



**HAL**  
open science

## **La méthode pgd appliquée à l'équation de la chaleur non-linéaire : vers une formulation performante**

Pierre Joyot, Nicolas Bur, Francisco Chinesta, Pierre Villon

### ► **To cite this version:**

Pierre Joyot, Nicolas Bur, Francisco Chinesta, Pierre Villon. La méthode pgd appliquée à l'équation de la chaleur non-linéaire : vers une formulation performante. 11e colloque national en calcul des structures, May 2013, Giens, France. pp.Clé USB. <hal-00919051>

**HAL Id: hal-00919051**

**<https://hal.science/hal-00919051v1>**

Submitted on 16 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# La méthode PGD appliquée à l'équation de la chaleur non-linéaire : vers une formulation performante

P. Joyot<sup>1</sup>, N. Bur<sup>1</sup>, F. Chinesta<sup>2</sup>, P. Villon<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ESTIA-Recherche, technopole izarbel, 64210 Bidart, pjoyot@estia.fr

<sup>2</sup> EADS Corporate Foundation International Chair, GEM CNRS-ECN,  
1 rue de la Noë BP 92101, 44321 Nantes cedex 3, Francisco.Chinesta@ec-nantes.fr

<sup>3</sup> UTC-Roberval UMR 6253, 60200 Compiègne, pierre.villon@utc.fr

**Résumé** — La méthode PGD permet de calculer la solution d'une EDP directement sous forme séparée. Cet algorithme est efficace quand il n'est pas nécessaire de reconstruire le champ recherché au cours des itérations. Généralement les termes non-linéaires conduisent à cette reconstruction. Nous analysons plusieurs approches permettant de limiter, voire de supprimer ces reconstructions. Les résultats obtenus sont illustrés sur l'équation de la chaleur avec une conduction non linéaire.

## 1 Problématique

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'équation de la chaleur non-linéaire suivante

$$u_t - \nabla \cdot (\kappa(u) \nabla u) = b \quad \text{dans } \Omega \times \tau \quad (1)$$

où  $\kappa(u)$  représente la conduction non linéaire. Les conditions aux limites et initiales sont prises homogènes.

Afin d'isoler la partie non linéaire, nous introduisons la variable  $v$  définie par  $v = \kappa(u) - \kappa(0)$ . Le problème de départ (1) se réécrit

$$u_t - \nabla \cdot ((v + \kappa(0)) \nabla u) = b \quad (2)$$

$$v = \kappa(u) - \kappa(0) \quad (3)$$

Notre approche consiste à rechercher  $u$  et  $v$  sous forme séparée par la méthode PGD[1], i.e.

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} X^{\alpha}(\mathbf{x}) T^{\alpha}(t) \quad (4)$$

$$v(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} Q^{\alpha}(\mathbf{x}) R^{\alpha}(t) \quad (5)$$

L'équation (2) contient une partie linéaire en  $u$  et une partie quadratique en  $u$  et  $v$ . Cette équation peut être résolue efficacement par la PGD. L'équation (3) est non linéaire, elle ne peut être traitée directement par la PGD.

Dans cet article nous proposons quatre approches : la méthode directe et la méthode par développement de Taylor qui se distinguent par le nombre de reconstruction de  $u$  et de séparation de  $v$  à effectuer au cours de la résolution PGD. Une méthode originale utilisant la MAN (méthode asymptotique numérique) et une nouvelle approche qui utilise une équation différentielle associée à (3) ce qui permet de supprimer toute les reconstructions de  $u$  ainsi que toutes les séparations de  $v$ .

## Présentation de la méthode PGD dans le cas linéaire

Nous présentons dans un premier temps l'algorithme PGD, dans le cas linéaire, afin d'introduire les notations. On prend ici  $\kappa(u) = \kappa(0)$ , d'où  $v = 0$ . Le problème (2) se réduit à

$$\mathcal{L}(u) = u_t - \kappa(0) \Delta u = b \quad (6)$$

Nous recherchons  $u$  sous la forme séparée

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} X^\alpha(\mathbf{x}) T^\alpha(t) \quad (7)$$

où les  $X^\alpha$  sont des fonctions dépendant uniquement de  $\mathbf{x}$  et les  $T^\alpha$  des fonctions dépendant uniquement de  $t$ . Nous considérons que les  $p-1$  premiers couples  $X^\alpha T^\alpha$  sont connus. Nous décrivons la procédure pour calculer le  $p$ -ième couple. Ce couple sera noté  $XT$ . Nous notons  $u^{(p)} = \sum_{\alpha=1}^p X^\alpha T^\alpha$  et  $u^{(p)} = u^{(p-1)} + XT$ . L'algorithme PGD consiste à résoudre le système d'équations non-linéaire suivant

$$\int_{\Omega} \int_{\tau} \mathcal{L}(u^{(p)}) X^* T \, dt d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\tau} b X^* T \, dt d\mathbf{x} \quad \forall X^* \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \int_{\tau} \mathcal{L}(u^{(p)}) X T^* \, dt d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\tau} b X T^* \, dt d\mathbf{x} \quad \forall T^* \quad (9)$$

Ce système est équivalent à

$$\int_{\tau} \mathcal{L}(u^{(p)}) T \, dt = \int_{\tau} b T \, dt \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(u^{(p)}) X \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} b X \, d\mathbf{x} \quad (11)$$

$\mathcal{L}(u^{(p)})$  se détaille

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u^{(p)}) &= \mathcal{L}(u^{(p-1)}) + \mathcal{L}(XT) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{p-1} (X^\alpha T_{,t}^\alpha - \kappa(0) \Delta X^\alpha T^\alpha) + X T_{,t} - \kappa(0) \Delta X T \end{aligned}$$

en utilisant cette dernière équation, le système (10), (11) se réécrit

$$-\tilde{\gamma}_1 \Delta X + \tilde{\gamma}_2 X = \int_{\tau} b T \, dt - \sum_{\alpha=1}^{p-1} \left( \left( \int_{\tau} T_{,t}^\alpha T \, dt \right) X^\alpha - \kappa(0) \left( \int_{\tau} T^\alpha T \, dt \right) \Delta X^\alpha \right) \quad (12)$$

avec

$$\tilde{\gamma}_1 = \kappa(0) \int_{\tau} T T \, dt$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \int_{\tau} T_{,t} T \, dt$$

et

$$\tilde{\beta}_1 T_{,t} - \tilde{\beta}_2 T = \int_{\Omega} b X \, d\mathbf{x} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} \left( \left( \int_{\Omega} X^\alpha X \, d\mathbf{x} \right) T_{,t}^\alpha - \kappa(0) \left( \int_{\Omega} \Delta X^\alpha X \, d\mathbf{x} \right) T^\alpha \right) \quad (13)$$

avec

$$\tilde{\beta}_1 = \int_{\Omega} X X \, d\mathbf{x}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \kappa(0) \int_{\Omega} \Delta X X \, d\mathbf{x}$$

Les équations (12), (13) forment un système de deux équations. La première est une équation différentielle en espace et la seconde une ode en temps. Ce système non-linéaire est résolu par une méthode

de point fixe. Des conditions aux limites homogènes sont appliquées à (12). L'ode (13) est résolue en prenant une condition initiale homogène.

Une fois les opérateurs de (12) et de (13) discrétisés, il n'est plus nécessaire de les recalculer. Le calcul de chaque couple ainsi que les itérations du point fixe ne demandent que des opérations matricielles peu coûteuses.

Les équations (12) et (13) apparaissent ici sous une forme forte. L'utilisateur est libre de choisir son schéma de discrétisation. Dans le cas présent nous utilisons les MLS associées à une méthode de collocation.

## Méthode directe

La méthode directe a été présentée dans [2]. Nous considérons que les couples  $(X^\alpha(x), T^\alpha(t))$  sont connus jusqu'à l'ordre  $p-1$ . Le  $p$ -ième couple noté  $(X, T)$  est solution de

$$\int_{\tau} \mathcal{E}(u^{(p)}, v) T dt = \int_{\tau} b T dt \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u^{(p)}, v) X dx = \int_{\Omega} b X dx \quad (15)$$

avec  $u^{(p)} = u^{(p-1)} + XT$ ,  $\mathcal{E}(u, v) = u_t - \nabla \cdot ((v + \kappa(0)) \nabla u)$ .

A chaque itération de l'algorithme le champ  $u^{(p)}$  est reconstruit et  $v$  est calculé par décomposition SVD, i.e.

$$v \equiv \sum_{\alpha=1}^{n_v} Q^\alpha R^\alpha = SVD_{n_v} \left( \kappa(u^{(p-1)} + XT) - \kappa(0) \right)$$

$\mathcal{E}(u^{(p)}, v)$  se décompose de la manière suivante

$$\mathcal{E}(u^{(p)}, v) = \mathcal{E}(u^{(p-1)}, v) + XT_{,t} - \kappa(0) \Delta XT - \sum_{\alpha=1}^{n_v} (\nabla Q^\alpha \cdot \nabla X + Q^\alpha \Delta X) T R^\alpha$$

L'équation (14) se réécrit

$$-\gamma_1 \kappa(0) \Delta X - \left( \sum_{\alpha=1}^{n_v} \gamma_2^\alpha Q^\alpha \right) \Delta X - \sum_{\alpha=1}^{n_v} \gamma_3^\alpha \nabla Q^\alpha \cdot \nabla X + \gamma_4 X = \int_{\tau} b T dt - \int_{\tau} \mathcal{E}(u^{(p-1)}, v) T dt \quad (16)$$

$$-\gamma_1 \Delta X - \gamma_2 \cdot \nabla X + \gamma_3 X = \int_{\tau} b T dt - \int_{\tau} \mathcal{E}(u^{(p-1)}, v) T dt \quad (17)$$

avec

$$\gamma_1 = \int_{\tau} T T dt$$

$$\gamma_2^\alpha = \int_{\tau} T R^\alpha T dt$$

$$\gamma_3^\alpha = \int_{\tau} T R^\alpha T dt$$

$$\gamma_4 = \int_{\tau} T_{,t} T dt$$

et l'équation (15) devient

$$\xi_1 T_{,t} - \kappa(0) \xi_2 T - \sum_{\alpha=1}^{n_v} \xi_3^\alpha R^\alpha T = \int_{\Omega} b X dx - \int_{\Omega} \mathcal{E}(u^{(p-1)}, v) X dx \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \int_{\Omega} X X \, d\mathbf{x} \\ \xi_2 &= \int_{\Omega} \Delta X X \, d\mathbf{x} + \\ \xi_3^\alpha &= \int_{\Omega} (\nabla Q^\alpha \cdot \nabla X + Q^\alpha \Delta X) X \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Les équations (16) et (18) constituent le système d'équations permettant de calculer le couple  $(X, T)$ . Nous utilisons un algorithme de point fixe pour résoudre ce système. A chaque itération, il est nécessaire de reconstruire le champ  $v$  à partir de  $u^{(p-1)}$  et des fonctions  $X$  et  $T$ , cette opération est gourmande en place mémoire. De plus il est nécessaire de séparer  $v$  par SVD de manière à déterminer les fonctions  $Q^\alpha R^\alpha$ , ce qui est coûteux en temps de calcul. En conclusion cet algorithme n'est pas efficace.

## Développement de Taylor

Cette approche, également utilisée dans [2], consiste à réaliser un développement de Taylor de  $k(u)$ . Nous prenons

$$k(u^{(p)}) = k(u^{(p-1)} + XT) \approx k(u^{(p-1)}) + (XT)k'(u^{(p-1)}) \quad (19)$$

Le système à résoudre par la PGD est voisin de celui décrit au paragraphe précédent par contre ce schéma est plus efficace car la reconstruction de  $u$  et la séparation de  $v$  interviennent uniquement lors du calcul d'un nouveau couple.

## Méthode asymptotique numérique

L'utilisation conjointe de la MAN et de la PGD à été proposée récemment dans [3]. Dans ce travail, les auteurs appliquent dans un premier temps la MAN sur l'équation de la chaleur non linéaire. Ainsi ils obtiennent une suite de problèmes transitoires linéaires à résoudre. La résolution de chaque problème linéaire est assurée par la PGD.

Nous proposons ici d'appliquer la MAN à l'intérieur de la boucle PGD. Cette approche offre l'avantage d'utiliser la MAN sur des équations elliptiques et non paraboliques comme dans [3].

Dans les approches précédentes la décomposition de  $v$  est réalisée à partir de la décomposition de  $u^{(p)}$ . Ici les couples  $(X^\alpha(\mathbf{x}), T^\alpha(t))$  et  $(Q^\alpha(\mathbf{x}), R^\alpha(t))$  sont calculés simultanément. L'algorithme PGD est donc construit à partir de deux systèmes d'équations non-linéaire. Le premier correspond à l'application de la PGD sur l'équation (2), i.e.

$$\int_{\tau} \mathcal{E}(u^{(p)}, v^{(m)}) T \, dt = \int_{\tau} b T \, dt \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u^{(p)}, v^{(m)}) X \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} b X \, d\mathbf{x} \quad (21)$$

avec  $u^{(p)} = u^{(p-1)} + XT$  et  $v^{(m)} = v^{(m-1)} + QR$ .

L'équation (20) se réécrit

$$\begin{aligned}- \left( \kappa(0) \gamma_1 + \sum_{\alpha}^{m-1} Q^\alpha \gamma_2^\alpha \right) \Delta X - \left( \sum_{\alpha}^{m-1} \nabla Q^\alpha \gamma_2^\alpha \right) \nabla X + \gamma_3 X - \left( \sum_{\alpha}^{p-1} \nabla X^\alpha \gamma_4^\alpha \right) \nabla Q - \left( \sum_{\alpha}^{p-1} \Delta X^\alpha \gamma_4^\alpha \right) Q \\ - \gamma_5 (Q \Delta X + \nabla X \cdot \nabla Q) = \int_{\tau} \left( b - \mathcal{E}(u^{(p-1)}, v^{(m-1)}) \right) T \, dt \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \int_{\tau} T T dt & \gamma_4^\alpha &= \int_{\tau} T^\alpha R T dt \\ \gamma_2^\alpha &= \int_{\tau} T R^\alpha T dt & \gamma_5 &= \int_{\tau} R T dt \\ \gamma_3 &= \int_{\tau} T_t T dt\end{aligned}$$

l'équation (21) devient

$$\xi_1 T_t - \kappa(0) \xi_2 T - \left( \sum_{\alpha}^{m-1} \xi_3^\alpha R^\alpha \right) T - \left( \sum_{\alpha}^{p-1} \xi_4^\alpha T^\alpha \right) R - \xi_5 T R = \int_{\Omega} \left( b - \mathcal{E} \left( u^{(p-1)}, v^{(p-1)} \right) \right) X dx \quad (23)$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \int_{\Omega} X X dx & \xi_4^\alpha &= \int_{\Omega} (Q \Delta X^\alpha + \nabla X^\alpha \cdot \nabla Q) X dx \\ \xi_2 &= \int_{\Omega} \Delta X X dx & \xi_5 &= \int_{\Omega} (Q \Delta X + \nabla X \cdot \nabla Q) X dx \\ \xi_3^\alpha &= \int_{\Omega} (Q^\alpha \Delta X + \nabla X \cdot \nabla Q^\alpha) X dx\end{aligned}$$

Ce système, constitué des équations (22), (23) n'est pas utilisé sous cette forme. En effet : au niveau de l'équation (22), nous effectuons un développement asymptotique de  $X$  et de  $Q$  en prenant  $X = \sum_{n=1}^N a^n X_n$  et  $Q = \sum_{n=1}^N a^n Q_n$  ; au niveau de l'équation (23), nous effectuons un développement asymptotique de  $T$  et de  $R$  en prenant  $T = \sum_{n=1}^N a^n T_n$  et  $R = \sum_{n=1}^N a^n R_n$ .

A l'ordre  $n > 0$ , l'équation (22) se réécrit

$$\begin{aligned}- \left( \kappa(0) \gamma_1 + \sum_{\alpha}^{m-1} Q^\alpha \gamma_2^\alpha \right) \Delta X_n - \left( \sum_{\alpha}^{m-1} \nabla Q^\alpha \gamma_2^\alpha \right) \nabla X_n + \gamma_3 X - \left( \sum_{\alpha}^{p-1} \nabla X^\alpha \gamma_4^\alpha \right) \nabla Q_n - \\ \left( \sum_{\alpha}^{p-1} \Delta X^\alpha \gamma_4^\alpha \right) Q_n - \gamma_5 \sum_{r=1}^{n-1} (Q_r \Delta X_{n-r} + \nabla X_{n-r} \cdot \nabla Q_r) \\ = \lambda_n \int_{\Omega} \left( b - \mathcal{E} \left( u^{(p-1)}, v^{(p-1)} \right) \right) X dx \quad (24)\end{aligned}$$

et (23) devient

$$\begin{aligned}\xi_1 T_{n,t} - \kappa(0) \xi_2 T_n - \left( \sum_{\alpha}^{m-1} \xi_3^\alpha R^\alpha \right) T_n - \left( \sum_{\alpha}^{p-1} \xi_4^\alpha T^\alpha \right) R_n \\ - \xi_5 \sum_{r=1}^{n-1} T_{n-r} R_r = \lambda_n \int_{\Omega} \left( b - \mathcal{E} \left( u^{(p-1)}, v^{(p-1)} \right) \right) X dx \quad (25)\end{aligned}$$

Les équations (24) et (25) forment le premier système d'équations de notre algorithme PGD. Il est maintenant nécessaire d'écrire le second système d'équations à partir de l'équation (3) et des développements asymptotiques de  $X$ ,  $Q$ ,  $T$  et  $R$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial a} \left( v^{(m-1)} + \left( \sum_{n=1}^N a^n Q_n \right) R \right) R dt = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial a} \left( \kappa \left( u^{(p-1)} + \left( \sum_{n=1}^N a^n X_n \right) T \right) - \kappa(0) \right) R dt \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial a} \left( v^{(m-1)} + Q \left( \sum_{n=1}^N a^n R_n \right) \right) Q dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial a} \left( \kappa \left( u^{(p-1)} + X \left( \sum_{n=1}^N a^n T_n \right) \right) - \kappa(0) \right) Q dx\end{aligned}$$

A titre d'illustration nous prenons le cas particulier  $\kappa(u) = e^{\beta(u-\bar{u})}$ , les deux équations précédentes s'écrivent à l'ordre  $n \geq 0$

$$\bar{\gamma}_1 Q_n = \bar{\gamma}_2 X_n - \sum_{\alpha}^{p-1} \bar{\gamma}_3^{\alpha} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n-r}{n} Q_n^{\alpha} X_{n-r} + \bar{\gamma}_4 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n-r}{n} Q_n X_{n-r} \quad (26)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= \int_{\tau} R R dt & \bar{\gamma}_3^{\alpha} &= \beta \int_{\tau} T R^{\alpha} R dt \\ \bar{\gamma}_2 &= \beta \kappa(0) \left( \int_{\tau} T R R dt \right) & \bar{\gamma}_4 &= \beta \int_{\tau} T R R dt \end{aligned}$$

et

$$\bar{\xi}_1 R_n = \bar{\xi}_2 T_n + \sum_{\alpha}^{p-1} \bar{\xi}_3^{\alpha} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n-r}{n} T_{n-r} R_n^{\alpha} + \bar{\xi}_4 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n-r}{n} T_{n-r} R_n \quad (27)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \int_{\Omega} Q Q dx & \bar{\xi}_3^{\alpha} &= \beta \int_{\Omega} X Q^{\alpha} X dx \\ \bar{\xi}_2 &= \beta \kappa(0) \int_{\Omega} X X dx & \bar{\xi}_4 &= \beta \int_{\Omega} X Q X dx \end{aligned}$$

Dans cette méthode, les équations (24), (25), (26), (27) forment le cœur de l'algorithme PGD. On remarque qu'aucune reconstruction/séparation n'est nécessaire lors de la résolution du point fixe. Dans ce papier nous présentons les bases de notre approche, en particulier le calcul de  $X_0$ ,  $Q_0$ ,  $T_0$ ,  $R_0$  peu conduire à une étape de reconstruction/séparation ce qui limite l'intérêt de l'approche.

## EDP associée

Cette nouvelle méthode consiste à considérer que  $v$  est solution d'une EDP linéaire. Cette EDP remplacera l'équation (3). Cette dernière approche est la plus intéressante car elle permet de supprimer toute étape reconstruction/séparation.

Pour obtenir l'EPD associée nous calculons le laplacien de  $v$  défini par (3). Nous obtenons

$$\Delta v = \Delta u \kappa'(u) + \nabla u \cdot \nabla u \kappa''(u) \quad (28)$$

Dans le cas particulier où  $\kappa(u) = e^{\beta(u-\bar{u})}$ , cette dernière équation devient

$$\Delta v = \beta (\Delta u + \beta \nabla u \cdot \nabla u) (v + \kappa(0))$$

Sous cette forme il est possible de calculer, efficacement, la décomposition de  $v$  à partir  $u$  en utilisant la PGD. Le système à résoudre se détaille :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 \Delta Q - \beta \left( \sum_{\alpha=1}^{p-1} \bar{\gamma}_2^{\alpha} \Delta X^{\alpha} \right) Q - \beta^2 \left( \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\gamma=1}^{p-1} \bar{\gamma}_3^{\alpha\gamma} \nabla X^{\alpha} \cdot \nabla X^{\gamma} \right) Q = \\ \beta \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\beta=1}^{m-1} \bar{\gamma}_4^{\alpha\beta} \Delta X^{\alpha} Q^{\beta} + \beta^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\gamma=1}^{p-1} \sum_{\beta=1}^{m-1} \bar{\gamma}_5^{\alpha\beta\gamma} \nabla X^{\alpha} \cdot \nabla X^{\gamma} Q^{\beta} \\ + \beta \kappa(0) \sum_{\alpha=1}^{p-1} \bar{\gamma}_6^{\alpha} \Delta X^{\alpha} + \beta^2 \kappa(0) \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\gamma=1}^{p-1} \bar{\gamma}_6^{\alpha\gamma} \nabla X^{\alpha} \cdot \nabla X^{\gamma} - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \bar{\gamma}_7^{\alpha} \Delta Q^{\alpha} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= \int_{\tau} R R dt & \bar{\gamma}_5^{\alpha\beta\gamma} &= \int_{\tau} T^{\alpha} T^{\gamma} R^{\beta} R dt \\ \bar{\gamma}_2^{\alpha} &= \int_{\tau} T^{\alpha} R R dt & \bar{\gamma}_6^{\alpha} &= \int_{\tau} T^{\alpha} R dt \\ \bar{\gamma}_3^{\alpha\gamma} &= \int_{\tau} T^{\alpha} T^{\gamma} R dt & \bar{\gamma}_7^{\alpha\gamma} &= \int_{\tau} T^{\alpha} T^{\gamma} R dt \\ \bar{\gamma}_4^{\alpha\beta} &= \int_{\tau} T^{\alpha} R^{\beta} R dt & \bar{\gamma}_8^{\alpha} &= \int_{\tau} R^{\alpha} R dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_1 R - \beta \sum_{\alpha=1}^{p-1} \bar{\xi}_2^\alpha T^\alpha R - \beta^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\gamma=1}^{p-1} \bar{\xi}_3^{\alpha\gamma} T^\alpha T^\gamma R = \\
\beta \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\beta=1}^{m-1} \bar{\xi}_4^{\alpha\beta} T^\alpha R^\beta + \beta^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\gamma=1}^{p-1} \sum_{\beta=1}^{m-1} \bar{\xi}_5^{\alpha\beta\gamma} T^\alpha T^\gamma R^\beta \\
+ \beta \kappa(0) \sum_{\alpha=1}^{p-1} \bar{\xi}_6^\alpha T^\alpha + \beta^2 \kappa(0) \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\gamma=1}^{p-1} \bar{\xi}_7^{\alpha\gamma} T^\alpha T^\gamma - \sum_{\beta=1}^{m-1} \bar{\xi}_8^\alpha R^\beta \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_1 &= \int_{\Omega} \Delta Q Q \, dx & \bar{\xi}_5^{\alpha\beta\gamma} &= \int_{\Omega} (\nabla X^\alpha \cdot \nabla X^\gamma) Q^\beta Q \, dx \\
\bar{\xi}_2^\alpha &= \int_{\Omega} \Delta X^\alpha Q Q \, dx & \bar{\xi}_6^\alpha &= \int_{\Omega} \Delta X^\alpha Q \, dx \\
\bar{\xi}_3^{\alpha\gamma} &= \int_{\Omega} (\nabla X^\alpha \cdot \nabla X^\gamma) Q Q \, dx & \bar{\xi}_7^{\alpha\gamma} &= \int_{\Omega} (\nabla X^\alpha \cdot \nabla X^\gamma) Q \, dx \\
\bar{\xi}_4^{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \Delta X^\alpha Q^\beta Q \, dx & \bar{\xi}_8^\alpha &= \int_{\Omega} \Delta Q^\beta Q \, dx
\end{aligned}$$

Les équations précédentes sont issues d'un cas particulier. Il faut noter que cette approche se généralise efficacement même si il est généralement nécessaire d'introduire des variables intermédiaires.

## 2 Résultats et conclusion

Nous comparons les différentes approches sur le problème modèle suivant :  $u^{ex}(x, t) = x(x-1)t$ ,  $k(u) = k_0 e^{\alpha u}$  avec  $\alpha = \{1, 7\}$ , le terme source  $b$  est construit à partir de (1). Les figures suivantes permettent de comparer l'efficacité des différentes méthodes. L'abscisse représente les itérations de l'algorithme et l'ordonnée la norme  $L_2$  espace temps de l'erreur  $u - u^{ex}$ .

Nous constatons que la méthode directe est la plus précise. Elle est aussi la plus coûteuse. Les autres approches ont un comportement similaire. En particulier, la méthode "EDP associée" est tout aussi efficace sans avoir à reconstruire  $k(u)$ . Ce premier résultat est très encourageant et permet d'envisager de disposer d'un algorithme efficace pour traiter des problèmes multi-paramétriques non-linéaires par la PGD.

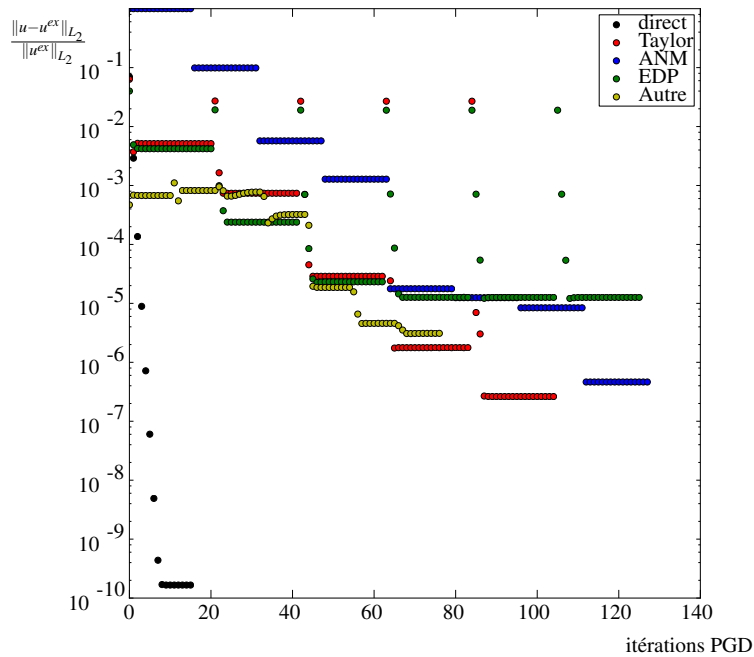


Fig. 1 –  $k(u) = k_0 e^u$

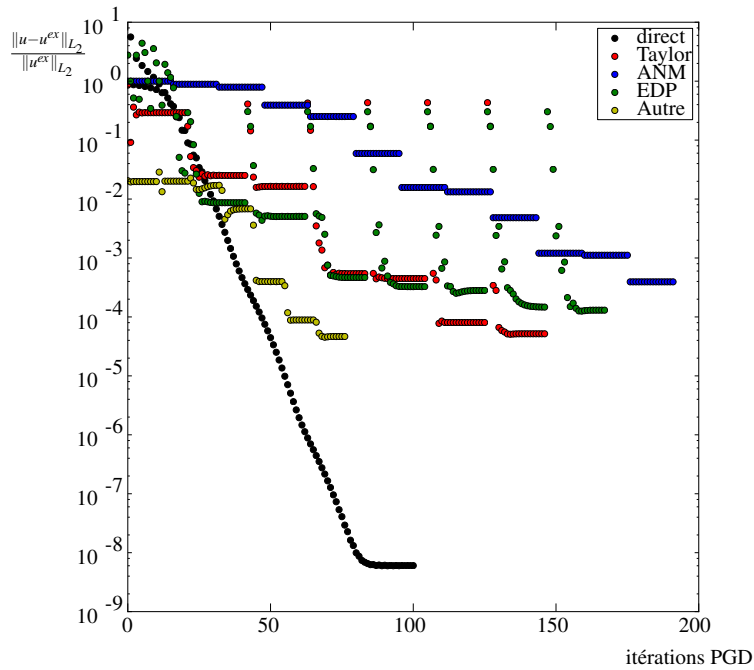


Fig. 2 –  $k(u) = k_0 e^{7u}$

## Références

- [1] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta and P. Villon. *Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 35, 2–17, 2011.
- [2] A. Ammar, M. Normandin, F. Daim, D. Gonzalez, E. Cueto and F. Chinesta *Non-Incremental Strategies Based on Separated Representations : Applications in Computational Rheology*. Communications in Mathematical Sciences, 8/3, 671–695, 2010.
- [3] A. Leygue, F. Chinesta, M. Beringhier, T.L. Nguyen, J.C. Grandidier, F. Pasavento and B. Schrefler. *Towards a Framework for Non-Linear Thermal Models in Shell Domains*. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow