



**HAL**  
open science

## Pliages dans les mètres rubans

Pernelle Marone-Hitz, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, François Guinot,  
Elia Picault

► **To cite this version:**

Pernelle Marone-Hitz, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, François Guinot, Elia Picault. Pliages dans les mètres rubans. 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. pp.2X12UQ5Q. hal-00921914

**HAL Id: hal-00921914**

**<https://hal.science/hal-00921914>**

Submitted on 1 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Pliages dans les mètres rubans

P. Marone-Hitz <sup>a,b</sup>, S. Bourgeois <sup>a,b</sup>, B. Cochelin <sup>a,b</sup>, F. Guinot <sup>c</sup>, E. Picault <sup>b</sup>

a. Ecole Centrale Marseille, F-13451, Marseille, France, {pernelle.marone-hitz, bruno.cochelin, stephane.bourgeois}@centrale-marseille.fr

b. LMA, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, UPR 7051, Aix-Marseille Univ, F-13402, Marseille, France, picault@lma.cnrs-mrs.fr

c. Thales Alenia Space, Cannes, France, Francois.Guinot@thalesaleniaspace.com

## Résumé :

*On s'intéresse à la modélisation de mètres-rubans. Deux outils seront proposés :*

- *Un modèle numérique de poutre à section flexible, implémenté dans un logiciel de continuation permettant le calcul des branches d'équilibre et la détection des bifurcations.*
- *Une méthode énergétique simple, basée sur des considérations géométriques sur la déformée du mètre-ruban, qui permettra de déterminer la position et le nombre de plis que présente un ruban soumis à un certain jeu de conditions limites.*

## Abstract :

*This work is devoted to the modeling of tape springs. Two modelling tools will be proposed :*

- *A numerical model of a rod which cross-section is highly flexible. This model is implemented in a continuation software that allows the calculus of equilibrium branches and tracking of bifurcation points.*
- *A simple energetic method, based on geometrical observations on a deformed tape spring. This method will enable us to obtain the number of folds and their position in a deformed tape spring, under a given set of boundary conditions.*

**Mots clefs :** mètre ruban, pliage, positions d'équilibre

## 1 Introduction

Le mètre ruban est une structure élastique qui a la forme d'une poutre à paroi mince de section semi-circulaire et qui a la faculté de développer des pliages localisés, dûs à un aplatissement local de la section.

En manipulant le mètre ruban, on constate que les plis peuvent migrer le long du ruban, se dupliquer, disparaître ... Le nombre de pliages et leurs positions dépendent des conditions limites appliquées et pour un même jeu de sollicitations, il peut y avoir plusieurs positions d'équilibre stable.

On propose deux outils de modélisation adaptés aux mètres rubans : un modèle de poutre à section flexible implémenté dans un logiciel de continuation sous la forme d'un système d'une petite vingtaine d'équations différentielles, et une méthode énergétique simple fondée sur des considérations géométriques sur la déformée d'un mètre ruban soumis à une certaine sollicitation à ses extrémités.

## 2 Modèles de poutre à section flexible

On propose dans cette section un outil de modélisation dédié permettant d'analyser la ou les réponse(s) d'un mètre ruban pour un jeu de conditions limites, via le tracé d'un diagramme de bifurcation complet avec des branches stables et des branches instables. A partir du modèle simple de ruban proposé par F. Guinot *et al* ([5], [4]), comportant un nombre réduit de variables, on obtient un système d'une dizaine d'équations différentielles 1D qui gouverne le comportement d'un ruban seul. Le calcul des branches

d'équilibre, la détection des bifurcations et le tracé des diagrammes associés ainsi que l'analyse de stabilité sont réalisés dans le cadre des méthodes asymptotiques numériques.

## 2.1 Description des modèles

On trouvera une description complète du modèle proposé par F. Guinot *et al* dans l'article et la thèse suivants : [5], [4]. Ce modèle donne lieu à de nombreux modèles dérivés, selon les différentes hypothèses supplémentaires que l'on peut choisir : section semi-circulaire, rotations modérées, section faiblement courbée, etc. On peut donc parler d'une famille de modèles de mètre ruban, qui ont tous en commun de pouvoir se mettre sous la forme de systèmes BVP (*Boundary Value Problem*).

On choisit ici de présenter un modèle simple, proche des modèles de poutre en rotations modérées. Un des intérêts est qu'il est possible d'obtenir quelques solutions analytiques pour ce modèle. Partant d'un modèle initial de coque, le mètre ruban est assimilé à une poutre dont la ligne moyenne est initialement droite et la section de courbure circulaire (Figure 1).

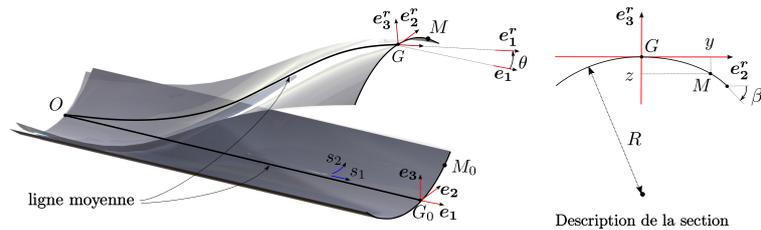


FIGURE 1 – Description du ruban

La coque est paramétrée par  $s_1$  et  $s_2$  qui sont respectivement la coordonnée curviligne le long de la ligne de référence et de la courbe section :  $(s_1, s_2) \in [0, L] * [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  où  $L$  est la longueur initiale de la ligne de référence et  $a$  la longueur initiale de la courbe section. Dans la configuration déformée, la position d'un point matériel  $M$  de la coque est donnée par  $\mathbf{OM}(s_1, s_2) = \mathbf{OG}(s_1) + \mathbf{GM}(s_1, s_2)$ , où  $G$  est le point de la section appartenant à la ligne moyenne.

Les trois hypothèses cinématiques du modèle général sont :

- (i) la courbe section est contenue dans un plan après déformation
- (ii) le plan de la section reste orthogonal au vecteur tangent à la déformée de la ligne de référence
- (iii) la section est considérée inextensible.

On se restreint à l'étude des mouvements plans et on suppose que la section reste semi-circulaire et symétrique par rapport au plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . Alors :

- le déplacement du point  $G$  de la ligne moyenne est décrit par deux composantes  $u_1(s_1)$  et  $u_3(s_1)$
- la rotation de la section est décrite par un angle  $\theta(s_1)$  porté par l'axe  $\mathbf{e}_2$ .

$$\text{On a : } \begin{cases} \mathbf{OG}(s_1) = (s_1 + u_1)\mathbf{e}_1 + u_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{GM}(s_1, s_2) = y(s_1, s_2)\mathbf{e}_2 + z(s_1, s_2)\mathbf{e}_3^r \end{cases}$$

Enfin, pour décrire l'ouverture de la section, on introduit un angle  $\beta^e(s_1)$  entre la tangente à la courbe section à l'extrémité et le vecteur  $\mathbf{e}_2$ . Si l'on fait l'hypothèse que cet angle est faible et linéaire en  $s_2$ , on obtient des expressions simples pour  $y$  et  $z$  :

$$\begin{cases} y(s_1, s_2) = s_2 \\ z(s_1, s_2) = \beta^e(s_1)Z(s_2) = \beta^e(s_1)\frac{s_2^2}{a} \quad \text{avec } Z \text{ une fonction de forme.} \end{cases}$$

Finalement, la cinématique est entièrement décrite par quatre paramètres attachés à la ligne moyenne (dépendant uniquement de l'abscisse curviligne  $s_1$ ) : les deux translations  $u_1$  et  $u_3$ , l'angle de rotation de la section  $\theta$ , et l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$ . On se place dans le cadre des rotations modérées pour exprimer les déformations. La contrainte qui lie les translations  $u_1$  et  $u_3$  à la rotation de la section  $\theta$  est alors  $\theta = -u_{3,1}$ .

On introduit ensuite cette cinématique dans le modèle de coque pour obtenir la densité surfacique d'énergie de déformation. Lors de cette étape, on suppose que :

- (iv) seule la contrainte axiale participe à l'énergie de déformation de membrane (hypothèse classique des modèles de poutre)
- (v) les déformations de membrane sont petites.

Le modèle linéique s'obtient en intégrant cette densité d'énergie dans la section (intégration sur  $s_2$ ). La différenciation de l'énergie de déformation, le calcul de la puissance des efforts extérieurs, et enfin l'application du principe des travaux virtuels permet d'obtenir les équations locales du système. On obtient alors un modèle 1D, qui rend compte du comportement 2D d'un mètre ruban. Pour le modèle présenté dans cette section, on obtient un système constitué d'une petite vingtaine d'équations différentielles, à répartir en trois groupes : équations liées à la cinématique, équations d'équilibre, lois de comportement.

## 2.2 Méthode numérique et implémentation

Le modèle de ruban proposé par F. Guinot *et al.* ([5], [4]) donne lieu à une famille de modèles dérivés, qui ont tous en commun la possibilité d'être représentés par un système BVP (*Boundary Value Problem*) de la forme  $\mathbf{u}'(x) = f(\mathbf{u}(x), \lambda)$ , avec  $\mathbf{u}(x)$  vecteur des inconnues du système,  $x \in [0, L]$  l'abscisse curviligne le long de la ligne de référence (noté  $s_1$  dans les sections précédentes), et  $\lambda$  un paramètre de continuation. L'idée est donc d'utiliser un outil généraliste de résolution des BVP pour éviter d'avoir à faire des développements spécifiques pour chaque modèle. La discrétisation est effectuée par collocation orthogonale ([3]), et on choisit une interpolation polynomiale d'ordre 3.

La résolution du système, la continuation, l'analyse de la stabilité et des bifurcations est effectué dans le cadre des Méthodes Asymptotiques Numériques (*MAN*) ([1]), grâce à l'outil *MANLAB* ([8]). Le système d'équations est donc implémenté sous la forme  $M(\mathbf{U}') = L_0 + L(\mathbf{U}) + Q(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ ,  $L_0$  étant un opérateur constant,  $M$  et  $L$  des opérateurs linéaires, et  $Q$  un opérateur quadratique. Le système d'équations différentielles est complété par un ensemble de conditions limites. La section suivante présente différents essais et résultats, pour un ruban seul, discrétisé en 501 intervalles.

## 2.3 Exemple : formation d'un pli par flambage local sous flexion

Dans les figures qui suivent, les déformées tridimensionnelles sont reconstruites à partir de la solution du modèle unidimensionnel de poutre et de la cinématique définie à la section 2.1. Les caractéristiques géométriques et matérielles du ruban étudié sont présentées dans le tableau 1.

Longueur L	Largeur a	Épaisseur h	Angle d'ouverture initial $\beta_0^e$	Module d'Young E	Coefficient de Poisson $\nu$
1000 mm	60 mm	0.15 mm	0.6 rad	210 000 MPa	0.3

TABLE 1 – Caractéristiques du mètre ruban

On considère un essai de flambage par flexion, avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{en } x = 0 : \begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_3(0) = 0 \\ \theta(0) = -\lambda \\ \beta^e(0) = \beta_0^e \\ \beta^{e'}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = L : \begin{cases} N^r(L) = 0 \\ u_3(L) = 0 \\ \theta(L) = \lambda \\ \beta^e(L) = \beta_0^e \\ \beta^{e'}(L) = 0 \end{cases}$$

avec :  $\lambda$  paramètre de continuation,  $\beta_0^e$  l'angle d'ouverture initial du ruban,  $\beta^{e'}$  la dérivée de  $\beta^e$  par rapport à  $x$ ,  $N^r$  contrainte généralisée de tension de poutre.

Cet essai de flexion pure à rotations imposées aux extrémités met en évidence l'apparition d'une zone de pliage due à un aplatissement de la section. La figure 2 montre qu'au début de l'essai, le ruban a un comportement similaire à celui d'une poutre à section indéformable : l'évolution du moment de flexion en fonction de la rotation imposée est linéaire. A l'instant précédant le flambage, la section s'aplatit sur toute la longueur du ruban, l'aplatissement étant maximum au centre (déformée 3.2). Il s'ensuit une localisation de la déformation au milieu du mètre ruban (déformée 3.3) et l'apparition de la zone de pliage (déformée 3.4).

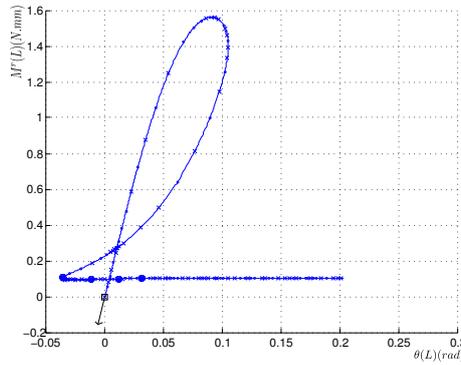


FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation lors d'un essai de flambage local sous flexion :  $M^r(L) = f(\theta(L))$  avec  $M^r$  moment de flexion de poutre

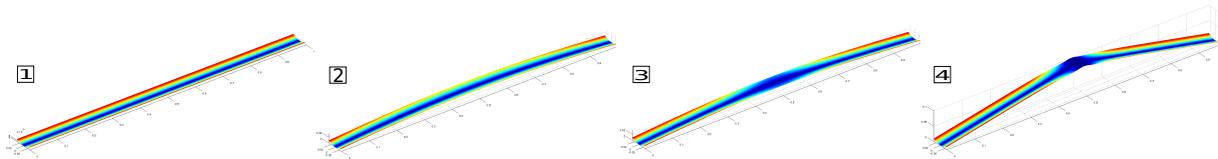


FIGURE 3 – Quelques déformées caractéristiques d'un essai de flambage local sous flexion. Isocouleurs de l'angle  $\beta$ , caractérisant le degré d'aplatissement du ruban.

Cet essai avait été précédemment traité avec le logiciel commercial COMSOL ([9] et [4], [5], [7]) et nous sert donc de cas test. On obtient les mêmes moments et angles critiques (pour le flambage) que ceux obtenus dans COMSOL. Ici l'ouverture des sections terminales est bloquée : on impose  $\beta^e(0) = \beta^e(L) = \beta_0^e$ . Le diagramme de bifurcation (figure 2) montre que la branche de solution partant de l'origine est exempte de bifurcations et conduit à la formation d'un pli central.

En revanche, si on laisse les sections terminales libres de se déformer, les autres conditions aux limites restant inchangées, la branche de solution partant de l'origine comporte de nombreuses branches bifurquées et il y a donc de nombreuses réponses possibles. De la même façon, on peut reconstruire la déformée 3D du ruban à partir des résultats du modèle et ainsi visualiser les déformées possibles. Sur la branche fondamentale, l'ensemble du mètre ruban s'ouvre, à  $\beta^e$  uniforme, indépendant de  $s_1$ , comme l'illustre les isocouleurs de la figure 4.

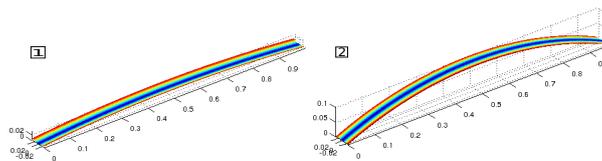


FIGURE 4 – Déformées lors d'un essai de flambage local sous flexion où les sections terminales sont libres de se déformer. Branche fondamentale. Isocouleurs de l'angle  $\beta$ , caractérisant le degré d'aplatissement du ruban.

Les nombreuses branches bifurquées témoignent de phénomènes de localisation, qui peuvent se produire en différents endroits du ruban (Figure 5).

Le travail en cours consiste à analyser ces réseaux de solutions avec leur stabilité et à comprendre les scénarios de saut entre ces branches au cours du chargement.

### 3 Méthode énergétique

Cette section consiste à élaborer une méthode énergétique simple, basée sur des considérations géométriques sur la déformée du mètre-ruban, qui permettra de déterminer le nombre de plis et leur position en

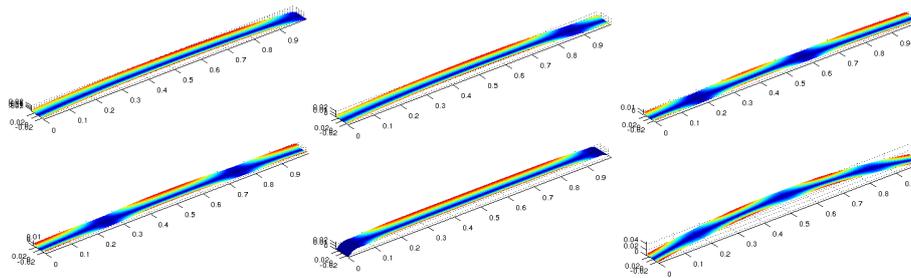


FIGURE 5 – Déformées lors d'un essai de flambage par flexion où les sections terminales sont libres de se déformer. Branches bifurquées. Isocouleurs de l'angle  $\beta$ , caractérisant le degré d'aplatissement du ruban.

fonction de la sollicitation appliquée aux extrémités du mètre ruban. Dans ses configurations pliées et stables, un ruban présente trois zones caractéristiques (Figure 6) :

- portion droite où la courbure transversale reste inchangée (*zone A*)
- zone de pli (portion plate où la courbure transversale est nulle et où une courbure longitudinale est apparue) (*zone C*)
- zone de transition entre les portions non déformées et le pli (*zone B*)

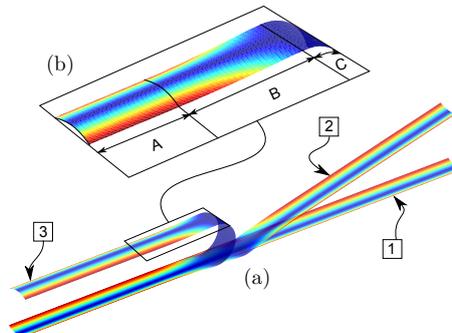


FIGURE 6 – Essai de pliage (a) et mise en évidence des trois zones caractéristiques d'un ruban plié (b). Isocouleurs de l'angle  $\beta$ , caractérisant le degré d'aplatissement du ruban

En dehors des zones de pliages et de transition, le ruban garde sa géométrie initiale. Le rayon de courbure longitudinale de la zone de pli est égal au rayon de courbure transverse des zones non déformées ([2]). Ce phénomène se retrouve dans les résultats de modélisations éléments-finis ([6]), et également dans les résultats du modèle présenté à la section 2.3 (figure 7 et [5]). En effet, pour le

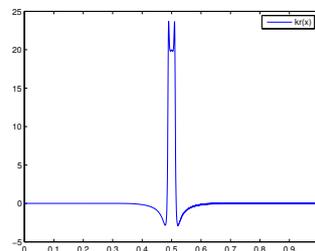


FIGURE 7 – Courbure longitudinale d'un ruban plié en son centre pour l'essai de flambage local sous flexion présenté à la section 2.3

ruban considéré à la section 2.3, les zones non déformées présentent une courbure longitudinale nulle, tandis que la zone de pli présente une courbure longitudinale de l'ordre de 20. Pour ce même ruban,

la courbure transverse à l'état initial vaut :  $k_r = \frac{1}{R} = \frac{2*\beta_0^c}{a} = \frac{2*0.6}{60*10^{-3}} = 20$ , avec  $R$  rayon de courbure transverse initial,  $\beta_0^c$  angle d'ouverture initial,  $a$  largeur du ruban.

Le travail en cours consiste à élaborer un modèle simple pour un ruban comportant un ou plusieurs plis. Ce ruban sera assimilé à une succession de portions droites et de portions courbées, de rayon de courbure égal au rayon de courbure transverse initiale du ruban. La minimisation de l'énergie de déformation permettra de déterminer le nombre de plis et leur position en fonction d'une sollicitation donnée. L'énergie de déformation à considérer est uniquement celle de la zone de pli : les portions droites ne sont pas déformées, et l'énergie stockée dans les zones de transition est la même quelque soit le problème considéré. En effet, on peut considérer qu'une fois un pli créé, les zones de transition qui entourent ce pli seront toujours de longueur presque constante, quel que soit l'angle que forme le pli (Figure 6, plis 1, 2, et 3).

## 4 Conclusions

Nous avons proposé deux outils de modélisation de mètres-rubans : un modèle de poutre à section flexible et une méthode énergétique simple, basée sur des considérations géométriques sur la déformée du ruban.

Le premier modèle permet de simuler des scénarios complexes de pliage et de déploiement. Partant d'un modèle de coque, on introduit une cinématique originale en décrivant la géométrie de la section par un *Elastica*. Après intégration sur la section, on obtient les énergies associées au modèle de poutre. Le principe des travaux virtuels permet ensuite d'obtenir les équations locales du mètre ruban. La discrétisation est effectuée par collocation orthogonale, et l'interpolation est effectuée par des polynômes de Lagrange d'ordre 3. La résolution numérique, la continuation, et l'analyse des bifurcations est effectuée dans le cadre des Méthodes Asymptotiques Numériques, grâce au logiciel MANLAB. On obtient alors un outil générique permettant d'obtenir toutes les réponses possibles d'un ruban soumis à un jeu de conditions limites donné. Cet outil, actuellement capable de traiter un ruban seul, sera étendu pour traiter le déploiement et la stabilité de structures plus complexes, composées d'un assemblage de mètres rubans.

Le deuxième modèle, plus simple et complémentaire du premier, permettra de déterminer très rapidement la position et le nombre de plis que présente un ruban soumis à un jeu de conditions limites donné.

## Références

- [1] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry 2007 Méthode Asymptotique Numérique. Lavoisier.
- [2] C.R. Calladine 1988 *The theory of thin shell structures 1888-1988*. Proc. Inst. Mech. Eng. **202** 1-9
- [3] E. J. Doedel 2007 Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems, Path following and boundary value problems* pp. 1-48, Springer.
- [4] F. Guinot 2011 *Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban composite*. Thèse de doctorat, Université de Provence.
- [5] [F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, L. Blanchard 2012 \*A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs\*. International Journal of Solids and Structures, Elsevier, Volume 49, Issue 1, pp. 73-86.](#)
- [6] K.A. Seffen, S. Pellegrino 1999 *Deployment dynamics of tape springs* Proc. R. Soc. London **455** 1003-1048
- [7] E. Picault, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot 2011 *Instabilités de mètres rubans*. Congrès Français de Mécanique 2011.
- [8] <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>
- [9] COMSOL AB, COMSOL Multiphysics User's Guide v4.2, Stockholm, Sweden, September 2011.