



HAL
open science

Algorithme pour de nouvelles bornes de la fiabilité des systèmes (h,k) -contigus-sur- (m,n)

Zineb Azouz

► **To cite this version:**

Zineb Azouz. Algorithme pour de nouvelles bornes de la fiabilité des systèmes (h,k) -contigus-sur- (m,n) . 2013. hal-00922710

HAL Id: hal-00922710

<https://hal.science/hal-00922710>

Submitted on 30 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algorithme pour de nouvelles bornes de la fiabilité des systèmes (h, k) -contigus-sur- (m, n)

Zineb Azouz

Université de Constantine 1, département de Mathématiques,
Route d'Aïn-El-Bey, Constantine-Algérie.
zineb.azouz@gmail.com

Résumé

Les systèmes (h, k) -contigus-sur- (m, n) consistent en plaques rectangulaires de composants, de taille $m \times n$, qui sont en panne ssi sont en panne tous les composants d'un sous rectangle de taille $h \times k$. Nous nous limiterons au cas où ces composants sont indépendants. Dans [2] est donné un calcul de minorant de la fiabilité de tels systèmes dans le cas de plaques carrées. Utilisant une méthode exposée dans [1], nous proposons des minorants meilleurs que ceux de [2] en nous appuyant sur un calcul exact fourni par un algorithme, dit "des colonnes consécutives", qui exige la condition supplémentaire $n \leq 2k$. Ces minorants sont, pour les plaques carrées, meilleurs que ceux de [2].

Mots clés : Plaques bidimensionnelles, minorant de la fiabilité, contigus, algorithme des colonnes consécutives.

Summary

(h, k) -contiguous-sur- (m, n) systems consist in rectangular sheets of components, of size $m \times n$, such that the system fails iff all components in a sub-rectangle of size $h \times k$ are failing. In [2] has been given the computation of a lower bound for the reliability for such systems, in case of square sheets. We use a method presented in [1] to propose lower bounds, which, in case of square sheets, are better than these in [2]. For this purpose we rely on an algorithm, called "consecutive columns algorithm", of exact computation of reliability, under the additive condition $n \leq 2k$.

Key words : Reliability, two-dimensional sheet, lower bound for reliability, contiguous, consecutive columns algorithm.

1 Introduction

Un système (h, k) -contigus-sur- (m, n) consiste en une plaque rectangulaire, en chaque point (i, j) ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) de laquelle est placé un compo-

sant qui peut être en service ou en panne. La plaque entière est en panne si et seulement si il existe un sous-rectangle, de $h \times k$ composants, qui sont tous en panne.

On sait que le calcul exact de la fiabilité pour de tels systèmes présente, dès que la dimension totale des systèmes augmente, des problèmes de complexité algorithmique importants.

En [1], nous avons proposé, dans le cas de composants indépendants, une méthode de calcul de minorants de la fiabilité pour de tels systèmes (que nous avons alors dénommés (h, k) -consécutifs-sur- (m, n) , par analogie avec la terminologie classique dans le cas unidimensionnel).

Le principe de calcul de ces minorants repose sur le recouvrement de la plaque rectangulaire de taille $m \times n$ par des blocs qui sont eux mêmes de taille $m \times b$ telle que le calcul explicite de la fiabilité y soit possible.

Dans la section 2 de cet article, nous fournissons le principe de ce calcul exact. Dans la section 3, nous en donnons une transcription en vue d'un traitement algorithmique par récurrence sur m (algorithme des colonnes consécutives dont le programme en langage C est donné en annexe 2). Dans la section 4, nous rappelons comment s'effectue le choix du recouvrement par des blocs de taille $m \times b$. En annexe 1, nous fournissons des exemples numériques et en déduisons des formules de calcul des minorants de la fiabilité (ou majorants de la probabilité de panne).

2 Calcul exact de la probabilité de panne dans un système bidimensionnel (h, k) contigus sur (m, n) , avec la contrainte $n \leq 2k$ mais aucune contrainte sur m et h

Soit $R_{m,n} = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

On appelle rectangle (h, k) , où $1 \leq h \leq m$ et $1 \leq k \leq n$, toute partie de $R_{m,n}$ de la forme $\{u, \dots, u + h - 1\} \times \{v, \dots, v + k - 1\}$ où $1 \leq u \leq m - h + 1$ et $1 \leq v \leq n - k + 1$; h est la longueur de la base du rectangle et k est la longueur de sa hauteur.

On appelle colonne dans $R_{m,n}$ tout rectangle $(1, n)$ (autrement dit toute partie de la forme $\{u\} \times \{1, \dots, n\}$, où $1 \leq u \leq m$) et sous colonne toute partie "sans trous" contenue dans une colonne (autrement dit toute partie de la forme $\{u\} \times J$ où J est un intervalle de $\{1, \dots, n\}$).

On imposera dans cette étude que $n \leq 2k$ (contrainte dont la justification sera donnée par la suite).

On considère la famille de variables aléatoires de Bernoulli $X_{i,j}$ indexées par $R_{m,n}$, indépendantes et de même loi ; pour tout (i,j) , on note $P(X_{i,j} = 1) = p$.

Notre but est de calculer la possibilité $Q_{h,m;k,n}$ qu'il existe dans $R_{m,n}$ un rectangle (h,k) , soit R , tel que

$$\forall i,j \in R \quad X_{i,j} = 0 ;$$

on dira d'un tel rectangle qu'il est nul.

Pour ce calcul, on aura à considérer des sous-colonnes nulles, c'est à dire des parties de la forme $\{u\} \times J$, où J est un intervalle de $\{1, \dots, n\}$, telles que, pour tout $j \in J$, $X_{u,j} = 0$; dans ce cas on dira aussi que l'intervalle J est nul pour la colonne u .

Etant donné un intervalle J de $\{1, \dots, n\}$, de longueur s , un sous intervalle J' de J , de longueur s' , est dit nul, maximal dans J , pour la colonne u , s'il est nul pour la colonne u et que de plus tout sous-intervalle de J , contenant strictement J' , n'est pas nul pour la colonne u ; J , s'il est lui même nul pour la colonne u , est aussi dit maximal dans J pour cette colonne.

En d'autres termes, si $J = \{v, \dots, v + s - 1\}$ et $J' = \{v', \dots, v' + s' - 1\}$, avec $v' \geq v$, $v' + s' - 1 \leq v + s - 1$ et $s' < s$, J' , qui est alors un sous-intervalle strict de J , est nul maximal dans J pour la colonne u dans les cas suivants :

- si $v' = v$, $X_{u,v} = \dots = X_{u,v+s'-1} = 0$, $X_{u,v+s'} = 1$;
- si $v' = v + s - s'$ (i.e. $v' + s' - 1 = v + s - 1$), $X_{u,v'-1} = 1$,
 $X_{u,v'} = \dots = X_{u,v'+s'-1} = 0$;
- si $v < v' < v + s - s'$, $X_{u,v'-1} = 1$, $X_{u,v'} = \dots, X_{u,v'+s'-1} = 0$, $X_{u,v'+s'} = 1$.

On remarque que si, $k \leq s \leq n$, la contrainte $n \leq 2k$ a pour effet que, quel que soit u , il existe, dans J , au plus un sous-intervalle J' de longueur supérieure ou égale à k nul maximal pour la colonne u . La probabilité $q_{s,s'}$ pour qu'il existe et soit de longueur s' ($k \leq s' \leq s \leq n$) vaut :

- pour $s = s'$ $q_{s,s'} = (1 - p)^s$,
- pour $s' < s$ $q_{s,s'} = (1 - p)^{s'} [2p + (s - s' - 1)p^2]$.

L'existence d'un sous-intervalles nuls de J , de longueur $\geq k$, équivaut à l'existence d'un intervalle nul maximal (nécessairement unique), de longueur s' tel que $k \leq s' \leq s$. La probabilité qu'il n'existe pas, dans J , de sous intervalle

nul de longueur $\geq k$ est donc $p_s = 1 - \sum_{s'=k}^s q_{s,s'}$.

N.B. : p_s est la probabilité de marche d'un système unidimensionnel k -consécutif-sur- s ; nous en avons rappelé un autre mode de calcul classique, par récurrence, ne faisant pas intervenir la contrainte $s \leq 2k$ que nous avons ici.

Le calcul de $Q_{h,m;k,n}$, par récurrence sur m , repose sur la remarque suivante, qui traduit la construction, colonne après colonne, à partir de la plus à gauche (d'indice u), d'un rectangle (h,k) —nul dans $R_{m,n}$: pour un tel rectangle, il existe

nécessairement une suite (J_u, \dots, J_{u+h-1}) d'intervalles de $\{1, \dots, n\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ils sont emboîtés : $J_u \supset J_{u+1} \supset \dots \supset J_{u+h-1}$,
- J_u est nul maximal dans $\{1, \dots, n\}$ pour la colonne u ,
- pour tout $u' > u$, $J_{u'}$ est nul maxima dans $J_{u'-1}$ pour la colonne u' ,
- la longueur de J_{u+h-1} est supérieure ou égale à k .

Pour faire comprendre la genèse de la formule de récurrence, explicitons le cas $h = 3$.

Nous allons nous efforcer de construire un rectangle $(3, k)$ dans $R_{m,n}$ en commençant nos tentatives par la première colonne ($u = 1$); il n'y a aucune contrainte sur m ; en revanche on a toujours la contrainte $n \leq 2k$.

L'initialisation de la récurrence se fait en remarquant que, si $m < 3$, $Q_{3,m;k,n} = 0$ (car alors il n'y a pas la place pour un rectangle de base de longueur 3 dans $R_{m,n}$) et que, si $m = 3$, $Q_{3,3;k,n}$ est la probabilité qu'il existe k lignes consécutives, de longueur 3 chacune, composées de 0 : or la probabilité qu'une telle ligne soit composée de 0 est $(1 - p)^3$; on a la même situation que pour le

calcul de $\sum_{s'=k}^s q_{s,s'}$ ci-dessous, en remplaçant $(1 - p)$ par $(1 - p)^3$ et s par n , d'où, en notant $r = 1 - (1 - p)^3$,

$$Q_{3,3;k,n} = \sum_{s=k}^{n-1} (1 - r)^s [2r + (n - s - 1)r^2] + (1 - r)^n.$$

Soit désormais $m > 3$.

S'il n'existe pas, pour la colonne 1, d'intervalle nul de longueur $\geq k$ (événement de probabilité p_n), il faut repousser notre tentative de construction à partir de la colonne 2, donc à l'intérieur d'un rectangle de $m - 1$ colonnes et n lignes. Il en résulte l'existence, dans l'expression de $Q_{3,m;k,n}$, d'un terme qui s'écrit :

$$p_n Q_{3,m-1;k,n}.$$

Sinon, soit s_1 ($k \leq s_1 \leq n$) la longueur de l'intervalle nul maximal pour la colonne 1, noté J_1 .

S'il n'existe pas, pour la colonne 2, de sous-intervalle nul de J_1 de longueur $\geq k$ (événement de probabilité p_{s_1}), il faut repousser notre tentative de construction à partir de la colonne 3, d'où la présence, dans l'expression de $Q_{3,m;k,n}$, d'un terme qui s'écrit :

$$\left[\sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} p_{s_1} \right] Q_{3,m-2;k,n}.$$

Sinon, soit s_2 ($k \leq s_2 \leq s_1$) la longueur de l'intervalle nul maximal dans J_1 pour la colonne 2, noté J_2 .

S'il n'existe pas, pour la colonne 3, de sous-intervalle nul de J_2 de longueur $\geq k$ (évènement de probabilité p_{s_2}) il faut repousser la tentative de construction à partir de la colonne 4, d'où la présence, dans l'expression de $Q_{3,m;k,n}$ d'un terme qui s'écrit :

$$\left[\sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1,s_2} p_{s_2} \right] \right] Q_{3,m-3;k,n}.$$

En revanche, s'il existe, pour la colonne 3, un sous-intervalle nul de J_2 , de longueur $\geq k$ (évènement de probabilité $1 - p_{s_2}$), on a construit un (ou même plusieurs si $s_2 > k$) rectangle(s) $(3, k)$ nul(s), faisant intervenir les colonnes 1,2 et 3, d'où la présence dans $Q_{3,m;k,n}$ du terme

$$\sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1,s_2} (1 - p_{s_2}) \right],$$

qui peut s'écrire aussi

$$\sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1,s_2} \sum_{s_3=k}^{s_2} q_{s_2,s_3} \right].$$

Donc, finalement,

$$Q_{3,m;k,n} = p_n Q_{3,m-1;k,n} + \left[\sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} p_{s_1} \right] Q_{3,m-2;k,n} + \left[\sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1,s_2} p_{s_2} \right] \right] Q_{3,m-3;k,n} + \sum_{s_1=k}^n q_{n,s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1,s_2} (1 - p_{s_2}) \right].$$

Ou encore, en notant $\mathcal{S}_{2;k,n}$ l'ensemble des couples d'entiers (s_1, s_2) tels que $k \leq s_2 \leq s_1 \leq n$ (et par analogie $\mathcal{S}_{1;k,n}$ l'ensemble des suites de longueur 1, (s_1) , telles que $k \leq s_1 \leq n$),

$$Q_{3,m;k,n} = p_n Q_{3,m-1;k,n} + \left[\sum_{(s_1) \in \mathcal{S}_{1;k,n}} q_{n,s_1} p_{s_1} \right] Q_{3,m-2;k,n} + \left[\sum_{(s_1,s_2) \in \mathcal{S}_{2;k,n}} q_{n,s_1} q_{s_1,s_2} p_{s_2} \right] Q_{3,m-3;k,n} + \sum_{(s_1,s_2) \in \mathcal{S}_{2;k,n}} q_{n,s_1} q_{s_1,s_2} (1 - p_{s_2}).$$

Dans le cas général, notons $\mathcal{S}_{l;k,n}$ (pour $1 \leq l \leq n-1$) l'ensemble des suites (s_1, \dots, s_l) telles que $k \leq s_l \leq s_{l-1} \leq \dots \leq s_1 \leq n$ et, par convention, $s_0 = n$. Alors, pour $m > n$,

$$Q_{h,m;k,n} = p_n Q_{h,m-1;k,n} + \sum_{l=1}^{h-1} \left[\sum_{(s_1, \dots, s_l) \in \mathcal{S}_{l;k,n}} \left(\prod_{t=0}^{l-1} q_{s_t, s_{t+1}} \right) p_{s_l} \right] Q_{h,m-l-1;k,n}$$

$$+ \sum_{(s_1, \dots, s_{h-1}) \in \mathcal{S}_{h-1; k, n}} \left(\prod_{t=0}^{h-2} q_{s_t, s_{t+1}} \right) (1 - p_{s_{h-1}}).$$

La récurrence est amorcée en prenant :

- si $m < h$ $Q_{h, m; k, n} = 0$,
 - si $m = h$ $Q_{h, h; k, n} = \sum_{s=k}^{n-1} (1-r)^s [2r + (n-s-1)r^2] + (1-r)^n$,
- avec $r = 1 - (1-p)^h$.

3 Transformation de la formule de calcul par récurrence (sur m) de $Q_{h, m; k, n}$ à fin de traitement algorithmique : algorithme des colonnes consécutives.

Changement de notations

p sera noté x (pour éviter la confusion avec les p_s)
 x et les entiers n, k et h étant fixés, on omettra de les mettre en indices.

On notera $z_m = Q_{h, m; k, n}$.
On notera $y = 1 - (1-x)^h$.
Les notations $q_{s, s'}$ et p_s sont conservées

Le calcul central est celui (pour $1 \leq l \leq h-1$) de

$$a_l = \sum_{(s_1, \dots, s_l) \in \mathcal{S}_{l; k, n}} \left(\prod_{t=0}^{l-1} q_{s_t, s_{t+1}} \right) p_{s_l}$$

autrement dit,

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{s_1=k}^n \sum_{s_2=k}^{s_1} \dots \sum_{s_l=k}^{s_{l-1}} q_{n, s_1} q_{s_2, s_2} \dots q_{s_{l-1}, s_l} p_{s_l} \\ &= \sum_{s_1=k}^n q_{n, s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1, s_2} \dots \left[\sum_{s_l=k}^{s_{l-1}} q_{s_{l-1}, s_l} p_{s_l} \right] \dots \right] \end{aligned}$$

Il sera plus approprié au calcul par récurrence, sur l , de ce terme, de renuméroter les suites (s_1, \dots, s_l) , autrement dit de poser

$t_1 = s_l, t_2 = s_{l-1}, \dots, t_{l-1} = s_2, t_l = s_1$ (et $t_{l+1} = n$)
d'où

$$a_l = \sum_{t_l=k}^n q_{n,t_l} \left[\sum_{t_{l-1}=k}^{t_l} q_{t_l,t_{l-1}} \cdots \left[\sum_{t_1=k}^{t_2} q_{t_2,t_1} p_{t_1} \right] \cdots \right].$$

En posant $w_1(t_1) = p_{t_1}$ et, pour tout l ($1 \leq l \leq h$)

$$w_l(t_l) = \left[\sum_{t_{l-1}=k}^{t_l} q_{t_l,t_{l-1}} \cdots \left[\sum_{t_1=k}^{t_2} q_{t_2,t_1} p_{t_1} \right] \cdots \right]$$

on a $a_l = w_{l+1}(n)$.

Les w_l sont liés par la formule de récurrence sur l , pour $2 \leq l \leq h$

$$w_l(t_l) = \sum_{t_{l-1}=k}^{t_l} q_{t_l,t_{l-1}} w_{l-1}(t_{l-1})$$

initialisée, pour t_1 vérifiant $k \leq t_1 \leq n$, par :

$$w_1(t_1) = p_{t_1}$$

On procède de manière analogue pour le calcul du terme

$$\begin{aligned} b &= \sum_{(s_1, \dots, s_{h-1}) \in \mathcal{S}_{h-1; k, n}} \left(\prod_{t=0}^{h-2} q_{s_t, s_{t-1}} \right) (1 - p_{s_{h-1}}) \\ &= \sum_{s_1=k}^n q_{n, s_1} \left[\sum_{s_2=k}^{s_1} q_{s_1, s_2} \cdots \left[\sum_{j_{h-1}=k}^{s_{h-2}} q_{s_{h-2}, s_{h-1}} (1 - p_{s_{h-1}}) \right] \cdots \right] \\ &= \sum_{t_{h-1}=k}^n q_{n, t_{h-1}} \left[\sum_{t_{h-2}=k}^{t_{h-1}} q_{t_{h-1}, t_{h-2}} \cdots \left[\sum_{t_1=k}^{t_2} q_{t_2, t_1} (1 - p_{t_1}) \right] \cdots \right] \end{aligned}$$

En posant $v_1 = 1 - p(t_1)$ et, pour tout l ($1 \leq l \leq h$)

$$v_l(t_l) = \left[\sum_{t_{l-1}=k}^{t_l} q_{t_l, t_{l-1}} \cdots \left[\sum_{t_1=k}^{t_2} q_{t_2, t_1} (1 - p_{t_1}) \right] \cdots \right]$$

on a $b = v_h(n)$.

Les v_l sont liés par la formule de récurrence sur l (pour $2 \leq l \leq h$)

$$v_l(t_l) = \sum_{t_{l-1}=k}^{t_l} q_{t_l, t_{l-1}} v_{l-1}(t_{l-1})$$

(identique à celle pour les w_l) initialisée, pour t_1 vérifiant $k \leq t_1 \leq n$, par ;

$$v(t_l) = 1 - p_{t_1}.$$

On peut maintenant effectuer le calcul par récurrence des z_m :

initialisation (pour $m \leq h$)

$$\begin{aligned} & - \text{si } m < h, z_m = 0, \\ & - z_h = \sum_{s=k}^{n-1} (1-y)^s [2y + (n-s-1)y^2] + (1-y)^n; \end{aligned}$$

récurrence (pour $m > h$) :

$$z_m = pz_{m-1} + \sum_{l=1}^{h-1} a_l z_{m-l-1} + b.$$

Le programme, de calcul, rédigé en langage C, est fourni en Annexe 2.

4 Calcul de minorants de la fiabilité d'un système (h, k) -contigus sur (m, n)

Le calcul proposé ci-dessus permet d'obtenir la valeur exacte de la fiabilité $1 - Q_{h,m;k,n}$ si $n \leq 2k$ ou, puisqu'on peut évidemment intervertir les rôles des couples (h, m) et (k, n) , si $m \leq 2h$. Si on a la fois $n > 2k$ et $m > 2h$, nous proposons d'effectuer un calcul de minorant de la fiabilité selon un cas particulier de la méthode des dédoublements et quadruplement sélectifs décrite, rappelons le, en sous-section 5.2 de [1].

Pour cela nous recouvrons le rectangle $R_{m,n}$ par des "blocs" rectangulaires de la forme $\{1, \dots, m\} \times J$, où les J sont des sous-intervalles successifs de $\{1, \dots, n\}$ de longueur inférieure ou égale à $2k$, $(k-1)$ -enchaînés, ce qui signifie que, si (J_1, \dots, J_s) est la suite de ces intervalles, classés selon l'ordre croissant de leurs petits éléments.

Dans la pratique nous prendrons ces intervalles tous de longueur $b = 2k$, sauf s'il y a lieu le dernier d'entre eux, pris de longueur c plus petite, comme il a été fait en sous-section 5.1. de [1] pour les systèmes unidimensionnels. Remarquons qu'il serait aussi possible d'utiliser des rectangles de la forme $J \times \{1, \dots, n\}$, où les J sont des sous-intervalles de $\{1, \dots, m\}$ de longueur inférieure ou égale à $2h$, $(h-1)$ -enchaînés; sans doute, pour minimiser le nombre de blocs, serait-il préférable de faire ainsi si $\frac{h}{m}$ est supérieur à $\frac{k}{n}$.

Si la division euclidienne de $n - b$ par $b - k + 1$ est $n - b = a'(b - k + 1) + c'$, on place, dans $\{1, \dots, n\}$, $a = a' + 1$ blocs de taille b plus un bloc plus court, de taille $c = c' + k - 1$, tous $(k-1)$ -enchaînés, sauf dans le cas où $c' = 0$, car alors il y a exactement a blocs $k-1$ enchaînés recouvrant $\{1, \dots, n\}$ et on pose alors $c = 0$.

La fiabilité du système indexé par $R_{m,n}$ vérifie alors :

- si $c = 0$, $1 - Q_{h,m;k,n} \geq (1 - Q_{h,m;k,b})^a$.

- si $c > 0$, $1 - Q_{h,m;k,n} \geq (1 - Q_{h,m;k,b})^a \cdot (1 - Q_{h,m;k,c})$, qui avec une légère perte de précision se simplifie en :

$$1 - Q_{h,m;k,n} \geq (1 - Q_{h,m;k,b})^{a+1}$$

Annexe 1. Exemples numériques par mise en œuvre de l’algorithme fourni en Annexe 2.

Nous donnons tout d’abord les valeurs de la probabilité de panne $z_m = Q_{h,m;k,n}$ pour $h = k = 3$, $m = 10$ et $m = 50$, $n = 2k = 6$ et quelques valeurs de p .

	$p = 0,9$	$p = 0,95$	$p = 0,99$
$m = 10$	$3,18728.10^{-8}$	$6,2468.10^{-11}$	$3,19996.10^{-17}$
$m = 50$	$1,911163.10^{-7}$	$3,74789.10^{-10}$	$1,91997.10^{-16}$

Nous en déduisons les minorants de la probabilité de panne $Q_{h,m;k,n}$ pour $h = k = 3$; $m = 10$ et $m = 50$; $n = 10$ et $n = 50$, en utilisant pour b la valeur 6 d’où résulte le nombre a d’intervalles 2-enchaînés de longueur 6 dans $\{1, 2, \dots, n\}$:

- si $n = 10$, $a = 2$ et $c = 0$, d’où $Q_{3,m;3,10} \geq (Q_{3,m;3,6})^2$
- si $n = 50$, $a = 12$ et $c = 0$, d’où $Q_{3,m;3,50} \geq (Q_{3,m;3,6})^{12}$

Tableaux des minorants :

$p = 0.9$

	$n = 10$	$n = 50$
$m = 10$	6.3746×10^{-8}	3.8247×10^{-7}
$m = 50$	3.8233×10^{-7}	2.2940×10^{-6}

$p = 0.95$

	$n = 10$	$n = 50$
$m = 10$	1.2494×10^{-10}	7.4962×10^{-10}
$m = 50$	7.4958×10^{-10}	4.4975×10^{-9}

$p = 0.99$

	$n = 10$	$n = 50$
$m = 10$	6.3999×10^{-17}	3.8400×10^{-16}
$m = 50$	3.8399×10^{-16}	2.3040×10^{-15}

On remarque que dans chaque ligne le minorant augmente quand n augmente, ce qui était attendu car la fiabilité du système diminue quand la taille augmente. De plus, les résultats dans les cases (10,50) et (50,10) sont très proches, ce qui est naturel car il s’agit du même système à une symétrie près.

Annexe 2. Programme de l'algorithme des colonnes consécutives.

Un fichier en langage C contenant le listing reproduit ci-dessous, rédigé par Tanguy Briançon, professeur au lycée Agora à Puteaux (France), peut également être obtenu en s'adressant à l'auteur.

```
#include <stdio.h>
long double puiss(long double a,int b){
long double r;
r=1;
while(b>0){
r*=a; b--;
}
return r;
}
/*
float somme(int a,int b, float *c){
int i; float res=0;
for(i=a;i<=b;i++){res+=c[i];}
return res;
}
*/
main()
{int n,k,h,m,mmax;
long double x;
float x_1;
printf("k=");
scanf("%d",&k);
printf("n=");
scanf("%d",&n);
printf("h=");
scanf("%d",&h);
printf("m=");
scanf("%d",&mmax);
printf("x=");
scanf("%f",&x_1);
x=x_1;
long double q[n+1][n+1];
long double p[n+1],r,pui;
int l,s,s_1,i;
// Calcul des q_{s,s-1}, p_s
for (s=k;s<=n;s++){ q[s][s]=puiss((1-x),s);
printf("q[%d][%d]=%Lg\n",s,s,(long double) q[s][s]);
}
for (s_1=k;s_1<n;s_1++){pui=puiss((1-x),s_1);
for (s=s_1+1;s<=n;s++){
```

```

q[s][s-1]=pui*(2*x+(s-s-1-1)*x*x);
printf("q[%d][%d]=%Lg\n",s,s-1,(long double) q[s][s-1]);
}
}
for (s=k;s<=n;s++){r=0;
for (s-1=k;s-1<=s;s-1++){r+=q[s][s-1];}
p[s]=1-r;
printf("p[%d]=%Lg\n",s,(long double) p[s]);
}
//Calcul des w_l
long double w[h+1][n+1];
int t[h+1];
for (t[1]=k;t[1]<=n;t[1]++){
{w[1][t[1]]=p[t[1]];
printf("w[%d][%d]=%Lg\n",1,t[1],(long double) w[1][t[1]]);}
for (l=2;l<=h;l++){
for (t[1]=k;t[1]<=n;t[1]++){
r=0;
for (t[1-1]=k;t[1-1]<=t[1];t[1-1]++){
r+=q[t[1]][t[1-1]]*w[1-1][t[1-1]];}
w[1][t[1]]=r;
printf("w[%d][%d]=%Lg\n",1,t[1],(long double) w[1][t[1]]);}
}
//Calcul des a_l
long double a[h];
for (l=1;l<h;l++){a[l]=w[l+1][n];
printf("a[%d]=%Lg\n",l,(long double) a[l]);}
//Calcul des v_l
long double v[h+1][n+1];
for (t[1]=k;t[1]<=n;t[1]++){
{v[1][t[1]]=1-p[t[1]];
printf("v[%d][%d]=%Lg\n",1,t[1],(long double) v[1][t[1]]);}
for (l=2;l<=h;l++){
for (t[1]=k;t[1]<=n;t[1]++){
r=0;
for (t[1-1]=k;t[1-1]<=t[1];t[1-1]++){
r+=q[t[1]][t[1-1]]*v[1-1][t[1-1]];}
v[1][t[1]]=r;
printf("v[%d][%d]=%Lg\n",1,t[1],(long double) v[1][t[1]]);}
}
// Calcul de b
long double b=v[h][n];
printf("b=%Lg\n",b);
//Initialisation des z_m
long double z[mmax+1];
long double r_1=0,r_2=0;

```

```

for (m=1;m<h;m++){z[m]=0;}
long double y=1-puiss((1-x),h);
printf("y=%Lg\n",(long double) y);
r=0;
for (s=k;s<n;s++){
r_1=puiss((1-y),s)*2*y;
r_2=puiss((1-y),s)*((n-s-1)*y*y);
r+=r_1+r_2;
printf("r_1=%Lg,r_2=%Lg,r=%Lg,s=%d\n",r_1,r_2,r,s);}
r+=puiss(1-y,n);
z[h]=r;
printf("z[%d]=%Lg\n",h,(long double) z[h]);
//Calcul des z_m
for (m=h+1;m<=mmax;m++){
r=p[n]*z[m-1];
for (l=1;l<h;l++){r+=a[l]*z[m-l-1];}
z[m]=r+b;
printf("z[%d]=%Lg\n",m,(long double) z[m]);
}
return 0;
}

```

Références

- [1] Minorants de la fiabilité pour des systèmes à recouvrements, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00701690/>
- [2] YI-CHIH HSIEH, TA-CHENG CHEN (2004) Reliability lower bounds for two dimensional consecutive- k -out-of- n : F systems, *Computers & Operations Research*, vol.31, pp 1259-1272.