



**HAL**  
open science

## Instabilités de mètres rubans

Elia Picault, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, François Guinot

► **To cite this version:**

Elia Picault, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, François Guinot. Instabilités de mètres rubans. 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. pp.528. hal-00921909

**HAL Id: hal-00921909**

**<https://hal.science/hal-00921909>**

Submitted on 1 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Instabilités de mètres rubans

E. Picault<sup>a</sup>, S. Bourgeois<sup>a,b</sup>, B. Cochelin<sup>a,b</sup>, F. Guinot<sup>c</sup>

a. LMA, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, UPR CNRS 7051, Marseille, France, {hochard,picault}@lma.cnrs-mrs.fr

b. Ecole Centrale Marseille, France, {stephane.bourgeois,bruno.cochelin}@centrale-marseille.fr

c. Thales Alenia Space, Cannes La Bocca, France, francois.guinot@thalesaleniaspace.com

## Résumé :

On s'intéresse à la modélisation de mètres rubans, qui ont la particularité de développer des pliages localisés dus à un aplatissement par flambage de la section. Suivant les scénarios de chargement, les zones de pliages peuvent se déplacer le long du ruban, se dupliquer ou disparaître. S'appuyant sur un modèle original de poutre à section fortement déformable à quatre paramètres cinématiques, on étudie les différents modes d'instabilités (nombre et localisation des pliages) de ces structures soumises à des sollicitations de compression et de flexion dans le plan.

## Abstract :

This work is devoted to the modeling of tape springs. We focus on the local instabilities that lead to the creation of localized folds, due the flattening of the cross-section. Depending on the kinds of loading, the folds can move along the tape, split or disappear. Using an extended rod model with highly deformable cross-section, we study several modes of instabilities of tape springs (number and localization of folds), submitted to an overall compression or bending.

**Mots clefs :** poutre ; mètres rubans ; pliage.

## 1 Introduction

Un mètre ruban est assimilable à une poutre droite à paroi mince de section ouverte et de forme circulaire. Quand on sollicite cette structure en flexion ou en compression (voir Figure 1), son comportement s'apparente à celui d'une poutre avant l'apparition brutale de pliages localisés [4]. La formation, par aplatissement de la section, de ces zones de pliages permet une forte diminution du moment d'inertie quadratique et une concentration de la déformation de flexion. En dehors de ces zones, le ruban conserve sa forme non déformée. En manipulant un mètre ruban, il est très facile de reproduire les pliages montrés sur la Figure 1 en remarquant les sons stridents associés à chaque claquage de la section.

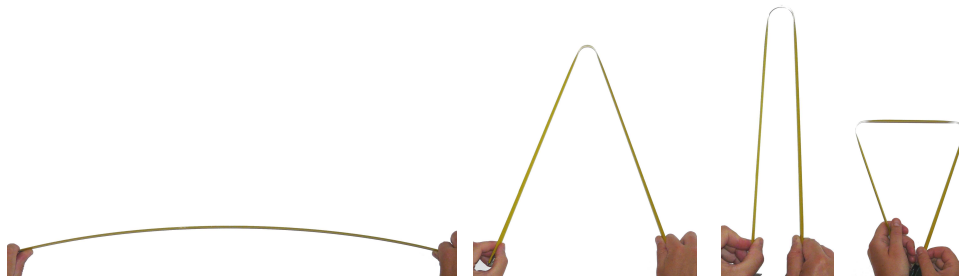


FIGURE 1 – Pliage d'un mètre tuban.

Pour la simulation du comportement mécanique d'un ruban, on peut adopter un modèle classique de coque dans un cadre éléments finis ([5], [6], [3]). Les résultats sont précis mais les modèles lourds et les

calculs souvent difficiles à piloter. Une alternative [4] consiste à modéliser le ruban comme un système de barres de longueurs variables reliées par des ressorts spiraux non linéaires pour représenter les zones de pliage. Ce modèle est simple mais il requiert malheureusement l'introduction *ab initio* des zones de pliages.

Une méthode intermédiaire consiste à modéliser le mètre ruban comme une poutre à section fortement déformable [2]. Partant d'un modèle de coque en grands déplacements et grandes rotations, on établit le modèle de poutre 1D en introduisant des hypothèses cinématiques et sthéniques sur le comportement dans la section. Outre les hypothèses classiques de poutres minces (sections qui restent droites et perpendiculaires à ligne moyenne), l'originalité du modèle repose sur l'introduction d'une cinématique de type *Elastica* pour décrire avec peu de paramètres le caractère fortement variable de la forme de la section : on suppose que la "courbe section" est inextensible. D'autre part, on fait l'hypothèse, comme pour une théorie classique de poutre, que les contraintes axiales sont prépondérantes devant les autres composantes. Ces hypothèses sont introduites dans l'énergie potentielle du modèle de coque et on obtient le modèle de poutre par une intégration analytique dans la section.

Dans la suite, on montre que ce modèle de poutre 1D original permet de reproduire tous les scénarios de flambage (dans le plan) d'un ruban, en faisant apparaître et disparaître des zones de pliage au gré du chargement.

## 2 Modèle de poutre à section fortement déformable

On trouvera dans la thèse de François Guinot [2] une description complète du modèle. On n'en rappelle dans la suite que les grands principes. Partant d'un modèle initial de coque, le mètre ruban est assimilé à une poutre dont la ligne centrale (ou ligne moyenne) est initialement droite et la section de courbure circulaire (Figure 2). Dans la configuration déformée, la position d'un point matériel de la coque est donnée par  $\mathbf{OM}(s_1, s_2) = \mathbf{OG}(s_1) + \mathbf{GM}(s_1, s_2)$  où  $G$  est le point de la section appartenant à la ligne moyenne et  $(s_1, s_2)$  les coordonnées curvilignes.

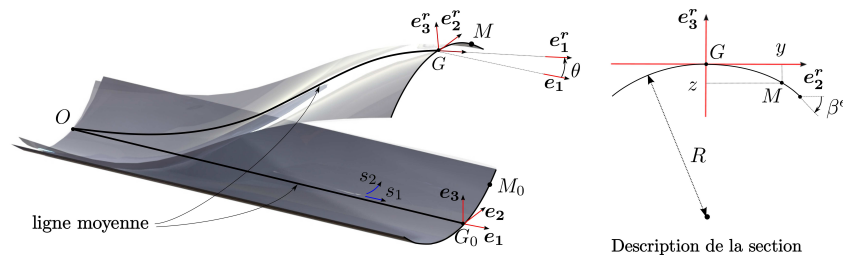


FIGURE 2 – Description du mètre ruban.

La cinématique repose sur les hypothèses suivantes :

- (i) la section est contenue dans un plan après déformation,
- (ii) la section reste orthogonale au vecteur tangent à la déformée de la ligne moyenne,
- (iii) la "courbe section" est considérée inextensible et reste circulaire.

On se restreint à l'étude des mouvements plans : le déplacement du point  $G$  de la ligne moyenne est décrit par deux composantes  $u_1(s_1)$  et  $u_3(s_1)$  et la rotation de la section  $\theta(s_1)$  est portée par l'axe  $\mathbf{e}_2$  (voir Figure 2). On suppose de plus que la section reste symétrique par rapport au plan  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . En introduisant l'angle  $\beta^e(s_1)$  entre la tangente à l'extrémité de la courbe section et le vecteur  $\mathbf{e}_2^r$  (voir Figure 2, à droite), l'hypothèse (iii) permet alors d'exprimer les coordonnées du point  $M$  dans le repère local  $(G, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$  obtenu par rotation d'angle  $\theta(s_1)$  autour de  $\mathbf{e}_2$ . En résumé, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{OG}(s_1) = (s_1 + u_1(s_1))\mathbf{e}_1 + u_3(s_1)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{GM}(s_1, s_2) = y(s_1, s_2)\mathbf{e}_2 + z(s_1, s_2)\mathbf{e}_3^r \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y(s_1, s_2) = \frac{a}{2\beta^e(s_1)} \sin\left(2\beta^e(s_1)\frac{s_2}{a}\right) \\ z(s_1, s_2) = \frac{a}{2\beta^e(s_1)} \left(1 - \cos\left(2\beta^e(s_1)\frac{s_2}{a}\right)\right) \end{cases} \quad (1)$$

Finalement, la cinématique est entièrement décrite par quatre paramètres cinématiques attachés à la ligne moyenne (dépendant uniquement de l'abscisse  $s_1$ ) : les deux translations  $u_1$  et  $u_3$ , l'angle de rotation de la section  $\theta$  et l'angle d'ouverture de la section  $\beta^e$ . On adopte ensuite une approche énergétique en se basant sur le principe de minimum de l'énergie potentielle et son équivalence avec la formulation faible des équations d'équilibre. On introduit la cinématique décrite précédemment dans le modèle de coque pour obtenir la densité surfacique d'énergie de déformation. Lors de cette étape, pour simplifier les expressions, on suppose que :

- (iv) seule la contrainte axiale participe à l'énergie de déformation de membrane (par analogie aux modèles de poutres classiques),
- (v) les déformations de membranes sont petites.

On obtient enfin le modèle linéique en intégrant cette densité d'énergie dans la section (intégration sur  $s_2$ ). Ce modèle linéique, comportant quatre degrés de libertés ( $u_1, u_3, \theta, \beta^e$ ), est implémenté dans le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL [1]. On introduit directement la densité linéique d'énergie de déformation élastique, en laissant le soin au logiciel d'effectuer la différentiation de cette énergie afin d'obtenir la formulation faible du problème. L'utilisation du modèle nécessite ensuite la discrétisation par éléments finis de la ligne moyenne (un segment de droite).

### 3 Applications numériques

Les caractéristiques géométriques et matérielles du ruban étudié sont présentées dans le Tableau 1.

Longueur $L$	Largeur $a$	Épaisseur $h$	Angle initial $\beta_0^e$	Module de Young $E$	Coefficient de Poisson $\nu$	Masse volumique $\rho$
1170 mm	60 mm	0.15 mm	0.6 rad	210 000 MPa	0.3	7800 kg.m <sup>-3</sup>

TABLE 1 – Caractéristiques du mètre ruban

Dans les figures qui suivent, les déformées tridimensionnelles sont reconstruites à partir de la solution du modèle unidimensionnel de poutre et de la cinématique définie à la section 2. Le jeu de couleur (isovaleur de  $\beta$ ) renseigne sur l'altitude  $z$  du point dans le repère de la section (bleu foncé pour  $z = 0$ ) et permet de facilement visualiser les zones où la section devient plate. On se limite ici à des problèmes de flambement statique, où l'hypothèse de symétrie par rapport au plan ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ ) est licite. L'extention du modèle à des mouvements 3D quelconques et ainsi à des flambages hors plan est en cours.

#### 3.1 Flambage de la section sous flexion pure

L'essai de flexion pure à couples imposés aux extrémités met en évidence l'apparition d'une zone de pliage due à un aplatissement de la section. Pour l'essai considéré, les conditions aux limites sont données par :  $u_1 = u_3 = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$  à l'une des extrémités et  $u_3 = 0$  et  $\beta^e = \beta_0^e$  à l'autre extrémité. On impose des rotations  $\theta(0)$  et  $\theta(L)$  de signe opposé à chaque section extrémité. La Figure 4 montre que pour de faibles valeurs de l'angle imposé  $\theta(L)$ , le ruban a un comportement qui s'apparente à celui d'une poutre à section indéformable, l'évolution du moment en fonction de la rotation de la section étant linéaire. On observe ensuite ( $0.04 < \theta(L) < 0.12$  rad) une réponse non-linéaire, consécutive à un aplatissement non uniforme de la section sur toute la longueur du ruban. L'aplatissement est maximum au centre de la poutre (en  $s_1 = \frac{L}{2}$ ) mais sans caractère localisé (déformée [2]). Lorsque la rotation des sections aux extrémités atteint la valeur limite de 0.12 rad, on observe un phénomène de claquage proprement dit. On aboutit sur une autre branche d'équilibre avec une localisation marquée de la déformation de la section. Cette localisation est illustrée Figure 4 à droite avec l'évolution de la densité linéique d'énergie de déformation  $u_e(s_1)$  le long du ruban en fonction de la rotation imposée  $\theta(L)$ . Avec cette zone plate, qui présente un faible moment d'inertie, la raideur de flexion est très inférieure à celle de départ. D'autres claquages apparaissent lors de la décharge. Il est à noter que l'on peut très facilement entendre ces claquages en fléchissant un mètre à mesurer.

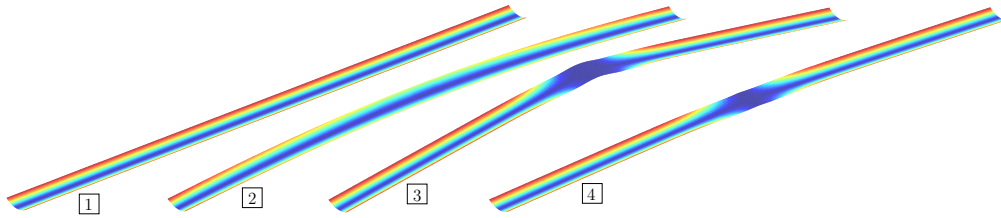


FIGURE 3 – Quelques déformées caractéristiques d'un essai de flambage par flexion. Isocouleurs de l'angle  $\beta$ , caractérisant le degré d'aplatissement du ruban.

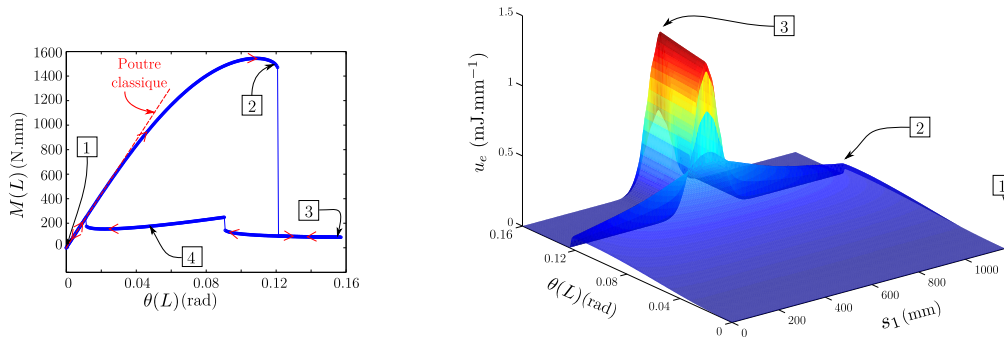


FIGURE 4 – Evolution du couple réaction en fonction de la rotation imposée de la section aux extrémités (à gauche). Evolution de la densité linéique d'énergie de déformation le long du ruban, au cours du chargement (à droite).

## 3.2 Flambage par compression

On applique une charge de compression pure sur le ruban. Quand cette charge est placée exactement au niveau du barycentre de la section non déformée, on obtient une solution triviale de compression pure où le ruban reste parfaitement droit sous la charge ( $u_3(s_1) = \theta(s_1) = \beta^e(s_1) = 0$ ). Sur cette branche fondamentale, la première bifurcation est asymétrique. On analyse ici le flambage et le post-flambage du ruban en mettant de petites imperfections dans le chargement et en suivant la branche d'équilibre perturbée par continuation par rapport au paramètre  $u_1(L)$ .

Il est bien connu que les conditions aux limites jouent un rôle très important dans le flambage des poutres. On montre dans la suite que c'est également le cas pour les mètres rubans : les conditions limites ont une incidence directe sur le nombre de pliages qui se développent.

### 3.2.1 Rotations libres

Dans ce premier test, les deux degrés de liberté  $u_1$  et  $u_3$  sont bloqués à une des extrémités alors que l'autre extrémité subit un déplacement imposé selon  $u_1$  tout en étant bloquée selon  $u_3$ . Les rotations  $\theta$  sont libres aux deux extrémités. Enfin, la forme des sections terminales est fixée :  $\beta^e = \beta_0^e$  à chaque extrémité. Le défaut est introduit par l'intermédiaire d'une force verticale d'intensité  $10^{-4}$  N appliquée au centre du ruban, dans le sens qui conduit à un flambage préservant la symétrie par rapport au plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ .

La Figure 5 illustre la réponse globale du ruban. La première partie de branche (jusqu'au point **1**) correspond à un scénario de bifurcation perturbée classique avec une branche secondaire qui est décroissante par rapport à la charge. On constate ensuite un claquage sur une autre branche d'équilibre avec là encore une très forte localisation de la zone plate et une raideur résiduelle bien plus faible. Ce claquage est de même nature que celui du test précédent (flexion pure). C'est la flexion globale du ruban qui entraîne cet aplatissement localisé de la section, peu importe que cette flexion globale soit provoquée par des couples ou provienne d'un post-flambement.

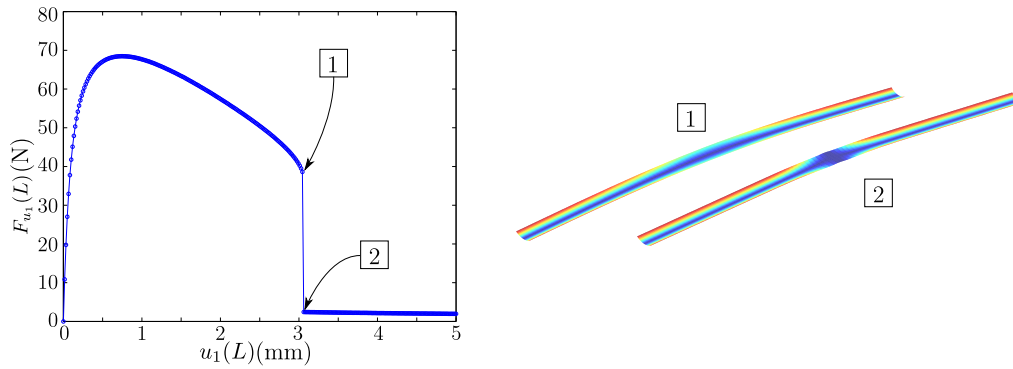


FIGURE 5 – Essai de flambage par compression avec rotation libre des extrémités. Courbe de l'effort axial en fonction du déplacement axial à l'extrémité.

### 3.2.2 Rotations bloquées

Contrairement au test précédent, on bloque la rotation  $\theta$  de la section aux deux extrémités. On remarque dès le tout début de l'essai deux aplatissements localisés à proximité des extrémités du ruban (déformée [2] de la Figure 6). On remarque également un début d'ouverture au centre du ruban. Cette dernière s'amplifie (déformée [3]) menant à un claquage causant la diminution des deux ouvertures périphériques (déformée [4]). En outre, on observe des oscillations sur l'isocouleur de  $\beta$  sur cette même déformée, dues à un phénomène de flambement local induit par les efforts de compressions locaux. La poursuite de l'essai rétablit les deux pliages périphériques, fait disparaître les oscillations et augmente la taille de la zone de pliage centrale.

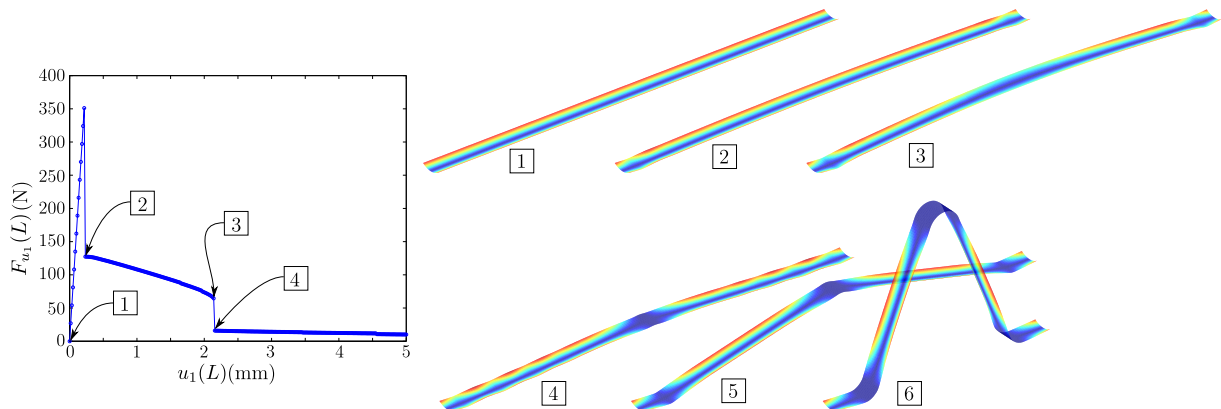


FIGURE 6 – Essai de flambage par compression avec rotation libre des extrémités. Courbe de l'effort axial en fonction du déplacement axial à l'extrémité.

Les résultats des deux tests de flambage montrent qu'une telle structure (le ruban) est sensible aux imperfections et qu'il est illusoire de dimensionner les applications avec un calcul de flambage linéarisé.

### 3.3 Dédoublage d'une zone de pliage et migration

En poursuivant l'essai de flambage par flexion présenté précédemment, on obtient la configuration initiale [1] présentée à la Figure 7. On bloque alors, en plus des courbures transversales, les degrés de libertés de translations aux deux extrémités et on impose un incrément de rotation de section opposé aux deux extrémités (de 0 à  $\pi/2$  pour l'une et de 0 à  $-\pi/2$  pour l'autre).

La première phase d'écartement (déformées [1] et [2] de la Figure 7) cause un agrandissement de la zone plate ainsi que du flambage localisé (légères oscillations de l'isocouleur sur la déformée [2]), dû à des

efforts de compression. Le claquage apparaissant entre les étapes [2] et [3] permet la disparition de ces efforts de compression et la création de deux zones de pliages. On remarque que la zone située entre les deux plis retrouve un degré de fermeture égal à celui de la configuration initiale. On peut vérifier que les longueurs des deux zones plates et que les rayons de pliage sont identiques.

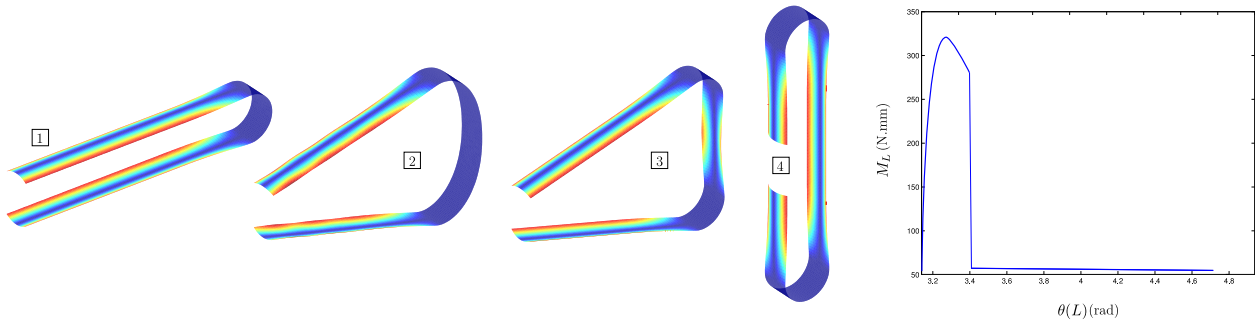


FIGURE 7 – Dédoublage d'une zone de pliage et migration des nouvelles zones de pliages.

## 4 Conclusions

Dans cette communication, nous avons rappelé les principes de base d'un modèle de poutre à section fortement déformable, proposé dans [2] pour décrire le comportement statique et dynamique d'un mètre ruban. Ce modèle 1D à quatre paramètres cinématiques permet de simuler des scénarios complexes de flambement avec un nombre et une localisation quelconque des zones de pliage. Outre la simplicité de mise en œuvre par rapport aux modèles de coques, ce modèle de poutre a l'intérêt de faire apparaître explicitement les grandeurs mécaniques importantes telles que, par exemple, le moment d'inertie en flexion de la section droite, qui dépend explicitement du paramètre  $\beta^e$  gouvernant la forme de la section. Le modèle permet ainsi non seulement de décrire mais aussi de comprendre les phénomènes. Pour finir, la simplicité du modèle (1D) laisse entrevoir une résolution analytique pour les situations les plus simples et l'obtention de formules de dimensionnement pour les applications.

## Références

- [1] COMSOL AB 2008 *COMSOL Multiphysics User's Guide v3.5* Stockholm, Sweden.
- [2] F. Guinot 2011 Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban composite *Thèse de doctorat* Université de Provence, Marseille.
- [3] S. Hoffait, O. Bruls, D. Granville, F. Cugnon, G. Kerschen 2009 Dynamic analysis of the self-locking phenomenon in tape-spring hinges *Acta Astronautica* **66(7-8)** 1125-1132
- [4] K. Seffen, S. Pellegrino 1999 Deployment dynamics of tape springs *Proceedings of the Royal Society A* **455** 1003-1048
- [5] K. Seffen, Z. You, S. Pellegrino 2000 Folding and deployment of curved tape springs *International Journal of Mechanical Sciences* **42(10)** 2055-2073
- [6] S.J.I. Walker, G.S. Aglietti 2007 A study of tape spring fold curvature for space deployable structures *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G (Journal of Aerospace Engineering)*, *G3* **221** 313-325