HAL
open science

Décomposition de HC*(k[G]) d'apr'es D. Burghelea

Etienne Blanchard

▶ To cite this version:

Etienne Blanchard. Décomposition de HC*(k[G]) d'apr'es D. Burghelea. 1991. hal-00922906

HAL Id: hal-00922906
https://hal.science/hal-00922906

Preprint submitted on 31 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décomposition de $HC^*(k[G])$

d'après D. Burghelea

par Etienne Blanchard

0 Introduction

Etant donné G un groupe discret, pour x dans G, notons G_x son centralisateur, $\{x\}$ le sous-groupe engendré par x et Γ_x le groupe quotient $G_x/\{x\}$. M.Karoubi a montré dans [Ka] que $HC^*(G,k)$ est un facteur direct de $HC^*(k[G])$. Par la suite, D.Burghelea a calculé dans [Bu] l'homologie de Hochschild $HH_*(\mathbb{C}[G])$ et l'homologie cyclique $HC_*(\mathbb{C}[G])$ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[G]$ du groupe en utilisant les suites de Gysin associées aux fibrations $B\Gamma_x \to B\Gamma_x \times BS^1 \to BS^1$ pour x d'ordre fini et $BG_x \to B\Gamma_x \to BS^1$ pour x d'ordre infini.

Nous nous proposons d'exposer les résultats cohomologiques correspondants à l'aide de preuves algébriques. Ils reposent de manière essentielle sur la notion de groupoïde cyclique introduite dans le troisième paragraphe.

Je tiens à remercier G.Skandalis qui m'a aidé à préparer cet exposé.

1 Cohomologie de groupes

1.1 Complexe simplicial associé à un groupoïde

Définition 1 *Un groupoïde est une petite catégorie $\mathcal{C}$ dont tous les morphismes sont des isomorphismes.*

A un groupoïde $\mathcal{C}$, on associe son nerf simplicial $\mathcal{C}_{(*)}$. Les n-simplexes sont de la forme

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$$

où les A_i sont des objets et $\alpha_i \in Hom(A_{i-1}, A_i)$.
On a les dégénerescences

$$d_i(A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) = A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}\circ\alpha_i} A_{i+1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$$

et les opérateurs de face

$$s_i(A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) = A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots A_i \xrightarrow{id} A_i \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n.$$

Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde tel que $\forall A, B \in objet(\mathcal{C})$, $Hom(A,B) \neq \emptyset$, alors

$$h : (A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) \longrightarrow (A \xrightarrow{id} A \xrightarrow{\beta_1} \cdots \xrightarrow{\beta_n} A)$$

où l'on a choisi un $y_i \in Hom(A, A_i)$ et $\beta_i = {y_i}^{-1}\alpha_i y_{i-1}$ réalise une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie pleine réduite à un seul objet $\mathcal{C}_A$ dont les morphismes sont ceux de $\mathcal{C}$ ramenés dans $Hom(A,A)$.

1.2 Cohomologie de Hochschild

Définition 2 *Soit G un groupe et k un $\mathbb{Z}[G]$-module (en particulier tout anneau avec unité muni de l'action triviale). On pose $H^*(G,k) = Ext^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, k)$.*

Pour calculer les groupes de cohomologie d'un groupe, il suffit donc de trouver des résolutions projectives de $\mathbb{Z}$ au dessus de $\mathbb{Z}[G] = A$.

• résolution standard homogène HO_*

$$\cdots \xrightarrow{\beta_0} A^{\otimes n+1} \xrightarrow{\beta_0} \cdots\cdots \xrightarrow{\beta_0} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \text{ avec}$$

$$\beta_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = \sum_{i=0}^{n} g_0 \otimes \cdots \otimes \hat{g}_i \otimes \cdots \otimes g_n,$$

$$\varepsilon(g) = 1 \text{ et } g(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = gg_0 \otimes \cdots \otimes gg_n.$$

Donc $H^*(G,k)$ est la cohomologie de

$$C^1_G(G,k) \xrightarrow{\beta} C^2_G(G,k) \xrightarrow{\beta} \cdots\cdots \xrightarrow{\beta} C^{n+1}_G(G,k) \xrightarrow{\beta} \cdots$$

où $C^n_G(G,k) = Hom_A(A^{\otimes n}, k)$ et $\beta\varphi = \varphi \circ \beta_0$.

Remarque

Etant donné X un ensemble d'indices et pour tout $x \in X$ un morphisme $\varphi_x \in Hom_A(A^{\otimes n}, k)$ tel que pour tout $a \in A^{\otimes n}$ l'ensemble des $x \in X$ tel que $\varphi_x(a)$ soit non nul est fini, on peut définir

$$\sum_{x \in X} \varphi_x \in Hom_A(A^{\otimes n}, k)$$

• résolution standard non-homogène IHO_*

$$\cdots \xrightarrow{b_0} A \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{b_0} \cdots\cdots \xrightarrow{b_0} A \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où $A \otimes A^{\otimes n}$ est le A-module libre engendré par $A^{\otimes n}$,

$$b_0[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \alpha_1[\alpha_2, \ldots, \alpha_n] + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [\alpha_0, \ldots, \alpha_i\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n] + (-1)^n [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]\alpha_n$$

($A \otimes A^n$ est muni d'une action triviale à droite) et $\nu([\ ]) = 1$.
$H^*(G,k)$ est aussi la cohomologie du complexe

$$k \xrightarrow{b} C^1(G,k) \xrightarrow{b} \cdots\cdots \xrightarrow{b} C^n(G,k) \xrightarrow{b} \cdots$$

où $C^n(G,k) = Hom(A^{\otimes n}, k)$ et $b\varphi = \varphi \circ b_0$.

Si D_{n+1} désigne le sous-module de $A^{\otimes n+1}$ engendré par les $g_0 \otimes \cdots \otimes g_n$ avec $g_i = g_{i+1}$ pour un i $(0 \leq i \leq n-1)$,alors D_{*+1} est stable par β_0; on en déduit la résolution libre normalisée homogène de $\mathbb{Z}$ quotient de HO_{*+1} par D_{*+1}. On peut de même définir la résolution normalisée non-homogène à l'aide du sous-complexe ID_{*+1} où ID_{n+1} est engendré par les $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, l'un des α_i étant égal à 1.

Remarque importante

Si $\mathcal{C}(G)$ est le groupoïde dont l'ensemble des objet est le groupe G et tel que $Hom(g_1, g_2) = \{{g_1}^{-1} g_2\}$, on voit que les deux résolutions HO_* et IHO_* sont deux réalisations du complexe simplicial $\mathcal{C}_{(*)}(G)$ selon qu'on le regarde au niveau des objets ou des morphismes.

1.3 Cohomologie cyclique

Si G est un groupe discret et k une $\mathbb{Q}$-algèbre *commutative* (en pratique $k = \mathbb{C}$), on note $k[G]$ la k-algèbre engendré par les fonctions caractéristiques des points du groupe munie du produit de convolution (on identifiera par la suite un point et sa fonction caractéristique).

On pose [1]
$$\begin{aligned} \lambda_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) &= (-1)^n g_n \otimes g_0 \otimes \cdots \otimes g_{n-1} \\ \beta'_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} g_0 \otimes \cdots \otimes \hat{g}_i \otimes \cdots \otimes g_n \\ s_0(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) &= g_0 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes g_n \end{aligned}$$

Soit $C^{**}(G)$ le bicomplexe:
$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow\beta & & \uparrow -\beta' & & \uparrow\beta & \\ & C^3_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^3_G(G,k) & \xrightarrow{N_\lambda} & C^3_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} \\ & \uparrow\beta & & \uparrow -\beta' & & \uparrow\beta & \\ & C^2_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^2_G(G,k) & \xrightarrow{N_\lambda} & C^2_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} \\ & \uparrow\beta & & \uparrow -\beta' & & \uparrow\beta & \\ & C^1_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^1_G(G,k) & \xrightarrow{N_\lambda} & C^1_G(G,k) & \xrightarrow{1-\lambda} \end{array}$$

Définition 3 *On définit $HC^*(G,k)$ comme la cohomologie totale du bicomplexe $C^{**}(G)$*

[1] le complexe D_{*+1} n'est pas stable par β'_0 et λ_0.

On peut encore voir la cohomologie cyclique de G comme la cohomologie totale du bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccc}
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & \\
C^3(G,k) & \xrightarrow{1-t} & C^3(G,k) & \xrightarrow{N_t} & C^3(G,k) & \xrightarrow{1-t} \\
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & \\
C^2(G,k) & \xrightarrow{1-t} & C^2(G,k) & \xrightarrow{N_t} & C^2(G,k) & \xrightarrow{1-t} \\
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & \\
C^1(G,k) & \xrightarrow{1-t} & C^1(G,k) & \xrightarrow{N_t} & C^1(G,k) & \xrightarrow{1-t} \\
\uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & \\
k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & k & \xrightarrow{0}
\end{array}$$

où $t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}]$ avec $\alpha_0 = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{-1}$.

On définit $< G >$ (respectivement $< G >'$,$< G >''$) l'ensemble des classes de conjugaison (respectivement finies, infinies). Si x est un élément de G, on notera $\hat{x}$ sa classe de conjugaison.

Soit $C^{n+1}(k[G], \hat{x})$ l'ensemble des fonctions à valeur dans k localisées en $\hat{x}$, i-e à support dans $\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n \in G^{n+1}$ tel que $x_0 \cdots x_n \in \hat{x}\}$(il est stable par β_0), alors $C^{*+1}(k[G], \hat{x}) \subset C^*(k[G], k[G]^*)$ est stable par d, d', $1 - \lambda$ les dérivations usuelles en cohomologie cyclique:

$$\begin{aligned}
d'_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) =& \sum_{i=0}^{n-1} x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n \\
d_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) =& d'_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) + x_n x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \\
\lambda_0(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) =& (-1)^n x_n \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}
\end{aligned}$$

Il en résulte :

Proposition 1 *Si G est un groupe discret,*

$$C^n(G) = C^n(k[G], k[G]^*) = C^{n+1}(k[G]) = \prod_{\hat{x} \in <G>} C^{n+1}(k[G], \hat{x}).$$

En particulier comme $\hat{1} = \{1\}$, on a $C^*(G) \simeq C^{*+1}(k[G], \hat{1})$ de la façon suivante:
si $\psi \in C^n(G,k)$, on définit $\tilde{\psi}\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n\} = \delta_{x_0 \ldots x_n, 1} \psi[x_1, \ldots, x_n]$.
A travers cet isomorphisme, b et t se transforment respectivement en d et λ. On a donc

Proposition 2 *Si G est un groupe discret,*
$HC^*(G,k)$ est un facteur direct de $HC^*(k[G])$

1.4 Décomposition de $HC^*(G,k)$

Sur $A^{\otimes n+1}$, on a les opérateurs de face $\tilde{s}_i(a_0\otimes\cdots\otimes a_n)=(a_0\otimes\cdots\otimes a_i\otimes a_i\otimes\cdots\otimes a_n)$. On considère le A-module $\Delta_{n+1}=\sum\tilde{s}_iA^{\otimes n}$ ($\Delta_1=\{0\}$) qui est stable par β_0 car $\beta_0(a_0\otimes\cdots\otimes a_n)=\sum\limits_0^n(-1)^ia_0\otimes\cdots\otimes\varepsilon(a_i)\otimes\cdots\otimes a_n$.

Si $\mathcal{S}_n$ est le groupe des permutations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour $\psi\in C_G^{n+1}(G,k)$, on construit

$$\sigma\psi(g_0\otimes\cdots\otimes g_n)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\gamma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon\psi(g_{\gamma(0)}\otimes\cdots\otimes g_{\gamma(n)}).$$

$A^{\otimes n}/\Delta_n$ est projectif si 2 est inversible dans k :

si $\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow\varphi & & \\ & & A^{\otimes n}/\Delta_n & & \end{array}$, φ se prolonge à $A^{\otimes n}$ en $\tilde{\varphi}$ nulle sur Δ_n et l'on peut construire ψ telle que $\tilde{\varphi}=p\psi$; $\sigma\psi$ relève ψ.

De la résolution projective $\cdots\xrightarrow{\beta_0}A^{\otimes n+1}/\Delta_n\xrightarrow{\beta_0}\cdots\cdots\xrightarrow{\beta_0}A\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\longrightarrow 0$, il résulte que $H^*(G,k)$ est la cohomologie du complexe

$$C_\sigma^1(G,k)\xrightarrow{\beta}C_\sigma^2(G,k)\xrightarrow{\beta}\cdots\cdots\xrightarrow{\beta}C_\sigma^{n+1}(G,k)\xrightarrow{\beta}\cdots$$

où $C_\sigma^*(G,k)$ est le sous-complexe de $C_G^*(G,k)$ des fonctions nulles sur Δ_*. Comme toute forme linéaire alternée est totalement antisymétrique, si $\varphi\in C_\sigma^{n+1}(G,k)$,

$$\forall\gamma\in\mathcal{S}_{n+1},\quad \varphi(g_{\gamma(0)}\otimes\cdots\otimes g_{\gamma(n)})=\varepsilon(\gamma)\varphi(g_0\otimes\cdots\otimes g_n).$$

En particulier $\varphi(g_0\otimes\cdots\otimes g_n)=0$ dès que $g_i=g_j$ pour deux indices distincts. On appelle cette résolution la résolution normale.

$$\sigma\beta\varphi(g_0\otimes\cdots\otimes g_n)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i,\ \gamma}(-1)^i\varepsilon(\gamma)\varphi(g_{\gamma(0)}\otimes\cdots\otimes\widehat{g_{\gamma(i)}}\otimes\cdots\otimes g_{\gamma(n+1)})$$

En considérant $\gamma\longrightarrow\begin{pmatrix} i & \dots & n+1\\ n+1 & \dots & n\end{pmatrix}\circ\gamma\circ\begin{pmatrix}\gamma(i) & \dots & n+1\\ \gamma(i)+1 & \dots & \gamma(i)\end{pmatrix}_{[0,n]}$, il vient $\sigma\beta=\beta\sigma$ et donc φ est cohomologue à $\sigma\varphi$.

NB Si l'on muni G d'une relation de bon ordre telle que 1 soit le plus grand élément, $\varphi\in C_\sigma^{n+1}(G,k)$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur les $n+1$-uplés $g_0<\cdots<g_n=1$. Plus précisément, si $\mathcal{A}_{n+1}=\{g_0<\cdots<g_n=1\}$ muni de la différentielle

$$\check{\beta}_0(g_0<\cdots<g_n=1)=\beta'(g_0\otimes\cdots\otimes g_n)+(-1)^n\varepsilon(\eta){g_{n-1}}^{-1}g_{\eta(0)}\otimes\cdots\otimes 1$$

(η est la permutation qui classe ${g_{n-1}}^{-1}g_0,\cdots,{g_{n-1}}^{-1}g_{n-1}$), la restriction

$$C_\sigma^{n+1}(G,k)\longrightarrow C(\mathcal{A}_{n+1},k)$$

est un isomorphisme de complexes.

NB On remarquera qu'à travers cette résolution, on voit que $H^n(G,k)$ s'injecte dans $HC^n(G,k)$.

Plus précisément, $B : H^*(G,k) \longrightarrow HC^{*+1}(G,k)$ est nul. De plus, si $\varphi \in H^n(G)$ est totalement antisymétrisé, il se relève en φ dans $H^n_\lambda(G)$.
De la suite exacte $0 \longrightarrow H^{n-2}_\lambda(G) \xrightarrow{S} H^n_\lambda(G) \xrightarrow{I} H^n(G) \xrightarrow{B} 0$, on tire:

Proposition 3 $HC^n(G,k) = \underset{i\geq 0}{\oplus} S^i H^{n-2i}(G,k) \simeq \underset{i\geq 0}{\oplus} H^{n-2i}(G,k)$

Notations

Etant donné une cochaine φ, on notera $\varphi(\cdots)$ sa réalisation homogène, $\varphi[\ldots]$ sa réalisation inhomogène et $\varphi\{\ldots\}$ sa présentation dans $C^{n+1}(k[G])$.

Si x est un point du groupe G, on note $\hat{x}$ sa classe de conjugaison, G_x son centralisateur et $\{x\}$ le sous-groupe engendré par x.

2 Décomposition de $HH^*(k[G])$

Définition 4 *On définit le groupoïde $Ad(G)$ dont les objets sont les éléments du groupe et $Hom(g_1,g_2) = \{\alpha \in G \mid \alpha^{-1}g_1\alpha = g_2\}$.*

Sur le complexe simplicial $Ad(G)_{(*)}$, on a les diférentielles :

$$d_i(g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} g_n) = (g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots g_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i\alpha_{i+1}} g_{i+1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} g_n) \qquad \alpha_{i+1}\circ\alpha_i = \alpha_i\alpha_{i+1}.$$

Si $\psi : Ad(G)_{(n)} \to k$, on lui associe

$$r(\psi) : \begin{array}{ccc} G^{n+1} & \to & k \\ x_0 \otimes \cdots \otimes x_n & \mapsto & \psi(g_0 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_n} g_n) \end{array}$$

avec $g_0 = (x_1 \cdots x_n)x_0$, $g_i = {x_i}^{-1}g_{i-1}x_i$. Il est immédiat de vérifier que r est un isomorphisme de complexes, d'où

Proposition 4 $HH^*(k[G]) = H^*(Ad(G),k)$

$Ad(G)_{(*)} = \prod_{\hat{x}\in<G>} Ad(G,\hat{x})_{(*)}$ où $Ad(G,\hat{x})$ est la sous-catégorie de $Ad(G)$ dont on réduit l'ensemble des objets à $\hat{x}$. On peut remarquer que si $\hat{x} = \hat{y}$, $Hom(x,y) \neq \emptyset$. Donc si l'on note G_x le centralisateur de x dans G, $Ad(G_x)$ est une sous-catégorie pleine de $Ad(G,\hat{x})$. L'inclusion simpliciale $Ad(G_x)_{(*)} \subset Ad(G,\hat{x})_{(*)}$ est donc une équivalence d'homotopie. Il en résulte :

Proposition 5 $HH^*(k[G]) = \prod_{\hat{x}\in<G>} H^*(G_x,k)$.

3 Décomposition de $HC^*(k[G])$

3.1 Groupoïde cyclique

Définition 5 *Etant donné un groupoïde $\mathcal{C}$, mettre une structure cyclique sur $\mathcal{C}$ correspond à se donner $\varepsilon_A \in Hom(A,A)$ pour tout objet $A \in \mathcal{C}$. On astreint alors les morphismes $\alpha \in Hom(A,B)$ à vérifier la relation $\alpha \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ \alpha$.*

Sur $\mathcal{C}_{(*)}$, on définit $\lambda(A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n) = (-1)^n A_n \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_{n-1}$ où $\alpha_0 = \varepsilon_{A_0} \circ (\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1)^{-1} = (\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1)^{-1} \circ \varepsilon_{A_n}$. On peut alors voir un n-simplexe comme un chemin fermé (pointé) indexé par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $A_n \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$ avec $\alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_0 = \varepsilon_{A_n}$.

On adjoint une structure cyclique à la catégorie $Ad(G)$ en posant $\varepsilon_g = g$; on a:

$$\lambda_0(g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} g_n) = (-1)^n g_n \xrightarrow{\alpha_0} g_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} g_{n-1}$$

où $\alpha_0 = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1} g_0$ (cela correspond à la permutation circulaire sur les indices si on regarde les n-simplexes comme des chemins fermés).
Soit $C^{n+1}(k[G_x], x)$ l'ensemble des fonctions définies sur

$$\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n \in G^{n+1} \text{ tel que } x_0 \cdots x_n = x\}.$$

Si $C^{(*)}(Ad(G))$ désigne l'ensemble des applications de $C_{(*)}(Ad(G))$ dans k, l'isomorphisme $r : C^{(*)}(Ad(G)) \longrightarrow C^{*+1}(k[G])$ consiste à regarder les cochaines définies comme des chemins fermés au niveau des morphismes (r commute à d et λ).
NB La résolution normalisée n'ext pas stable par λ_0.

Enfin, l'inclusion $Ad(G_x, x)_{(*)} \subset Ad(G, \hat{x})_{(*)}$ induit une équivalence d'homotopie entre catégories cycliques.

Proposition 6 $HC^*(k[G]) = \prod_{\hat{x} \in <G>} HC^*(Ad(G_x, x)) = \prod_{\hat{x} \in <G>} HC^*(k[G_x], x)$

3.2 x d'ordre fini

Si $x = 1$, d'après les résultats du paragraphe **1.4**, $HC^n(k[G], 1) = \bigoplus_{i \geq 0} H^{n-2i}(G, k)$

Si x est d'ordre fini n, soit $K = \{x\}$ le sous-groupe engendré par x.
Si k est un $\mathbb{Q}$-module, pour tout $\mathbb{Z}[G]$-module M, on a

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(M, k) = Hom_{\mathbb{Q}[G]}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, k),$$

donc $H^*(G, k) = Ext^*_{\mathbb{Q}[G]}(\mathbb{Q}, k)$.
$\mathbb{Q}$ vu comme $\mathbb{Q}[K]$-module muni de l'action triviale admet la résolution projective suivante:

$$\cdots \xrightarrow{N_\tau} \mathbb{Q}[K] \xrightarrow{1-\tau} \mathbb{Q}[K] \xrightarrow{N_\tau} \cdots \xrightarrow{1-\tau} \mathbb{Q}[K] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

avec $\tau x^k = x^{k+1}$ et $N_\tau = 1 + \tau + \cdots + \tau^{n-1}$
N_τ et $1 - \tau$ sont premiers entre eux donc

$$H^n(K,k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $H^*(K,k)$ est la cohomologie du complexe $k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{n\ id} k \xrightarrow{0} k \longrightarrow \cdots$

NB En fait, comme k est un $\mathbb{Q}$-module, $k = \mathbb{Q}[K] \otimes_{\mathbb{Z}[K]} k$ est $\mathbb{Z}[K]$-injectif.

On pose $\Gamma_x = G_x/\{x\}$. Soit p le projecteur $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x^i$ de $\mathbb{Q}[G]$: il vérifie $\varepsilon(p) = 1$ et $pa = \varepsilon(a)p$ pour tout $a \in \mathbb{Q}[K]$.

Si $\varphi \in Hom_{\mathbb{Q}[G_x]}(\mathbb{Q}[G_x]^{n+1}, k)$, on définit $s\varphi \in Hom_{\mathbb{Q}[\Gamma_x]}(\mathbb{Q}[\Gamma_x]^{n+1}, k)$ par

$$s\varphi(y_0 \otimes \cdots \otimes y_n) = \varphi(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varphi(px_0 \otimes \cdots \otimes px_n)$$

où x_i relève y_i dans G_x; c'est indépendant du choix d'un tel relèvement.

Donc s réalise un isomorphisme en cohomologie de Hochschild. On en déduit en cohomologie cyclique l'isomorphisme

$$HC^*(k[G], x) = HC^*\left(Ad(G_x, x)\right) = HC^*\left(Ad(\Gamma_x, 1)\right).$$

Proposition 7 *Si $\hat{x} \in < G >'$, $HC^n(k[G_x], x) = \bigoplus_{i \geq 0} H^{n-2i}(\Gamma_x, k)$.*

3.3 x d'ordre infini

On se donne un élément $x \in G$ tel que $\hat{x} \in < G >''$.

Soit $\pi : H^n(k[\Gamma_x], 1) \longrightarrow H^n_\lambda(k[G_x], x)$ qui à $\psi \in H^n(\Gamma_x)$ associé

$$\pi(\psi) : g_0 \otimes \cdots \otimes g_n \longrightarrow \delta_{g_0 \cdots g_n, 1}\psi(\dot{g}_0 \otimes \cdots \otimes \dot{g}_n).$$

Proposition 8 *$\pi : H^n(k[\Gamma_x], 1) \longrightarrow HC^n(k[G_x], x)$ est un isomorphisme.*

• *π est surjective*

$\star$ Si φ est un cocycle dans $\mathcal{C}^{n+1}_\lambda(k[G], x)$, φ est cohomologue à un cocycle normalisé ψ (i-e tel que $\psi(\cdots)$ soit totalement antisymétrisé): en effet,

$$\mathcal{C}^{n+2}(k[G_x], x) \xrightarrow{B} \mathcal{C}^{n+1}(k[G_x])$$

vérifie $ImB = \mathcal{C}^{n+1}_\lambda$ et si $\phi \in \mathcal{C}^{n+2}(k[G_x], x)$ est un cocycle totalement antisymétrisée , $x_0 \ldots x_n = x$, $g_i = x_0 \ldots x_i$

$$\begin{aligned} B\phi\{x_0 \otimes \cdots \otimes x_n\} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n(n-i)} \phi(g_i \otimes g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_n \otimes xg_0 \otimes \cdots \otimes xg_i) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \phi(xg_0 \otimes \cdots \otimes xg_i \otimes g_i \otimes \cdots \otimes g_n) \end{aligned}$$

$\star$ De la résolution $0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\{x\}] \xrightarrow{x-1} \mathbb{Z}[\{x\}] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, on tire

$$H^n(\mathbb{Z}, k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$\star$ Si $\varphi \in C_\lambda^{n+1}(k[G_x], x)$ est un cocycle normalisé et $g_0, , \ldots, g_n \in G_x$, on définit $\theta \in H^n(\mathbb{Z}, k)$ par

$$\theta(k_0 \otimes \cdots \otimes k_n) = \varphi(x^{k_0} g_0 \otimes \cdots \otimes x^{k_n} g_n)$$

Il existe $\eta \in C_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}, k)$ tel que $\theta = b\eta = b\sigma\eta = \sigma b\eta$ (il est d'ailleurs facile de voir que si η est totalement antisymétrisée, $\tau_{i,i+1} b\eta = -b\eta$, d'où $\sigma b\eta = b\eta$).
En utilisant $\lambda\varphi(g_0 \otimes \cdots \otimes g_n) = \varphi(x^{-1} g_n \otimes \cdots \otimes g_{n-1})$, il vient

$$\theta(k_0 \otimes \cdots \otimes k_n) = (-1)^n \theta(k_n \otimes k_0 \otimes \cdots \otimes k_{n-1}) = (-1)^n \theta(k_n - 1 \otimes k_0 \otimes \cdots \otimes k_{n-1}).$$

Donc $\varphi\{x_0 x^{k_0}, \cdots, x_n x^{k_n}\} = \varphi\{x_0, \cdots, x_n\}$ si $\sum k_i = 0$.

Si les éléments $y_0, \ldots, y_n$ de Γ_x se relèvent en $x_0, \ldots, x_n$ dans G_x tels que $x_0 \cdots x_n = x$; on pose alors $\psi\{y_0, \ldots, y_n\} = \varphi\{x_0, \ldots, x_n\}$; c'est indépendant du choix de tels relèvements et $\pi(\psi) = \varphi$ dans $H_\lambda^n(k[G_x], x)$.

• π *est injective*

Si $\psi \in H^n(k[\Gamma_x, 1)$ est tel que $\pi(\psi)$ soit un cobord, on peut toujours supposer $\pi(\psi) = bB(\varphi)$.

3.4 Décomposition

Theorème 1 *Si G est un groupe discret,*

$$HC^n(\mathbb{C}[G]) = \prod_{\hat{x} \in <G>'} \left(\bigoplus_{i \geq 0} H^{n-2i}(\Gamma_x, \mathbb{C}) \right) \prod_{\hat{x} \in <G>''} \left(H^n(\Gamma_x, \mathbb{C}) \right).$$

Références

[Bu] D. BURGHELEA The cyclic homology of the group rings Comment Math. Helv. 60 (1985) 354-365.

[Ka] M. KAROUBI Homologie cyclique des groupes et des algèbres C.R.Acad. Sc. Paris t 297 série I, 381-384.