Décomposition de HC*(k[G]) d'apr'es D. Burghelea

Etienne Blanchard

Décomposition de $HC^*(k[G])$

d'après D. Burghelea

par Etienne Blanchard

0 Introduction

Etant donné G un groupe discret, pour x dans G, notons G_x son centralisateur, $\{x\}$ le sous-groupe engendré par x et Γ_x le groupe quotient $G_x/\{x\}$. M.Karoubi a montré dans [Ka] que $HC^*(G,k)$ est un facteur direct de $HC^*(k[G])$. Par la suite, D.Burghelea a calculé dans [Bu] l'homologie de Hochschild $HH_*(\mathbb{C}[G])$ et l'homologie cyclique $HC_*(\mathbb{C}[G])$ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[G]$ du groupe en utilisant les suites de Gysin associées aux fibrations $B\Gamma_x \to B\Gamma_x \times BS^1 \to BS^1$ pour x d'ordre fini et $BG_x \to B\Gamma_x \to BS^1$ pour x d'ordre infini.

Nous nous proposons d'exposer les résultats cohomologiques correspondants à l'aide de preuves algébriques. Ils reposent de manière essentielle sur la notion de groupoïde cyclique introduite dans le troisième paragraphe.

Je tiens à remercier G.Skandalis qui m'a aidé à préparer cet exposé.

1 Cohomologie de groupes

1.1 Complexe simplicial associé à un groupoïde

Définition 1 *Un groupoïde est une petite catégorie $\mathcal{C}$ dont tous les morphismes sont des isomorphismes.*

A un groupoïde $\mathcal{C}$, on associe son nerf simplicial $\mathcal{C}_{(*)}$. Les n-simplexes sont de la forme

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$$

où les A_i sont des objets et $\alpha_i \in Hom(A_{i-1}, A_i)$.
On a les dégénerescences

$$d_i(A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) = A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}\circ\alpha_i} A_{i+1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$$

et les opérateurs de face

$$s_i(A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) = A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots A_i \xrightarrow{id} A_i \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n.$$

Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde tel que $\forall A, B \in objet(\mathcal{C})$, $Hom(A,B) \neq \emptyset$, alors

$$h : (A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) \longrightarrow (A \xrightarrow{id} A \xrightarrow{\beta_1} \cdots \xrightarrow{\beta_n} A)$$

où l'on a choisi un $y_i \in Hom(A, A_i)$ et $\beta_i = {y_i}^{-1}\alpha_i y_{i-1}$ réalise une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie pleine réduite à un seul objet $\mathcal{C}_A$ dont les morphismes sont ceux de $\mathcal{C}$ ramenés dans $Hom(A,A)$.

1.2 Cohomologie de Hochschild

Définition 2 *Soit G un groupe et k un $\mathbb{Z}[G]$-module (en particulier tout anneau avec unité muni de l'action triviale). On pose $H^*(G,k) = Ext^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, k)$.*

Pour calculer les groupes de cohomologie d'un groupe, il suffit donc de trouver des résolutions projectives de $\mathbb{Z}$ au dessus de $\mathbb{Z}[G] = A$.

• résolution standard homogène HO_*

$$\cdots \xrightarrow{\beta_0} A^{\otimes n+1} \xrightarrow{\beta_0} \cdots\cdots \xrightarrow{\beta_0} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \text{ avec}$$

$$\beta_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = \sum_{i=0}^{n} g_0 \otimes \cdots \otimes \hat{g}_i \otimes \cdots \otimes g_n,$$

$$\varepsilon(g) = 1 \text{ et } g(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = gg_0 \otimes \cdots \otimes gg_n.$$

Donc $H^*(G,k)$ est la cohomologie de

$$C^1_G(G,k) \xrightarrow{\beta} C^2_G(G,k) \xrightarrow{\beta} \cdots\cdots \xrightarrow{\beta} C^{n+1}_G(G,k) \xrightarrow{\beta} \cdots$$

où $C^n_G(G,k) = Hom_A(A^{\otimes n}, k)$ et $\beta\varphi = \varphi \circ \beta_0$.

Remarque

Etant donné X un ensemble d'indices et pour tout $x \in X$ un morphisme $\varphi_x \in Hom_A(A^{\otimes n}, k)$ tel que pour tout $a \in A^{\otimes n}$ l'ensemble des $x \in X$ tel que $\varphi_x(a)$ soit non nul est fini, on peut définir

$$\sum_{x \in X} \varphi_x \in Hom_A(A^{\otimes n}, k)$$

• résolution standard non-homogène IHO_*

$$\cdots \xrightarrow{b_0} A \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{b_0} \cdots\cdots \xrightarrow{b_0} A \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où $A \otimes A^{\otimes n}$ est le A-module libre engendré par $A^{\otimes n}$,

$$b_0[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \alpha_1[\alpha_2, \ldots, \alpha_n] + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [\alpha_0, \ldots, \alpha_i\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n] \\ +(-1)^n[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]\alpha_n$$

($A \otimes A^n$ est muni d'une action triviale à droite) et $\nu([\,]) = 1$.
$H^*(G,k)$ est aussi la cohomologie du complexe

$$k \xrightarrow{b} C^1(G,k) \xrightarrow{b} \cdots\cdots \xrightarrow{b} C^n(G,k) \xrightarrow{b} \cdots$$

où $C^n(G,k) = Hom(A^{\otimes n}, k)$ et $b\varphi = \varphi \circ b_0$.

Si D_{n+1} désigne le sous-module de $A^{\otimes n+1}$ engendré par les $g_0 \otimes \cdots \otimes g_n$ avec $g_i = g_{i+1}$ pour un i $(0 \leq i \leq n-1)$,alors D_{*+1} est stable par β_0; on en déduit la résolution libre normalisée homogène de $\mathbb{Z}$ quotient de HO_{*+1} par D_{*+1}. On peut de même définir la résolution normalisée non-homogène à l'aide du sous-complexe ID_{*+1} où ID_{n+1} est engendré par les $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, l'un des α_i étant égal à 1.

Remarque importante

Si $\mathcal{C}(G)$ est le groupoïde dont l'ensemble des objet est le groupe G et tel que $Hom(g_1, g_2) = \{{g_1}^{-1} g_2\}$, on voit que les deux résolutions HO_* et IHO_* sont deux réalisations du complexe simplicial $\mathcal{C}_{(*)}(G)$ selon qu'on le regarde au niveau des objets ou des morphismes.

1.3 Cohomologie cyclique

Si G est un groupe discret et k une $\mathbb{Q}$-algèbre *commutative* (en pratique $k = \mathbb{C}$), on note $k[G]$ la k-algèbre engendré par les fonctions caractéristiques des points du groupe munie du produit de convolution (on identifiera par la suite un point et sa fonction caractéristique).

On pose [1]
$$\begin{aligned} \lambda_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) &= (-1)^n g_n \otimes g_0 \otimes \cdots \otimes g_{n-1} \\ \beta'_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} g_0 \otimes \cdots \otimes \hat{g}_i \otimes \cdots \otimes g_n \\ s_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) &= g_0 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_n \end{aligned}$$

Soit $C^{**}(G)$ le bicomplexe:
$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow \beta & & \uparrow -\beta' & & \uparrow \beta & & \\ C^3_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^3_G(G,k) & \xrightarrow{N_\lambda} & C^3_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & \\ \uparrow \beta & & \uparrow -\beta' & & \uparrow \beta & & \\ C^2_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^2_G(G,k) & \xrightarrow{N_\lambda} & C^2_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & \\ \uparrow \beta & & \uparrow -\beta' & & \uparrow \beta & & \\ C^1_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^1_G(G,k) & \xrightarrow{N_\lambda} & C^1_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & \end{array}$$

Définition 3 *On définit $HC^*(G,k)$ comme la cohomologie totale du bicomplexe $C^{**}(G)$*

[1] le complexe D_{*+1} n'est pas stable par β'_0 et λ_0.

On peut encore voir la cohomologie cyclique de G comme la cohomologie totale du bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccc}
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\
C^3(G,k) & \xrightarrow{1-t} & C^3(G,k) & \xrightarrow{N_t} & C^3(G,k) & \xrightarrow{1-t} & \\
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\
C^2(G,k) & \xrightarrow{1-t} & C^2(G,k) & \xrightarrow{N_t} & C^2(G,k) & \xrightarrow{1-t} & \\
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\
C^1(G,k) & \xrightarrow{1-t} & C^1(G,k) & \xrightarrow{N_t} & C^1(G,k) & \xrightarrow{1-t} & \\
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \\
k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & k & \xrightarrow{0} &
\end{array}$$

où $t[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = [\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}]$ avec $\alpha_0 = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-1}$.

On définit $< G >$ (respectivement $< G >', < G >''$) l'ensemble des classes de conjugaison (respectivement finies, infinies). Si x est un élément de G, on notera $\hat{x}$ sa classe de conjugaison.

Soit $C^{n+1}(k[G], \hat{x})$ l'ensemble des fonctions à valeur dans k localisées en $\hat{x}$, i-e à support dans $\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n \in G^{n+1}$ tel que $x_0 \cdots x_n \in \hat{x}\}$(il est stable par β_0), alors $C^{*+1}(k[G], \hat{x}) \subset C^*(k[G], k[G]^*)$ est stable par d, d', $1 - \lambda$ les dérivations usuelles en cohomologie cyclique:

$$\begin{aligned}
d'_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n \\
d_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) &= d'_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) + x_n x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \\
\lambda_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) &= (-1)^n x_n \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}
\end{aligned}$$

Il en résulte :

Proposition 1 *Si G est un groupe discret,*

$$C^n(G) = C^n(k[G], k[G]^*) = C^{n+1}(k[G]) = \prod_{\hat{x} \in <G>} C^{n+1}(k[G], \hat{x}).$$

En particulier comme $\hat{1} = \{1\}$, on a $C^*(G) \simeq C^{*+1}(k[G], \hat{1})$ de la façon suivante:
si $\psi \in C^n(G,k)$, on définit $\tilde{\psi}\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n\} = \delta_{x_0 \dots x_n, 1} \psi[x_1, \dots, x_n]$.
A travers cet isomorphisme, b et t se transforment respectivement en d et λ. On a donc

Proposition 2 *Si G est un groupe discret,*
$HC^*(G,k)$ est un facteur direct de $HC^*(k[G])$

1.4 Décomposition de $HC^*(G,k)$

Sur $A^{\otimes n+1}$, on a les opérateurs de face $\tilde{s}_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n)$. On considère le A-module $\Delta_{n+1} = \sum \tilde{s}_i A^{\otimes n}$ ($\Delta_1 = \{0\}$) qui est stable par β_0 car $\beta_0(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum\limits_0^n (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes \varepsilon(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n$.

Si $\mathcal{S}_n$ est le groupe des permutations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour $\psi \in C_G^{n+1}(G,k)$, on construit

$$\sigma\psi(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon\psi(g_{\gamma(0)} \otimes \cdots \otimes g_{\gamma(n)}).$$

$A^{\otimes n}/\Delta_n$ est projectif si 2 est inversible dans k :

si $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \varphi & & \\ & & A^{\otimes n}/\Delta_n & & \end{array}$, φ se prolonge à $A^{\otimes n}$ en $\tilde{\varphi}$ nulle sur Δ_n et l'on peut construire ψ telle que $\tilde{\varphi} = p\psi$; $\sigma\psi$ relève ψ.

De la résolution projective $\cdots \xrightarrow{\beta_0} A^{\otimes n+1}/\Delta_n \xrightarrow{\beta_0} \cdots\cdots \xrightarrow{\beta_0} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, il résulte que $H^*(G,k)$ est la cohomologie du complexe

$$C_\sigma^1(G,k) \xrightarrow{\beta} C_\sigma^2(G,k) \xrightarrow{\beta} \cdots\cdots \xrightarrow{\beta} C_\sigma^{n+1}(G,k) \xrightarrow{\beta} \cdots$$

où $C_\sigma^*(G,k)$ est le sous-complexe de $C_G^*(G,k)$ des fonctions nulles sur Δ_*. Comme toute forme linéaire alternée est totalement antisymétrique, si $\varphi \in C_\sigma^{n+1}(G,k)$,

$$\forall \gamma \in \mathcal{S}_{n+1}, \quad \varphi(g_{\gamma(0)} \otimes \cdots \otimes g_{\gamma(n)}) = \varepsilon(\gamma)\varphi(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n).$$

En particulier $\varphi(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = 0$ dès que $g_i = g_j$ pour deux indices distincts. On appelle cette résolution la résolution normale.

$$\sigma\beta\varphi(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i,\ \gamma} (-1)^i \varepsilon(\gamma)\varphi(g_{\gamma(0)} \otimes \cdots \otimes \widehat{g_{\gamma(i)}} \otimes \cdots \otimes g_{\gamma(n+1)})$$

En considérant $\gamma \longrightarrow \begin{pmatrix} i & \dots & n+1 \\ n+1 & \dots & n \end{pmatrix} \circ \gamma \circ \begin{pmatrix} \gamma(i) & \dots & n+1 \\ \gamma(i)+1 & \dots & \gamma(i) \end{pmatrix}_{[0,n]}$, il vient $\sigma\beta = \beta\sigma$ et donc φ est cohomologue à $\sigma\varphi$.

NB Si l'on muni G d'une relation de bon ordre telle que 1 soit le plus grand élément, $\varphi \in C_\sigma^{n+1}(G,k)$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur les $n+1$-uplés $g_0 < \cdots < g_n = 1$. Plus précisément, si $\mathcal{A}_{n+1} = \{g_0 < \cdots < g_n = 1\}$ muni de la différentielle

$$\check{\beta}_0(g_0 < \cdots < g_n = 1) = \beta'(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) + (-1)^n \varepsilon(\eta) {g_{n-1}}^{-1} g_{\eta(0)} \otimes \cdots \otimes 1$$

(η est la permutation qui classe ${g_{n-1}}^{-1}g_0, \cdots, {g_{n-1}}^{-1}g_{n-1}$), la restriction

$$C_\sigma^{n+1}(G,k) \longrightarrow C(\mathcal{A}_{n+1}, k)$$

est un isomorphisme de complexes.

NB On remarquera qu'à travers cette résolution, on voit que $H^n(G,k)$ s'injecte dans $HC^n(G,k)$.

Plus précisément, $B : H^*(G,k) \longrightarrow HC^{*+1}(G,k)$ est nul. De plus, si $\varphi \in H^n(G)$ est totalement antisymétrisé, il se relève en φ dans $H^n_\lambda(G)$.
De la suite exacte $0 \longrightarrow H^{n-2}_\lambda(G) \xrightarrow{S} H^n_\lambda(G) \xrightarrow{I} H^n(G) \xrightarrow{B} 0$, on tire:

Proposition 3 $HC^n(G,k) = \bigoplus_{i\geq 0} S^i H^{n-2i}(G,k) \simeq \bigoplus_{i\geq 0} H^{n-2i}(G,k)$

Notations

Etant donné une cochaine φ, on notera $\varphi(\cdots)$ sa réalisation homogène, $\varphi[\ldots]$ sa réalisation inhomogène et $\varphi\{\ldots\}$ sa présentation dans $C^{n+1}(k[G])$.

Si x est un point du groupe G, on note $\hat{x}$ sa classe de conjugaison, G_x son centralisateur et $\{x\}$ le sous-groupe engendré par x.

2 Décomposition de $HH^*(k[G])$

Définition 4 *On définit le groupoïde $Ad(G)$ dont les objets sont les éléments du groupe et $Hom(g_1,g_2) = \{\alpha \in G \mid \alpha^{-1}g_1\alpha = g_2\}$.*

Sur le complexe simplicial $Ad(G)_{(*)}$, on a les diférentielles :

$$d_i(g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} g_n) = (g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots g_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i\alpha_{i+1}} g_{i+1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} g_n) \qquad \alpha_{i+1}\circ\alpha_i = \alpha_i\alpha_{i+1}.$$

Si $\psi : Ad(G)_{(n)} \to k$, on lui associe

$$r(\psi) : \begin{array}{ccc} G^{n+1} & \to & k \\ x_0 \otimes \cdots \otimes x_n & \mapsto & \psi(g_0 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_n} g_n) \end{array}$$

avec $g_0 = (x_1 \cdots x_n)x_0$, $g_i = {x_i}^{-1} g_{i-1} x_i$. Il est immédiat de vérifier que r est un isomorphisme de complexes, d'où

Proposition 4 $HH^*(k[G]) = H^*(Ad(G),k)$

$Ad(G)_{(*)} = \prod_{\hat{x}\in <G>} Ad(G,\hat{x})_{(*)}$ où $Ad(G,\hat{x})$ est la sous-catégorie de $Ad(G)$ dont on réduit l'ensemble des objets à $\hat{x}$. On peut remarquer que si $\hat{x} = \hat{y}$, $Hom(x,y) \neq \emptyset$. Donc si l'on note G_x le centralisateur de x dans G, $Ad(G_x)$ est une sous-catégorie pleine de $Ad(G,\hat{x})$. L'inclusion simpliciale $Ad(G_x)_{(*)} \subset Ad(G,\hat{x})_{(*)}$ est donc une équivalence d'homotopie. Il en résulte :

Proposition 5 $HH^*(k[G]) = \prod_{\hat{x}\in <G>} H^*(G_x,k)$.

3 Décomposition de $HC^*(k[G])$

3.1 Groupoïde cyclique

Définition 5 *Etant donné un groupoïde $\mathcal{C}$, mettre une structure cyclique sur $\mathcal{C}$ correspond à se donner $\varepsilon_A \in Hom(A, A)$ pour tout objet $A \in \mathcal{C}$. On astreint alors les morphismes $\alpha \in Hom(A, B)$ à vérifier la relation $\alpha \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ \alpha$.*

Sur $\mathcal{C}_{(*)}$, on définit $\lambda(A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) = (-1)^n A_n \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_{n-1}$ où $\alpha_0 = \varepsilon_{A_0} \circ (\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1)^{-1} = (\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1)^{-1} \circ \varepsilon_{A_n}$. On peut alors voir un n-simplexe comme un chemin fermé (pointé) indexé par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $A_n \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$ avec $\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_0 = \varepsilon_{A_n}$.

On adjoint une structure cyclique à la catégorie $Ad(G)$ en posant $\varepsilon_g = g$; on a:

$$\lambda_0(g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} g_n) = (-1)^n g_n \xrightarrow{\alpha_0} g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} g_{n-1}$$

où $\alpha_0 = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1} g_0$ (cela correspond à la permutation circulaire sur les indices si on regarde les n-simplexes comme des chemins fermés).
Soit $C^{n+1}(k[G_x], x)$ l'ensemble des fonctions définies sur

$$\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n \in G^{n+1} \text{ tel que } x_0 \cdots x_n = x\}.$$

Si $C^{(*)}(Ad(G))$ désigne l'ensemble des applications de $C_{(*)}(Ad(G))$ dans k, l'isomorphisme $r : C^{(*)}(Ad(G)) \longrightarrow C^{*+1}(k[G])$ consiste à regarder les cochaines définies comme des chemins fermés au niveau des morphismes (r commute à d et λ).
NB La résolution normalisée n'ext pas stable par λ_0.

Enfin, l'inclusion $Ad(G_x, x)_{(*)} \subset Ad(G, \hat{x})_{(*)}$ induit une équivalence d'homotopie entre catégories cycliques.

Proposition 6 $HC^*(k[G]) = \prod_{\hat{x} \in <G>} HC^*(Ad(G_x, x)) = \prod_{\hat{x} \in <G>} HC^*(k[G_x], x)$

3.2 x d'ordre fini

Si $x = 1$, d'après les résultats du paragraphe **1.4**, $HC^n(k[G], 1) = \bigoplus_{i \geq 0} H^{n-2i}(G, k)$

Si x est d'ordre fini n, soit $K = \{x\}$ le sous-groupe engendré par x.
Si k est un $\mathbb{Q}$-module, pour tout $\mathbb{Z}[G]$-module M, on a

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(M, k) = Hom_{\mathbb{Q}[G]}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, k),$$

donc $H^*(G, k) = Ext^*_{\mathbb{Q}[G]}(\mathbb{Q}, k)$.
$\mathbb{Q}$ vu comme $\mathbb{Q}[K]$-module muni de l'action triviale admet la résolution projective suivante:

$$\cdots \xrightarrow{N_\tau} \mathbb{Q}[K] \xrightarrow{1-\tau} \mathbb{Q}[K] \xrightarrow{N_\tau} \cdots \xrightarrow{1-\tau} \mathbb{Q}[K] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

avec $\tau x^k = x^{k+1}$ et $N_\tau = 1 + \tau + \cdots + \tau^{n-1}$
N_τ et $1 - \tau$ sont premiers entre eux donc

$$H^n(K,k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $H^*(K,k)$ est la cohomologie du complexe $k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{n\ id} k \xrightarrow{0} k \longrightarrow \cdots$

NB En fait, comme k est un $\mathbb{Q}$-module, $k = \mathbb{Q}[K] \otimes_{\mathbb{Z}[K]} k$ est $\mathbb{Z}[K]$-injectif.

On pose $\Gamma_x = G_x/\{x\}$. Soit p le projecteur $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i$ de $\mathbb{Q}[G]$: il vérifie $\varepsilon(p) = 1$ et $pa = \varepsilon(a)p$ pour tout $a \in \mathbb{Q}[K]$.

Si $\varphi \in Hom_{\mathbb{Q}[G_x]}(\mathbb{Q}[G_x]^{n+1}, k)$, on définit $s\varphi \in Hom_{\mathbb{Q}[\Gamma_x]}(\mathbb{Q}[\Gamma_x]^{n+1}, k)$ par

$$s\varphi(y_0 \otimes \cdots \otimes y_n) = \varphi(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varphi(px_0 \otimes \cdots \otimes px_n)$$

où x_i relève y_i dans G_x; c'est indépendant du choix d'un tel relèvement.

Donc s réalise un isomorphisme en cohomologie de Hochschild. On en déduit en cohomologie cyclique l'isomorphisme

$$HC^*(k[G],x) = HC^*\left(Ad(G_x,x)\right) = HC^*\left(Ad(\Gamma_x,1)\right).$$

Proposition 7 *Si* $\hat{x} \in < G >'$, $HC^n(k[G_x],x) = \bigoplus\limits_{i \geq 0} H^{n-2i}(\Gamma_x,k)$.

3.3 x d'ordre infini

On se donne un élément $x \in G$ tel que $\hat{x} \in < G >''$.

Soit $\pi : H^n(k[\Gamma_x],1) \longrightarrow H^n_\lambda(k[G_x],x)$ qui à $\psi \in H^n(\Gamma_x)$ associé

$$\pi(\psi) : g_0 \otimes \cdots \otimes g_n \longrightarrow \delta_{g_0 \cdots g_n,1} \psi(\dot{g}_0 \otimes \cdots \otimes \dot{g}_n).$$

Proposition 8 $\pi : H^n(k[\Gamma_x],1) \longrightarrow HC^n(k[G_x],x)$ *est un isomorphisme.*

- π *est surjective*

$\star$ Si φ est un cocycle dans $\mathcal{C}^{n+1}_\lambda(k[G],x)$, φ est cohomologue à un cocycle normalisé ψ (i-e tel que $\psi(\cdots)$ soit totalement antisymétrisé): en effet,

$$\mathcal{C}^{n+2}(k[G_x],x) \xrightarrow{B} \mathcal{C}^{n+1}(k[G_x])$$

vérifie $ImB = \mathcal{C}^{n+1}_\lambda$ et si $\phi \in \mathcal{C}^{n+2}(k[G_x],x)$ est un cocycle totalement antisymétrisée , $x_0 \ldots x_n = x$, $g_i = x_0 \ldots x_i$

$$\begin{aligned} B\phi\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n\} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n(n-i)} \phi(g_i \otimes g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_n \otimes xg_0 \otimes \cdots \otimes xg_i) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \phi(xg_0 \otimes \cdots \otimes xg_i \otimes g_i \otimes \cdots \otimes g_n) \end{aligned}$$

$\star$ De la résolution $0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\{x\}] \xrightarrow{x-1} \mathbb{Z}[\{x\}] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, on tire

$$H^n(\mathbb{Z}, k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$\star$ Si $\varphi \in C_\lambda^{n+1}(k[G_x], x)$ est un cocycle normalisé et $g_0, , \ldots, g_n \in G_x$, on définit $\theta \in H^n(\mathbb{Z}, k)$ par

$$\theta(k_0 \otimes \cdots \otimes k_n) = \varphi(x^{k_0} g_0 \otimes \cdots \otimes x^{k_n} g_n)$$

Il existe $\eta \in C_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}, k)$ tel que $\theta = b\eta = b\sigma\eta = \sigma b\eta$ (il est d'ailleurs facile de voir que si η est totalement antisymétrisée, $\tau_{i,i+1} b\eta = -b\eta$, d'où $\sigma b\eta = b\eta$).
En utilisant $\lambda\varphi(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = \varphi(x^{-1} g_n \otimes \cdots \otimes g_{n-1})$, il vient

$$\theta(k_0 \otimes \cdots \otimes k_n) = (-1)^n \theta(k_n \otimes k_0 \otimes \cdots \otimes k_{n-1}) = (-1)^n \theta(k_n - 1 \otimes k_0 \otimes \cdots \otimes k_{n-1}).$$

Donc $\varphi\{x_0 x^{k_0}, \cdots, x_n x^{k_n}\} = \varphi\{x_0, \cdots, x_n\}$ si $\sum k_i = 0$.

Si les éléments $y_0, \ldots, y_n$ de Γ_x se relèvent en $x_0, \ldots, x_n$ dans G_x tels que $x_0 \cdots x_n = x$; on pose alors $\psi\{y_0, \ldots, y_n\} = \varphi\{x_0, \ldots, x_n\}$; c'est indépendant du choix de tels relèvements et $\pi(\psi) = \varphi$ dans $H_\lambda^n(k[G_x], x)$.

• π *est injective*

Si $\psi \in H^n(k[\Gamma_x, 1)$ est tel que $\pi(\psi)$ soit un cobord, on peut toujours supposer $\pi(\psi) = bB(\varphi)$.

3.4 Décomposition

Theorème 1 *Si G est un groupe discret,*

$$HC^n(\mathbb{C}[G]) = \prod_{\hat{x} \in <G>'} \left(\bigoplus_{i \geq 0} H^{n-2i}(\Gamma_x, \mathbb{C}) \right) \prod_{\hat{x} \in <G>''} \left(H^n(\Gamma_x, \mathbb{C}) \right).$$

Références

[Bu] D. BURGHELEA The cyclic homology of the group rings Comment Math. Helv. 60 (1985) 354-365.

[Ka] M. KAROUBI Homologie cyclique des groupes et des algèbres C.R.Acad. Sc. Paris t 297 série I, 381-384.