même niveau de celui des effets visqueux. La pression n'existant pas dans l'équation de continuité il est nécessaire de se fixer la forme de la relation $p = f(\rho, T)$. La résolution séquentielle de ces trois équations permet en effet d'obtenir les inconnues principales, vitesse et pression.

Sur ce point la mécanique des milieux discrets considère que les effets de pression doivent être modélisés au même titre que les effets visqueux. La mise en évidence du terme $dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ induit d'emblée le caractère hyperbolique de la loi du mouvement et précise la notion de diffusion directionnelle contenue implicitement ici pour représenter la propagation des ondes dans les milieux. L'équation de Navier-Stokes associée à l'hypothèse de Stokes $\lambda = -2/3 \mu$ conduit à sous-évaluer cette notion de propagation attribuée à la viscosité.

Afin de rentrer dans les détails de la comparaison entre MMC et MMD il est possible de rapprocher les deux formes de l'équation du mouvement pour un fluide newtonien en commençant par exprimer le terme de viscosité ; reprenons l'expression de la divergence du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (-p \mathbf{I} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D}) \\
&= \nabla (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + 2 \mu \nabla \cdot \mathbf{D} + 2 \nabla \mu \cdot \mathbf{D} \\
&= -\nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) \\
&= -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) \\
&= -\nabla p + (\lambda + 2 \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) \\
&= -\nabla (p - (\lambda + 2 \mu) \nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})
\end{aligned}$$

La loi de la dynamique discrète peut ainsi être comparée à l'équation de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla (p - (\lambda + 2 \mu) \nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) \\ \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \end{array} \right. \quad (125)$$

Pour des viscosités λ et μ constantes (ou constantes par phases séparées) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla (p - (\lambda + 2 \mu) \nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} \\ \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (126)$$

on trouve des formulations proches notamment l'expression du terme de viscosité qui est identique.

A propriétés constantes la loi de la conservation de la quantité de mouvement en MMC et MMD peuvent être strictement identiques à condition de redéfinir le coefficient de viscosité de compression λ en fonction du coefficient de compressibilité par la relation $dt/\chi_S = (\lambda + 2 \mu)$. Toutefois rien ne permet d'identifier la viscosité de compression à cette expression d'autant qu'elle est liée à μ par l'hypothèse de Stokes.

En MMD dt/χ_S et μ sont deux coefficients positifs indépendants. En élasticité linéaire λ_e et μ_e , les coefficients de Lamé parfaitement mesurables, sont reliés au module d'Young et au coefficient de Poisson mais permettent aussi de définir les célérités transversales et longitudinales :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda_e + 2 \mu_e}{\rho}} \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}} \quad (127)$$

Pour les fluides la propagation des ondes transversales sont négligeables, la vitesse du son prend quant à elle sa forme classique $c = \sqrt{dt/\rho \chi_S}$. La seule différence entre fluide et solide porte sur la notion de temps introduite entre déplacement et vitesse. La MMD permet de reconcilier

la modélisation et le comportement des deux milieux. L'équation discrète du mouvement et l'équation de Navier-Stokes diffèrent au moins sur ce point très important.

De nombreux auteurs ont remis en cause la validité de l'hypothèse de Stokes (voir [15] par exemple) et déjà Landau [21] introduisait un temps caractéristique pour donner une expression du second coefficient de viscosité qui dépendait de la fréquence. Ce problème reste ouvert à l'heure actuelle et de nombreux auteurs mesurent, souvent avec des méthodes acoustiques, l'atténuation du son dans les milieux pour en tirer la viscosité de compression λ ([19], [26]). Leurs valeurs sont toujours supérieures à celle de la viscosité dynamique μ mais le rapport est souvent de quelques unités.

Si l'on compare la viscosité de cisaillement/rotation de l'eau $\mu \approx 10^{-3}$ à dt/χ_T avec $dt = 10^{-3}$ par exemple, le rapport est de l'ordre de 10^9 ! Le même calcul pour de l'air conduit au même résultat. Pour les fluides le coefficient de viscosité de compression λ , même s'il existait, n'aurait aucune influence sur la propagation et sur l'atténuation des ondes.

La question suivante porte sur l'équation de Navier-Stokes : pourquoi cette équation est-elle aussi représentative des phénomènes observés pour les fluides newtoniens dans des applications très variées ?

Tout d'abord les effets visqueux correspondent bien aux phénomènes observés sur des expériences de référence. Le fait que λ n'ait pas de valeur bien définie autre que l'inégalité $3\lambda + 2\mu \geq 0$ est compensé par les autres équations, conservation de la masse et loi d'état. L'utilisation de ces relations complémentaires permet de rétablir la conservation de la masse et le calcul de la pression.

En MMD l'équation du mouvement est autonome, l'équation de conservation de la masse ne sert qu'à calculer ρ et la loi d'état est inutile en tant que telle. Rien n'assure d'ailleurs qu'en tout point et à chaque instant que la loi d'état soit vérifiée pour les phénomènes hors d'équilibre. La pression est ensuite réactualisée à l'aide de la divergence de la vitesse locale qui est une mesure des compressions et détentes instantanées.

En conclusion l'équation de Navier-Stokes et l'équation MMD discrète donnent des solutions très proches à propriétés constantes dans les cas d'intérêt pratiques.

5.4.2 Dissipation

En reprenant le formalisme classique MMC la dissipation de l'énergie mécanique en chaleur déduite de la production du travail des forces calculées à partir du tenseur de Cauchy s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V} \, dv \quad (128)$$

La fonction de dissipation locale prend la forme

$$\phi = \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D} \right) : \nabla \mathbf{V} \quad (129)$$

Le produit doublement contracté [4] de \mathbf{I} par $\nabla \mathbf{V}$ donne la divergence de la vitesse :

$$\phi = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) : \nabla \mathbf{V} \quad (130)$$

soit

$$\phi = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu \|\nabla \mathbf{V}\|^2 + \mu \nabla^t \mathbf{V} : \nabla \mathbf{V} \quad (131)$$

Comme $\|\nabla \mathbf{V}\|^2 = (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + (\nabla \times \mathbf{V})^2$

on a

$$\phi = (\lambda + \mu) (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 + \mu \nabla^t \mathbf{V} : \nabla \mathbf{V} \quad (132)$$

comme on a aussi $\nabla^t \mathbf{V} : \nabla \mathbf{V} = (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - 2 \mathbf{I}_2$

$$\phi = (\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 - 2\mu \mathbf{I}_2 \quad (133)$$

où \mathbf{I}_2 est le second invariant élémentaire du tenseur du second ordre $\nabla \mathbf{V}$:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \left[(tr(\nabla \mathbf{V}))^2 - \nabla \mathbf{V} : \nabla \mathbf{V} \right] = \frac{1}{2} \left[(tr(\nabla \mathbf{V}))^2 - tr((\nabla \mathbf{V})^2) \right] \quad (134)$$

\mathbf{I}_2 ne comporte que des produits de dérivées premières. En repère cartésien orthonormé on trouve

$$-2 \mathbf{I}_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (135)$$

On remarque que le terme de dissipation visqueuse en 1D est réduit aux effets de compressibilité puisque \mathbf{I}_2 est nul. Nous examinerons les cas de dégénérescences des équations générales un peu plus loin.

Si les équations du mouvement en MMC et en MMD sont similaires dans certaines conditions on constate une différence notable pour l'expression de la fonction de dissipation.

5.4.3 Cas des mouvements rigidifiants

Le cas du mouvement rigidifiant en rotation tel que $\mathbf{V} = \Omega r = Cte$ est emblématique des difficultés de la modélisation des effets visqueux en fluide et en solide. En effet, quelle que soit la formulation retenue, la quantité d'accélération associée à ce mouvement est nulle. Comme le mouvement de translation uniforme, l'équation de la quantité de mouvement ne fait apparaître aucune contribution du mouvement de rotation en bloc, l'opérateur rotationnel fait bien disparaître le terme correspondant.

Par contre la fonction de dissipation contient un terme en $\mu (\nabla \times \mathbf{V})^2$ et comme $\nabla \times \mathbf{V} = Cte = a$ la dissipation d'un écoulement de rotation en bloc n'est pas nulle ; ce qui est absurde !

Il est alors utile de revisiter le calcul de la fonction de dissipation en apportant une attention particulière au terme d'accumulation du potentiel vecteur, ω^o .

Reprenons pour cela l'équation de l'énergie totale (97) et la première relation du système (100) ; en explicitant le vecteur potentiel sous la forme $\omega = (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V})$ il vient :

$$\nabla \cdot (\omega \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \times \omega - (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \cdot \nabla \times \mathbf{V} \quad (136)$$

la conservation de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{V}^2}{dt} = -\nabla \cdot (p \mathbf{V}) + p \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\omega \times \mathbf{V}) + (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (137)$$

En retranchant l'expression de l'énergie cinétique de celle de l'énergie totale on trouve l'expression de l'énergie interne :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \Phi + q - p^o \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{dt}{\chi S} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \frac{\mu}{K} \mathbf{V}^2 \quad (138)$$

Pour l'écoulement de rotation l'accumulateur doit être égal à $\omega^o = \mu \nabla \times \mathbf{V} = Cte$ afin que la dissipation mécanique par viscosité soit nulle. L'interprétation physique de ce résultat n'est

pas simple. Pour un solide l'accumulateur existe et, une éventuelle contrainte seuil dépassée, la valeur de ω^o reste constante, celui-ci tourne en bloc et la dissipation est nulle.

Pour un fluide l'explication est plus complexe ; imaginons par exemple une cavité cylindrique contenant de l'eau initialement au repos qui est mise en rotation par la surface cylindrique dont on maintient la vitesse de rotation constante. Sur de très grandes constantes de temps l'eau est mise en rotation en bloc. Lors de la mise en rotation le cisaillement n'est pas nul et la dissipation définie par le rotationnel n'est pas nulle non plus. Lorsque la rotation en bloc est pratiquement atteinte la dissipation doit tendre vers zéro ; il est donc nécessaire que ω^o tende vers $\omega^o = \mu \nabla \times \mathbf{V}$. Théoriquement l'état de rotation en bloc ne peut être atteint que pour un temps infini pour lequel un fluide se comporterait dans cette situation comme un solide. On peut donc dire qu'à petites constantes de temps un fluide n'accumule pas les contraintes de cisaillement mais qu'à très grandes constantes de temps, par suite des ré-arrangements à l'échelle moléculaire, ce même fluide accumule la contrainte nécessaire pour ne plus dissiper.

Certains paradoxes de la mécanique des fluides pourraient ainsi être levés si on considère l'existence du potentiel d'accumulation ω^o pour un fluide ; c'est le cas du paradoxe de Stokes où la solution dans un plan de l'écoulement autour d'un objet fixe dans un domaine ouvert ne dégénère pas vers la solution d'Oseen, une vitesse constante à l'infini.

5.4.4 Un exemple de dissipation de l'énergie

La conservation de l'énergie totale d'un système peut être utilisée pour montrer comment ses différentes composantes, énergie potentielle, énergie cinétique, énergie interne se transfèrent entre elles pour assurer la conservation de l'ensemble. Un système isolé de l'extérieur verra donc son énergie potentielle être minimisée au profit de l'énergie cinétique qui, si le milieu est visqueux, se dissipera en énergie thermique.

Un exemple favorable pour montrer que ces transferts conservent l'énergie totale est celui pour lequel l'énergie cinétique initiale et finale est nulle. C'est le cas pour un liquide de masse volumique variable contenu dans une cavité en présence de la gravité. Le fluide lourd descend vers le fond et se stabilise vers une solution à vitesse nulle.

On considère une cavité carrée de largeur $a = 0.1$ contenant un fluide de masse volumique variable de $\rho_{max} = 1000$ à $\rho_{min} = 900$ dans un champ de gravité terrestre \mathbf{g} . Initialement le gradient linéaire est horizontal (Fig. 23a) puis bascule et tend vers un état stationnaire (Fig. 23b) à vitesse nulle où le gradient de masse volumique est vertical. Entre les deux états l'écoulement est très complexe et de nombreux tourbillons interagissent en produisant localement des gradients de vitesse très importants.

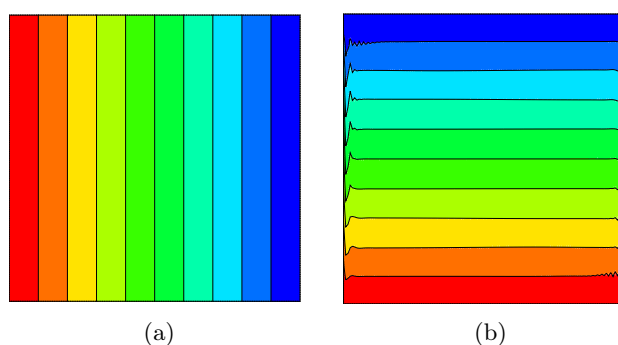


FIGURE 23 – Cas test de l'inversion de gradient : une variation linéaire de masse volumique entre $\rho_{max} = 1000$ et $\rho_{min} = 900$ est imposée initialement (a) et évolue vers une solution à $t = 500$ s (b) de manière à minimiser l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle

$$E_p = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(x, z) g z \, dv \quad (139)$$

est calculée à l'instant initial et à convergence.

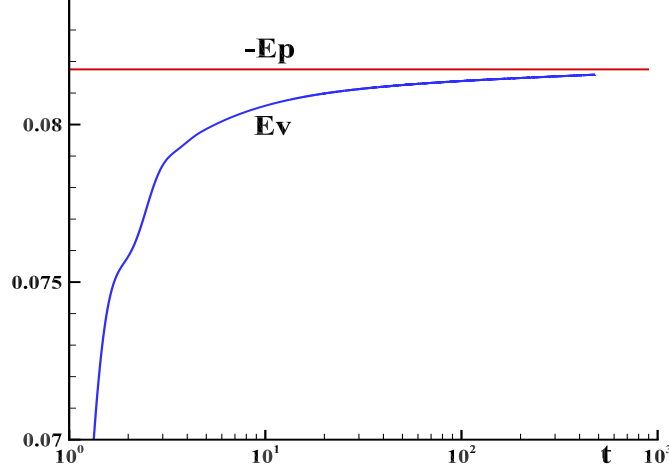


FIGURE 24 – Partie en rotationnel de la fonction de dissipation pour $\mu = 1$.

On trouve que la variation d'énergie potentielle entre l'instant initial et final est égale à

$$\delta E_p = -\frac{50}{6} a^3 g = 0.08175 J \quad (140)$$

On peut calculer la dissipation totale pour la formulation MMD en intégrant l'énergie cinétique au cours du temps :

$$E_v = \int_0^\infty \iiint_{\mathcal{V}} \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 \, dv \, dt \quad (141)$$

Comme l'énergie cinétique au cours du temps est dissipée par les effets visqueux elle est aussi égale à l'énergie interne gagnée par le fluide.

La figure (Fig. 24) montre les évolutions de E_v au cours du temps. On observe que l'énergie dissipée augmente au cours du temps et tend vers la différence de l'énergie potentielle entre les états final et initial représentée par une horizontale.

Cet exemple illustre simplement le transfert des énergies dans un système isolé mais n'a pas de vocation à être une démonstration.

5.5 Décomposition de Hodge-Helmholtz

La Décomposition de Hodge-Helmholtz (HHD) et sa version discrète, la Décomposition de Hodge-Helmholtz Discrète (DHHD) permet de décomposer un vecteur de manière unique en trois champs sous la forme $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Phi + \mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_h = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi + \mathbf{V}_h$ où Φ est le potentiel scalaire et Ψ est le potentiel vecteur. Le champ \mathbf{V}_h est à la fois à divergence et à rotationnel nuls. Il s'écrit $\mathbf{V}_h = \nabla\Phi_h = \nabla \times \Psi_h$. Une revue très complète sur la décomposition de Helmholtz-Hodge a été réalisée par H. Bathia et al.[7]. Une approche numérique basée sur des principes équivalents est présentée par ([13]).

La solution sur les potentiels dépend bien sûr des conditions aux limites au bord du domaine. Plusieurs méthodes de décomposition orthogonales d'un champ vectoriel sont possibles, l'une d'entre-elles est particulièrement efficace (Ph. Angot et al.[3]) car elle est basée sur décomposition vectorielle similaire à l'équation du mouvement elle-même [10], [14].

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est en effet un extracteur des parties à rotationnel et à divergence nuls. Un terme source quelconque \mathbf{F} est décomposé naturellement en $\nabla\Phi$ et $\nabla \times \Psi$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\Phi + \mathbf{F}_\Psi = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad (142)$$

On admet toujours ici que la viscosité est constante par face. Le terme \mathbf{V}_h n'est pas retenu car il s'intègre dans l'un des deux autres.

Dans l'équation du mouvement le potentiel scalaire p est bien sûr la pression thermodynamique. Pour un milieu fluide c'est elle qui accumule les contraintes de toute nature. Le second terme en $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$ assure le transfert de quantité de mouvement dans le fluide visqueux.

Considérons une fonction scalaire $\Phi(\mathbf{x})$ et appliquons l'opérateur gradient pour obtenir un terme source volumique $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ ajouté purement et simplement à l'équation du mouvement et ce terme est directement associé au ∇p existant. La solution en vitesse n'en est pas affectée mais la pression obtenue après résolution devient p^* tel que

$$p^* = p + \Phi \quad (143)$$

Cette nouvelle pression ne correspond évidemment pas à la pression thermodynamique. On peut vérifier ainsi que l'ajout du gradient d'une fonction quelconque ne modifie pas la solution en vitesse de l'équation du mouvement.

Corrélativement on peut considérer que le potentiel vectoriel tel que $\mathbf{V}_\Psi = \nabla \times \Psi$ est le véritable moteur du mouvement.

Appliquons maintenant la décomposition de Hodge-Helmholtz directement à l'équation du mouvement pour une formulation discrète :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} \quad (144)$$

Symboliquement cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\rho \gamma = -\nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad (145)$$

On retrouve alors de manière condensée, ici pour l'unité de volume, la forme originelle de la loi fondamentale de la dynamique pour un point matériel

$$\rho \gamma = \mathbf{F} \quad (146)$$

Pour le milieu discret l'équation s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} \quad (147)$$

Cette dernière forme de l'équation discrète du mouvement va permettre une analyse directe des différentes dégénérescences significatives et d'aboutir à des formes simplifiées de celle-ci. Il ne sera pas nécessaire de recourir à des méthodes de développements asymptotiques, à une analyse adimensionnelle ou encore à une analyse en ordres de grandeurs pour obtenir des formes simplifiées de l'équation du mouvement.

5.6 Approximations

5.6.1 Loi de Bernoulli

La première loi de Bernoulli a été établie sur la base des hypothèses suivantes :

- l'écoulement le long d'une ligne de courant est stationnaire,
- le fluide est parfait,
- les forces de volume dérivent d'un potentiel.

Examinons ce que devient l'équation du mouvement discrète si on la restreint à une ligne de courant.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} + \mathbf{f} \quad (148)$$

Cette équation permet de réduire l'espace à une dimension ; comme celle-ci a été établie sur un segment Γ elle est directement adaptée à cette restriction. Décomposons la force visqueuse \mathbf{f} en une partie à divergence nulle et une autre à rotationnel nul, $\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$.

Le terme de Darcy conduit à un écoulement unidirectionnel sur le segment Γ ; la vitesse \mathbf{V} générée dépend donc directement d'un potentiel scalaire ψ tel que $\nabla \psi = -\mu/K \mathbf{V}$.

Sur le segment 1D le rotationnel n'est pas défini et l'équation devient :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \left(p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \psi + \Phi \right) \quad (149)$$

Pour un écoulement stationnaire la relation devient

$$p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} + \psi + \Phi = Cte \quad (150)$$

On peut constater la généralité de la loi discrète (150), la seule hypothèse concerne la stationnarité de l'écoulement.

On retrouve les termes p , $\rho \mathbf{V}^2/2$ et $\Phi = \rho g z$ de la loi classique mais aussi un terme $dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ exprimant les effets de compression alors que la loi de Bernoulli généralisée fait apparaître l'énergie interne. Il est à noter que celle loi peut générer un choc en liant le coefficient de compressibilité à la variation de la pression p^o le long du contour. Il faudrait y ajouter alors le terme de dissipation des ondes présent dans l'équation (109).

5.6.2 Ecoulement irrotationnel

D'après la décomposition de Hodge-Helmholtz d'un champ de vecteurs, l'irrotationnalité de l'écoulement permet d'exprimer la vitesse à l'aide du seul potentiel scalaire $\mathbf{V} = \nabla \Phi$ puisque $\nabla \times \nabla \Phi = 0$.

Avec $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ on obtient une équation du mouvement qui s'écrit :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \left(p^o + \frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (151)$$

La partie en rotationnel du terme du terme d'inertie disparaît ainsi que le terme visqueux. Seuls persistent les effets de compressibilité.

Nous citerons deux théorèmes importants :

Théorème de Kelvin : *le flux du vecteur tourbillon, à travers une surface qui ne traverse aucune discontinuité et que l'on suit dans son mouvement, est constant au cours du temps pour un écoulement de fluide parfait barotrope.*

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds = Cte \quad (152)$$

Le théorème de Lagrange est un corollaire du théorème de Kelvin :

Théorème de Lagrange : *si un écoulement de fluide parfait barotrope est irrotationnel à un instant donné il le reste à tout instant.*

Il faut ajouter que l'écoulement ne doit pas posséder de singularité à l'infini qui induirait un rotationnel non nul. Ainsi pour un domaine ouvert sans singularité y compris à l'infini, un écoulement de fluide parfait est irrotationnel.

Pour un écoulement irrotationnel bidimensionnel et incompressible de fluide parfait la seule fonction holomorphe dans tout le plan complexe est une constante en l'absence de singularité.

De manière analogue le théorème de Hodge-Helmholtz pour un domaine borné traduit que tout écoulement à divergence et à rotationnel nul est une constante.

Remarque : Le théorème de Stokes ne peut être appliqué que pour une surface qui n'est pas traversée par une ligne de discontinuité. Si c'est le cas la circulation du vecteur vitesse entourant la discontinuité n'est pas nulle en général. Il convient donc d'utiliser le théorème de Stokes avec précaution. Dans les cas d'intérêt pratiques, pour des domaines bornés munis de conditions aux limites physiques la valeur de la circulation sera nulle pour un écoulement de fluide parfait.

5.6.3 Fluide parfait

La notion de fluide parfait est plutôt complexe à définir ; si l'on admet que celle-ci est liée à la dissipation des ondes et à celle des effets visqueux on retrouve la fonction de dissipation ϕ :

$$\phi = \frac{dt}{\chi_S} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu (\nabla \times \mathbf{V})^2 \quad (153)$$

Examinons le second terme : la présence de rotationnel au sein d'une fluide non visqueux est possible à condition qu'il existe déjà où qu'il soit produit par une autre source que celle des effets visqueux. Ainsi la condition pour annuler ce terme est de fixer $\mu = 0$. Il peut alors exister des écoulements en rotation à grandes échelles qui sont peu sensibles aux effets visqueux comme les écoulements atmosphériques au-dessus de la couche limite atmosphérique. Les tourbillons interagissent, se transforment, se scindent, s'allongent mais leur énergie cinétique est conservée.

Le premier terme pose plus de difficulté car on ne peut imaginer de situation où dt soit nul ou que χ_S soit infini. Par ailleurs pour obtenir l'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ pour dt fixé il faut que χ_S tende vers zéro. Le rapport des deux quantités est alors indéterminé et on ne peut pas trancher. Les effets de compressibilité ne sont donc pas éliminés ; le terme $dt/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ traduisant une dissipation de l'énergie de pression comme par exemple l'atténuation du son pour les matériaux dont la célérité du son n'est pas infinie, c'est à dire tous.

La notion de fluide parfait sera donc réduite à l'annulation de la viscosité de rotation μ . Les

équations d'Euler dans l'hypothèse de fluide parfait s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - dt \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \\ T = T^o - \frac{dt \beta T}{\rho c_v \chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{dt^2}{\rho c_v \chi_S} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \end{array} \right. \quad (154)$$

Il est à noter que le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants γ correspond à une évolution isentropique c'est à dire où l'augmentation de l'énergie interne contribue à augmenter la pression.

On constate que la première équation du système (154) est autonome, la pression, la masse volumique et l'énergie interne (ou la température) sont remontées à partir de la divergence de la vitesse.

La remontée de la température (ou de l'énergie interne) est due à deux termes, le premier correspond à une contribution réversible de la variation d'énergie et le second à une contribution irréversible due à la dissipation de l'énergie mécanique. Il est remarquable que ces deux termes s'expriment en fonction de $\nabla \cdot \mathbf{V}$.

La dérivée matérielle permet de restituer la vitesse au temps $t + dt$ en exprimant le terme d'inertie sous la forme classique $\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ ou par la forme $-\rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla(\rho \mathbf{V}^2 / 2)$.

5.6.4 Ecoulement incompressible

L'incompressibilité de l'écoulement est une approximation classique assez drastique qui suppose que le taux de dilatation volumique du fluide nul ; le fluide peut se déformer mais chaque élément garde son volume au cours du mouvement.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (155)$$

Adopter l'approximation de divergence nulle revient à dire que la masse volumique reste constante tout au long d'une trajectoire. Il est à noter que cette expression n'implique en rien que la masse volumique soit une constante. Cette contrainte conduit à des conditions sur les coefficients thermodynamiques et sur les dérivées matérielles de la pression et de la température.

En exprimant les dérivées partielles de la masse volumique par rapport à la pression et à la température :

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} \quad (156)$$

on trouve :

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (157)$$

soit

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\chi_S \frac{dp}{dt} + \beta \frac{dT}{dt} \quad (158)$$

Si un écoulement est à divergence nulle, cela peut être dû à plusieurs effets différents :

- L'écoulement est à pression et à température constantes le long d'une ligne de courant ; cela ne veut évidemment pas dire que la pression et la température soient uniformes sur Ω .
- Le fluide est à compressibilité nulle et à dilatation nulle.

Dans tous les cas les deux termes du second membre de la relation précédente doivent être égaux à zéro ou le second membre nul par compensation ce qui serait totalement fortuit. On remarque que tout écoulement non isotherme conduit à une divergence qui peut être importante même pour des gradients de température faibles.

Annuler simplement le terme en $\nabla \cdot \mathbf{V}$ dans l'équation du mouvement serait bien sûr une erreur puisque ce résultat souhaité n'est pas réalisé sans l'application de cette contrainte. Comme on l'a déjà vu le produit

$$\frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (159)$$

est d'ordre de grandeur des autres termes de l'équation du mouvement. Pour un temps caractéristique dt fixé, obtenir $\nabla \cdot \mathbf{V} \rightarrow 0$ revient à imposer un coefficient de compressibilité qui tend vers zéro.

La pression à l'instant $t + dt$ sera obtenu par la remontée suivante :

$$p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (160)$$

où p^o est la pression d'équilibre mécanique à l'instant t . Des valeurs très faibles de la compressibilité conduiront à l'écoulement incompressible recherché.

Notons que tout fluide dont la propriété de compressibilité χ_S est connue, y compris pour des valeurs très faibles de celui-ci comme les liquides, se comporte comme un milieu compressible à très faible constante de temps. C'est ainsi que l'eau propage les ondes acoustiques à une célérité qui n'est que trois à quatre fois plus grande que celle de l'air.

5.7 Viscoélasticité linéaire

Cette partie n'est qu'une introduction à l'étude de comportements rhéologiques de fluides complexes et à leur modélisation. Elle vise à montrer que la formulation des équations de la Mécanique des Milieux Discrets ouvre des perspectives importantes pour représenter les phénomènes d'écoulements de fluides non newtoniens.

Reprenons le système d'équations en termes de vitesse \mathbf{V} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - dt \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o + \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (161)$$

Dans le cas où le déplacement du solide \mathbf{U} serait recherché celui-ci serait calculé par la relation $\mathbf{U} = dt \mathbf{V}$ à l'issue de l'évolution du système de t à $t + dt$.

Afin de vérifier que la formulation MMD est bien cohérente avec les équations de Navier pour les milieux solides reprenons la formulation classique de la divergence du tenseur des taux

de déformations dont on obtient différentes formes toutes absolument équivalentes. Afin de la comparer au nouveau modèle nous choisirons la plus adaptée :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\lambda_e + 2 \mu_e) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu_e \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \lambda_e + \nabla \mu_e \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U}) \quad (162)$$

où λ_e et μ_e sont les coefficients de viscosité de Lamé.

A partir du tenseur de Cauchy il est alors aisé d'en déduire l'équation de l'élasticité linéaire pour un milieu solide isotrope appelée équation de Navier-Cauchy :

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = (\lambda_e + 2 \mu_e) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu_e \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \lambda_e + \nabla \mu_e \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U}) + \mathbf{f} \quad (163)$$

Si les coefficients élastiques sont constants la divergence du tenseur de contrainte devient :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\lambda_e + 2 \mu_e) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu_e \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} \quad (164)$$

L'équation de Navier et celle issue du modèle développé en MMD peuvent être comparées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = dt (\lambda_e + 2 \mu_e) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu_e dt \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} \\ \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \end{array} \right. \quad (165)$$

On constate que l'identification des coefficients conduit au coefficient de compressibilité

$$\frac{1}{\chi_S} = (\lambda_e + 2 \mu_e) \quad (166)$$

La théorie MMD montre la séparation complète entre effets de cisaillement et effets de compression. Les deux seuls coefficients mesurables qui apparaissent sont χ_S et μ avec

$$\frac{1}{\chi_S} \geq 0; \quad \mu \geq 0 \quad (167)$$

En effet un milieu ne peut se dilater sous l'influence d'une compression et de même celui-ci n'accélère pas un cisaillement.

Les coefficients χ_S et μ ont exactement la même définition en fluide et en solide, notamment $\chi_S \approx \chi_T$ sera le coefficient de compressibilité du solide. La différence porte sur les notions de déplacement et de vitesse. L'accumulation du cisaillement $\boldsymbol{\omega}^o$ est négligeable pour les fluides tout au moins dans des situations classiques d'utilisation de l'équation du mouvement.

Le nouveau système d'équations va maintenant être appliqué aux ondes élastiques dans un matériau sollicité en cisaillement ou en compression. Les deux équations des ondes correspondantes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} = c_T^2 \frac{d^2 u}{dy^2} \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = c_L^2 \frac{d^2 v}{dy^2} \end{array} \right. \quad (168)$$

où u et v sont les déplacements en x pour le cisaillement et en y pour la compression.

c_L et c_T sont appelées célérités longitudinales et transversales :

$$\begin{cases} c_L = \sqrt{\frac{\lambda_e + 2\mu_e}{\rho}} \\ c_T = \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}} \end{cases} \quad (169)$$

L'unification entre formulations fluide et solide bien naturelle puisqu'il s'agit de la même mécanique trouve ici une cohérence et ouvre des perspectives intéressantes sur le couplage fluide-solide.

5.7.1 Compression pure

Le cas test correspond à un matériau solide de hauteur L sollicité en compression en maintenant une pression constante sur la face supérieure pendant quelques instants puis la contrainte est ensuite relâchée et le milieu oscille autour de sa position initiale. On mesure la célérité égale à $c_L = 2L/T$ sur la paroi inférieure où T est la période des oscillations [20].

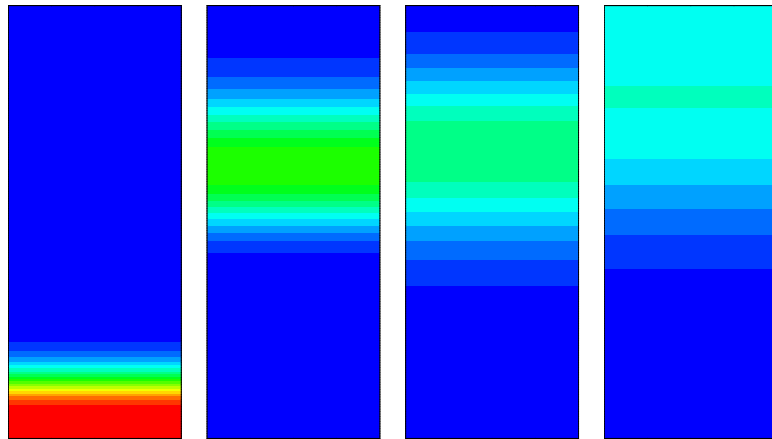


FIGURE 25 – Evolution du déplacement axial dans les premiers instants dans le solide.

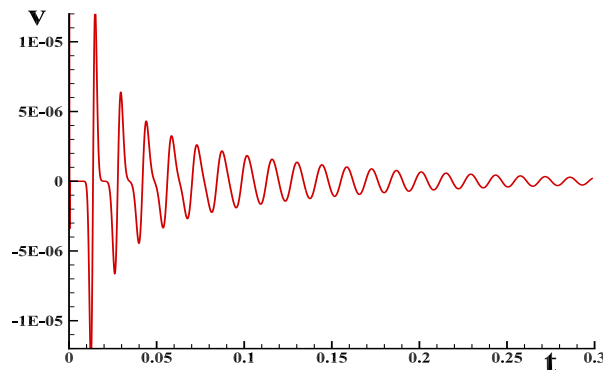


FIGURE 26 – Evolution du déplacement vertical au cours du temps.

La figure (Fig. 25) montre quelques instantanés du déplacement de l'onde de pression dans la cavité. On constate que les ondes longitudinales se propagent bien à la vitesse théorique. Comme

les parois verticales sont glissantes ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$) aucun rotationnel n'est généré dans la cavité. De même la vitesse horizontale reste identiquement nulle.

L'évolution de la pression au fond de la cavité est reportée sur la figure (Fig. 26). Celle-ci permet de mesurer la célérité longitudinale et d'observer qualitativement la décroissance des ondes au cours du temps.

5.7.2 Cisaillement pur

Le cas test correspond à un matériau solide de hauteur L sollicité en cisaillement en maintenant un déplacement horizontal sur la face supérieure. La contrainte est ensuite relâchée et le milieu oscille autour de sa position initiale. On mesure la célérité égale à $c_T = 4L/T$ sur la paroi supérieure, T est la période des oscillations.

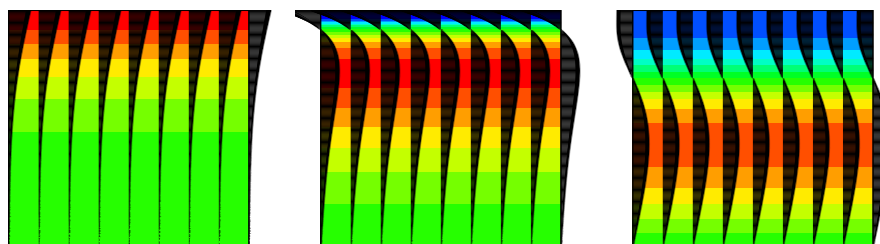


FIGURE 27 – Evolution du déplacement transversal dans les premiers instants dans le solide.

La figure (Fig. 27) montre que le comportement du milieu est bien celui d'un solide : la partie située près de la paroi est attirée vers sa position initiale. Le couplage entre l'accumulateur des effets de viscosité ω^o et l'actionneur de ces effets, $-\mu \nabla \times \mathbf{V}$, assure les oscillations à la célérité c_T . Sa valeur est là aussi proche de la valeur théorique.

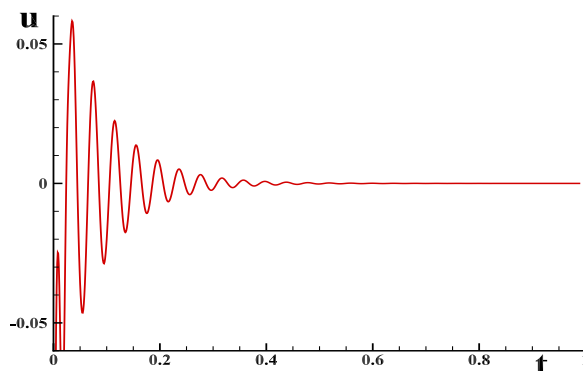


FIGURE 28 – Evolution du déplacement horizontal en fonction de y au cours du temps.

Les oscillations transversales sont aussi visibles sur la figure (Fig. 28). Les ondes sont dissipées assez rapidement et on n'observe aucun déplacement vertical tandis que la divergence reste strictement nulle.

Les essais de cisaillement et de compression sont réalisés sur des matériaux aussi utilisés pour des cas tests avec le modèle classique, le liège et de caoutchouc. Le tableau ci-dessous donne les valeurs des propriétés élastiques des matériaux et donne aussi les valeurs des célérités théoriques et mesurées.

Cas	ρ	E	ν	λ	μ	χ_T	c_{Lth}	c_{Lcal}	c_{Tth}	c_{Tcal}
liège	256	$5 \cdot 10^6$	0	0	$2.5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-7}$	141.42	141.63	100	100.
caoutchouc	3510	10^6	0.5	$1.66 \cdot 10^9$	$3.33 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^{-10}$	689.2	689.11	9.74	9.75

TABLE 2 – Célérités longitudinales et transversales pour le liège et le caoutchouc en fonction des paramètres élastiques ; les valeurs théoriques sont comparées à celles obtenue avec le modèle.

La comparaison entre valeurs théoriques (169) et les valeurs obtenues sont données par le tableau (Tab. 2). On constate déjà un bon accord entre valeurs théoriques et calculées.

5.7.3 Fluide de Bingham

La formulation MMD ouvre des perspectives intéressantes notamment dans le domaine de la rhéologie. L'expérience de Couette (Fig. 9) a introduit le lien existant entre le potentiel vectoriel et plus précisément son accumulateur ω^o et le rotationnel de la vitesse $\nabla \times \mathbf{V}$. La loi rhéologique donnée classiquement sous la forme $\tau = f(\dot{\gamma})$, contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation est ici remplacée par la relation $\omega^o = f(\nabla \times \mathbf{V})$ exprimée suivant la normale au plan primal.

Examinons le cas du fluide idéal de Bingham dont le comportement traduit celui d'un solide tant que la contrainte ω_c^o n'est pas dépassée et qui se comporte comme un fluide newtonien au-delà de cette limite.

La figure (Fig. 29a) montre le rhéograme du solide en fonction du déplacement et la figure (Fig. 29b) celle du fluide en fonction de la vitesse.

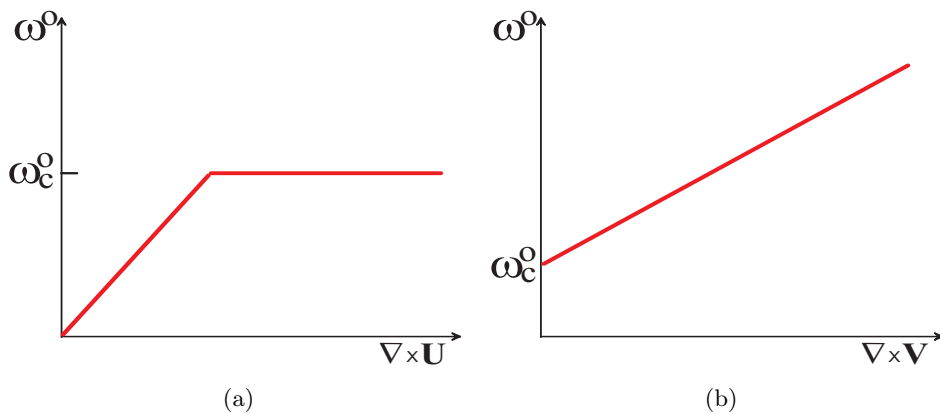


FIGURE 29 – Modèle de Bingham : (a) l'évolution du potentiel ω^o en fonction de $\nabla \times \mathbf{U}$ et (b) ω^o en fonction de $\nabla \times \mathbf{V}$.

Il est possible de montrer sur la même figure (Fig. 30) l'évolution du potentiel d'accumulation ω^o en fonction du déplacement puis ensuite en fonction de la vitesse.

Cette représentation a l'avantage de montrer que solide et fluide sont deux milieux déformables qui peuvent être représentés par un seul et même diagramme. Il ne faudra cependant pas oublier que le fluide s'écoule de manière indéfinie tant qu'est maintenue la contrainte c'est à dire le rotationnel de la vitesse.

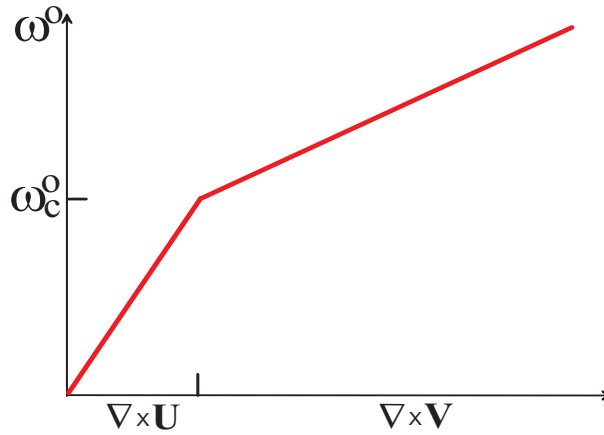


FIGURE 30 – Modèle de Bingham : à gauche le comportement solide et l'évolution du potentiel ω^o en fonction de $\nabla \times \mathbf{U}$ et à droite le comportement fluide et l'évolution de ω^o en fonction de $\nabla \times \mathbf{V}$.

Remarque : la partie antisymétrique du tenseur gradient de la vitesse, le tenseur de rotation $\boldsymbol{\Omega}$, est toujours considérée comme une rotation en bloc ; ce n'est vrai que localement et il ne faut pas en tirer la conséquence que l'écoulement correspond à une rotation en bloc. Des variations du taux de rotation local engendrent aussi ce qui est appelé cisaillement et dans la pratique cisaillement et rotation sont présents. Le principe de représenter absolument la contrainte dans le plan de l'écoulement conduit à cette distinction ; dans le cas du problème de Couette qui est répertorié dans la catégorie "cisaillement simple" le rotationnel est constant mais porté par la normale au plan de l'écoulement.

A priori tout type de comportement rhéologique non linéaire pourrait être appréhendé avec la formulation MMD. Les lois non linéaires pourraient être abordées en actualisant la viscosité en fonction du rotationnel de la vitesse sous la forme $\mu = f(\nabla \times \mathbf{V})$. De même pour les comportements pseudo-plastiques, non linéaires et à seuil.

Les phénomènes observés comme la détente élastique, l'effet Weissenberg, le gonflement à l'extrusion, ... sont dus à des comportements plus complexes qui pourraient être analysés à partir des concepts de la MMD mais rien ne permet de l'affirmer dans l'état actuel de son développement. Dans le cas de comportements dépendants du temps, par exemple des fluides thixotropes ou rhéopexes, il faudrait introduire une modélisation spécifique.

Comme on peut le voir le champ d'investigation sur ce seul domaine de la rhéologie est très ouvert. Le modèle (108) ouvre bien d'autres perspectives de modélisation de phénomènes physiques observés.

5.8 Multiphysique : écoulement autour d'un cylindre en milieu infini

L'exemple de l'écoulement d'une fluide newtonien autour d'un cylindre dans un milieu infini permet d'illustrer certains comportements et approximations qui pourront constituer les bases d'une approche multiphysique.

Considérons un cylindre de section circulaire de rayon $R = 1$ dans un milieu infini (Fig. (31)). La vitesse à l'infini est constante et égale à $V_0 = 1$.

L'équation de Navier-Stokes-Darcy écrite sous forme adimensionnelle en termes de fonction

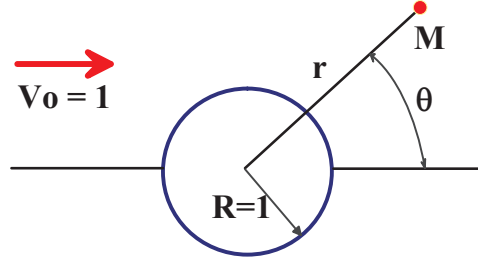


FIGURE 31 – Ecoulement autour d'un cylindre à section circulaire.

de courant s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{Re} \nabla^4 \psi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla^2 \psi + \frac{1}{Re Da} \nabla^2 \psi \\ \psi(1, \theta) = 0 \\ \psi(\infty, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (170)$$

où $Da = K/R^2$ est le nombre de Darcy.

On cherche des solutions par la méthode des développements asymptotiques :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Re^n \psi^{(n)} \quad (171)$$

où les $\psi^{(n)}(r, \theta)$ sont des fonctions satisfaisant aux conditions aux limites.

5.8.1 Modèle de Darcy

Dans le cas présent le domaine est occupé par un milieu poreux et l'équation de Darcy est seule représentative du phénomène ($Da \rightarrow 0$) :

$$-\nabla p - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} = 0 \quad (172)$$

Pour trouver sa formulation en terme de fonction de courant on prend le rotationnel de cette équation pour faire disparaître la pression, on remplace V_r et V_θ par leur expression respectives en fonction de ψ et on trouve en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \\ \psi(1, \theta) = 0 \\ \psi(\infty, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (173)$$

Les conditions aux limites sur les vitesses en coordonnées cylindriques V_r et V_θ sont obtenues en transformant les conditions aux limites sur les vitesses cartésiennes ($u = V_O$, $v = 0$).

En coordonnées polaires les vitesses s'écrivent en termes de fonction de courant sous la forme :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (174)$$

Le changement de système de coordonnées (cartésien - polaire) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (175)$$

Pour un écoulement uniforme $u = V_0, v = 0$:

$$\begin{cases} V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_0 \cos \theta \\ V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_0 \sin \theta \end{cases} \quad (176)$$

L'intégration de chacune de ces équations avec θ et r donne :

$$\begin{cases} \psi(r, \theta) = V_0 r \sin \theta + f(r) \\ \psi(r, \theta) = V_0 r \sin \theta + g(\theta) \end{cases} \quad (177)$$

Soit $f = g = Cte$, cette constante étant choisie égale à zéro sur l'axe ($y=0$).

D'où la condition à l'infini pour $V_0 = 1$:

$$\psi(\infty, \theta) = r \sin \theta \quad (178)$$

Solution sur ψ

La solution est recherchée par la méthode de séparation des variables :

$$\psi(r, \theta) = f(r) g(\theta) \quad (179)$$

On trouve

$$g(\theta) = \sin \theta \quad (180)$$

soit :

$$\frac{r}{f(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = n^2 \quad (181)$$

deux fonctions de variables différentes ne peuvent être égales qu'à une constante, n entier. Soit :

$$\begin{cases} g'' - n^2 g = 0 \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - n^2 f = 0 \end{cases} \quad (182)$$

et l'équation sur f :

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{n^2}{r^2} f = 0 \quad (183)$$

dont on recherche des solutions sous la forme

$$f(r) = r^m \quad (184)$$

$$(m^2 - n^2) = 0 \quad (185)$$

soit $m = \pm n$.

La solution sur $g(\theta)$ avec ses conditions aux limites étant triviale la solution sur ψ s'écrit alors

$$\psi(r, \theta) = \left(a r + \frac{b}{r} \right) \sin \theta \quad (186)$$

en tenant compte des conditions aux limites sur le cylindre et à l'infini on trouve $a = 1$ et $b = -1$:

$$\psi(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (187)$$

Solution sur $p(r, \theta)$

Reprenons l'équation de Darcy :

$$-\nabla p - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} = 0 \quad (188)$$

Prenons la divergence de cette équation. En tenant compte du fait que l'écoulement est incompressible on obtient :

$$\nabla^2 p = 0 \quad (189)$$

L'équation sur la pression étant la même que pour la fonction de courant on a donc la même solution générale mais ici la pression est symétrique par rapport à l'axe Ox :

$$p(r, \theta) = \left(a r + \frac{b}{r} \right) \cos \theta \quad (190)$$

Pour trouver a et b , on identifie la solution à l'équation de Darcy :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left(a - \frac{b}{r^2} \right) \cos \theta = -\frac{\mu}{K} \mathbf{V}_r \quad (191)$$

Comme on connaît V_r à partir de l'expression de ψ :

$$\left(a - \frac{b}{r^2} \right) \cos \theta = -\frac{\mu}{K} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (192)$$

On trouve $a = -\mu/K$ et $b = \mu/K$.

$$p(r, \theta) = -\frac{\mu}{K} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad (193)$$

5.8.2 Modèle de Stokes

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \\ r \rightarrow \infty \quad \psi = r \sin \theta \\ r = 1 \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial r = 0 \end{cases} \quad (194)$$

On cherche des solutions de la forme :

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin \theta \quad (195)$$

on obtient :

$$\begin{cases} r^4 f'''' + 2r^3 f''' - 3r^2 f'' + 3r f' - 3f = 0 \\ f(1) = f'(1) = 0 \end{cases} \quad (196)$$

Pour trouver f on cherche des solutions de la forme $f(r) = r^n u(r)$

On trouve :

$$f(r) = A r^3 + B r \operatorname{Log} r + C r + \frac{D}{r} \quad (197)$$

A, B, C, D sont des constantes arbitraires.

D'après la condition à la limite pour $r \rightarrow \infty$ on doit raccorder avec $f(r) \propto r$ d'où $A = 0$.

On a de plus

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ B + C - D = 0 \end{cases} \quad (198)$$

La solution du problème s'écrit avec une seule constante indéterminée :

$$\psi(r, \theta) = 2D \left(r \operatorname{Log} r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right) \sin \theta \quad (199)$$

Comme on peut le voir $\forall D$ il est impossible de raccorder la solution à la condition à l'infini : c'est le paradoxe de Stokes.

On peut montrer que loin du cylindre, lorsque $r \approx 1/Re$, la solution doit être remplacée par la solution d'Oseen :

$$\psi(r, \theta) = r \sin \theta \quad (200)$$

5.8.3 Modèle de Fluide Parfait

Soit le potentiel complexe :

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (201)$$

avec $V_0 = 1$.

La vitesse complexe s'écrit :

$$\zeta(z) = \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad (202)$$

soit

$$f(z) = \left(r e^{i\theta} - \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right) \quad (203)$$

d'où la fonction de courant :

$$\psi(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (204)$$

Le module de la vitesse est :

$$\mathbf{q} = 2 \sin \theta \quad (205)$$

Le calcul de la pression donne :

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (206)$$

5.8.4 Modèle de Brinkman

Pour ceux qui arrivent jusque-là :

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} = 0 \quad (207)$$

En posant $Da = K/R^2$, le nombre de Darcy et rendant le système d'équations adimensionnelles, on a :

$$-\nabla p + \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{1}{Da} \mathbf{V} = 0 \quad (208)$$

En adoptant $\sigma = 1/\sqrt{Da}$, on trouve la solution générale :

$$\psi(r, \theta) = \left(\frac{A}{2\sigma^2 r} - \frac{B}{\sigma^2} r + C K_1(\sigma r) \right) \quad (209)$$

En appliquant les conditions aux limites d'adhérence sur le cylindre et de raccordement à la solution d'Oseen à l'infini on a :

$$\psi(r, \theta) = \left(-\frac{(\sigma K_0(\sigma) + 2 K_1(\sigma))}{\sigma K_0(\sigma)} \frac{1}{r} + r + \frac{2}{\sigma K_0(\sigma)} K_1(\sigma r) \right) \sin \theta \quad (210)$$

On remarque notamment que la solution du modèle de Darcy est la même que celle du modèle d'Euler (fluide parfait) alors que les phénomènes physiques n'ont rien de commun entre eux. Il est à remarquer que l'équation obtenue $\nabla^2 \psi = 0$ est la même (potentiel des vitesses et fonction de courant sont des fonctions harmoniques).

De nombreuses solutions analytiques peuvent être trouvées à partir de l'équation de Navier-Stokes-Darcy. Elles correspondent à des situations où le cylindre est poreux et le milieu extérieur fluide, ou les deux poreux. On peut montrer que le passage aux limites est possible en faisant tendre le nombre de Darcy vers l'infini ou vers zéro. Le paradoxe de Stokes mis en évidence pour un cylindre dans un milieu fluide est ici levé par l'introduction d'un amas de particules fixes évanescents dans le milieu fluide.

6 Conclusions

Le choix, inclus dans l'hypothèse de milieu continu, d'exprimer les variables, les déformations et contraintes, les propriétés du milieu en un seul et même point a eu un certain nombre de conséquences importantes dont certaines négatives rappelées dans l'introduction. Pour les fluides l'équation de Navier-Stokes présente en effet des défauts inhérents à l'utilisation du tenseur de Cauchy pour représenter à la fois les effets de pression et de viscosité, notamment sur la définition du coefficient de viscosité de compression. Cette équation n'intègre pas le phénomène de propagation et ce n'est qu'en association avec la conservation de la masse et une loi d'état que ce phénomène est pris en compte.

La MMD est avant tout basée sur l'abandon de l'hypothèse de milieu continu elle-même issue du principe fondamental de la dynamique appliquée au point. La MMD postule l'existence d'un segment orienté à toutes les échelles, celui-ci ayant pour extrémités deux points sur lesquels s'expriment les bilans des quantités scalaires. Cette approche proche de la géométrie différentielle permet d'utiliser tous ses concepts et théorèmes associés comme le théorème de Stokes. Même s'il est nécessaire de prendre quelques précautions quant à son utilisation le théorème de Stokes permet d'oublier ce qu'est le vecteur vitesse pour ne considérer que ses composantes. Cette formulation permet de se placer sur un axe orienté et ne plus considérer de référentiel. Par exemple sur le segment le gradient d'un scalaire deviendra un vecteur porté par le segment ; le gradient d'un vecteur devient inutile.

Les principaux résultats spécifiques de la formulation présentée sont :

- des équations de conservation de quantité de mouvement et du flux entièrement sous une forme vectorielle,
- des équations de conservation pour les scalaires, masse et énergie interprétées comme des accumulations de la quantité de mouvement et du flux,
- la mise en évidence de deux paramètres physiques dt/χ_S et μ parfaitement mesurables pour tous les milieux,
- une décomposition formelle de Hodge-Helmholtz de la quantité d'accélération $\rho \gamma$ qui fait apparaître les potentiels scalaires p et le potentiel vecteur ω ,
- des conditions aux limites qui ne portent que sur les potentiels p et ω mais qui permettent d'assurer tout type de conditions de bord ou de pénalisations internes par l'intermédiaire des paramètres D et \mathbf{R} (123).
- une formulation conforme aux expériences fondatrices choisies pour la modélisation physique,
- une présentation unifiée valable pour les solides, les fluides, les milieux poreux, les ondes, la thermique et leurs couplages,
- la résolution potentielle des équations vectorielles à partir des seuls opérateurs $\nabla\nabla\cdot$ et $\nabla\times\nabla\times$ et la remontée des potentiels scalaires avec les opérateurs $\nabla\cdot$ et $\nabla\times$; les propriétés $\nabla\times\nabla=0$ et $\nabla\cdot\nabla\times=0$ sont vérifiées quel que soit la topologie polyédrique non structurée.
- une résolution lagrangienne des équations et une advection eulérienne de toutes les variables qui permet l'exacte conservation de la masse, de l'énergie cinétique, du rotationnel,
- la non utilisation d'une loi d'état pour évaluer l'une des variables permettant le non équilibre thermodynamique,

L'équation du mouvement discrète (108) se présente comme une alternative à l'équation de Navier-Stokes ; elle dégénère vers celle-ci lorsque certaines approximations sont effectuées. Elle contient par contre une physique plus élaborée permettant des approches multiphysiques.

Quelques identités

- \mathbf{A}, \mathbf{B} , tenseurs du second ordre
- \mathbf{V}, \mathbf{U} , vecteurs
- $\boldsymbol{\eta}$, tenseur d'orientation
- \mathbf{a} , vecteur dual de \mathbf{A}^a
- I_I, I_{II}, I_{III} , invariants de \mathbf{A}

- \mathbf{D} , partie symétrique de $\nabla\mathbf{V}$
- $\boldsymbol{\Omega}$, partie antisymétrique de $\nabla\mathbf{V}$
- $\boldsymbol{\omega}$, vecteur dual de $\boldsymbol{\Omega}$
- I_{II} , 2^{eme} invariant de $\nabla\mathbf{V}$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{A} : \mathbf{I} = tr(\mathbf{A}) \\
 \mathbf{A} : \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2 \\
 \mathbf{A}^s : \mathbf{B}^a = 0 \\
 \mathbf{A} : \mathbf{B} = tr(\mathbf{A} \mathbf{B}) \\
 \mathbf{A} : \mathbf{B}^t = \mathbf{A}^t : \mathbf{B} \\
 \mathbf{A}^a \mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{V} \\
 \mathbf{A}^a = -\boldsymbol{\eta} \mathbf{a} \\
 \boldsymbol{\eta} \mathbf{A}^s = 0 \\
 \mathbf{a} = 1/2 \boldsymbol{\eta} : \mathbf{A}^a \\
 I_I = tr \mathbf{A} \\
 I_{II} = 1/2 ((tr \mathbf{A})^2 - tr(\mathbf{A}^2)) \\
 I_{III} = det \mathbf{A} \\
 \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{A}^t \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} \\
 \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{A}^t) + \mathbf{A} : \nabla \mathbf{V}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 \|\nabla\mathbf{V}\|^2 = \|\mathbf{D}\|^2 + \|\boldsymbol{\Omega}\|^2 \\
 \|\nabla\mathbf{V}\|^2 = (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + (\nabla \times \mathbf{V})^2 \\
 \nabla\mathbf{V} : \nabla^t \mathbf{V} = (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - 2 I_{II} \\
 (\nabla\mathbf{V} : \nabla^t \mathbf{V}) : \nabla\mathbf{V} = 2 (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + (\nabla \times \mathbf{V})^2 - 2 I_{II} \\
 tr((\nabla\mathbf{V})^2) = (\nabla\mathbf{V} : \nabla^t \mathbf{V}) \\
 \boldsymbol{\Omega} = (\nabla\mathbf{V})^a \\
 \mathbf{D} : \mathbf{I} = tr(\mathbf{D}) = tr(\nabla\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{V} \\
 \boldsymbol{\Omega} : \mathbf{I} = tr(\boldsymbol{\Omega}) = 0 \\
 \boldsymbol{\Omega} : \mathbf{D} = 0 \\
 \boldsymbol{\Omega} : \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \|\nabla \times \mathbf{V}\|^2 \\
 \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -1/2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} \\
 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{U} = 1/2 (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{U} \\
 \boldsymbol{\Omega}_1 = 0 \\
 \boldsymbol{\Omega}_2 = 1/2 \|\boldsymbol{\Omega}\|^2 = \|\boldsymbol{\omega}\|^2 = -1/2 tr(\mathbf{A}^2) \\
 \boldsymbol{\Omega}_3 = 0
 \end{array} \right.$$

Références

- [1] Amiroudine S, Caltagirone J-P, Erriguible A. 2014. *A lagrangian-eulerian compressible model for the trans-critical path of near-critical fluids*, International Journal of Multiphase Flow, **59**, 15-23, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2013.10.008>.
- [2] Angot Ph., Bruneau C-H, Fabrie P. 1999. *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, *Numerische Mathematik* **81**(4), 497-520.
- [3] Angot Ph, Caltagirone J-P, Fabrie P. 2013. *Fast discrete Helmholtz-Hodge decompositions in bounded domains*, *Applied Mathematics Letters*, **26**(4), 445–451.
- [4] Aris R. 1962. *Vectors, Tensors, and the basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover, New-York .
- [5] Arquis E, Caltagirone J-P. 1984. *Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle* C.R. Acad. Sciences, **299**, II, 1, 1-4.
- [6] Batchelor G.K. 1967. *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge Univ. Press .
- [7] Bhatia H, Norgard G, Pascucci V, Bremer P.T. 2012. *The Helmholtz-Hodge Decomposition - A Survey*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, ISSN : 1077-2626, DOI Bookmark : <http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/TVCG.2012.316>.
- [8] Caltagirone J-P. 14 février 2013. *Mécanique des Milieux Discrets*, HAL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00788639>.
- [9] Caltagirone J-P, Vincent S. 2001. *Tensorial penalisation method for solving Navier-Stokes equations*, C.R. Acad. Sciences. Série IIB, **329**, 607-613.
- [10] Caltagirone J-P, Breil J. 1999. *A vector projection method for solving the Navier-Stokes equations*, C.R. Acad. Sciences, Série IIB, **327**(11), 1179-1184.
- [11] Chapman S, Cowling T.G. 1999. *The Mathematical Theory of non-uniform Gases*, Cambridge Mathematical Library, third edition.
- [12] Coirier J, Nadot-Martin C. 2007. *Mécanique des Milieux Continus*, Dunod.
- [13] Desbrun M, Hirani A.N, Leok M, Marsden J.E. 2005. *Discrete exterior calculus*, <http://arxiv.org/abs/math/0508341>.
- [14] Fortin M, Glowinski R. 1982. *Méthodes de lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*, Dunod.
- [15] Gad-El-Hak M. 1995. *Stokes' Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid*, J. of Fluids Engineering, vol **117**, 1, pp 3-5.
- [16] Germain P, Muller P. 1995. *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*, Masson éditions 2ième édition.
- [17] Guyon E, Hulin J.P, Petit L. 1991. *Hydrodynamique physique*, Editions du CNRS.
- [18] Harlow F.H, Welch J.E. 1965. *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface*. Physics of Fluids, **8**, 2182-2189.
- [19] Holmes M.J, Parker N.J, Povey M.J.W. 2011. *Temperature dependence of bulk viscosity in water using acoustic spectroscopy*, J. Phys. **269**.
- [20] Lamb H. 1993 *Hydrodynamics. 6th edition*, Dover, New York.
- [21] Landau L.D, Lifchitz E.M. 1959. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London.
- [22] Salençon J. 2007. *Mécanique des Milieux Continus*, Editions de l'Ecole Polytechnique, Tome 1.

- [23] Tonti E. 2013. *Why starting from differential equations for computational physics ?*, J. Comp. Physics, in press, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.08.016>
- [24] Truesdell C. 1974. *Introduction à la Mécanique Rationnelle des Milieux Continus*, Masson, Paris.
- [25] Truesdell C, Noll W. 2004. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, 602 pages. Springer-Verlag, 1965. Second Edition, 1992. Translation into Chinese, 2000. Third Edition.
- [26] Yuan G, Jiulin S, Kaixing Z, Xindao H. 2013. *Determination of bulk viscosity of liquid water via pulse duration measurements in stimulated Brillouin scattering*, Chinese Optics Letters, doi : 10.3788/COL201311.112902.

Liste des Figures

1	Mécanique des Milieux Continus et des Milieux Discrets	8
2	Définition de la topologie élémentaire	9
3	Définition du système physique	10
4	Théorème de Stokes	11
5	Définition du système physique	15
6	Topologie élémentaire	18
7	Schéma de l'expérience de gravité	19
8	Atténuation du son	20
9	Expérience de Couette	25
10	Loi de fluide newtonien	26
11	Expérience de Poiseuille	26
12	Modélisation des efforts de pression	30
13	Modélisation des effets visqueux	33
14	Modélisation des effets visqueux et action des contraintes	34
15	Etat de contrainte	35
16	Moteur virtual du mouvement	38
17	Conditions aux limites entre deux milieux	51
18	Discontinuité de type choc	52
19	Modélisation des conditions de glissement	54
20	Interface entre deux fluides non miscibles	55
21	Injection et écoulement de Couette polaire	57
22	Écoulement de bi-Couette plan	57
23	Cas test de l'inversion de gradient	62
24	Fonction de dissipation	63
25	Compression pure	70
26	Compression, évolution du déplacement vertical	70
27	Cisaillement : évolution du déplacement transversal	71
28	Cisaillement : évolution du déplacement au cours du temps	71
29	Modèle de Bingham	72
30	Modèle de Bingham pour le solide et le fluide	73
31	Écoulement de Stokes	74

Liste des Tableaux

1	Effets visqueux en MMC et MMD	34
2	Célérités longitudinales et transversales	72