



**HAL**  
open science

## Sur une caractérisation des D-modules holonomes réguliers

Jean-Baptiste Teyssier

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Teyssier. Sur une caractérisation des D-modules holonomes réguliers. 2014. hal-00925361v1

**HAL Id: hal-00925361**

**<https://hal.science/hal-00925361v1>**

Preprint submitted on 8 Jan 2014 (v1), last revised 27 Feb 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# SUR UNE CARACTÉRISATION DES $\mathcal{D}$ -MODULES HOLONOMES RÉGULIERS

par

Jean-Baptiste Teyssier

---

## Introduction

Soit  $X$  une variété complexe lisse et  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  deux objets de la catégorie dérivée  $D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$  formée des complexes de  $\mathcal{D}_X$ -modules à cohomologie bornée et holonome. On note  $\text{Sh}_{\mathbb{C}}(X)$  la catégorie des faisceaux en  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur  $X$  et  $D_c^b(X, \mathbb{C})$  la catégorie dérivée formée des complexes d'objets de  $\text{Sh}_{\mathbb{C}}(X)$  à cohomologie bornée et constructible.

Traditionnellement [KK81, 6.1.1][Meb84, 2.1.1], la pleine fidélité de la correspondance de Riemann-Hilbert se démontre en prouvant que le morphisme

$$(0.0.1) \quad RH_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2} : R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \longrightarrow R\mathcal{H}om_{\text{Sh}_{\mathbb{C}}(X)}(\mathbf{S}(\mathcal{M}_2), \mathbf{S}(\mathcal{M}_1))$$

est un isomorphisme de  $D_c^b(X, \mathbb{C})$  dès que les complexes  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont à cohomologie régulière. Le but de cet article est de prouver le

**Théorème 1.** — *Soit  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Si le morphisme de Riemann-Hilbert  $RH_{\mathcal{M}, \mathcal{M}}$  est un isomorphisme, alors le complexe  $\mathcal{M}$  est à cohomologie régulière.*

Il s'agit d'une caractérisation de la régularité qui, bien qu'invérifiable en pratique, a certaines conséquences méta-mathématiques qui mériteraient d'être approfondies, comme par exemple le fait que si l'on cherche à définir une notion d'objet régulier dans quelque contexte que ce soit, il faut d'abord chercher à définir un analogue au foncteur solution. Pour un exemple formellement proche des  $\mathcal{D}$ -modules, on peut mentionner [EK04].

Détaillons la stratégie de la preuve du théorème 1. Notons  $\Delta_X$  la diagonale de  $X \times X$  et désignons par  $\text{Irr}_{\Delta_X}^* : D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D_c^b(X, \mathbb{C})$  le foncteur d'irrégularité [Meb90] le

long de  $\Delta_X$ . Notons enfin  $\mathcal{M}^\vee$  le complexe dual de  $\mathcal{M}$  et pour  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ , notons  $\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2$  le produit tensoriel externe de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

L'analyse<sup>(1)</sup> du cône de  $RH_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$  permet de voir que le théorème 1 est équivalent au

**Théorème 2.** — *Si  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})$  est l'objet nul de  $D_c^b(X, \mathbb{C})$ , alors le complexe  $\mathcal{M}$  est à cohomologie régulière.*

Pour prouver le théorème 2, on commence en 4.1 par traiter le cas où  $X$  est de dimension 1. L'argument repose sur le théorème de perversité du faisceau d'irrégularité long d'une hypersurface [Meb90, 2.1.6]. Cet argument est spécifique à la dimension 1, car ce n'est que dans ce cas que  $\Delta_X$  est une hypersurface de  $X \times X$ .

En combinant ceci à un résultat de compatibilité 3.4.5 de l'irrégularité diagonale avec la restriction non-caractéristique, on montre en 4.2.2 une version générique du théorème 2 suivant laquelle la conclusion vaut en dehors d'un ensemble discret de points de  $X$ . Reste à étudier ce qui se passe en un point problématique  $x_0$ .

A l'aide d'une technique de récurrence sur la dimension du support due à Mebkhout, on dévise le problème en le ramenant grosso modo au cas où le support de  $\mathcal{M}$  est de dimension 1. La clé de voûte de cette technique est la généralisation au cas des modules holonomes du critère de Deligne [Del70] stipulant que pour tester la régularité d'une connexion méromorphe, il suffit de le faire génériquement le long du lieu des pôles. C'est le *critère fondamental de la régularité* [Meb04, 4.3-16]. Dans le contexte des modules holonomes, ce résultat n'est efficient que dans le cas où le module étudié est régulier sur un ouvert assez gros et de support de dimension  $> 1$ .

Dans le cas où le support de  $\mathcal{M}$  est une courbe  $C$  (éventuellement singulière en  $x_0$ ) avec  $X$  de dimension  $> 1$ , on ne peut ni invoquer la perversité du faisceau d'irrégularité comme en dimension 1, ni utiliser le critère fondamental de la régularité pour ramener le problème au cas où  $\mathcal{M}$  a un support ponctuel (et alors il n'y a plus rien à faire). On remarque néanmoins que si  $D$  est une hypersurface de  $X$  passant par  $x_0$  et ne contenant aucune composante irréductible de  $C$ , il suffit de prouver que la localisation  $\mathcal{M}(*D)$  est régulière.

L'idée est alors de travailler non pas avec  $\mathcal{M}$  mais avec  $\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M}$ . En utilisant l'observation que si l'hypothèse du théorème 2 est valable pour  $\mathcal{M}$ , alors elle l'est aussi pour  $\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M}$ , on voit que  $\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M}$  est dans le champ d'application de l'énoncé générique 4.2.2. Comme son support  $C \times C$  est de dimension 2, une ultime application du critère fondamental de la régularité permet d'obtenir que  $\mathcal{M}^\vee(*D) \boxtimes \mathcal{M}(*D)$  est régulier. On conclut alors à la régularité de  $\mathcal{M}(*D)$  en regardant l'irrégularité ponctuelle de  $\mathcal{M}^\vee(*D) \boxtimes \mathcal{M}(*D)$  en  $(x_0, x_0)$ .

En utilisant la même méthode, on démontre enfin le

**Théorème 3.** — *Soit  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Si le complexe  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}$  est régulier, alors il en est de même du complexe  $\mathcal{M}$ .*

---

1. Entièrement due à Mebkhout, et rappelée ici en partie 2.

Je remercie Claude Sabbah pour de multiples discussions concernant ce travail, ainsi que pour m'avoir communiqué la preuve du théorème 3.1.3 de commutation de la dualité pour les  $\mathcal{D}$ -modules avec le produit tensoriel externe. Je remercie aussi Hélène Esnault pour ses encouragements durant l'élaboration de cet article.

## 1. Notations et rappels

Les résultats apparaissant dans cette section seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite de ce texte. On les récapitule ici une fois pour toute. La lettre  $X$  désigne une variété complexe lisse et sauf mention du contraire,  $\mathcal{M}$  désigne un objet de  $D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . On dira que  $\mathcal{M}$  est *régulier* si ses modules de cohomologie sont réguliers. Enfin, on notera  $\text{car } \mathcal{M}$  la *variété caractéristique* de  $\mathcal{M}$ .

**1.1.** Notons  $\text{DR} : D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_c^b(X, \mathbb{C})$  le *foncteur de De Rham* et désignons par  $\mathbf{S} : D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_c^b(X, \mathbb{C})$  le *foncteur solution*. On rappelle que si  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ , on a suivant [KK81, 1.4.3] une identification canonique

$$\mathbf{S}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{M}_1) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathbf{S}(\mathcal{M}_2)$$

**1.2.** Pour tout morphisme  $f : Y \rightarrow X$  avec  $Y$  variété complexe lisse, on note  $f^+ : D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_Y)$  et  $f_+ : D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_Y) \rightarrow D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$  les foncteurs image inverse et image directe pour les  $\mathcal{D}$ -modules.

**1.3.** Pour tout sous-espace analytique fermé  $Z$  de  $X$ , on note  $i_Z : Z \hookrightarrow X$  l'inclusion canonique. Suivant [MT04, IV], on dispose du *triangle de cohomologie locale algébrique*

$$(1.3.1) \quad R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow R\mathcal{M}(*Z) \xrightarrow{+1}$$

Il s'agit d'un triangle distingué de  $D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Dans ce triangle, le complexe  $R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M}$  est la *cohomologie locale algébrique* de  $\mathcal{M}$  le long de  $Z$  et  $R\mathcal{M}(*Z)$  est la *localisation* de  $\mathcal{M}$  le long de  $Z$ .

Pour tout morphisme  $f : Y \rightarrow X$ , on a un isomorphisme canonique de triangles distingués [MT04, IV.4.1]

$$(1.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} f^+ R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M} & \longrightarrow & f^+ \mathcal{M} & \longrightarrow & f^+ R\mathcal{M}(*Z) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ R\Gamma_{[f^{-1}(Z)]}f^+ \mathcal{M} & \longrightarrow & f^+ \mathcal{M} & \longrightarrow & R(f^+ \mathcal{M})(*f^{-1}(Z)) \end{array}$$

Si de plus  $Z$  est lisse, on a une identification canonique [MT04, IV.5.1]

$$(1.3.3) \quad R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} i_{Z+} i_Z^+ \mathcal{M}[-\text{codim}_X Z].$$

**1.4.** Les foncteurs de cohomologie locale algébrique et localisation sont compatibles au produit tensoriel externe. Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés complexes. Pour  $i = 1, 2$ , soit  $\mathcal{M}_i \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{X_i})$  et soit  $Y_i$  un sous-espace analytique de  $X_i$ . On pose  $Z_1 = Y_1 \times X_2$  et  $Z_2 = X_1 \times Y_2$ . Alors d'après [MT04, IV.1], on a des identifications canoniques

$$\begin{aligned} R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(*Z_1 \cup Z_2) &\simeq R\mathcal{M}_1(*Y_1) \boxtimes R\mathcal{M}_2(*Y_2) \\ R\Gamma_{[Y_1 \times Y_2]}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) &\simeq R\Gamma_{[Y_1]}\mathcal{M}_1 \boxtimes R\Gamma_{[Y_2]}\mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

**1.5.** Si  $Z$  est un sous-espace analytique fermé de  $X$ , on pose

$$\text{Irr}_Z^*(\mathcal{M}) := i_{Z*}i_Z^{-1}\mathbf{S}(R\mathcal{M}(*Z))$$

C'est le *faisceau d'irrégularité de  $\mathcal{M}$  le long de  $Z$* . En appliquant  $i_{Z*}i_Z^{-1}\mathbf{S}$  à (1.3.1), on voit qu'il s'insère dans le triangle distingué de  $D_c^b(X, \mathbb{C})$

$$\text{Irr}_Z^*(\mathcal{M}) \longrightarrow i_{Z*}i_Z^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{S}(R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M}) \xrightarrow{+1}$$

Pour une analyse détaillée des propriétés du faisceau d'irrégularité, on renvoie à [Meb04].

**1.6.** On utilise ici les notations et les formules de 1.4. On a des identifications canoniques

$$(1.6.1) \quad \text{Irr}_{Z_1}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq \text{Irr}_{Y_1}^*(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_2)$$

$$(1.6.2) \quad \text{Irr}_{Z_2}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq \mathbf{S}(\mathcal{M}_1) \boxtimes \text{Irr}_{Y_2}^*(\mathcal{M}_2)$$

et pour tout  $(x_1, x_2) \in Y_1 \times Y_2$ , on a

$$(1.6.3) \quad \text{Irr}_{Z_1 \cup Z_2}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)_{(x_1, x_2)} \simeq \text{Irr}_{Y_1}^*(\mathcal{M}_1)_{x_1} \boxtimes \text{Irr}_{Y_2}^*(\mathcal{M}_2)_{x_2}$$

On démontre ici la formule (1.6.1), les autres se montrant exactement de la même façon.

$$\begin{aligned} \text{Irr}_{Z_1}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) &= i_{Z_1*}i_{Z_1}^{-1}\mathbf{S}(R(p_1^+\mathcal{M}_1 \otimes p_2^+\mathcal{M}_2)(*Z_1)) \\ &\simeq i_{Z_1*}i_{Z_1}^{-1}\mathbf{S}(p_1^+R\mathcal{M}_1(*Y_1) \otimes p_2^+\mathcal{M}_2) \\ &= i_{Z_1*}i_{Z_1}^{-1}\mathbf{S}(R\mathcal{M}_1(*Y_1) \boxtimes \mathcal{M}_2) \\ &\simeq i_{Y_1*}i_{Y_1}^{-1}\mathbf{S}(R\mathcal{M}_1(*Y_1)) \boxtimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_2) \\ &= \text{Irr}_{Y_1}^*(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_2) \end{aligned}$$

où les deux identifications apparaissant ici résultent des points 1.4 et 1.1.

**1.7.** Si  $f : Y \rightarrow X$  est un morphisme avec  $Y$  variété lisse, on dispose d'un morphisme de comparaison canonique

$$\text{CK}_{f, \mathcal{M}} : f^{-1}\mathbf{S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{S}(f^+\mathcal{M})$$

appelé *morphisme de Cauchy-Kowalevski*. D'après [Kas71], il s'agit d'un isomorphisme si  $f$  est *non-caractéristique* pour  $\mathcal{M}$ .

Dans le cas d'une immersion fermée  $i_Y : Y \hookrightarrow X$ , l'analyse détaillée de  $\text{CK}_{i_Y, \mathcal{M}}$  faite dans [MT04, V 2.2] montre que  $\text{CK}_{i_Y, \mathcal{M}}$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{Irr}_Y^*(\mathcal{M})$  est nul.

**1.8.** On dira qu'un module holonome  $\mathcal{M}$  est *lisse* si le support  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  est lisse équidimensionnel et si la variété caractéristique  $\text{car } \mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  est égale au fibré conormal de  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  dans  $X$ .

Pour  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ , il passe suivant [Meb04, 6.1-4] par tout point de  $X$  une hypersurface  $Z$  telle que

- (1) La trace de  $Z$  sur le support de  $\mathcal{M}$  est de codimension 1 dans ce support <sup>(2)</sup>.
- (2) Les modules de cohomologie  $\mathcal{H}^k \mathcal{M}$  sont lisses en dehors de  $Z$ .
- (3) La dimension du support de  $R\Gamma_{[Z]} \mathcal{M}$  est strictement plus petite que la dimension du support de  $\mathcal{M}$ .

**1.9.** Soit  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Soit  $Z$  une hypersurface de  $X$  satisfaisant aux points (1) et (2) de 1.8. Alors, on a suivant [Meb04, 4.3-16] le <sup>(3)</sup>

**Théorème 1.9.1.** — *Le complexe  $\text{Irr}_Z^*(\mathcal{M})$  est nul si et seulement si la dimension de son support est strictement plus petite que  $\dim \text{Supp}(\mathcal{M}) - 1$ .*

Mebkhout en déduit le corollaire important

**Corollaire 1.9.2.** — *Dans les conditions de 1.9.1, le complexe  $\mathcal{M}(*Z)$  est régulier.*

## 2. Réduction du théorème 1 au théorème 2

Le contenu de cette section est entièrement dû à Mebkhout [Meb04, 7.3] et ne prétend à aucune originalité. On adopte les notations de l'introduction.

L'observation principale de Mebkhout est la possibilité de factoriser le morphisme (0.0.1) de la façon suivante

$$\begin{array}{ccccc}
 R\mathcal{H}om(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) & \xrightarrow[\text{(1)}]{\sim} & \text{DR}(\mathcal{M}_1^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2) & \xrightarrow[\text{(2)}]{\sim} & \mathbf{S}(\mathcal{M}_1^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2)^\vee \\
 \downarrow R\mathcal{H}_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2} & & & & \downarrow \text{(3)} \\
 R\mathcal{H}om(\mathbf{S}(\mathcal{M}_2), \mathbf{S}(\mathcal{M}_1)) & \xleftarrow[\text{(5)}]{\sim} & R\mathcal{H}om(\mathbf{S}(\mathcal{M}_2), \mathbf{S}(\mathcal{M}_1^\vee)^\vee) & \xleftarrow[\text{(4)}]{\sim} & (\mathbf{S}(\mathcal{M}_1^\vee) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_2))^\vee
 \end{array}$$

Les isomorphismes (1) et (4) sont de nature purement formelle. Les isomorphismes (2) et (5) proviennent du théorème de dualité locale [MN93]. Quant au morphisme

2. Par dimension d'un sous-espace analytique, il faut entendre la dimension maximale des composantes irréductibles de cet espace.

3. Stricto sensu, Mebkhout démontre 1.9.1 pour  $\mathcal{M}$  module holonome, mais la généralisation au cas d'un complexe est aisée. Poser  $\mathcal{N} := \bigoplus_k \mathcal{H}^k \mathcal{M}$ . On a par définition  $\text{Supp } \mathcal{N} = \text{Supp } \mathcal{M}$ . Par hypothèse, le support de  $\text{Irr}_Z^*(\mathcal{M})$  est un fermé de  $Z$  de dimension  $< \dim \text{Supp}(\mathcal{M}) - 1$ . D'après [Meb04, 4.2-4], la nullité de  $\text{Irr}_Z^*(\mathcal{M})$  sur l'ouvert complémentaire implique la nullité de  $\text{Irr}_Z^*(\mathcal{N})$  sur ce même ouvert. On conclut alors en appliquant le critère fondamental de la régularité à  $\mathcal{N}$  et en utilisant la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p \text{Irr}_Z^*(\mathcal{H}^q \mathcal{M}) \implies \mathcal{H}^{p+q} \text{Irr}_Z^*(\mathcal{M})$$

(3), il s'agit du morphisme dual du morphisme (3)<sup>∨</sup> défini par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} i_{\Delta_X}^{-1} \mathbf{S}(\mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2) & \xrightarrow{\text{CK}_{i_{\Delta_X}, \mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2}} & \mathbf{S}(i_{\Delta_X}^+(\mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbf{S}(\mathcal{M}_1^\vee) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_2) & \xrightarrow{(3)^\vee} & \mathbf{S}(\mathcal{M}_1^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2) \end{array}$$

où l'identification de gauche provient de 1.1.

En particulier, le morphisme de Riemann-Hilbert  $RH_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$  est un isomorphisme si et seulement si le morphisme  $\text{CK}_{i_{\Delta_X}, \mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2}$  est un isomorphisme. D'après la discussion 1.7, le morphisme  $RH_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$  est donc un isomorphisme si et seulement si  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2)$  est nul, et on a la réduction promise.

### 3. Quelques propriétés de l'irrégularité diagonale

**3.1. Irrégularités le long de  $\Delta_X$  et  $\Delta_{X \times X}$ .** — Le but de ce paragraphe est de démontrer le

**Lemme 3.1.1.** — *Soit  $X$  une variété complexe, et  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . La nullité de  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})$  entraîne la nullité du complexe  $\text{Irr}_{\Delta_{X \times X}}^*((\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})^\vee \boxtimes (\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M}))$ .*

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{N} := (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}^\vee) \boxtimes (\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})$ . Notons  $Z_1 = \Delta_X \times X^2$  et  $Z_2 = X^2 \times \Delta_X$ . Le triangle Mayer-Vietoris [Meb04, 4.2-1] pour  $(Z_1, Z_2)$  appliqué à  $\mathcal{N}$  s'écrit

$$(3.1.2) \quad \text{Irr}_{Z_1 \cup Z_2}^*(\mathcal{N}) \longrightarrow \text{Irr}_{Z_1}^*(\mathcal{N}) \oplus \text{Irr}_{Z_2}^*(\mathcal{N}) \longrightarrow \text{Irr}_{\Delta_X \times \Delta_X}^*(\mathcal{N}) \xrightarrow{+1}$$

D'après les formules de 1.6, la nullité de  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})$  entraîne la nullité des deux premiers termes de (3.1.2). On en déduit

$$\text{Irr}_{\Delta_X \times \Delta_X}^*(\mathcal{N}) \simeq 0$$

Or la permutation  $\sigma : X^4 \rightarrow X^4$  échangeant les second et troisième facteurs induit une identification

$$\text{Irr}_{\Delta_X \times \Delta_X}^*(\mathcal{N}) \simeq \sigma^* \text{Irr}_{\Delta_{X \times X}}^*(\sigma_* \mathcal{N}) \simeq \sigma^* \text{Irr}_{\Delta_{X \times X}}^*(\mathcal{N})$$

Il vient donc

$$\text{Irr}_{\Delta_{X \times X}}^*((\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}^\vee) \boxtimes (\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})) \simeq 0$$

Le lemme 3.1.1 se déduit alors du théorème qui suit.  $\square$

**Théorème 3.1.3.** — *Notons  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$  la catégorie dérivée des complexes de  $\mathcal{D}_X$ -modules à cohomologie bornée et cohérente. Soient  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Alors le morphisme canonique*

$$\mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2^\vee \longrightarrow (\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)^\vee$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — La preuve s'inspire des arguments de [Meb04, 6.2-2]. On rappelle qu'on note  $\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2 = p_1^{-1} \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1} \mathcal{M}_2$ . On a donc

$$\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2 = \mathcal{D}_{X_1 \times X_2} \otimes_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}} \mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2$$

On remarque que  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}$  est plat sur  $\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}$  puisque  $\mathcal{O}_{X_1 \times X_2}$  est plat sur  $\mathcal{O}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_2}$ . D'une part, le complexe

$$\mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2})$$

est isomorphe au complexe

$$\mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{D}_{X_1}) \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X_2})$$

En effet, soit  $I_i^\bullet$  une résolution  $\mathcal{D}_{X_i} \otimes \mathcal{D}_{X_i}^{\text{op}}$ -injective de  $\mathcal{D}_{X_i}$ , et  $I^\bullet$  une résolution  $(\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}) \otimes (\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2})^{\text{op}}$ -injective de  $I_1^\bullet \boxtimes_{\mathbb{C}} I_2^\bullet$ . On a clairement un morphisme  $(\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2})^{\text{op}}$ -linéaire

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{D}_{X_1}}(\mathcal{M}_1, I_1^\bullet) \boxtimes_{\mathbb{C}} Hom_{\mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_2, I_2^\bullet) &= Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, I_1^\bullet \boxtimes_{\mathbb{C}} I_2^\bullet) \\ &\longrightarrow Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, I^\bullet) \end{aligned}$$

L'isomorphisme voulu est maintenant une question locale, et puisque les  $\mathcal{M}_i$  sont cohérents, il suffit, en prenant une résolution locale libre des  $\mathcal{M}_i$ , de le vérifier pour  $\mathcal{D}_{X_i}$ , pour lequel l'assertion est claire.

On a ensuite un morphisme naturel dans  $D^b(\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}})$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \star \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}) \otimes_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}} \mathcal{D}_{X_1 \times X_2} \\ \longrightarrow \mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X_1 \times X_2}), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}$  est vu comme  $\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}$ -module et comme  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}}$ -module. On considère en effet une résolution injective  $J^\bullet$  de  $\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}$  comme  $(\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}) \otimes (\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2})^{\text{op}}$ -module. On a donc un morphisme naturel de  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}}$ -modules

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \star \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, J^\bullet) \otimes_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}} \mathcal{D}_{X_1 \times X_2} \\ \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, J^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}} \mathcal{D}_{X_1 \times X_2}). \end{aligned}$$

Ensuite on choisit une résolution injective  $K^\bullet$  de  $J^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}} \mathcal{D}_{X_1 \times X_2}$  comme module sur  $(\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}) \otimes \mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}}$ , et on en déduit le morphisme cherché. Ce morphisme est un isomorphisme dans  $D^b(\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}})$ . En effet, l'assertion est locale, et on se ramène, en prenant une résolution locale libre de  $\mathcal{M}_i$ , au cas où  $\mathcal{M}_i = \mathcal{D}_{X_i}$ , auquel cas l'isomorphisme est clair. Enfin on a un morphisme naturel

$$\mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X_1 \times X_2}) \longrightarrow \mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X_1 \times X_2})$$

En effet, puisque  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}$  est plat sur  $\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}$ , un  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}$ -module injectif est aussi un  $\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}$ -module injectif. Prenant donc une résolution injective  $I^\bullet$  de  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}$  comme  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2} \otimes \mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}}$ -module, on a un morphisme de  $\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}^{\text{op}}$ -complexes

$$Hom_{\mathcal{D}_{X_1} \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2, I^\bullet) \longrightarrow \mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_{X_1 \times X_2}}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2, I^\bullet)$$



d'où le morphisme cherché. C'est un isomorphisme car les  $\mathcal{M}_i$  sont  $\mathcal{D}_{X_i}$ -cohérents, ce qu'on voit en prenant une résolution locale libre de  $\mathcal{M}_i$ , comme plus haut.

En mettant les décalages usuels, on en déduit

$$\mathcal{M}_1^\vee \boxtimes \mathcal{M}_2^\vee \simeq (\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)^\vee$$

□

**3.2. Irrégularités diagonale et ponctuelle.** — Soit  $X$  une variété complexe lisse et soient  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . On se donne un point  $x \in X$ . On dispose du triangle de cohomologie locale

$$R\Gamma_{[\Delta_X]} R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* (x, x)) \longrightarrow R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* (x, x)) \longrightarrow R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* \Delta_X) \longrightarrow$$

Or on a par (1.3.3)

$$\begin{aligned} R\Gamma_{[\Delta_X]} R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* (x, x)) &\simeq i_{\Delta_X+} i_{\Delta_X}^+ R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* (x, x))[-\dim X] \\ &\simeq i_{\Delta_X+} R(i_{\Delta_X}^+ (\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* x))[-\dim X] \\ &\simeq i_{\Delta_X+} R(\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2)(* x)[- \dim X] \end{aligned}$$

Par compatibilité du foncteur solution avec l'image directe [HTT00, 4.2.5], on en déduit<sup>(4)</sup> une identification canonique dans  $D_c^b(X, \mathbb{C})$

$$\mathbf{S}(R\Gamma_{[\Delta_X]} R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* (x, x))) \simeq i_{\Delta_X*} \mathbf{S}(R(\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2)(* x))$$

Par application du foncteur solution au triangle de cohomologie locale précédent puis par prise des germes en  $(x, x)$ , on obtient un triangle distingué de complexes d'espaces vectoriels à cohomologie bornée et de dimension finie

(3.2.1)

$$\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)_{(x,x)} \longrightarrow \text{Irr}_{(x,x)}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \longrightarrow \text{Irr}_x^*(\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2) \xrightarrow{+1}$$

**3.3. Le complexe  $\text{Irr}_{(x_1, x_2)}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)$ .** — Dans ce paragraphe, on se donne des variétés complexes lisses  $X_1$  et  $X_2$ , ainsi que des points  $x_1 \in X_1$  et  $x_2 \in X_2$ . Enfin pour  $i = 1, 2$ , on se donne un complexe  $\mathcal{M}_i \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_{X_i})$ .

D'après 1.4, on a

$$R\Gamma_{[(x_1, x_2)]}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq R\Gamma_{[x_1]} \mathcal{M}_1 \boxtimes R\Gamma_{[x_2]} \mathcal{M}_2$$

Par application du foncteur solution au triangle de cohomologie locale

$$R\Gamma_{[(x_1, x_2)]}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \longrightarrow \mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2 \longrightarrow R(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)(* (x_1, x_2)) \xrightarrow{+1}$$

le point 1.1 donne un triangle distingué de  $D_c^b(x_1 \times x_2, \mathbb{C})$

(3.3.1)

$$\text{Irr}_{(x_1, x_2)}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathcal{M}_1)_{x_1} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_2)_{x_2} \longrightarrow \mathbf{S}(R\Gamma_{[x_1]} \mathcal{M}_1)_{x_1} \otimes \mathbf{S}(R\Gamma_{[x_2]} \mathcal{M}_2)_{x_2} \xrightarrow{+1}$$

4. Prendre garde aux décalages qui s'introduisent dans [HTT00, 4.2.5] pour le foncteur des solutions du fait de [HTT00, 4.2.1]. Utiliser aussi la formule  $\mathbf{S}(\mathcal{M}[-\dim X]) = \mathbf{S}(\mathcal{M})[\dim X]$ .

**3.4. Compatibilité avec la restriction non-caractéristique.** — Soit  $X$  une variété complexe lisse et soit  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . On se donne une sous-variété lisse  $X'$  de  $X$ , ainsi qu'une sous-variété lisse  $Z$  de  $X$  telle que  $Z' := Z \cap X'$  est lisse. On a en particulier un diagramme cartésien

$$(3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ i'_{Z'} \downarrow & & \downarrow i_Z \\ X' & \xrightarrow{i_{X'}} & X \end{array}$$

Montrons la

**Proposition 3.4.2.** — *Si  $X'$  est non-caractéristique pour  $\mathcal{M}$ , et si  $Z'$  est non caractéristique pour  $i_{Z'}^+ \mathcal{M}$ , alors on a une identification canonique*

$$\text{Irr}_{Z'}^*(i_{X'}^+ \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \text{Irr}_Z^*(\mathcal{M})$$

*Démonstration.* — Par application de  $i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}$  à l'isomorphisme de triangles (1.3.2), on obtient un isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc} i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ R\mathcal{M}(*Z)) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ \mathcal{M}) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ R\Gamma_{[Z]} \mathcal{M}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Irr}_{Z'}^*(i_{X'}^+ \mathcal{M}) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ \mathcal{M}) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(R\Gamma_{[Z]} i_{X'}^+ \mathcal{M}) \end{array}$$

Or le morphisme de Cauchy-Kowalevski induit par functorialité un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc} i_{X'}^{-1} \mathbf{S}(R\mathcal{M}(*Z)) & \longrightarrow & i_{X'}^{-1} \mathbf{S}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & i_{X'}^{-1} \mathbf{S}(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \\ \downarrow \text{CK}_{X', R\mathcal{M}(*Z)} & & \downarrow \text{CK}_{X', \mathcal{M}} & & \downarrow \text{CK}_{X', R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})} \\ \mathbf{S}(i_{X'}^+ R\mathcal{M}(*Z)) & \longrightarrow & \mathbf{S}(i_{X'}^+ \mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbf{S}(i_{X'}^+ R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \end{array}$$

Par application de  $i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1}$ , on en déduit un morphisme de triangles

$$(3.4.3) \quad \begin{array}{ccccc} i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(R\mathcal{M}(*Z)) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ R\mathcal{M}(*Z)) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ \mathcal{M}) & \longrightarrow & i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(i_{X'}^+ R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \end{array}$$

Or

$$i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \mathbf{S}(R\mathcal{M}(*Z)) \simeq i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} i_{Z'*} i_Z^{-1} \mathbf{S}(R\mathcal{M}(*Z)) = i'_{Z',*} i_{Z'}^{-1} \text{Irr}_Z^*(\mathcal{M})$$

où la première identification provient simplement de  $Z' \subset Z$ .

On est donc ramené à montrer que le morphisme vertical le plus à gauche de (3.4.3) est un isomorphisme. Il suffit pour cela de voir que  $\text{CK}_{X', \mathcal{M}}$  et  $\text{CK}_{X', R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})}$  sont des isomorphismes.

Pour  $\text{CK}_{X', \mathcal{M}}$ , cela provient de l'hypothèse que  $X'$  est non caractéristique pour  $\mathcal{M}$ .

D'après 1.7, on sait que l'obstruction à ce que  $\mathrm{CK}_{X', R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})}$  soit un isomorphisme réside dans la non-nullité de  $\mathrm{Irr}_{X'}^*(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}))$ . Or d'après (1.3.3), on a

$$R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}) \simeq i_{Z+} i_Z^+ \mathcal{M}[-\mathrm{codim}_X Z]$$

Par compatibilité de l'irrégularité avec les morphismes propres [Meb04, 3.6-6], on en déduit

$$(3.4.4) \quad \mathrm{Irr}_{X'}^*(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \simeq i_{Z*} \mathrm{Irr}_{Z'}^*(i_Z^+ \mathcal{M})$$

Le membre de droite de (3.4.4) est nul du fait de l'hypothèse que  $Z'$  est non caractéristique pour  $i_Z^+ \mathcal{M}$ . D'où la proposition 3.4.2.  $\square$

On en déduit le

**Corollaire 3.4.5.** — *Si  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in D_{\mathrm{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ , et si  $X'$  désigne une sous-variété lisse de  $X$  non-caractéristique pour  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2$ , alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Irr}_{\Delta_{X'}}^*(i_{X'}^+ \mathcal{M}_1 \boxtimes i_{X'}^+ \mathcal{M}_2) \xrightarrow{\sim} i'_{\Delta_{X'}*} i_{\Delta_{X'}}^{-1} \mathrm{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)$$

*Démonstration.* — Du fait de la formule [MT04, 4.3]

$$\mathrm{car}(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) = \mathrm{car}(\mathcal{M}_1) \times \mathrm{car}(\mathcal{M}_2)$$

la sous-variété  $X' \times X'$  de  $X \times X$  est non-caractéristique pour  $\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2$ . Or on a

$$i_{\Delta_X}^+(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}_2$$

où l'on a implicitement identifié  $\Delta_X$  et  $X$ . A travers cette identification,  $\Delta_{X'} = \Delta_X \cap (X' \times X')$  correspond à  $X'$ . Par hypothèse,  $\Delta_{X'}$  est donc non-caractéristique pour  $i_{\Delta_X}^+(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)$ . Il suffit alors d'appliquer 3.4.2.  $\square$

## 4. Preuve du théorème 2

**4.1. Le cas où  $X$  est de dimension 1.** — On va démontrer dans ce cas un énoncé sensiblement plus fort que le théorème 2. On prend pour  $X$  un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$ . Soient  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in D_{\mathrm{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$ . On suppose qu'en dehors de l'origine  $O$  de  $\mathbb{C}$ , les modules  $\mathcal{H}^k \mathcal{M}_i$  sont des connexions intégrables. On a le

**Théorème 4.1.1.** — *L'un des complexes  $\mathcal{M}_1$  ou  $\mathcal{M}_2$  est régulier dès que*

$$(4.1.2) \quad \mathrm{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq 0$$

*Démonstration.* — En dimension 1, la diagonale de  $X$  est une hypersurface de  $X \times X$ . Le théorème [Meb90, 4.2-4] stipule donc que l'annulation (4.1.2) implique

$$\mathrm{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{H}^k(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)) \simeq 0$$

pour tout entier  $k$ . Or

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^p(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathcal{H}^q(\mathcal{M}_2)$$

et on obtient ainsi

$$\mathrm{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{H}^p \mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{H}^q \mathcal{M}_2) \simeq 0$$

pour tout couple d'entiers  $(p, q)$ . Pour prouver 4.1.1, on est donc ramené au cas où les  $\mathcal{M}_i$  sont des  $\mathcal{D}_X$ -modules holonomes. On note  $\text{irr}_O(i)$  le nombre d'irrégularité de  $\mathcal{M}_i$  en  $O$ . C'est aussi le nombre d'irrégularité en  $O$  de  $\mathcal{M}_i(*O)$ . On commence par se ramener au cas où les  $\mathcal{M}_i$  sont localisés en  $O$ . C'est l'objet du

**Lemme 4.1.3.** — *La nullité de  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)$  implique la nullité du complexe  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O))$ .*

*Démonstration.* — Pour  $i = 1, 2$ , les triangles distingués

$$(4.1.4) \quad R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i) \longrightarrow \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_i(*O) \xrightarrow{+1}$$

fournissent le diagramme

$$(4.1.5) \quad \begin{array}{ccccc} R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_2) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 \boxtimes R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_2) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(*O) \boxtimes R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2(*O) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O) \end{array}$$

Analysons l'irrégularité diagonale des termes de (4.1.5).

**Lemme 4.1.6.** — *Le complexe  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i) \boxtimes \mathcal{M}_j(*O))_{(O,O)}$  est concentré en degré 1 et 2.*

*Démonstration.* — Du fait de

$$R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i) \otimes \mathcal{M}_j(*O) \simeq 0 \quad \text{et} \quad R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_j(*O)) \simeq 0$$

les triangles (3.2.1) et (3.3.1) donnent

$$\text{Irr}_{\Delta_X}^*(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i) \boxtimes \mathcal{M}_j(*O))_{(O,O)} \simeq \mathbf{S}(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i))_O \otimes \mathbf{S}(\mathcal{M}_j(*O))_O$$

Puisque  $\mathbf{S}(\mathcal{M}_j(*O))_O$  est concentré en degré 1, il suffit pour prouver 4.1.6 de prouver que  $\mathbf{S}(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i))$  est concentré en degré 0 et 1.

On sait que  $\mathcal{H}^q R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i)$  est nul si  $q \neq 0, 1$  et que pour  $q = 0, 1$ , il s'agit d'une somme finie de Diracs en  $O$ . Puisque le complexe des solutions du Dirac en  $O$  est le faisceau gratte-ciel en  $O$  placé en degré 1, noté  $\mathbb{C}_O[-1]$ , la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p \mathbf{S}(\mathcal{H}^{-q} R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i)) \implies \mathcal{H}^{p+q} \mathbf{S}(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i))$$

dégénère en page 2, et il vient que  $\mathbf{S}(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_i))$  est concentré en degré 0 et 1.  $\square$

En dimension 1,  $\Delta_X$  est une hypersurface de  $X \times X$ . Par théorème de Mebkhout [Meb90, 2.1.6], le complexe  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O))$  est donc pervers. Puisqu'il est nul en dehors de  $(O, O)$ , il s'agit d'un faisceau gratte-ciel concentré en degré 2.

En appliquant  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*$  à (4.1.5), on obtient un diagramme à lignes et colonnes distinguées. Le lemme 4.1.6 combiné à l'exactitude de la dernière colonne de  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*$  (4.1.5) donne une surjection

$$(4.1.7) \quad \mathcal{H}^2 \text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2)_{(O,O)} \longrightarrow \mathcal{H}^2 \text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O))_{(O,O)} \longrightarrow 0$$

Donc pour démontrer 4.1.3, il suffit de montrer que le membre de gauche de (4.1.7) est nul. En combinant (4.1.2) à l'exactitude de la seconde ligne de  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*$  (4.1.5), on obtient une injection

$$(4.1.8) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{H}^2 \text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2)_{(O,O)} \longrightarrow \mathcal{H}^3 \text{Irr}_{\Delta_X}^*(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathcal{M}_2)_{(O,O)}$$

Il suffit donc de démontrer que le membre de droite de (4.1.8) est nul.

Or le complexe  $R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_2)$  étant régulier, l'exactitude de la première colonne de  $\text{Irr}_{\Delta_X}^*$  (4.1.5) donne une identification

$$\text{Irr}_{\Delta_X}^*(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathcal{M}_2) \xrightarrow{\sim} \text{Irr}_{\Delta_X}^*(R\Gamma_{[O]}(\mathcal{M}_1) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O))$$

et on conclut la preuve de 4.1.3 à l'aide d'une nouvelle application de 4.1.6.  $\square$

Terminons la preuve du théorème 4.1.1. Le triangle (3.3.1) montre que

$$(4.1.9) \quad \text{Irr}_{(O,O)}^*(\mathcal{M}_1(*O) \boxtimes \mathcal{M}_2(*O)) \simeq \mathbb{C}^{\text{irr}_O(1) \text{irr}_O(2)}[-2]$$

En combinant 4.1.3 et (4.1.9), le triangle (3.2.1) donne

$$(4.1.10) \quad \text{Irr}_O^*(\mathcal{M}_1(*O) \otimes \mathcal{M}_2(*O)) \simeq \mathbb{C}^{\text{irr}_O(1) \text{irr}_O(2)}[-2]$$

Mais on sait que le membre de gauche de (4.1.10) est concentré en degré 1. On en déduit que chacun des membres de (4.1.10) est nul, et en particulier l'un des nombres d'irrégularité  $\text{irr}_O(i)$  doit être nul<sup>(5)</sup>.  $\square$

**4.2. Preuve du cas général.** — On se place dans les conditions du théorème 2 et on suppose

$$(4.2.1) \quad \text{Irr}_{\Delta_X}^*(\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M}) \simeq 0$$

avec  $\dim X > 1$ . On commence par l'énoncé générique suivant

**Lemme 4.2.2.** — *Le complexe  $\mathcal{M}$  est régulier en dehors d'un ensemble discret de points de  $X$ .*

*Démonstration.* — Soit  $C$  une courbe lisse localement fermée dans  $X$  et supposée non-caractéristique pour  $\mathcal{M}$ <sup>(6)</sup> et  $\mathcal{M}^\vee \otimes_{\mathbb{L}_{O_X}} \mathcal{M}$ . D'après 3.4.5 et commutation de la dualité avec l'image inverse non caractéristique [HTT00, 2.7.1], on a

$$\text{Irr}_{\Delta_C}^*((i_C^+ \mathcal{M})^\vee \boxtimes i_C^+ \mathcal{M}) \simeq 0$$

5. A noter que si on suppose que les  $\mathcal{M}_i(*O)$  sont non nulles et sachant que l'un des  $\mathcal{M}_i(*O)$  est régulier, alors la régularité de  $\mathcal{M}_1(*O) \otimes \mathcal{M}_2(*O)$  permet de conclure à la régularité de  $\mathcal{M}_1(*O)$  ET de  $\mathcal{M}_2(*O)$ .

6.  $C$  est alors automatiquement non-caractéristique pour  $\mathcal{M}^\vee$  car  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^\vee$  ont même variété caractéristique.

D'après 4.1.1, on en déduit que  $i_C^+ \mathcal{M}$  ou  $(i_C^+ \mathcal{M})^\vee$  est régulier. Puisqu'un objet de  $D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_C)$  est régulier si et seulement si son dual l'est <sup>(7)</sup>, il vient que  $i_C^+ \mathcal{M}$  est régulier.

D'après 3.4.2, on en déduit pour tout point  $x \in C$

$$\text{Irr}_x^*(\mathcal{M}) \simeq \text{Irr}_x^*(i_C^+ \mathcal{M}) \simeq 0$$

Puisque la régularité se teste ponctuellement [Meb04, 6.2-6], on en déduit que  $\mathcal{M}$  est régulier sur l'ouvert des points de  $X$  par lesquels passe une courbe lisse non caractéristique pour  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^\vee \otimes_{\mathbb{L}}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}$ . On sait que le complémentaire de cet ouvert est un ensemble discret de points de  $X$ , d'où le lemme 4.2.2.  $\square$

Dans la suite, on peut ainsi supposer que  $\mathcal{M}$  (et donc  $\mathcal{M}^\vee$ ) est régulier en dehors d'un point  $x_0$  de  $X$ . On se donne une hypersurface  $Z_1$  de  $X$  comme en 1.8 et passant par  $x_0$ . L'irrégularité  $\text{Irr}_{Z_1}^*(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee)$  est nulle en dehors de  $x_0$ . S'il passe par  $x_0$  une composante de  $\text{Supp}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee)$  de dimension au moins 2, le critère fondamental de la régularité 1.9.2 stipule que  $(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee)(*Z_1)$  est régulier.

Supposons construites par récurrence des hypersurfaces  $Z_1, \dots, Z_k$  de  $X$  passant par  $x_0$  et telles que pour tout  $i \leq k$ , dans les triangles de cohomologie locale <sup>(8)</sup>

$$(4.2.3) \quad R\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee) \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{i-1}]}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee) \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{i-1}]}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee)(*Z_i)$$

le terme de gauche a un support de dimension strictement plus petite que la dimension du support du terme central, et le terme de droite est régulier. Une telle hypersurface  $Z_i$  peut toujours être construite suivant le raisonnement précédent tant que  $\text{Supp}(R\Gamma_{[Z_{i-1}]}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee))$  a une composante de dimension au moins 2 passant par  $x_0$ . On peut donc supposer que l'entier  $k$  est tel que la dimension des composantes de  $\text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\vee))$  passant par  $x_0$  est  $\leq 1$ .

Puisque  $\mathcal{M}$  est régulier si et seulement si  $\mathcal{M}^\vee$  est régulier, on voit qu'en utilisant de proche en proche les triangles de cohomologie locale

$$R\Gamma_{[Z_i]} \mathcal{M} \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{i-1}]} \mathcal{M} \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{i-1}]} \mathcal{M}(*Z_i) \xrightarrow{+1}$$

ou les triangles analogues pour  $\mathcal{M}^\vee$ , qu'il suffit pour démontrer que  $\mathcal{M}$  est régulier de démontrer que  $R\Gamma_{[Z_k]} \mathcal{M}$  ou  $R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M}^\vee)$  est régulier. Rappelons que puisque  $\mathcal{M}$  est régulier en dehors de  $x_0$ , c'est aussi le cas de  $R\Gamma_{[Z_k]} \mathcal{M}$  et  $R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M}^\vee)$ , donc seule la régularité en  $x_0$  pose problème.

Si  $x_0$  est isolé dans  $\text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]} \mathcal{M})$  ou  $\text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M}^\vee))$ , il n'y a rien à faire. On peut donc supposer que par  $x_0$  passe une composante de  $\text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]} \mathcal{M})$  de dimension 1 et de même avec  $\text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M}^\vee))$ . Quitte à considérer un voisinage de  $x_0$  dans  $X$  assez petit, on peut toujours supposer que  $C := \text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]} \mathcal{M})$  et  $C' := \text{Supp}(R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M}^\vee))$  sont des courbes et qu'en dehors de  $x_0$ , ces courbes ainsi que les complexes  $R\Gamma_{[Z_k]} \mathcal{M}$  et  $R\Gamma_{[Z_k]}(\mathcal{M}^\vee)$  sont lisses.

7. C'est immédiat à partir de la définition de la régularité donnée dans [KK81]. Par contre, avec la définition de [Meb84], c'est un théorème. Voir [Meb84, 2.4.1].

8. On note ici et dans la suite  $Z_{1i}$  pour  $Z_1 \cap \dots \cap Z_i$ .

Soit  $D$  une hypersurface de  $X$  passant par  $x_0$  et ne contenant aucune composante irréductible de  $C$  et  $C'$ . On dispose alors des triangles de cohomologie locale

$$R\Gamma_{[x_0]}\mathcal{M} \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M} \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D) \xrightarrow{+1}$$

et

$$R\Gamma_{[x_0]}(\mathcal{M}^\vee) \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee) \longrightarrow R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee(*D)) \xrightarrow{+1}$$

Les complexes de gauche de ces triangles sont à support ponctuel, donc réguliers. Pour montrer que  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}$  ou  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee)$  est régulier, il suffit donc de montrer que  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D)$  ou  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee(*D))$  est régulier.

Le support de  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}$  est  $C' \times C$ . Il est donc de dimension 2, et l'hypersurface  $Z := (D \times X) \cup (X \times D)$  rencontre  $C' \times C$  en  $(x_0 \times C) \cup (C' \times x_0)$  qui est de dimension 1 et contient le lieu singulier de  $C' \times C$ . Enfin, le complexe  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}$  est lisse en dehors de  $Z \cap (C' \times C)$ .

Or en combinant 3.1.1 et 4.2.2, on obtient que  $\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M}$  est régulier en dehors d'un ensemble discret de points. Du fait de l'identification

$$R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M} \simeq R\Gamma_{[Z_{1k} \times Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee \boxtimes \mathcal{M})$$

il en est de même de  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}$ .

Par critère fondamental de la régularité 1.9.2, on en déduit que le complexe

$$(R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M})(*Z) \simeq R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee)(*D) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D)$$

est régulier. En particulier,

$$\mathrm{Irr}_{(x_0, x_0)}^*(R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee)(*D) \boxtimes R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D)) \simeq 0$$

D'après (3.3.1), on en déduit

$$\mathrm{Irr}_{x_0}^*(R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee)(*D)) \otimes \mathrm{Irr}_{x_0}^*(R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D)) \simeq 0$$

et ainsi le complexe  $\mathrm{Irr}_{x_0}^*(R\Gamma_{[Z_{1k}]}(\mathcal{M}^\vee)(*D))$  ou le complexe  $\mathrm{Irr}_{x_0}^*(R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D))$  est nul. Mettons que  $\mathrm{Irr}_{x_0}^*(R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D))$  est nul.

Alors, tous les complexes d'irrégularité ponctuelle de  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D)$  sont nuls. D'après [Meb04, 6.2-6], le complexe  $R\Gamma_{[Z_{1k}]}\mathcal{M}(*D)$  est régulier, ce qui conclut la preuve de du théorème 2.

### 5. Preuve du théorème 3

On commence comme pour le théorème 2 par démontrer le théorème 3 en dimension 1. On se place pour cela au voisinage de l'origine  $O$  de  $\mathbb{C}$ . Puisque  $\mathcal{M}$  est régulier si et seulement si  $\mathcal{M}(*O)$  l'est, on peut supposer que  $\mathcal{M}$  est localisé en  $O$ . En particulier, les modules de cohomologie de  $\mathcal{M}$  sont plats sur  $\mathcal{O}_X$ . On en déduit que la suite spectrale de Künneth

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{i+j=q} \mathrm{Tor}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}^i \mathcal{M}, \mathcal{H}^j \mathcal{M}) \implies \mathcal{H}^{p+q}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M})$$

induit pour tout  $k$  une identification canonique

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{i+j=k} (\mathcal{H}^i \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{H}^j \mathcal{M})$$

En particulier, les modules  $\mathcal{H}^k \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{H}^k \mathcal{M}$  sont réguliers. On est donc ramené au cas où  $\mathcal{M}$  est un module holonome, et alors le théorème 3 se voit immédiatement à l'aide de la décomposition de Levelt-Turrittin [Sv00] pour les modules différentiels.

On suppose que  $X$  est de dimension  $> 1$ . Par argument de restriction non-caractéristique, on démontre comme pour le théorème 2 que si  $\mathcal{M} \in D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X)$  satisfait aux hypothèses du théorème 3, alors  $\mathcal{M}$  est régulier en dehors d'un ensemble discret de points de  $X$ . Il suffit donc de se concentrer au voisinage d'un point problématique  $x_0$ .

S'il passe par  $x_0$  une composante de  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  de dimension au moins 2, on choisit pour  $\mathcal{M}$  une hypersurface  $Z$  de  $X$  comme en 1.8 passant par  $x_0$ , et le critère fondamental de la régularité 1.9.1 et son corollaire 1.9.2 stipulent que dans le triangle de cohomologie locale

$$R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow R\mathcal{M}(*Z) \xrightarrow{+1}$$

le terme  $R\mathcal{M}(*Z)$  est régulier. Pour prouver que  $\mathcal{M}$  est régulier, on est donc ramené à prouver que  $R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M}$  est régulier. Du fait de la formule

$$(5.0.4) \quad R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} R\Gamma_{[Z]}\mathcal{M} \simeq R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M})$$

le terme de gauche de (5.0.4) est régulier. On est donc ramené de proche en proche au cas où les composantes de  $C := \text{Supp}(\mathcal{M})$  passant par  $x_0$  sont de dimension  $\leq 1$ .

Dans ce cas, en choisissant une hypersurface  $D$  passant par  $x_0$  et ne contenant aucune composante irréductible de  $C$ , on observe qu'il suffit de montrer que  $\mathcal{M}(*D)$  est régulier. Or du fait de

$$(5.0.5) \quad (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{\mathbb{L}} (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}) \simeq (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}) \boxtimes (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M})$$

le terme de gauche de (5.0.5) est régulier. On en déduit que  $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}$  satisfait aux hypothèses du théorème 3. La version générique du théorème 3 s'applique donc à  $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}$  et on peut ainsi supposer que  $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}$  est régulier en dehors de  $(x_0, x_0)$ . Le critère fondamental de la régularité appliqué à  $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}$  pour  $D \times X \cup X \times D$  permet alors d'obtenir que  $\mathcal{M}(*D) \boxtimes \mathcal{M}(*D)$  est régulier. D'après (3.3.1), il vient

$$\text{Irr}_{(x_0, x_0)}^*(\mathcal{M}(*D) \boxtimes \mathcal{M}(*D)) \simeq \text{Irr}_{x_0}^*(\mathcal{M}(*D)) \otimes \text{Irr}_{x_0}^*(\mathcal{M}(*D)) \simeq 0$$

On a donc  $\text{Irr}_{x_0}^*(\mathcal{M}(*D)) \simeq 0$  et on conclut à la régularité de  $\mathcal{M}(*D)$  via le fait que la régularité se teste ponctuellement [Meb04, 6.2-6].

## Références

- [Del70] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture notes in Mathematics, vol. 163, Springer-Verlag, 1970.
- [EK04] M. Emerton and M. Kisin, *The Riemann-Hilbert correspondence for unit  $F$ -crystals*, Astérisque, vol. 293, 2004.



- [HTT00] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*, vol. 236, Birkhauser, 2000.
- [Kas71] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Ph.D. thesis, Univ. Tokyo, 1971.
- [KK81] M. Kashiwara and T. Kawai, *On holonomic systems of micro-differential equations*, Publ. RIMS **17** (1981).
- [Meb84] Z. Mebkhout, *Une autre équivalence de catégories*, Comp. Math. **51** (1984).
- [Meb90] ———, *Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les  $\mathcal{D}_X$ -modules*, The Grothendieck Festschrift III, vol. 88, Birkhäuser, 1990.
- [Meb04] ———, *Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann*, Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques, Cours du C.I.M.P.A., Séminaires et Congrès, vol. 8, SMF, 2004.
- [MN93] Z. Mebkhout and L. Narvaez-Macarro, *Le Théorème de Constructibilité de Kashiwara*, Images directes et constructibilité, Travaux en cours, vol. 46, SMF, Hermann, 1993.
- [MT04] Ph. Maisonobe and T. Torrelli, *Image inverse en théorie des  $\mathcal{D}$ -modules*, Séminaire et Congrès, vol. 8, SMF, 2004.
- [Sv00] M.T. Singer and M. van der Put, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 328, Springer, 2000.

---

J.-B. TEYSSIER, Freie Universität Berlin, Mathematisches Institut, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany • *E-mail* : `teyssier@zedat.fu-berlin.de`