



HAL
open science

Limite de champ moyen et condensation de Bose-Einstein

Mathieu Lewin

► **To cite this version:**

| Mathieu Lewin. Limite de champ moyen et condensation de Bose-Einstein. 2014. hal-00916829v2

HAL Id: hal-00916829

<https://hal.science/hal-00916829v2>

Submitted on 16 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LIMITE DE CHAMP MOYEN ET CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN

par

Mathieu Lewin

Un condensat de Bose-Einstein est obtenu lorsque certains gaz sont refroidis à très basse température et que les interactions entre les particules sont faibles. Dans cet article, nous présentons le modèle mathématique associé et nous expliquons que la formation des condensats dans le régime de champ moyen peut être comprise à l'aide d'un théorème d'analyse convexe. En résumé, les états bosoniques à une infinité de particules forment un simplexe de Choquet dont les points extrémaux sont les condensats de Bose-Einstein purs.

1. Condensats de Bose-Einstein

1.1. Qu'est-ce qu'un condensat de Bose-Einstein ?— Une capacité étonnante de la physique théorique est la possibilité de prédire des phénomènes encore inconnus par l'expérience. Dans la plupart des exemples célèbres, le formalisme mathématique a joué un rôle prépondérant, et c'est en étudiant les propriétés d'un modèle ou d'une équation que les chercheurs sont arrivés à des prévisions originales. En plus du boson de Higgs qui a récemment passionné les médias, on peut citer la relativité générale d'A. Einstein en 1915, la prédiction de l'existence du positron par P.A.M. Dirac en 1928, celle du neutrino par W. Pauli en 1930, etc...

Nous nous intéressons ici aux *condensats de Bose-Einstein*, un état particulier de la matière qui se forme lorsque certains gaz sont refroidis à des

À paraître dans la *Gazette des Mathématiciens*, éditée par la Société Mathématique de France. Je remercie mes co-auteurs pour les travaux [10, 9] présentés ici, et plus particulièrement Nicolas Rougerie pour ses commentaires concernant cet article. Travail effectué dans le cadre du projet ERC MNIQS (FP7/2007-2013 Grant no 258023).

températures très proches du zéro absolu et que les atomes du gaz interagissent peu entre eux. L'apparition des condensats a été prévue par S.N. Bose en 1924, dans un article qu'il a soumis à A. Einstein et que ce dernier a immédiatement généralisé, tout ceci bien avant que les condensats ne soient observés pour la première fois en laboratoire dans les années 90.

Fabriquer un condensat pose de grandes difficultés techniques, à cause de la température extrêmement basse à laquelle on doit placer le système, et au fait qu'il doit être assez dilué pour que les interactions soient suffisamment faibles (elles sont négligées dans les travaux de Bose et Einstein). Il aura donc fallu attendre 1995 pour qu'un condensat pur soit finalement créé en laboratoire, par l'équipe de E. Cornell et C. Wieman à Boulder (Colorado). Ce dernier comprenait de l'ordre de 2000 atomes de rubidium à une température de 170 nano-Kelvins. Quelques mois plus tard, l'équipe de W. Ketterle au MIT parvenait à produire un condensat comprenant cent fois plus d'atomes de sodium à une température de 2 micro-Kelvins, et celle de R. Hulet à l'université de Rice un autre composé d'atomes de lithium. En 2001, E. Cornell, W. Ketterle et C. Wieman ont reçu le prix Nobel de physique pour leurs travaux.

Qu'est-ce qu'un condensat ? En résumé, ce dernier est caractérisé par le fait que *toutes les particules qui le composent sont dans le même état*, et c'est la signification du mot « condensation » dans ce contexte. Par exemple, la figure 1 représente la densité de vitesse des atomes du système, mesurée dans l'expérience de l'équipe de Ketterle. En dessous de la température critique, la densité est très piquée, montrant que les particules du gaz ont presque toutes la même vitesse.

Un condensat comprend un grand nombre de particules (quelques centaines de milliers), et ces dernières sont microscopiques, donc décrites par la mécanique quantique. Puisqu'elles se comportent toutes de la même manière, les effets quantiques deviennent alors visibles à notre échelle, et c'est ce qui rend ces objets particulièrement intéressants. Les physiciens ont réalisé plusieurs expériences surprenantes. Par exemple, si on fait tourner un condensat autour d'un axe, de petits tourbillons apparaissent et leur nombre augmente avec la vitesse de rotation. Ces tourbillons, appelés vortex, ont été observés en laboratoire par nos collègues physiciens du laboratoire Kastler Brossel à l'ENS, autour de J. Dalibard. Un phénomène très curieux est obtenu lorsque la vitesse de rotation augmente : les tourbillons se placent sur un réseau périodique triangulaire (voir la figure 2). Cette brisure de symétrie du système ne peut s'expliquer qu'en ayant recourt à la mécanique quantique.

1.2. Une source de problèmes mathématiques. — Les condensats sont une mine de questions intéressantes pour les mathématiciens, dont la résolution intéresse les physiciens. Avec le regain d'intérêt suite aux expériences de la

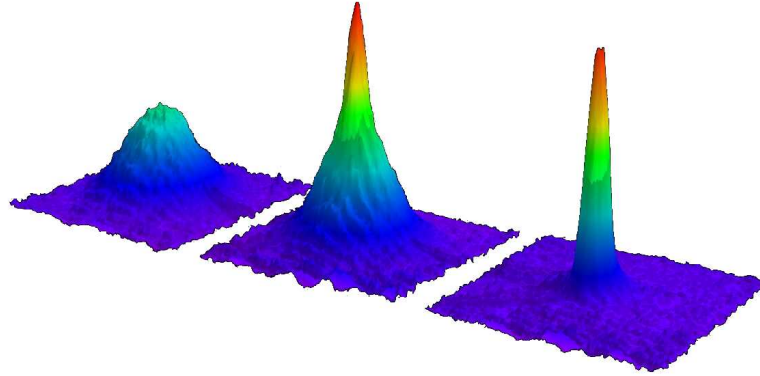


FIGURE 1. Densité des vitesses des atomes de sodium pour 3 températures différentes dans l'expérience de l'équipe de Ketterle [4] au MIT en 1995. À gauche : juste avant la transition, au centre : création du condensat à la température critique $\sim 2\mu\text{K}$, et à droite : bien en dessous de la température critique avec un condensat quasi-pur. © Image reproduite avec l'autorisation des auteurs.

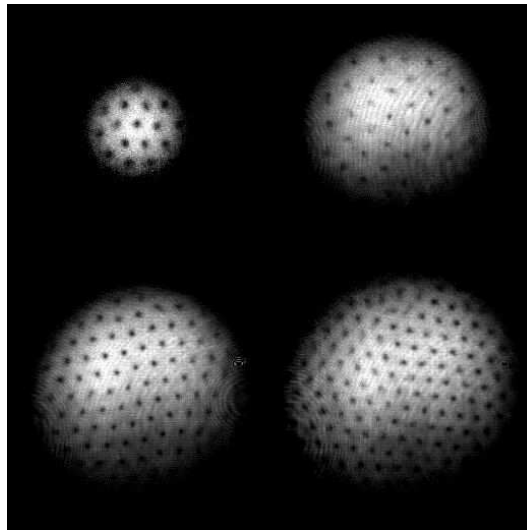


FIGURE 2. Observation de tourbillons qui se placent sur un réseau triangulaire dans un condensat de Bose-Einstein en rotation, en fonction de la vitesse de rotation. Expérience de l'équipe de Ketterle [1] au MIT en 2001. Le dernier condensat à droite fait environ 1 mm de diamètre. © Image reproduite avec l'autorisation des auteurs et de l'AAAS.

fin des années 90, l'activité mathématique récente a été forte et les équipes françaises y ont largement contribué.

Plusieurs problèmes ont été étudiés. Tout d'abord, on peut admettre l'existence du condensat et étudier ses propriétés (en particulier de symétrie). L'apparition des vortex et leur positionnement spatial a été discuté par A. Aftalion, X. Blanc, R. Ignat, V. Millot, F. Nier, N. Rougerie, J. Royo-Letelier, S. Serfaty et plusieurs autres chercheurs (voir par exemple [2] et les références qui y sont citées). Il s'agit essentiellement d'étudier les zéros d'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire, et qui représente l'état quantique commun à toutes les particules du système dans le plan orthogonal à l'axe de rotation. On sait montrer que le nombre de tourbillons augmente avec la vitesse, mais la preuve qu'ils se placent sur un réseau périodique est encore ouverte. Le fait que ce réseau soit nécessairement triangulaire est relié à des questions de théorie des nombres [14].

Une question différente est de comprendre pourquoi les particules se placent toutes dans le même état pour former un condensat et c'est celle qui va nous intéresser plus particulièrement dans cet article. Ce problème a été étudié du point de vue stationnaire par divers chercheurs dans les années 2000, en particulier E.H. Lieb, R. Seiringer et J. Yngvason (voir par exemple [12]). Beaucoup d'autres mathématiciens se sont intéressés à la stabilité dynamique des condensats, mais nous n'en parlerons pas ici.

2. Le modèle

Dans cette section nous introduisons le modèle mathématique décrivant un système de N particules quantiques, et nous formulons plus précisément les questions à étudier. Nous énonçons ensuite un premier résultat concernant l'énergie du système.

2.1. N particules classiques. — Commençons avec un système de N particules classiques évoluant dans l'espace \mathbb{R}^d . Généralement $d = 3$ mais les cas $d = 1, 2$ peuvent aussi décrire des condensats très plats ou sous la forme de cigares très allongés. Nous supposons que ces N particules sont soumises à un potentiel extérieur V et qu'elles interagissent par paires, avec une interaction w qui ne dépend que de la distance relative entre les deux particules. L'énergie du système est la fonction

$$H(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{|p_j|^2}{2m} + V(x_j) \right) + \lambda \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} w(x_k - x_\ell), \quad (1)$$

définie sur l'espace des phases $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$, et à valeurs réelles. Les variables x_1, \dots, x_N représentent les positions des N particules, alors que les p_1, \dots, p_N

sont leurs quantités de mouvement (rappelons que $p = mv$ où m est la masse et v est la vitesse). Dans la suite nous supposons pour simplifier que $m = 1/2$, ce qui correspond à un changement d'unités. La fonction $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel extérieur. Dans le cas de lasers servant à confiner le système (c'est-à-dire à éviter que les particules du gaz ne s'échappent), on prend généralement $V(x) = |x|^2$, mais d'autres choix sont possibles. La fonction $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est paire et, typiquement, radiale. On peut toujours supposer pour simplifier que les fonctions V et w sont lisses. Le réel λ est un paramètre de couplage qui servira à varier l'intensité de l'interaction et qui pourrait en principe être intégré à la fonction w .

Nous n'avons pas introduit dans le modèle les forces centrifuge et de Coriolis, qu'il faut prendre en compte si le condensat tourne autour d'un axe (en particulier si on s'intéresse à l'apparition des tourbillons). Dans le référentiel en rotation, cela revient à ajouter le terme

$$\Omega \sum_{j=1}^N e_z \cdot (x_j \wedge p_j) \quad (2)$$

où Ω est la vitesse de rotation et e_z est un vecteur unitaire donnant la direction de l'axe de révolution, qu'on peut toujours supposer vertical.

Nous devons maintenant nous placer dans un régime des paramètres correspondant à celui rencontré en laboratoire. Comme N est de l'ordre de 10^5 nous allons supposer que N est grand. En fait, nous allons même étudier la limite $N \rightarrow \infty$. Nous devons également prendre la température T suffisamment basse et, pour simplifier au maximum notre discours, nous prendrons simplement ici $T = 0$. Pour finir, nous devons travailler dans un régime où les interactions sont faibles et il y a plusieurs manières de le faire.

Une première technique consiste à supposer simplement que l'intensité λ de l'interaction est petite, c'est-à-dire que $\lambda \rightarrow 0$ en même temps que $N \rightarrow \infty$. La première somme dans la définition (1) de la fonction H contient N termes, alors que la seconde en contient $N(N-1)/2$. Pour que les deux soient comparables, il faut donc prendre λ d'ordre $1/N$, qui est le régime qui nous intéressera. Quitte à changer w , on peut toujours supposer que $\lambda N \rightarrow 1$ et c'est ce que nous ferons dans la suite. Dans ce régime, les particules se rencontrent très souvent mais l'intensité de l'interaction est très faible. On parle de *régime de champ moyen* car la loi des grands nombres nous précise que les particules vont chacune voir un champ moyen résultant de celui créé par toutes les autres. Nous y reviendrons.

Une autre hypothèse plus raisonnable physiquement consiste à supposer que le système est très dilué, de sorte que les particules se voient très peu souvent, mais avec un potentiel d'interaction ayant une intensité fixe. Après un changement d'échelle, ceci est équivalent à prendre une interaction qui

a une très faible longueur caractéristique $\delta_N \ll 1$. Mathématiquement, cela revient à remplacer w par une interaction dilatée, $w_N(x) = \delta_N^{-a} w(x/\delta_N)$ avec $\delta_N \rightarrow 0$ et $a > 0$ fixé. Ce régime est appelé *Gross-Pitaevskii* et il est plus difficile à étudier mathématiquement. Nous n'en parlerons pas beaucoup ici.

À l'énergie $H(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)$ définie en (1) est associé un système d'équations différentielles ordinaires (les équations de Newton) qui décrivent le mouvement de nos N particules dans \mathbb{R}^d . C'est le système Hamiltonien

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = 2p_j, \\ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\nabla V(x_j) - \lambda \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \nabla w(x_k - x_j), \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

À température nulle, nous cherchons les états d'équilibre stables de ce système, qui sont les minima de H , et vérifient toujours $p_1 = \dots = p_N = 0$.⁽¹⁾

Il est possible d'étudier le comportement du système classique (3) et des minima de H à la limite $N \rightarrow \infty$ en prenant $\lambda N \rightarrow 1$. Des résultats mathématiques dans cette direction ont été obtenus dès les années 70, en commençant avec des travaux de K. Hepp et H. Spohn. Nous renvoyons par exemple aux notes de cours récentes de F. Golse [6] pour une présentation plus détaillée.

Nous reviendrons plus tard au modèle classique de cette section et passons maintenant à l'équivalent quantique du même problème.

2.2. N particules quantiques. — En mécanique quantique, le système n'est plus modélisé par un point dans l'espace des phases $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$, mais par une *fonction d'onde* $\Psi : \mathbb{R}^{dN} \rightarrow \mathbb{C}$, qui est de carré intégrable et normalisée⁽²⁾ : $\int_{\mathbb{R}^{dN}} |\Psi|^2 = 1$. L'interprétation quantique usuelle est que

- $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est la densité de probabilité que les particules soient en x_1, \dots, x_N ;
- $|\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N)|^2$ est la densité de probabilité⁽³⁾ que les particules aient des vitesses p_1, \dots, p_N .

La fonction d'onde sert donc de lien entre deux objets classiques (des probabilités de positions et de vitesses). La transformée de Fourier est l'outil

1. À température positive, il faudrait étudier la mesure de Gibbs $Z^{-1} \exp(-H/T)$ où Z est un facteur de normalisation.

2. Pour simplifier, nous omettons fréquemment la mesure de Lebesgue dans notre notation.

3. La transformée de Fourier de Ψ est aussi normalisée dans $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ et est définie par

$$\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{(2\pi)^{Nd/2}} \int_{\mathbb{R}^{dN}} \Psi(x_1, \dots, x_N) e^{-i \sum_{j=1}^N x_j \cdot p_j} dx_1 \cdots dx_N.$$

mathématique utilisé pour imposer le principe d'incertitude d'Heisenberg qui stipule que l'on ne peut connaître simultanément positions et vitesses avec une précision exacte (si $|\Psi|^2$ est très concentrée, alors $|\widehat{\Psi}|^2$ est très étalée).

Dans la pratique les particules sont indiscernables et il faut donc que les densités de probabilité $|\Psi|^2$ et $|\widehat{\Psi}|^2$ soient symétriques par rapport aux échanges de leurs variables $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ et $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}^d$. Il y a alors essentiellement deux possibilités : soit Ψ est symétrique et dans ce cas décrit des particules appelées *bosons*, soit Ψ est antisymétrique et modélise alors des *fermions*.⁽⁴⁾ Comme son nom l'indique, la condensation de Bose-Einstein ne concerne que les bosons et nous allons donc nous restreindre aux fonctions Ψ qui sont symétriques. La situation est très différente pour les fermions. Le sous-espace des fonctions symétriques dans $L^2((\mathbb{R}^d)^N)$ sera noté $L_s^2((\mathbb{R}^d)^N)$.

L'énergie du système dans l'état Ψ se calcule en se basant sur la formule classique (1), l'interprétation probabiliste de $|\Psi|^2$ et $|\widehat{\Psi}|^2$, et le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^{dN}} |p_j|^2 |\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N)|^2 dp_1 \cdots dp_N = \int_{\mathbb{R}^{dN}} |\nabla_{x_j} \Psi(x_1, \dots, x_N)|^2 dx_1 \cdots dx_N.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Psi) = \int_{\mathbb{R}^{dN}} & \left(\sum_{j=1}^N |\nabla_{x_j} \Psi(x_1, \dots, x_N)|^2 \right) dx_1 \cdots dx_N + \int_{\mathbb{R}^{dN}} \left(\sum_{j=1}^N V(x_j) \right. \\ & \left. + \lambda \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} w(x_k - x_\ell) \right) |\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2 dx_1 \cdots dx_N. \end{aligned} \quad (4)$$

À température nulle, nous nous intéressons aux minimiseurs de l'énergie (4) (sous les contraintes que Ψ est symétrique et que $\int_{\mathbb{R}^{dN}} |\Psi|^2 = 1$), qui sont les états stationnaires les plus stables du système. L'énergie minimale correspondante est

$$E(N) = \inf_{\substack{\Psi \text{ symétrique} \\ \int_{\mathbb{R}^{dN}} |\Psi|^2 = 1}} \mathcal{E}(\Psi). \quad (5)$$

Il faut bien sûr des hypothèses adéquates sur V et w pour que tout ceci ait un sens, et nous resterons volontairement vague sur ce point. Généralement, on autorise $\mathcal{E}(\Psi) = +\infty$, ce qui évite de définir plus précisément l'ensemble sur lequel \mathcal{E} doit être minimisée. Par exemple, si V et w sont bornées, la seule condition nécessaire est que $\nabla \Psi \in L^2(\mathbb{R}^{dN})$, c'est-à-dire que Ψ appartienne

4. Les particules élémentaires composant la matière (électrons, quarks, etc) sont toutes des fermions, alors que les particules élémentaires « médiatrices » (photons, gluons, etc) sont toutes des bosons. Une particule composite (un atome par exemple) se comporte comme un boson si elle comprend un nombre pair de particules élémentaires, et comme un fermion sinon. Par exemple, un atome d'Helium 4 se comporte comme un boson car il contient 2 électrons et 12 quarks.

à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^{dN})$. On pose alors simplement $\mathcal{E}(\Psi) = +\infty$ si la distribution $\nabla\Psi$ n'est pas de carré intégrable. Pour simplifier, le lecteur pourra toujours penser à des fonctions V et w suffisamment lisses et qui restent positives à l'infini.

Pour des fonctions V et w générales, l'infimum dans (5) n'est pas nécessairement atteint car le problème est posé en dimension infinie. Toutefois, si V tend vers l'infini à l'infini (par exemple $V(x) = |x|^2$) et w est une fonction bornée, il est facile de montrer que l'infimum (5) est atteint en une unique fonction symétrique $\Psi_N > 0$ (à multiplication par un complexe de module 1 près), qui tend vers 0 exponentiellement vite à l'infini.

Tout minimiseur Ψ_N , quand il existe, est solution du problème aux valeurs propres

$$\left(\sum_{j=1}^N (-\Delta_{x_j} + V(x_j)) + \lambda \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} w(x_k - x_\ell) \right) \Psi_N = E(N) \Psi_N \quad (6)$$

(par exemple au sens des distributions), qui s'appelle *l'équation de Schrödinger stationnaire*. L'opérateur apparaissant dans la parenthèse s'appelle le Hamiltonien quantique du système et il peut être obtenu à partir du Hamiltonien classique (1) en remplaçant $|p_j|^2$ par sa quantification $-\Delta_{x_j}$.

Les deux questions principales qui se posent à nous sont les suivantes :

- Quel est le comportement de $E(N)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ et $N\lambda \rightarrow 1$?
- Quel est le comportement de Ψ_N , solution de l'équation (6), lorsque $N \rightarrow \infty$ et $N\lambda \rightarrow 1$?

Si la première question a un sens clair, la seconde est moins évidente. En effet, comme la fonction Ψ_N dépend d'un nombre de variables qui diverge avec N , on ne peut simplement chercher sa limite quand $N \rightarrow \infty$. Nous y reviendrons longuement à la section 3.

D'un point de vue technique, (6) est une équation elliptique linéaire en dimension dN . Le fait que la dimension de l'espace croisse avec N rend sa résolution numérique inaccessible pour N trop grand (rappelons que dans les expériences, on a $N \sim 10^5$). Heureusement, si on peut montrer qu'il y a vraiment condensation de Bose-Einstein, la dimension du problème sera bien diminuée puisqu'il suffira d'étudier l'équation pour l'état commun à toutes les particules du système.

2.3. Modèle de Hartree et convergence de l'énergie. — Les fonctions symétriques les plus simples sont celles qui sont complètement factorisées, c'est-à-dire sous la forme

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = u(x_1) \cdots u(x_N) \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx = 1, \quad (7)$$

et que nous noterons $\Psi = u^{\otimes N}$. Ces fonctions décrivent précisément un système dans lequel toutes les particules sont dans le même état $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Elles vont donc jouer un rôle particulier dans le problème qui nous intéresse.

Les fonctions factorisées apparaissent naturellement dans le cas où les interactions sont négligées, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 0$. Dans ce cas très spécial, on peut vérifier que le minimiseur du problème $E(N)$ est $\Psi_N = u^{\otimes N}$ où u est la première fonction propre de l'opérateur $-\Delta + V(x)$ (quand elle existe) :

$$E(N) = N e \quad \text{avec} \quad e = \inf_{\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 = 1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2) dx \right\}.$$

Ainsi, nous voyons que, sans interaction, *les particules se mettent nécessairement toutes dans le même état*, ceci pour tout N fini. Si $N\lambda \rightarrow 0$, on peut aussi montrer que $E(N) = Ne + o(N)$.

On pourrait espérer que la situation soit similaire lorsque $N\lambda \rightarrow 1$, mais elle est en réalité plus complexe. Avant de discuter en détail du comportement de la fonction Ψ_N , nous pouvons commencer par regarder l'énergie du système. Pour une fonction factorisée, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^{\otimes N}) &= N \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(N-1)}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} w(x-y)|u(x)|^2|u(y)|^2 dx dy \right) := N\mathcal{E}_H(u). \end{aligned} \quad (8)$$

Comme $\lambda(N-1) \rightarrow 1$, pour simplifier nous allons prendre exactement

$$\lambda = \frac{1}{N-1}.$$

La fonctionnelle \mathcal{E}_H , appelée énergie de Hartree et définie en (8), est alors indépendante de N . Si l'énergie de départ (4) est *quadratique*, fournissant le problème *linéaire* (6), nous trouvons ici une fonctionnelle *non quadratique* puisque le dernier terme est quartique. Ceci vient du fait qu'on a restreint le modèle linéaire à la sous-variété des $\{u^{\otimes N}\}$, qui ne forme pas un sous espace vectoriel de $L_s^2((\mathbb{R}^d)^N)$.

Si on cherche les fonctions factorisées d'énergie la plus basse, on est amené au problème variationnel

$$e_H := \inf_{\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 = 1} \mathcal{E}_H(u) \quad (9)$$

dont les solutions (quand elles existent) résolvent l'équation aux valeurs propres non linéaire

$$(-\Delta + V + w * |u|^2)u = \mu u. \quad (10)$$

Chaque particule doit donc ajuster son propre état quantique u de façon non linéaire, comme si elle interagissait partout avec un miroir d'elle-même. La

fonction $(w * |u|^2)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(x-y) |u(y)|^2 dy$ est le *potentiel de champ moyen* qui est vu par toutes les particules du système et dont la forme suit de la loi des grands nombres. En effet, le potentiel vu par la particule i est

$$\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} w(x_i - x_j) \simeq \int_{\mathbb{R}^d} w(x_i - y) |u(y)|^2 dy$$

puisque les particules sont distribuées de façon indépendante selon la densité $|u|^2$. Dans le régime de Gross-Pitaevskii, la fonction w est remplacée par une distribution de Dirac et on trouve l'équation non linéaire de Schrödinger cubique.

Notre premier résultat concerne la convergence de l'énergie.

Théorème 1 (Condensation de Bose-Einstein : énergie)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = e_H.$$

Le premier ordre dans le développement de l'énergie $E(N)$ est donc obtenu en restreignant le problème aux fonctions factorisées $\Psi = u^{\otimes N}$, c'est-à-dire en supposant que toutes les particules sont dans le même état u (et en optimisant cet état pour minimiser l'énergie résultante). Cependant, le théorème ne donne pas d'information précise sur l'état lui-même, et il n'est que la première étape dans la compréhension du régime de champ moyen.

Le résultat précédent a été démontré dans diverses situations consistant à faire varier les hypothèses sur V et w . Dans le cas où V tend vers l'infini à l'infini et où w est bornée, le théorème est plus ou moins contenu dans divers travaux du début des années 90, résumés dans [15] (le formalisme utilisé est celui des C^* algèbres). Si w a une transformée de Fourier positive qui est suffisamment lisse, alors le résultat est bien connu et très simple (il peut être lu dans [8]). Lorsque $d = 3$ et V et w sont proportionnels à $1/|x|$, la preuve est due à E.H. Lieb et ses collaborateurs dans les années 80 (voir par exemple [11]). Le résultat le plus général énoncé ci-dessus n'a été démontré que très récemment, dans un article en collaboration avec P.T. Nam et N. Rougerie [9], avec des hypothèses minimales sur V et w .⁽⁵⁾

Le fait qu'on obtienne un modèle non linéaire à la limite, basé sur l'équation de Hartree (10), est fondamental pour décrire le comportement des condensats. Par exemple, lorsque ces derniers sont mis en rotation, on doit étudier les solutions d'une équation similaire à (10), avec un terme supplémentaire provenant de (2). Lorsque Ω augmente, les solutions u possèdent des zéros qui se placent sur un réseau, expliquant les observations en laboratoire. La brisure de symétrie n'est possible que parce que le modèle est non linéaire.

5. Par exemple, $V = f_1 + f_2$ et $w = g_1 + g_2$ avec $0 \leq f_1, g_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $f_2, g_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ où $\max(1, d/2) < p < \infty$.

D'un point de vue pratique, nous avons ramené le problème d'optimisation (5) en dimension Nd à un problème, certes non linéaire, mais posé en dimension d , donc par exemple accessible aux simulations numériques.

3. Théorèmes de structure pour les systèmes infinis

Comme nous l'avons expliqué, l'originalité de notre problème est que la suite de fonctions (Ψ_N) dépend d'un nombre de variables qui tend vers l'infini. Cette situation est fréquemment rencontrée dans l'étude de systèmes faisant intervenir un grand nombre d'agents. Elle est typique des modèles de champ moyen qui sont utilisés dans de nombreux domaines incluant par exemple l'épidémiologie, la théorie des jeux et, bien sûr, la physique statistique.

Comment décrire la "limite" d'une telle suite de fonctions ? S'il s'agit d'une question difficile, certains outils existent dans le cas particulier des fonctions symétriques. Nous faisons ici un résumé des résultats connus, avant d'expliquer leur rôle dans notre cas particulier.

3.1. Cas classique. — Nous allons nous baser sur des objets qui vivent dans des espaces indépendants de N , et dont on peut étudier la limite. Nous commençons ici par discuter de $|\Psi_N|^2$ et $|\widehat{\Psi}_N|^2$ qui, comme nous l'avons vu, décrivent les probabilités de présence et de vitesse des particules du système. Il semble alors naturel d'introduire les marginales associées

$$\rho_{\Psi_N}^{(k)}(x_1, \dots, x_k) := \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_N(x_1, \dots, x_N)|^2 dx_{k+1} \cdots dx_N, \quad (11)$$

consistant à intégrer toutes les variables sauf k (on peut prendre les k premières puisque Ψ_N est symétrique). Les fonctions $\rho_{\Psi_N}^{(k)}$ sont toutes positives, d'intégrale égale à 1. Elles ont une signification physique importante. Par exemple la fonction $\rho_{\Psi_N}^{(1)}$ est la densité moyenne de particules dans le système, qui est celle observée dans les expériences de la figure 2. D'autre part, $\rho_{\Psi_N}^{(2)}(x, y)$ est la densité de probabilité de trouver au moins une particule en x et une autre en y . Nous pouvons bien sûr introduire de la même façon les marginales $t_{\Psi_N}^{(k)}$ de $|\widehat{\Psi}_N|^2$. La fonction $t_{\Psi_N}^{(1)}$ est précisément celle qui est représentée à la figure 1. Pour un état factorisé, on trouve pour tout $N \geq k$

$$\rho_{u^{\otimes N}}^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k |u(x_i)|^2, \quad t_{u^{\otimes N}}^{(k)}(p_1, \dots, p_k) = \prod_{i=1}^k |\widehat{u}(p_i)|^2. \quad (12)$$

Les fonctions $\rho_{\Psi_N}^{(k)}$ et $t_{\Psi_N}^{(k)}$ peuvent être utilisées pour exprimer l'énergie du système de façon indépendante de N . Un calcul simple, utilisant la symétrie

de Ψ_N et le fait que $\lambda = 1/(N - 1)$, montre ainsi que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Psi) = N \left(\int_{\mathbb{R}^d} |p|^2 t_{\Psi_N}^{(1)}(p) dp + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \rho_{\Psi_N}^{(1)}(x) dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} w(x-y) \rho_{\Psi_N}^{(2)}(x, y) dx dy \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Une question apparaît alors naturellement : si les $\rho_{\Psi_N}^{(k)}$ et $t_{\Psi_N}^{(k)}$ possèdent des limites quand $N \rightarrow \infty$, ces dernières sont-elles nécessairement des états factorisés, c'est-à-dire sous la forme (12) ?

Imaginons donc un instant que les suites $\rho_{\Psi_N}^{(k)}$ convergent fortement dans $L^1(\mathbb{R}^{dk})$ vers une limite $\rho^{(k)}$, pour tout $k \geq 1$ fixé. Nous nous retrouvons donc avec une suite infinie de densités de probabilité $(\rho^{(k)})_{k \geq 1}$, toutes symétriques. Ces dernières sont reliées les unes aux autres. En effet, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\Psi_N}^{(k+1)}(x_1, \dots, x_{k+1}) dx_{k+1} = \rho_{\Psi_N}^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$$

pour tout N et tout $1 \leq k \leq N$. Puisque la limite est forte dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, la propriété est conservée pour $\rho^{(k)}$.

La suite infinie $(\rho^{(k)})_{k \geq 1}$ est la manière naturelle de décrire la limite d'une densité dépendant d'un nombre infini de variables. Nous allons voir que l'ensemble de toutes les familles infinies de ce type est très petit, beaucoup plus petit que l'intuition pourrait le laisser penser. En fait, il n'y a rien d'autre que les probabilités qui sont complètement factorisées (sous la forme (12)), et les combinaisons convexes de ces objets. Le théorème célèbre qui énonce un tel résultat est dû à de Finetti (dans le cas d'un espace probabilisé fini) [5] et à Hewitt-Savage dans le cas général [7]. Nous l'énonçons pour simplifier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2 (de Finetti/Hewitt-Savage classique)

Soit $(\rho^{(k)})_{k \geq 1}$ une famille de fonctions symétriques, avec $0 \leq \rho^{(k)} \in L^1((\mathbb{R}^d)^k)$, $\int_{\mathbb{R}^{dk}} \rho^{(k)} = 1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho^{(k+1)}(x_1, \dots, x_{k+1}) dx_{k+1} = \rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe une probabilité borélienne μ sur l'ensemble $X = \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : f \geq 0, \int_{\mathbb{R}^d} f = 1\} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \int_X f(x_1) \cdots f(x_k) d\mu(f). \quad (14)$$

Ce résultat donne l'explication intuitive du phénomène de condensation. À la limite, l'ensemble des familles de probabilités $(\rho^{(k)})$ a une structure mathématique très particulière : c'est un convexe dont les points extrémaux sont les fonctions factorisées, où toutes les particules sont dans le même état.

Le théorème suggère comment apparaît l'énergie de Hartree (8). En effet, si on peut passer à la limite, les deux derniers termes de (13) deviennent

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \rho^{(1)}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} w(x-y) \rho^{(2)}(x,y) dx dy \\ &= \int_X d\mu(f) \left(\int_{\mathbb{R}^d} V(x) f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} w(x-y) f(x) f(y) dx dy \right) \end{aligned}$$

et on reconnaît les deux derniers termes de \mathcal{E}_H , avec $u = \sqrt{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Bien sûr, toujours en supposant que la limite est forte, on peut appliquer le même théorème 2 et obtenir une autre mesure de probabilité μ' décrivant les densités de vitesse $t^{(k)}$. Cependant, sans lien supplémentaire entre μ et μ' , nous ne pourrions pas conclure. Si l'intuition est déjà présente dans le théorème 2, ce n'est pas le bon point de vue dans le cas quantique et nous allons discuter de la bonne stratégie ci-dessous.

Remarque 1. — *Le théorème de de Finetti classique est un outil important dans l'étude du régime de champ moyen pour divers systèmes, incluant par exemple le système classique basé sur la fonction H définie plus haut [6], et les théories des jeux de champ moyen [13]. Par exemple, la limite du minimum du Hamiltonien classique H défini en (1) est*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\inf H}{N} = \inf_P \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} V(x) dP(x) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} w(x-y) dP(x) dP(y) \right\}$$

où l'infimum est pris sur toutes les probabilités P sur \mathbb{R}^d . Ce résultat repose sur la version du théorème 2 pour les probabilités.

3.2. Cas quantique. — Si les densités $\rho_{\Psi_N}^{(k)}$ et $t_{\Psi_N}^{(k)}$ sont celles qui sont souvent observées dans les expériences, ce sont des objets classiques qui ne sont pas adaptés à la description précise d'un système quantique. Afin de garder en mémoire le fait que les densités proviennent d'une fonction d'onde Ψ_N , on travaille avec des *opérateurs densités* (des opérateurs positifs de trace 1) plutôt qu'avec des densités de probabilité.

Pour tout $1 \leq k \leq N$, nous définissons donc l'*opérateur de densité à k particules* par son noyau intégral

$$\begin{aligned} \gamma_{\Psi_N}^{(k)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_N(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \\ &\quad \times \overline{\Psi_N(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_N)} dx_{k+1} \cdots dx_N. \end{aligned}$$

En d'autres termes nous intégrons encore toutes les variables sauf k , mais nous utilisons deux familles de variables x_1, \dots, x_k et y_1, \dots, y_k pour les k restantes. Nous pouvons voir $\gamma_{\Psi_N}^{(k)}$ comme une fonction de $2kd$ variables, mais il est usuel

de plutôt considérer l'opérateur associé agissant sur $L^2((\mathbb{R}^d)^k)$, noté également $\gamma_{\Psi_N}^{(k)}$ et défini par

$$(\gamma_{\Psi_N}^{(k)}\Phi)(\mathbf{x}) = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \gamma_{\Psi_N}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$. En tant qu'opérateur, ce dernier est positif de trace égale à 1 et il est donc compact sur $L^2((\mathbb{R}^d)^k)$. Il contient plus d'information que les deux densités classiques introduites à la section précédente. En fait, on a

$$\rho_{\Psi_N}^{(k)}(\mathbf{x}) = \gamma_{\Psi_N}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad \text{et} \quad t_{\Psi_N}^{(k)}(\mathbf{p}) = (\mathcal{F}\gamma_{\Psi_N}^{(k)}\mathcal{F}^{-1})(\mathbf{p}, \mathbf{p})$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier. Le résultat suivant est l'équivalent du théorème 3 pour les matrices densité. Il a été prouvé dans les années 70 par E. Størmer, R.L. Hudson et G.R. Moody.

Théorème 3 (de Finetti/Hewitt-Savage quantique)

Soit $(\gamma^{(k)})_{k \geq 1}$ une famille d'opérateurs positifs de trace 1, agissant chacun sur $L^2_s((\mathbb{R}^d)^k)$ tels que $\int_{\mathbb{R}^d} \gamma^{(k+1)}(\mathbf{x}, z; \mathbf{y}, z) dz = \gamma^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe une probabilité borélienne μ sur la sphère $S = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 = 1\}$ telle que, pour tout $k \geq 1$,

$$\gamma^{(k)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \int_S u(x_1) \cdots u(x_k) \overline{u(y_1)} \cdots \overline{u(y_k)} d\mu(u). \quad (15)$$

Le résultat signifie que l'objet mathématique naturel pour décrire un système bosonique infini (dans le régime de champ moyen) est une probabilité μ sur la sphère de $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'interprétation est la même que pour le théorème 2, mais le résultat est bien plus fort. En particulier, la formule (15) implique que $\rho^{(k)}$ et $t^{(k)}$ sont reliées par la transformée de Fourier,

$$\rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \int_S \prod_{j=1}^k |u(x_j)|^2 d\mu(u), \quad t^{(k)}(p_1, \dots, p_k) = \int_S \prod_{j=1}^k |\widehat{u}(p_j)|^2 d\mu(u),$$

et le lien entre les probabilités de positions et de vitesses n'a pas été perdu.

3.3. Condensation dans le cas confiné. — À l'aide du théorème 3, on peut relier la suite (Ψ_N) solution du problème de Schrödinger aux minimiseurs du problème non linéaire de Hartree (9). Du moins, le résultat est facile dans le cas confiné où V tend vers l'infini à l'infini.

Théorème 4 (Condensation de Bose-Einstein : états [15, 9])

On suppose que V est localement borné et tend vers l'infini à l'infini, et que w est uniformément bornée. Soit (Ψ_N) une suite quelconque (normalisée et symétrique) telle que $\mathcal{E}(\Psi_N) = E(N) + o(N)$. Alors il existe une sous-suite et

une probabilité borélienne sur l'ensemble $\mathcal{M} \subset S$ des minimiseurs du problème de Hartree (9), telles que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{\Psi_{N_j}}^{(k)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \int_{\mathcal{M}} u(x_1) \cdots u(x_k) \overline{u(y_1)} \cdots \overline{u(y_k)} d\mu(u)$$

fortement, pour tout $k \geq 1$. En particulier, si le problème (9) admet un unique minimiseur u_0 (à une phase près), alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_{\Psi_N}^{(k)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = u_0(x_1) \cdots u_0(x_k) \overline{u_0(y_1)} \cdots \overline{u_0(y_k)}.$$

La preuve du théorème 4 suit facilement du théorème 3. Il s'agit essentiellement d'utiliser le fait que l'opérateur $-\Delta + V(x)$ a une résolvante compacte, pour en déduire la convergence forte des opérateurs densité, puis d'appliquer le théorème 3. À la limite, l'énergie divisée par N tend vers $\int_S \mathcal{E}_H(u) d\mu(u)$ et elle est minimale lorsque μ a son support dans l'ensemble \mathcal{M} des minimiseurs de \mathcal{E}_H . C'est essentiellement l'argument présenté dans [15], qui est issu de travaux antérieurs de D. Petz, G.A. Raggio, A. Verbeure et R.F. Werner.

Le théorème explique les figures 1 et 2 obtenues en laboratoire. Pour N très grand, les densités $\rho_{\Psi_N}^{(1)}$ et $t_{\Psi_N}^{(1)}$ réelles du système sont très proches de $|u_0(x)|^2$ et $|\widehat{u_0}(p)|^2$, respectivement. Bien sûr, dans les expériences on a $N \sim 10^5$, et il manque une estimée précise de la vitesse de convergence lorsque $N \rightarrow \infty$. Des travaux sont en cours dans cette direction.

3.4. Systèmes non confinés et perte de compacité. — Dans la sous-section précédente, nous avons supposé que les $\gamma_{\Psi_N}^{(k)}$ convergeaient fortement à la limite $N \rightarrow \infty$, et nous avons ensuite utilisé un théorème de structure pour la hiérarchie infinie obtenue à la limite. L'hypothèse de convergence forte est cruciale car elle permet d'assurer la validité de la relation de compatibilité $\int_{\mathbb{R}^d} \gamma^{(k+1)}(\mathbf{x}, z; \mathbf{y}, z) dz = \gamma^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$. Dans le cas quantique confiné, la convergence forte est assurée par la régularité locale imposée par le Laplacien et par la divergence de V à l'infini. Si V ne diverge pas, alors la convergence sera faible *a priori* et la relation de compatibilité pourra être perdue.

Que se passe-t-il si la convergence des $\gamma_{\Psi_N}^{(k)}$ est seulement faible? Dans [9], nous avons montré que le théorème de structure reste vrai pour l'ensemble de toutes les limites faibles possibles, à condition que la mesure μ soit autorisée à vivre sur la boule unité $B = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \leq 1\}$, au lieu de la sphère unité S . Un résultat similaire avait été obtenu précédemment par Ammari et Nier dans [3].

D'un point de vue physique, la perte de compacité correspond au fait que certaines particules du système peuvent vouloir s'enfuir à l'infini plutôt que de rester là où le potentiel V est attractif. Plus qu'une question purement mathématique, ceci est en fait utilisé dans les expériences pour refroidir le

système au maximum, en faisant lentement varier la hauteur du potentiel V de sorte que les particules les plus excitées s'en aillent (figure 3).

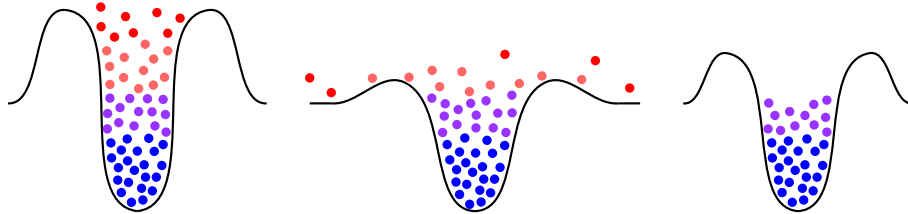


FIGURE 3. Refroidissement par évaporation en laboratoire. La hauteur du puits du potentiel V est lentement variée pour que les particules les plus excitées s'échappent.

Nous n'énoncerons pas ici le résultat similaire au théorème 4 dans le cas où les particules peuvent partir à l'infini, et nous renvoyons plutôt à [8, 9]. Si la perte de compacité peut être écartée, alors le résultat final est exactement le même que le théorème 4.

4. L'ordre suivant : la théorie de Bogoliubov

Nous avons expliqué que $E(N) = N e_H + o(N)$ où e_H est l'infimum de l'énergie de Hartree, et que les opérateurs densité $\gamma_{\Psi_N}^{(k)}$ convergent vers $\gamma_{(u_0)^{\otimes N}}^{(k)}$ (dans le cas d'un unique minimiseur u_0 pour e_H). Cette information est importante car elle explique une grande partie des observations en laboratoire. Mais elle ne répond pas vraiment à la question du comportement précis de Ψ_N lui-même.

Lorsque u_0 est unique et non dégénéré, il est possible d'identifier l'ordre suivant du développement de l'énergie à la limite $N \rightarrow \infty$ avec $\lambda = 1/(N-1)$:

$$E(N) = N e_H + e_B + o(1).$$

La constante e_B est la première valeur propre d'un opérateur linéaire (la seconde quantification de la Hessienne de \mathcal{E}_H en u_0) qui s'appelle le Hamiltonien de Bogoliubov. C'est l'unique vecteur propre associé qui permet de comprendre le comportement exact de Ψ_N à la limite, mais nous ne donnerons pas plus de détails ici et nous renvoyons à [10, 8]. La forme du spectre du Hamiltonien de Bogoliubov est elle reliée au caractère superfluide du système.

Références

- [1] J. R. ABO-SHAEER, C. RAMAN, J. M. VOGELS & W. KETTERLE – « Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates », *Science* **292** (2001), no. 5516, p. 476–479.

- [2] A. AFTALION – *Vortices in Bose–Einstein condensates*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, vol. 67, Springer, 2006.
- [3] Z. AMMARI & F. NIER – « Mean field limit for bosons and infinite dimensional phase-space analysis », *Ann. Henri Poincaré* **9** (2008), p. 1503–1574.
- [4] K. B. DAVIS, M. O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN & W. KETTERLE – « Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms », *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), p. 3969–3973.
- [5] B. DE FINETTI – « Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio », Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1931, Ser. 6, Memorie, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.
- [6] F. GOLSE – « On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit », *ArXiv e-prints 1301.5494* (2013), Lecture notes for a course at the NDNS+ Applied Dynamical Systems Summer School "Macroscopic and large scale phenomena", Universiteit Twente, Enschede (The Netherlands).
- [7] E. HEWITT & L. J. SAVAGE – « Symmetric measures on Cartesian products », *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 470–501.
- [8] M. LEWIN – « Gaz de bosons dans le régime de champ moyen : les théories de Hartree et Bogoliubov », in *Séminaire Laurent Schwartz – EDP et applications*, IHÉS, 2012-2013, Exp. no 3.
- [9] M. LEWIN, P. T. NAM & N. ROUGERIE – « Derivation of Hartree’s theory for generic mean-field Bose gases », *preprint arXiv* (2013).
- [10] M. LEWIN, P. T. NAM, S. SERFATY & J. P. SOLOVEJ – « Bogoliubov spectrum of interacting Bose gases », *Comm. Pure Appl. Math.* **in press** (2013).
- [11] E. H. LIEB & R. SEIRINGER – *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, 2010.
- [12] E. H. LIEB, R. SEIRINGER, J. P. SOLOVEJ & J. YNGVASON – *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, Oberwolfach Seminars, Birkhäuser, 2005.
- [13] P.-L. LIONS – « Mean-field games and applications », Lectures at the Collège de France, unpublished, Nov 2007.
- [14] E. SANDIER & S. SERFATY – « From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems », *Commun. Math. Phys.* **313** (2012), p. 635–743.
- [15] R. F. WERNER – « Large deviations and mean-field quantum systems », in *Quantum probability & related topics*, QP-PQ, VII, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, p. 349–381.

16 décembre 2013

M. LEWIN, CNRS & Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de Mathématiques (UMR 8088), F-95000 Cergy-Pontoise, France • E-mail : mathieu.lewin@math.cnrs.fr