



**HAL**  
open science

# Solutions algébriques partielles des équations isomonodromiques sur les courbes de genre 2

Karamoko Diarra

► **To cite this version:**

Karamoko Diarra. Solutions algébriques partielles des équations isomonodromiques sur les courbes de genre 2. 2013. hal-00921546

**HAL Id: hal-00921546**

**<https://hal.science/hal-00921546>**

Preprint submitted on 20 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# SOLUTIONS ALGÈBRIQUES PARTIELLES DES ÉQUATIONS ISOMONODROMIQUES SUR LES COURBES DE GENRE 2

*par*

Karamoko DIARRA

---

**Résumé.** — On étudie la possibilité de construire des solutions algébriques partielles des équations d'isomonodromie pour les connections holomorphes de rang 2 sur les courbes de genre 2 en adaptant la méthode d'Andreev et Kitaev par les familles de Hurwitz. Nous classifions tous les cas où la connection est à monodromie Zariski dense.

## Introduction

L'équation de Painlevé VI est une équation différentielle ordinaire non-linéaire du second ordre dont les solutions paramétrisent les déformations isomonodromiques de systèmes différentiels linéaires de rang 2 avec 4 pôles simples sur la sphère de Riemann. Les équations de Painlevé trouvent leur origine dans les travaux de Paul Painlevé : ce sont "les" équations différentielles d'ordre 2 irréductibles sans singularité mobile. En particulier, leur solution générale est très transcendante ; pour autant, il existe des solutions algébriques ou de type hypergéométrique. La recherche des solutions spéciales, notamment algébriques, a fait l'objet de nombreux travaux durant la dernière décennie [13, 23, 24, 14, 15, 2, 18, 19, 3, 4, 5, 6, 7] ; la classification complète est donnée dans [22], entérinant la liste établie dans [8].

Plus généralement, on peut considérer une courbe projective lisse  $X$  de genre  $g$  sur  $\mathbb{C}$  et la donnée de  $n$  points distincts (ou du diviseur  $D$  réduit correspondant) et considérer les équations d'isomonodromie pour les connections logarithmiques de rang 2 sur  $X$ , de diviseur  $D$ . Lorsque  $g = 0$ , on obtient les systèmes des Garnier (voir [17]), le cas le plus simple  $n = 4$  correspondant à Painlevé VI. Pour les équations isomonodromiques en genre  $g > 0$ , voir par exemple [21]. On s'attend à ce que la transcendance de la solution générale croisse avec le genre et le nombre de pôles, mais

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 34M55, 34M56, 34M03.

*Mots clefs.* — Équations différentielles ordinaires, Déformations isomonodromiques, Familles de Hurwitz.

aussi à ce qu'il y ait des solutions spéciales, notamment algébriques. Les solutions locales sont à  $N = 3g - 3 + n$  variables (variables de déformation de la courbe et des  $n$  pôles); on suppose toujours  $N > 0$ . Une première méthode pour construire des solutions algébriques est de considérer des connexions à monodromie finie (voir [14, 15, 3, 4, 7]); ceci permet de retrouver presque toutes les solutions de Painlevé VI à symétrie d'Okamoto près (voir [8]). De telles solutions algébriques existent en tout genre  $g$ , quel que soit le nombre  $n$  de pôles. L'autre méthode, que nous avons exploitée dans notre précédent article [11], est celle utilisée par Andreev et Kitaev [2, 18, 19] que nous allons maintenant décrire.

On se donne une connexion logarithmique  $(E, \nabla)$  sur une courbe  $X$  de genre  $g$  avec  $n$  pôles. On se donne une famille de revêtements ramifiés  $\phi_t : X_t \rightarrow X$  dépendant algébriquement d'un paramètre  $t \in T$ . La famille de connexions

$$(E_t, \nabla_t) := \phi_t^*(E, \nabla)$$

définie sur la famille de courbes  $X_t$  est isomonodromique et définit une solution algébrique partielle de l'équation d'isomonodromie correspondante. Pour un revêtement  $\phi_t$  général, ne ramifiant pas au dessus des pôles  $(E, \nabla)$ , il est facile de voir que l'espace de déformation de  $\phi_t$  est de dimension strictement plus petite que la dimension de déformation de  $(X_t, D_t)$  où  $D_t$  est le diviseur des pôles de  $(E_t, \nabla_t)$ . La déformation isomonodromique paramétrée par  $T$  ne sera que partielle. Pour avoir une solution algébrique complète, il faudra que le revêtement ramifie beaucoup au dessus des pôles de  $(E, \nabla)$ ; en général, il faudra aussi imposer aux pôles de  $(E, \nabla)$  d'avoir une monodromie locale finie de sorte que les relevés de ces pôles par  $\phi_t$  deviennent des singularités apparentes : on pourra alors les chasser par une transformation birationnelle.

En fait, toute solution algébrique de Painlevé VI peut être reconstruite (à symétrie d'Okamoto près) par revêtement ramifié d'une connexion  $(E, \nabla)$  hypergéométrique; le cas où  $(E, \nabla)$  est à monodromie Zariski dense est classifié dans [12]. Dans [11], nous avons classifié tous les  $X, (E, \nabla)$  à monodromie Zariski dense et  $\phi_t : X_t \rightarrow X$  donnant lieu à une solution algébrique complète de l'équation d'isomonodromie associée. On montre que nécessairement  $X$  et  $X_t$  sont de genre 0 avec  $(E, \nabla)$  hypergéométrique et on trouve 6 possibilités de ramification pour  $\phi_t$ . On a ainsi obtenu des solutions algébriques de systèmes de Garnier de rang  $N = 2$  et 3.

Dans cet article, nous utilisons la même méthode pour construire des déformations isomonodromiques algébriques partielles de connexions holomorphes sur les courbes de genre  $g = 2$ . Nous supposons donc  $X_t$  une courbe de genre 2 et  $(E_t, \nabla_t)$  n'ayant que des singularités apparentes. On y pensera comme des connexions projectives holomorphes, c'est à dire sans pôle. La dimension de déformation de  $\phi_t$  est majorée par le nombre  $b$  de points de branchements (valeurs critiques de  $\phi_t$ ) en dehors des pôles de  $(E, \nabla)$ . Ici, le nombre de variables est  $N = 3$  et on cherche donc des déformations algébriques de dimension  $b = 1, 2$  ou 3. On utilise la même méthode que dans notre précédent article [11] : on considère la structure orbifold de  $X$  sous-jacente à

la connexion (voir [11], section 2) et le fait que le degré du revêtement ramifié agit multiplicativement sur la caractéristique d'Euler orbifold.

Dans la section 1, nous montrons que le nombre de paramètres libres dépend de la géométrie de l'orbifold. Pour avoir une solution algébrique complète, i.e.  $b = 3$ , on doit avoir  $\chi > 0$  ce qui force  $X = \mathbb{P}^1$  et  $(E, \nabla)$  à provenir d'une équation hypergéométrique associée à un pavage de la sphère ; en particulier, le groupe de monodromie de  $(E, \nabla)$  ou de  $(E_t, \nabla_t)$  est fini. Réciproquement, toute connexion  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  à monodromie finie sur une courbe admet une déformation isomonodromique algébrique ; une telle déformation est en particulier construite par pull-back à paramètre d'une connexion hypergéométrique par le théorème de Klein [20]. Pour  $b = 2$ , on doit avoir  $\chi = 0$  ce qui force  $(E, \nabla)$  et donc  $(E_t, \nabla_t)$  à être réductible (voir Proposition 1.1). Ainsi dans le cas où  $(E, \nabla)$  est à monodromie Zariski dense, on a nécessairement  $b \leq 1$ .

Dans les sections 2 et 3, nous dressons la liste des données de Hurwitz possibles pour une déformation à  $b = 1$  paramètre de revêtements lorsque  $(E, \nabla)$  est à monodromie Zariski dense. Dans les tables 1 et 2, on trouve les degrés et ramifications possibles.

Dans la section 4, nous montrons l'existence d'un revêtement ramifié pour chaque donnée de Hurwitz de notre liste. Pour vraiment classifier les solutions algébriques correspondantes, il faudrait classifier tous les revêtements possibles modulo conjugaison d'une part (voir [25]), et modulo l'action naturelle du groupe modulaire (ou Mapping Class Group) d'autre part. Mais ceci nécessite d'autres techniques (voir par exemple [4]) et notamment l'utilisation d'un logiciel de calcul formel ; nous reportons cette étude à un article ultérieur.

Enfin, dans la dernière section, nous construisons explicitement un exemple de degré 6. La famille de revêtement est alors paramétrée par la courbe elliptique  $E = \{y^2 = x^3 + 1\}$ . À tout point  $(x_t, y_t) \in E$  de cette courbe, nous associons la courbe de genre 2

$$X_t := \{Y^2 + (x_t + 1)(X^2 - 1)(3X^4 + 3(x_t - 1)X^2 + x_t^2 - x_t + 1) = 0\}$$

avec le revêtement ramifié

$$\phi_t : X_t \rightarrow \mathbb{P}^1 ;$$

$$(X, Y) \mapsto \frac{(x_t - 2)^2 X^2 (Y - 3y_t) + 4(x_t^2 - x_t + 1)(y_t - Y) + (x_t^2 + 2x_t + 1 - 3y_t)X^6 - 6y_t(x_t - 2)X^4}{2(1 + x_t)^2 X^6}.$$

Ce dernier ramifie totalement au dessus de 0, 1 et  $\infty$  à l'ordre 3, 3 et 6 respectivement ; en dehors de ces 3 fibres, il a exactement un point de branchement

$$\phi_t(0, y_t) = \frac{x_t(x_t^3 - 8)}{4(x_t^3 + 1)}.$$

Par construction, la courbe  $X_t$  est bi-elliptique, revêtement double de la courbe elliptique  $E$ . Les résultats de cette note sont partiellement issus de notre thèse [10] effectuée sous la direction de F. Loray à l'Université de Rennes 1.

### 1. Structure orbifolde, formule de Riemann-Hurwitz et première borne.

Nous reprenons la démarche de [10, 11]; nous renvoyons à la section 2 de [11] pour la notion de structure orbifolde.

On se donne un revêtement ramifié  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  de degré  $d$  entre surfaces de Riemann compactes avec  $\tilde{X}$  de genre 2. On suppose donnée une connexion logarithmique  $(E, \nabla)$  de rang 2 sur  $X : E \rightarrow X$  est un fibré vectoriel de rang 2 et  $\nabla : E \rightarrow E \otimes \Omega_X^1(D)$  une connexion méromorphe de diviseur  $D$  réduit, de support disons  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ . On suppose que  $\phi^*(E, \nabla)$  ne possède que des singularités apparentes, i.e. devient holomorphe après transformation de jauge birationnelle.

Associons à  $(E, \nabla)$  une structure orbifolde à singularités coniques sur les  $x_i$  : si la monodromie locale de  $(E, \nabla)$  autour de  $x_i$  est d'ordre  $p_i$ , on fixe un point conique d'angle  $\frac{2\pi}{p_i}$  en  $x_i$ . Notons  $p = (p_1, \dots, p_n)$  la donnée de la structure orbifolde, que l'on peut aussi voir comme une fonction  $p : X \rightarrow \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$  prenant la valeur 1 presque partout. On définit la caractéristique d'Euler de l'orbifolde  $(X, p)$  par

$$\chi(X, p) := 2 - 2g + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p_i} - 1 \right) = 2 - 2g - n + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}$$

où  $g$  est le genre de  $X$ . Lorsque  $\chi(X, p) < 0$ , cette structure orbifolde peut être réalisée par une métrique de courbure  $-1$  sur  $X$  (compatible avec la structure conforme de  $X$ ) et l'aire de  $X$  pour cette métrique est alors donnée par  $-2\pi\chi(X, p)$ . La représentation de monodromie de  $(E, \nabla)$  se factorise comme représentation du groupe fondamental orbifold de  $(X, p)$ , et, parmi les structures orbifoldes sur  $X$  satisfaisant cette propriété,  $(X, p)$  est minimale (d'aire maximale dans le cas hyperbolique).

On définit  $\tilde{p} := \phi^*p$  par :

- $\tilde{p}(\tilde{x}) = p(\phi(\tilde{x}))$  si  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  est un point régulier pour  $\phi$ ,
- $\tilde{p}(\tilde{x}) = p \cdot p(\phi(\tilde{x}))$  si par contre  $\phi$  ramifie à l'ordre  $p \in \mathbb{Z}_{>1}$  en  $\tilde{x}$  (i.e. en coordonnées locales  $\phi(z) = z^p$ ).

Attention, les points coniques deviennent d'angle rationnel en général :  $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0} \cup \{\infty\}$ . On définit la caractéristique d'Euler de la même manière et la formule de Riemann-Hurwitz s'écrit alors :

$$\chi(\tilde{X}, \tilde{p}) = d \cdot \chi(X, p).$$

Sous notre hypothèse que  $\phi^*(E, \nabla)$  ne possède que des singularités apparentes, on déduit aisément que  $\tilde{p}$  n'a que des points coniques d'angle multiple de  $2\pi$ , i.e.  $\frac{1}{\tilde{p}}$  est à valeurs entières. Si l'on note

$$b := \sum_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \left( \frac{1}{\tilde{p}(\tilde{x})} - 1 \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

( $2\pi b$  est l'excédent d'angles total sur la surface) alors il vient

$$\chi(\tilde{X}, \tilde{p}) = 2 - 2\tilde{g} + b = b - 2.$$

Notons que les points coniques de  $\tilde{X}$  proviennent ou bien du fait qu'on a "trop" ramifié au dessus des  $x_i$  (à un ordre  $p = kp_i$  pour un  $k > 1$  ce qui contribue pour  $k$  dans  $b$ ) ou encore du fait que  $\phi$  a des points de ramifications "libres", c'est à dire en dehors des  $x_i$ . Ces derniers sont les paramètres permettant de déformer le revêtement ramifié  $\phi$  sans modifier sa combinatoire au dessus des  $x_i$  : pour une telle déformation  $\phi_t : \tilde{X}_t \rightarrow X$ , les relevés  $\phi_t^*(E, \nabla)$  sont tous à singularités apparentes et produisent une déformation isomonodromique de connexions holomorphes sur  $\tilde{X}_t$ . Pour résumer, la formule de Riemann-Hurwitz nous donne :

**Proposition 1.1.** — *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a l'égalité*

$$(1) \quad b = 2 + \left( 2 - 2g + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p_i} - 1 \right) \right) d$$

et  $b$  majore la dimension de déformation de  $\phi$ .

**1.1. Cas sphérique.** — Si l'on veut construire une solution algébrique complète, alors il faut  $b \geq 3$ , ce qui implique que l'orbifold  $(X, p)$  est de caractéristique d'Euler  $\chi(X, p) > 0$ . Ces orbifolds sont classifiées par Klein dans [20] et correspondent aux quotients de  $\mathbb{P}^1$  par les sous-groupes finis de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ . En particulier, le groupe fondamental orbifold est fini, ce qui implique que  $(E, \nabla)$  est à monodromie finie ! Il en sera de même pour  $\phi_t^*(E, \nabla)$ . Réciproquement, une connexion holomorphe  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  sur  $\tilde{X}$  à monodromie finie admet une déformation isomonodromique complète algébrique. On pourrait classifier ces déformations de manière analogue à [4, 7], c'est à dire classifier les représentations du groupe fondamental de  $\tilde{X}$  dans les sous-groupes finis de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Nous laissons cela à un article ultérieur. Notons que de telles déformations sont automatiquement construites par déformation de revêtements ramifiés au dessus des modèles hypergéométriques standards

$$(p_0, p_1, \infty) = (1, p, p), (2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 4) \text{ et } (2, 3, 5)$$

(voir [20]).

**1.2. Cas euclidien.** — Si l'on cherche maintenant une déformation algébrique de dimension 2 (codimension 1) qui ne soit pas donnée par une monodromie finie, alors on doit avoir  $b = 2$  et donc  $\chi(X, p) = 0$ . L'orbifold est alors un des quotient de la droite complexe  $\mathbb{C}$  par un groupe discret de covolume fini et on trouve ou bien que  $X$  est une courbe elliptique sans point orbifold, ou bien  $\mathbb{P}^1$  avec une des structures orbifolds suivantes :

$$(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3) \text{ et } (2, 2, 2, 2).$$

Notons que  $(2, 2, \infty)$  est exclu puisque les singularités orbifolds doivent essentiellement disparaître sur le revêtement fini  $\tilde{X}$ . Dans chacun des cas, le groupe fondamental est résoluble (virtuellement abélien) et donc  $(E, \nabla)$  doit être réductible ou diédral ; il en sera de même pour  $\phi_t^*(E, \nabla)$ . Ce cas fera l'objet d'un autre article.

**1.3. Cas hyperbolique.** — Si  $(E, \nabla)$  est à monodromie Zariski dense, il ne nous reste que  $b = 0$  ou  $1$  comme possibilité. Le cas  $b = 0$  est rigide, il n'y aura pas de déformation. Notons cependant qu'il a déjà été étudié dans [1]; on y trouve la liste des orbifolles possibles avec le degré correspondant. Dans la prochaine section, nous donnons la classification similaire dans le cas  $b = 1$ .

## 2. Classification dans le cas où $(X, \nabla)$ est hypergéométrique.

On suppose dans cette section  $X = \mathbb{P}^1$  et  $(E, \nabla)$  avec pôles sur  $0, 1$  et  $\infty$ . On suppose en outre la monodromie de  $(E, \nabla)$  Zariski dense, et donc l'orbifolde sous-jacente  $(p_0, p_1, p_\infty)$  hyperbolique :

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1.$$

On suppose en outre que l'on peut déformer  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ , c'est à dire  $b = 1$  avec les notations précédentes.

**Proposition 2.1.** — *On a l'égalité*

$$(2) \quad \left(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_\infty}\right) d = 1.$$

De plus, on obtient les inégalités suivantes :

$$\left(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right) p_\infty \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1.$$

*Démonstration.* — Le premier énoncé se déduit immédiatement de la Proposition 1.1. Le fait que les points coniques disparaissent en haut entraîne que le degré  $d \geq p_\infty$ . Alors on a

$$\left(1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i}\right) p_\infty \leq \left(1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i}\right) d \leq 1,$$

ce qui nous donne

$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right) p_\infty \leq 2.$$

Pour obtenir la seconde inégalité, il est évident que

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1;$$

la minoration de cette inégalité provient du fait que  $p_\infty \geq 3$  (hyperbolicité) : en substituant dans l'inégalité (3), on obtient  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \geq \frac{1}{3}$ .  $\square$

Dans le cas hyperbolique, le deuxième énoncé de la proposition 2.1 nous permet d'obtenir la liste des triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  suivants :

- $(2, 3, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 7, \dots, 12$ ,
- $(2, 4, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 5, \dots, 8$ ,
- $(2, 5, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 5, 6$ ,

- (2, 6, 6),
- (3, 3,  $p_\infty$ ) avec  $p_\infty = 4, 5, 6$ ,
- (3, 4, 4) et
- (4, 4, 4).

Si l'on veut pouvoir déformer  $\phi$ , on doit avoir un point de branchement libre, i.e. en dehors des fibres des points orbifolds 0, 1 et  $\infty$ . Ceci entraîne que  $\phi$  doit totalement ramifier au dessus de 0, 1 et  $\infty$  précisément à l'ordre  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_\infty$  respectivement. En particulier, le degré  $d$  du revêtement doit être un multiple des  $p_i$ . Ceci, compte tenu de (2) pour  $d$  nous donne la liste suivante.

$(p_0, p_1, p_\infty)$	Degré	Ramifications au dessus de $(0 ; 1 ; \infty)$
(2, 3, 7)	42	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{21 \text{ fois}} ; \underbrace{(3 + \dots + 3)}_{14 \text{ fois}} ; \underbrace{(7 + \dots + 7)}_{6 \text{ fois}}$
(2, 3, 8)	24	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{12 \text{ fois}} ; \underbrace{(3 + \dots + 3)}_{8 \text{ fois}} ; 8 + 8 + 8$
(2, 3, 9)	18	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{9 \text{ fois}} ; \underbrace{(3 + \dots + 3)}_{6 \text{ fois}} ; 9 + 9$
(2, 3, 12)	12	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{6 \text{ fois}} ; \underbrace{(3 + \dots + 3)}_{4 \text{ fois}} ; 12$
(2, 4, 5)	20	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{10 \text{ fois}} ; \underbrace{(4 + \dots + 4)}_{5 \text{ fois}} ; \underbrace{(5 + \dots + 5)}_{4 \text{ fois}}$
(2, 4, 6)	12	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{6 \text{ fois}} ; 4 + 4 + 4 ; 6 + 6$
(2, 4, 8)	8	$(2 + 2 + 2 + 2 ; 4 + 4 ; 8)$
(2, 5, 5)	10	$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{5 \text{ fois}} ; 5 + 5 ; 5 + 5$
(2, 6, 6)	6	$(2 + 2 + 2 ; 6 ; 6)$
(3, 3, 4)	12	$(3 + 3 + 3 + 3 ; 3 + 3 + 3 + 3 ; 4 + 4 + 4)$
(3, 3, 6)	6	$(3 + 3 ; 3 + 3 ; 6)$
(4, 4, 4)	4	$(4 ; 4 ; 4)$

TABLE 1. Revêtements dans le cas hypergéométrique

Dans chacun des cas,  $\phi^* \nabla$  n'a qu'une singularité apparente libre qui provient du point critique de  $\phi$  en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$ . Dans la dernière section, nous expliquerons comment démontrer l'existence de revêtements avec ces ramifications et nous construirons l'avant dernier, de degré 6, explicitement.



### 3. Classification dans le cas où $(X, \nabla)$ n'est pas hypergéométrique.

Toujours supposant  $b = 1$ , la proposition 1.1 nous donne

$$\left(2g - 2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) d = 1.$$

La caractéristique d'Euler de l'orbifolde  $(X, p)$  croît rapidement avec le genre  $g$  et le nombre  $n$  de points conique (voir tables de la page 136 de [11]), et on trouve aisément la liste de possibilités exhaustive de la table 2. Dans chacun des cas, il y a en outre un point de ramification libre, en dehors des points coniques de  $X$ .

$(g ; p_1, \dots, p_n)$	Degré	Ramifications au dessus de $(p_1, \dots, p_n)$
$(0 ; 2, 2, 2, 3)$	6	$(3 + 3 ; 3 + 3 ; 3 + 3 ; 2 + 2 + 2)$
$(0 ; 2, 2, 2, 4)$	4	$(2 + 2 ; 2 + 2 ; 2 + 2 ; 4)$
$(0 ; 2, 2, 2, 2, 2)$	2	$(2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2)$
$(1 ; 2)$	2	$(2)$

TABLE 2. Revêtements dans le cas non hypergéométrique

### 4. Existence de revêtements

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré que les obstructions données par la formule de Riemann-Hurwitz, ce qui nous a conduit aux tables 1 et 2. Il reste à montrer l'existence de tels revêtements, c'est le *problème de Hurwitz*. Il suffit pour cela de trouver, par exemple dans le cas hypergéométrique, pour chaque donnée  $d$  et  $(p_0, p_1, p_\infty)$ , une représentation

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, t\}) \rightarrow \text{Perm}(1, \dots, d)$$

du groupe fondamental dans le groupe des permutations satisfaisant les propriétés suivantes. Si l'on note  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty, \sigma_t \in \text{Perm}(1, \dots, d)$  les images des générateurs standards du groupe fondamental, alors on veut

- $\sigma_i$  est conjugué au produit de  $p_i$  permutations cycliques disjointes de longueur  $\frac{d}{p_i}$  pour  $i = 0, 1, \infty$ ,
- $\sigma_t$  est une transposition,
- $\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_\infty \circ \sigma_t = \text{identité}$ ,
- le groupe engendré  $\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty \rangle$  est transitif.

Par exemple, le revêtement de degré 4 en bas de la table 1 est réalisé par

$$\sigma_0 = (1234), \sigma_1 = (1324), \sigma_\infty = (1342) \quad \text{et} \quad \sigma_t = (12).$$

Nous détaillons maintenant les deux revêtements de degré 6 de la table 1.

Pour  $(p_0, p_1, p_\infty) = (2, 6, 6)$ , remarquons qu'il existe un revêtement de degré 6 ramifiant uniquement au dessus de 0, 1 et  $\infty$  et désingularisant l'orbifolde  $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_\infty) = (2, 6, 3)$  : c'est le quotient de la courbe elliptique qui possède un automorphisme d'ordre 6 par le groupe engendré. Il existe donc  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$  et  $\tilde{\sigma}_\infty$  satisfaisant

- $\tilde{\sigma}_i$  est conjugué au produit de  $\tilde{p}_i$  permutations cycliques disjointes de longueur  $\frac{d}{\tilde{p}_i}$  pour  $i = 0, 1, \infty$ ,
- $\tilde{\sigma}_0 \circ \tilde{\sigma}_1 \circ \tilde{\sigma}_\infty = \text{identité}$ ,
- le groupe engendré  $\langle \tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_\infty \rangle$  est transitif.

En particulier, à conjugaison près, on peut supposer  $\tilde{\sigma}_\infty = (123)(456)$ . Il suffit alors de poser  $\sigma_i := \tilde{\sigma}_i$  pour  $i = 0, 1$ ,  $\sigma_\infty = (123456)$  et  $\sigma_t = (14)$  et on a les relations attendues pour  $(2, 6, 6)$ . De la même manière, on ramène les cas  $(2, 4, 8)$  et  $(2, 3, 12)$  aux cas  $(2, 4, 4)$  et  $(2, 3, 6)$  respectivement. Ces derniers sont désingularisés par des revêtements elliptiques de degrés 4 et 6 respectivement, mais on peut les composer par une isogénie de degré 2 ce qui nous donne les bons degrés 8 et 12.

Pour  $(p_0, p_1, p_\infty) = (3, 3, 6)$ , remarquons qu'il existe un revêtement de degré 6 ramifiant uniquement au dessus de 0, 1 et  $\infty$  et désingularisant l'orbifolde  $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_\infty) = (3, 6, 6)$  : voir [1] (section 3.7). En notant comme avant  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$  et  $\tilde{\sigma}_\infty$  les permutations décrivant ce revêtement, on peut supposer  $\tilde{\sigma}_\infty = (123456)$ . Il suffit alors de poser  $\sigma_i := \tilde{\sigma}_i$  pour  $i = 0, 1$ ,  $\sigma_\infty = (123)(456)$  et  $\sigma_t = (14)$  et on a les relations attendues pour  $(3, 6, 3)$ . De la même manière, on ramène les cas  $(2, 5, 5)$ ,  $(2, 4, 6)$  et  $(2, 3, 9)$  respectivement aux cas  $(2, 5, 10)$ ,  $(2, 4, 12)$  et  $(2, 3, 18)$  de [1].

On voit facilement que l'orbifolde hypergéométrique  $(3, 3, 4)$  est revêtement double de  $(2, 3, 8)$  (ramifiant sur les points d'ordre 2 et 8) et que  $(4, 4, 4)$  est revêtement triple de  $(3, 3, 4)$  (ramifiant sur les deux points d'ordre 3). En composant ces revêtements avec celui d'ordre 4 construit au dessus de  $(4, 4, 4)$  au tout début, on obtient les revêtements recherchés pour  $(2, 3, 8)$  et  $(3, 3, 4)$ . De la même manière, l'orbifolde hypergéométrique  $(2, 5, 5)$  s'obtient par revêtement double de  $(2, 4, 5)$ , ce qui nous donne l'existence du revêtement recherché pour  $(2, 4, 5)$ .

Pour le revêtement  $(2, 3, 7)$  de degré 42, on peut le décomposer en un revêtement de degré 7 par l'orbifolde de genre 0 et de structure orbifolde  $(2, 2, 2, 3)$  (voir [26], en haut de la table 2) composé avec un revêtement de degré 6 comme en haut de notre table 2. Enfin, pour cette dernière table, l'existence des revêtements de degré 6 et 4 se ramène aisément, par les méthodes perturbatives décrites au dessus, aux cas de revêtements galoisiens (sans branchement libre) des orbifolde de genre 0 et de structure orbifolde  $(2, 2, 3, 3)$  et  $(2, 2, 4, 4)$  (voir [16], list 1).

## 5. Une famille de revêtements de degré 6

On veut construire un exemple explicite de revêtements  $\phi : C_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré 6 ramifiant totalement au dessus de 0, 1 et  $\infty$  à l'ordre 3, 3 et 6 respectivement et

ayant un seul autre point de ramification simple, que nous pourrons déformer. Nous allons le construire comme composition de deux revêtements galoisiens  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ . Le premier  $\phi_1 : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  est de degré 3, ramifiant totalement à l'ordre 3 au dessus de 0, 1 et  $\infty$  et nulle-part ailleurs :  $E$  est la courbe elliptique possédant une symétrie d'ordre 3 et  $\phi_1$  est le quotient. Le second  $\phi_2 : C_2 \rightarrow E$  est un revêtement bielliptique de degré 2 ramifiant sur  $\phi_1^{-1}(\infty)$  ainsi que sur un autre point libre, que nous pourrons faire varier sur ma courbe elliptique  $E$ .

Le premier revêtement est par exemple donné par

$$\phi_1 : E = \{y^2 = x^3 + 1\} \rightarrow \mathbb{P}_z^1 ; (x, y) \mapsto z = \frac{y+1}{2}.$$

Pour calculer le second, on choisit un point  $(x_t, y_t) \in E$ , puis on compose le revêtement bielliptique ramifiant au dessus des points  $(x_t, \pm y_t)$  avec la translation par  $(x_t, y_t)$ . De cette manière, le point  $(x_t, -y_t)$  sera envoyé à l'infini de  $E$ , puis sur le point  $\infty \in \mathbb{P}_z^1$  par  $\phi_1$ , alors que le point  $(x_t, y_t)$  sera envoyé sur son double dans  $E$ , puis par  $\phi_1$ , sur le point de branchement libre de  $\mathbb{P}_z^1$ . On notera  $(x_1, y_1)$  les coordonnées non translâtées et  $(x, y)$  les coordonnées translâtées de sorte que  $(x, y) = (x_1, y_1) \oplus (x_t, y_t)$ . Rappelons les formules de translation sur  $E$  :

$$\begin{cases} x &= a^2 - x_1 - x_t \\ y &= -(ax + b) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a &= \frac{y_1 - y_t}{x_1 - x_t} \\ b &= \frac{x_1 y_t - x_t y_1}{x_1 - x_t} \end{cases}$$

À partir de maintenant, notons plutôt  $\phi_1 : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  le revêtement de degré 3 vu depuis les coordonnées non translâtées  $(x_1, y_1)$ . En simplifiant les puissances de  $y_1$  et  $y_t$  avec l'équation de la courbe elliptique  $E$ , on trouve

$$\phi_1(x_1, y_1) = \frac{-(3x_t^2 x_1 + x_t^3 + 4)y_1 + (1 + y_t)x_1^3 + 3x_t(y_t - 1)x_1^2 + 3x_t^2 x_1 + 4y_t - x_t^3}{2(x_1 - x_t)^3}.$$

Les 3 points de ramification sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{llll} E & \xrightarrow{\oplus(x_t, y_t)} & E & \xrightarrow{\frac{y+1}{2}} \mathbb{P}^1 \\ (x_1, y_1) & \mapsto & (x, y) & \mapsto z \\ \left( \frac{2(1-y_t)}{x_t^2}, \frac{4y_t - x_t^3 - 4}{x_t^3} \right) & \mapsto & (0, -1) & \mapsto 0 \\ \left( \frac{2(1+y_t)}{x_t^2}, \frac{4y_t + x_t^3 + 4}{x_t^3} \right) & \mapsto & (0, 1) & \mapsto 1 \\ (x_t, -y_t) & \mapsto & (\infty, \infty) & \mapsto \infty \end{array} \right.$$

Le revêtement bielliptique est obtenu par exemple en introduisant la variable  $X^2 = \frac{x_1 - x_t}{x_1 + 1}$  (notons que  $x_1$  ramifie déjà sur  $-1$ ) et la variable  $Y = y_1(X^2 - 1)^2$  afin de mettre l'équation de  $C_2$  sous forme hyperelliptique :

$$C_2 = \{Y^2 + (x_t + 1)(X^2 - 1)(3X^4 + 3(x_t - 1)X^2 + x_t^2 - x_t + 1)\}$$

et la projection sur  $E$  est donnée par :

$$\phi_2 : C_2 \rightarrow E ; (X, Y) \mapsto (x_1, y_1) = \left( -\frac{X^2 + x_t}{X^2 - 1}, \frac{Y}{(X^2 - 1)^2} \right).$$

Les deux points de ramification sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_2 & \xrightarrow{\phi_2} & E \\ (X, Y) & \mapsto & (x_1, y_1) \\ (0, y_t) & \mapsto & (x_t, y_t) \\ (0, -y_t) & \mapsto & (x_t, -y_t) \end{array} \right.$$

En composant  $\phi_1$  et  $\phi_2$  (et en simplifiant les puissances de  $y_t$ ), il vient

$$\phi(X, Y) = \frac{(x_t-2)^2 X^2 (Y-3y_t) + 4(x_t^2 - x_t + 1)(y_t - Y) + (x_t^2 + 2x_t + 1 - 3y_t)X^6 - 6y_t(x_t - 2)X^4}{2(1+x_t)^2 X^6}.$$

### Références

- [1] M. T. Abu Osman et G. Rosenberger, Embedding property of surface groups. Bull. Malaysian Math. Soc. 3 (1980) 21-27.
- [2] F. V. Andreev et A. V. Kitaev, Transformations  $RS_4^2(3)$  of the ranks  $\leq 4$  and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. Comm. Math. Phys. 228 (2002) 151-176.
- [3] P. Boalch, From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo. Proc. London Math. Soc. 90 (2005) 167-208.
- [4] P. Boalch, The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI. J. Reine Angew. Math. 596 (2006) 183-214.
- [5] P. Boalch, Six results on Painlevé VI. Théories asymptotiques et équations de Painlevé, 1-20, Sémin. Congr., 14, Soc. Math. France, Paris, 2006.
- [6] P. Boalch, Higher genus icosahedral Painlevé curves. Funkcial. Ekvac. 50 (2007), no. 1, 19-32.
- [7] P. Boalch, Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem. Differential equations and quantum groups, 85-112, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [8] P. Boalch, Towards a non-linear Schwarz's list. The many facets of geometry, 210-236, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.
- [9] B. Chiarellotto, On Lamé Operators which are Pullbacks of Hypergeometric Ones. Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 2735-2780.
- [10] K. Diarra, Construction de déformations isomonodromiques par revêtements, Doctoral thesis, Université de Rennes 1 (2011). <http://tel.archives-ouvertes.fr/>
- [11] K. Diarra, Construction et classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier. Bull. Braz. Math. Soc., New Series 44 (2013) 1-26.
- [12] C. F. Doran, Algebraic and Geometric Isomonodromic Deformations. J. Differential Geometry 59 (2001) 33-85.
- [13] B. Dubrovin et M. Mazzocco, Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups. Invent. Math. 141 (2000) 55-147.
- [14] N. Hitchin, Poncelet polygons and the Painlevé equations. Geometry and analysis (Bombay, 1992), 151-185, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1995.
- [15] N. Hitchin, A lecture on the octahedron. Bull. London Math. Soc. 35 (2003) 577-600.
- [16] A. Hulpke, T. Kuusalo, M. Näätänen et G. Rosenberger, On orbifold coverings by genus 2 surfaces. Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.) 11 (2005) 45-55.
- [17] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura et M. Yoshida, From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions. Aspects of Mathematics, E16. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1991.

- [18] A. V. Kitaev, Special functions of isomonodromy type, rational transformations of the spectral parameter, and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. *Algebra i Analiz* 14 (2002) 121-139.
- [19] A. V. Kitaev, Grothendieck's dessins d'enfants, their deformations, and algebraic solutions of the sixth Painlevé and Gauss hypergeometric equations. *Algebra i Analiz* 17 (2005) 224-275.
- [20] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, B. G. Teubner, Leipzig (1884).
- [21] I. Krichever, Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations. *Mosc. Math. J.* 2 (2002) 717-752.
- [22] O. Lisovsky et Y. Tykhyy, Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. arXiv :0809.4873 [math.CA]
- [23] M. Mazzocco, Rational solutions of the Painlevé VI equation. Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (Leeds, 2000). *J. Phys. A* 34 (2001) 2281-2294.
- [24] M. Mazzocco, Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation. *Math. Ann.* 321 (2001) 157-195.
- [25] A. Mednykh, Counting conjugacy classes of subgroups in a finitely generated group. *J. Algebra* 320 (2008) 2209-2217.
- [26] M. A. Pascali et C. Petronio, Branched covers of the sphere and the prime-degree conjecture. *Ann. Mat. Pura Appl.* 191 (2012) 563-594.
- [27] E. Pervova et C. Petronio, On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data. I. *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006) 1957-1985.
- [28] E. Pervova et C. Petronio, On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data. II. *J. Knot Theory Ramifications* 17 (2008) 787-816.

---

K. DIARRA, DER de Mathématiques et d'informatique, FAST, Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako, BP : E 3206 Mali. • *E-mail* : diarak2005@yahoo.fr  
*E-mail* : karamoko.diarra@univ-rennes1.fr