HAL open science

Du théoréme de décomposition á la Pureté locale

Fouad Elzein, Lê Dung Trang

To cite this version:

Fouad Elzein, Lê Dung Trang. Du théoréme de décomposition á la Pureté locale. 2013. hal-00911800

HAL Id: hal-00911800

https://hal.science/hal-00911800v1

Preprint submitted on 29 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DU THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION À LA PURETÉ LOCALE

FOUAD EL ZEIN AND DŨNG TRÁNG LÊ

Abstract. Une nouvelle démonstration du théorème de décomposition est donnée, en établissant une relation avec une version du théorème de pureté locale de Deligne et Gabber adaptée aux variétés algébriques complexes.

From the Decomposition theorem to Local purity

Abstract. A new proof of the decomposition theorem is established using a relation with a version of the local purity theorem of Deligne and Gabber adapted to complex algebraic varieties.

1. Abridged version

Let $f : X \to V$ be a projective morphism of complex algebraic varieties, $\tilde{\mathcal{L}}$ a polarized variation of Hodge structures (VHS) on an algebraic open dense subset $j : (X - Y) \to X$ complement of a normal crossing divisor (NCD) Y in a non singular variety X, $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$ is the complex with sheaf cohomology $\tilde{\mathcal{L}}$ in degree $-m$ where m is the dimension of X, and $j_{!*}\mathcal{L}$ is the intermediate extension of $\mathcal{L}$ ([2], prop. (2.1.11) p. 60, (2.2.7) p. 69, [4]).

We give a new proof of the decomposition theorem of the direct image of $j_{!*}\mathcal{L}$ into its perverse cohomology:

$$Rf_*j_{!*}\mathcal{L} \simeq \oplus_i {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L})[-i]$$

and the canonical decomposition of each ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L})$ into a direct sum of intermediate extensions ([2], theorems (4.3.1) p. 112, (5.4.10) p. 144, (6.2.5) p. 163, (6.2.10) p. 165) and ([21]), based on Deligne - Gabber's note on local purity ([12], not published). The theorem is true for any varieties X and Y, but we show that the proof can always be reduced to the case of a normal crossing divisor Y in a non-singular X.

As the references show, this theorem has been established first for a scheme X of finite type over an algebraically closed field k of characteristic $p > 0$, for pure sheaves in the abelian sub-category of perverse sheaves of the category $D^b_c(X, \mathbb{Q}_l)$ for $l \neq p$, with respect to l-adic cohomology. The statements can be transposed according to Deligne's dictionary ([7], sections 3 and 9), which is done in ([2], 6.2).

We consider a stratification of V and start with the theorem over the open dense subset (the big strata) on which the restriction of f is smooth, where the

Date: Février 2013.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14D07, 32G20; Secondary 14F05.
Key words and phrases. Hodge theory, algebraic geometry.

decomposition applies in the smooth proper case by the original work of Deligne [8].

In the next inductive step we aim to extend the decomposition to the union S_{n-1} of the next strata of dimension $\leq n-1$ where n is the dimension of V. We consider a normal section $\mathcal{N}$ at a point $v \in S_{n-1}$:

(1) Assuming the decomposition on $\mathcal{N} - v$, we prove an adapted version of the local purity theorem [12] to complex algebraic varieties on $\mathcal{N}$ at v.
(2) Then we use this local purity to extend the decomposition along the strata.

We prove this last result in a second note, then both results give a new proof of the decomposition theorem. In fact, in the proof of local purity, we need essentially to consider the case of points on the strata of dimension zero which presents similarity with the isolated singularity case [14]. The inductive step is for a simultaneous proof of both results: local purity and decomposition.

The proof is also based on an induction on the dimension of X. We use, down on V, M. Artin's results of Lefschetz type with coefficients in perverse sheaves on the complement of hyperplane sections [2], theorem (4.1.1).

The use of Hodge theory is limited in this note to the case of the complement $X - Z$ of a normal crossing divisor Z, in order to use logarithmic complexes ([3] theorem (3.5) p. 30 and 3.3 p. 33).

When $X - Z$ is the inverse image of an open subset of V, we prove that *the perverse filtration of its cohomology with coefficients in $j_{!*}\mathcal{L}$ is compatible with the mixed Hodge structure (MHS).*

In the case of a small ball B_v with center v with inverse image $B_{X_v} = f^{-1}(B_v)$, we suppose that the fiber $X_v := f^{-1}(v)$ is a NCD by blowing up if necessary; similarly we may suppose that the union $X_v \cup Y$ is also a NCD in X in order to have a MHS constructed by a logarithmic complex. We assume the decomposition theorem true on $B_{X_v} - X_v$ by induction, from which we deduce the isomorphism:

$$Gr_i^{p_\tau}\mathbb{H}^{r+i}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^r(B_v - v, {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L}))$$

so that we can derive an interpretation of the local purity as a condition on the weights of the MHS induced on the graded perverse cohomology of $B_{X_v} - X_v$.

2. Introduction

Soit $f : X \to V$ un morphisme projectif de variétés algébriques complexes, $\tilde{\mathcal{L}}$ une variation de structures de Hodge (VSH) polarisée sur un ouvert Ω lisse de X, $j : \Omega \to X$, $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$ vu comme un complexe de faisceaux égal à $\tilde{\mathcal{L}}$ en degré $-m$ où m est la dimension de X et nul en tout autre degré. L'extension intermédiaire de $\mathcal{L}$ ([2], prop. (2.1.11) p. 60, (2.2.7) p. 69, [4]) est notée $j_{!*}\mathcal{L}$.

Le théorème de décomposition dans [2] établit dans le cas géométrique, la décomposition dans la catégorie dérivée $D^b_c(V, \mathbb{Q})$:

$$Rf_*j_{!*}\mathcal{L} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L})[-i]$$

du complexe image directe dérivée en somme directe de ses cohomologies perverses. D'autre part, chaque terme se décompose naturellement cette fois en somme directe d'extensions intermédiaires ([2], théorèmes (4.3.1) p. 112, (5.4.10) p. 144, (6.2.5) p. 163, (6.2.10) p. 165). Pour le cas d'une VSH admissible et polarisée, voir [21].

Ce théorème a été établi d'abord pour les schémas X de type fini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, pour des faisceaux purs dans la sous-catégorie abélienne des faisceaux pervers de la catégorie $D^b_c(X, \mathbb{Q}_l)$ dérivée des $\mathbb{Q}_l$-faiceaux constructibles pour $l \neq p$ [2].

Les énoncés se transposent selon le dictionnaire établi par Deligne ([7], sections 3 et 9); ce qui est fait dans ([2], 6.2) où l'on découvre une technique qui permet de déduire des résultats comportant des énoncés géométriques en caractéristique 0 à partir du cas correspondant en caractéristique $p > 0$.

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une désingularisation adaptée à f, la démonstration pour f se déduit facilement de celles pour π et $f \circ \pi$ ce qui nous ramène à considérer le cas où X est lisse. En fait, on peut se ramener au cas où $f : X \to V$ est une fibration en DCN sur les strates, au sens donné plus bas, qui va nous permettre d'utiliser les complexes logarithmiques en théorie de Hodge et le bon comportement de la perversité en présence d'un diviseur de Cartier et qui explique la relative simplicité de cette note.

La preuve de la décomposition a été précédée d'une note [12] établissant la notion de pureté locale en caractéristique $p > 0$. Nous allons établir dans cette note une relation récurrente entre ces deux résultats qui conduit à une démonstration simultanée des deux résultats: pureté et décomposition, à partir de:

(1) La construction d'une structure de Hodge mixte (SHM) sur les ouverts complémentaires d'un diviseur à croisements normaux (DCN) dans X, établie à l'aide d'un complexe logarithmique ([3] théorème (3.5) p. 30 et 3.3 p. 33).
(2) La notion de filtration perverse ${}^p\tau$ sur l'image directe $K := Rf_*j_{!*}\mathcal{L}$ ([2] prop. 1.3.3 p. 29) construite dans la catégorie dérivée $D^b_c(V, \mathbb{Q})$ des faisceaux à cohomologie constructible.

Un résultat essentiel de la note, consiste à démontrer que *la filtration perverse* induite sur la cohomologie d'une extension intermédiaire sur ouvert Ω qui est à la fois complémentaire d'un DCN dans X et inverse par f d'un ouvert sur V, *est compatible avec la SHM.*

La *polarisation* des structures de Hodge (SH) en caractéristique 0 dans les travaux [5, 19, 18], va nous permettre de *simplifier le cas crucial de la démonstration de la pureté locale.*

Par conséquent, on supposera dans cette note X lisse, la VSH $\mathcal{L}$ localement unipotente et polarisée sur l'ouvert $\Omega := X - Y$ complémentaire d'un diviseur à croisements normaux Y dans X.

Soit Z un DCN dans X tel que $Z \cup Y$ soit aussi un DCN (en effectuant des éclatements si nécessaire) et $j_Z : X - Z \to X$, alors un complexe de Hodge mixte (CHM) cohomologique sur X sous-jacent à $R(j_Z)_*j_Z^*j_{!*}\mathcal{L}$ est décrit à l'aide d'un *complexe logarithmique* dans [3, 13] (ou d'un module de Hodge différentiel dans [21]); dans chaque cas la construction utilise des résultats de Kashiwara [18, 19] (ou l'appendice à [21]).

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, la *filtration perverse* ${}^p\tau$ sur la cohomologie globale $\mathbb{H}^k(X - Z, K)$ est définie par:

$$ {}^p\tau_i\mathbb{H}^k(X - Z, K) := Im\left\{\mathbb{H}^k(X - Z, {}^p\tau_i K) \to \mathbb{H}^k(X - Z, K)\right\}. $$

Il s'agit de vérifier qu'elle est compatible avec la SHM sur $X - Z$.

Proposition 2.1. *i) Soit $\mathcal{L}$ une VSH polarisée sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux Y de X, U un ouvert algébrique de V, tel que $f^{-1}(U)$ soit le complément d'un diviseur à croisements normaux Z dans X tel que $Z \cup Y$ soit aussi un DCN, alors la filtration perverse sur la cohomologie $\mathbb{H}^r(f^{-1}(U), j_{!*}\mathcal{L})$ est compatible avec la structure de Hodge mixte (SHM): les sous-espaces ${}^p\tau_i$ sont des sous-SHM de $\mathbb{H}^r(f^{-1}(U), j_{!*}\mathcal{L})$.*

ii) Soient un point $v \in V$ (resp. une boule $B_v \subset V$ de centre v) d'image inverse $f^{-1}(v) := X_v$ (resp. un voisinage $f^{-1}(B_v) := B_{X_v}$ de X_v). On suppose X_v et $X_v \cup Y$ des DCN dans X, alors pour toute boule B_v de rayon assez petit la cohomologie $\mathbb{H}^r(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ est munie d'une SHM compatible avec la filtration perverse.

L'interprétation de la pureté locale [10, 12] se traduit dans ce cas par l'énoncé principal suivant constituant le pas de l'induction qui permet de déduire ce résultat en un point v à partir de la décomposition en dehors de ce point. On peut supposer le point dans la strate de dimension zéro (sinon, si v est sur une strate S_l on peut appliquer le résultat sur une section normale à S_l en v pour se réduire à ce cas).

Théorème 2.2. *Avec les notations de 2.1, soit a le poids de la VSH polarisée $\mathcal{L}$ (après décalage) et supposons que la fibre $X_v := f^{-1}(v)$ image inverse du point v par le morphisme projectif $f : X \to V$, soit un DCN tel que $X_v \cup Y$ soit aussi un DCN dans X.*
Si la restriction de $Rf_*j_{!*}\mathcal{L}$ à une boule épointée $B_v - \{v\}$ assez petite satisfait le théorème de décomposition, alors la SHM de la cohomologie de $B_v - \{v\}$ induit sur les espaces ci-dessous des SHM de poids ω satisfaisant les inégalités suivantes:

(1) $\omega > a + r$ *sur* ${}^p\tau_{\leq r}\mathbb{H}^r(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$,
(2) *Dualement,* $\omega \leq a + r$ *sur* $\mathbb{H}^r(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})/{}^p\tau_{\leq r}\mathbb{H}^r(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$.

Ce sont des conditions dites de pureté locale au point v de V et de semi-pureté sur X en X_v. Notre but est d'établir ces conditions sur les poids de la SHM induite sur le gradué par rapport à ${}^p\tau$. Les SHM sont toutes réalisées ici comme sous-quotient de SHM définie en haut sur des ouverts de X lisse. Le théorème 2.2 est le pas d'une récurrence simultanée avec la preuve du théorème de décomposition, récurrence sur la dimension des strates et la dimension de X à l'aide d'une réduction à une section hyperplane générale sur X.

La *récurrence* qui sera expliquée dans une seconde note, débute par le résultat de Deligne sur l'ouvert U de la grande strate lisse de V sur lequel la restriction de f est lisse et propre [8]. Un exemple simple est traité dans le cas d'une singularité isolée [14]. Les arguments importants de la preuve sont les suivants:

1) L'hypothèse de décomposition en dehors du point v, permet d'utiliser l'isomorphisme:

$$Gr_i^{{}^p\tau}\mathbb{H}^r(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^{r-i}(B_v - v, {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L})) = \mathbb{H}^r(B_v - v, Gr_i^{{}^p\tau}(Rf_*j_{!*}\mathcal{L}))$$

exprimant la dégénérescense de la suite spectrale de Leray perverse en dehors de v, ce qui permet d'exploiter les résultats d'Artin de type Lefschetz en bas sur V [2].

2) L'utilisation de la polarisation de la cohomologie d'intersection simplifie considérablement le cas crucial que l'on rencontre en caractéristique $p > 0$.

Dans une seconde note [15] nous prouvons que la pureté locale entraîne la décomposition au point et par conséquent les deux résultats démontrent le théorème de décomposition.

3. Preuve de la semi-pureté

La SHM sur la cohomologie du complémentaire d'un DCN telle qu'elle est développée dans [3] (théorème (3.4) et propriétes p. 31, section (3.3) p. 33 et théorème 3.14) est spécialement adaptée pour étudier la semi-pureté sur les voisinages tubulaires $B_v := f^{-1}(B_v)$ de X_v dans cette note. Notamment l'isomorphisme de Thom-Gysin [3] (3.3.7) sera souvent utilisé dans la démonstration. Par ailleurs, le morphisme $f : X \to V$ sera toujours une fibration par des DCN sur les strates au sens suivant:

Définition 3.1 (fibration topologique par DCN sur les strates d'une stratification)**.** i) Un morphisme $f : X \to V$ est une fibration topologique par DCN sur les strates d'une stratification $\mathcal{S} = (S_\alpha)$ de Thom-Whitney de V si X est lisse et les espaces $V_l = \cup_{\dim S_\alpha \leq l} S_\alpha$ satisfont les proprités suivantes:

(1) L'espace X est lisse, et les sous-espaces $X_{V_i} := f^{-1}(V_i)$ sont vides ou des sous-DCN emboités dans X.
(2) (T) La restriction de f à $X_S := f^{-1}(S)$ au-dessus de chaque strate S de $\mathcal{S}$ est une fibration topologique: $f_| : X_S \to S$.
(3) Pour tout point $v \in V_i - V_{i-1}$, donc lisse dans V_i, soit $\mathcal{N}_v$ une section normale en v à V_i en position générale, alors $f^{-1}(\mathcal{N}_v)$ est lisse dans X et intersecte le diviseur à croisements normaux X_{V_i} transversalement.

Si ces deux dernières assertions sont satisfaites, alors $X_{V_i} \cap f^{-1}(\mathcal{N}_v) = f^{-1}(v)$ est un DCN dans $f^{-1}(\mathcal{N}_v)$.
Nous dirons pour simplifier, que $X_{V_i - V_{i-1}} := f^{-1}(V_i - V_{i-1})$ est DCN relatif (éventuellement vide), et lorsque les données sont claires, que le morphisme f (resp. la stratification $\mathcal{S}$) est admissible.
ii) La fibration est adaptée à un sous-espace Y dans X, ou à un système local $\mathcal{L}$ défini sur le complémentaire de Y dans X, si, de plus, Y est un DCN et, pour tout $1 \leq i \leq n$, la réunion des sous-espaces $X_{V_i} \cup Y$ sont des DCN relatifs sur les strates de V.

Il existe une stratification de Thom-Whitney sous-jacente aux données de la fibration telle que les opérations cohomologiques classiques sur $\mathcal{L}$ induisent des systèmes locaux sur les strates [20].

Remarque 3.2 (réduction au cas d'une strate de dimension zéro).

La notion de DCN relatif est essentielle, car elle permet de ramener l'étude du problème en un point v d'une strate quelconque S au cas d'un point v d'une strate de dimension zéro dans la section transversale $\mathcal{N}_v$ à S en v.

Proposition 3.3. *Soient $f : X \to V$ un morphisme projectif et Y un sous-espace algébrique fermé strict contenant les singularités de X, alors il existe un diagramme $X \xleftarrow{\pi'} X' \xrightarrow{f'} V$ où X' est une variété nonsingulière, π' et $f' := f \circ \pi'$ sont des fibrations par DCN sur les strates, adaptées à $Y' := \pi'^{-1}(Y)$.*

De plus, π' est une modification de X: il existe un ouvert $\Omega \subset f(X) \subset V$ dense dans l'image de f, tel que π' induise un isomorphisme de $f^{-1}(\Omega) - (f^{-1}(\Omega) \cap Y) \simeq f'^{-1}(\Omega) - (f'^{-1}(\Omega) \cap Y')$, et que $f'^{-1}(\Omega) \cap Y'$ soit un DCN relatif (dit horizontal, éventuellement vide).

Cette propriété de f est nécessaire pour le raisonnement par récurrence.

3.1. **La filtration perverse.** La filtration perverse, bien que définie sur V, peut être décrite directement sur X d'après [6]. Cette description va nous permettre d'établir la compatibilité de la filtration perverse avec la SHM d'un ouvert algébrique à coefficients. Elle s'adapte à la situation locale sur V en un point v, et semi-locale sur X au voisinage de la fibre X_v en v.

3.1.1. Soit U un ouvert de V et considérons deux suites croissantes de sous-variétés fermées de U:

$$H_* : U = H_0 \supset H_{-1} \supset \ldots \supset H_{-n}, \quad W_* : U = W_0 \supset W_{-1} \supset \ldots \supset W_{-n}$$

On note $h_i : (U - H_{-i}) \to U$ l'inclusion et on considère un complexe $K \in D^b_c(U, \mathbb{Q})$ à cohomologie constructible bornée. En reprenant les notations de [6] (remark 3.6.6), on définit la filtration sur $\mathbb{H}^*(U, K)$:

$$\delta_p \mathbb{H}^*(U, K) := \mathrm{Im}\{\oplus_{i-j=p} \mathbb{H}^*_{W_{-j}}(U, (h_i)_! h_i^* K) \to \mathbb{H}^*(U, K)\} \tag{3.1}$$

La filtration δ est l'aboutissement d'une suite spectrale.

Proposition 3.4 ([6], theorem 4.2.1)**.** *Soit U un ouvert quasi-projectif de V et $K \in D^b_c(U, \mathbb{Q})$. Pour un choix convenable des deux suites H_* et W_* mais assez général (relativement à un plongement affine dans un espace projectif et une stratification compatible), la filtration δ (3.1) est égale à la filtration perverse ${}^p\tau$ à un décalage d'indices près.*

La preuve, basée sur la notion de résolution par des faisceaux pervers acycliques sauf en degré 0, utilise le résultat suivant [1, 6] qui semble remonter à une lettre inédite de Deligne:

Lemme 3.5. *Soient $U \subset \mathbb{P}^N$ un plongement affine, H et H' deux sections hyperplanes en position générale, les inclusions $j : (U - H \cap U) \to U$ et $j' : (U - H' \cap U) \to U$. Pour tout faisceau pervers $\mathcal{P}$ sur U, on a: $\mathbb{H}^r(U, j_! j^* j'_* (j')^! \mathcal{P}) = 0$ pour $r \neq 0$.*

Remarque 3.6. i) Le choix assez général des deux sections hyperplanes H et H' assure un isomorphisme $j_! j^* j'_* (j')^! \mathcal{P}) \simeq j'_* (j')^! j_! j^* \mathcal{P})$.

La preuve du lemme utilise le lemme d'Artin-Lefschetz faible appliqué au faisceau pervers $j_! j^* j'_* (j')^! \mathcal{P}$ sur U et à son dual et le fait que $U - H$ soit affine.

ii) Soient un point $v \in V$ et une boule $B_v \subset V$ de centre v, ce résultat s'applique lorsque l'on remplace U par $B_v - v$ car le plongement est alors de Stein et un ouvert du type $B_v - (H_{-i} \cap B_v) \subset B_v - v$ est aussi de Stein, en conséquence le lemme d'Artin-Lefschetz faible s'applique.

On déduit de la remarque:

Lemme 3.7. *Soient un point $v \in V$ et une boule $B_v \subset V$ de centre v. La filtration δ (3.1) pour $U = B_v - v$ est égale à la filtration perverse ${}^p\tau$ à un décalage d'indices près.*

Proposition 3.8. *Avec les notations de 2.2, pour tout ouvert quasi-projectif U de V tel que $f^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'un diviseur D à croisements normaux dans X et que $D \cup Y$ soit aussi un DCN, la filtration δ, et par conséquent la filtration perverse ${}^p\tau$ sur $\mathbb{H}^j(f^{-1}(U), j_{!*}\mathcal{L})$, en tout degré $j \in \mathbb{Z}$, sont compatibles avec la SHM.*

Preuve de la proposition 2.1. Il s'agit de munir les termes de la filtration δ (3.1) de SHM.

3.1.2. *Cas d'un ouvert affine.* Nous remarquons d'abord que le choix des suites H_* et W_* dans U étant assez général, nous pouvons supposer que les suites sont induites par des suites dans V notées abusivement aussi H_* et W_* tel que:

Les différentes images inverses $H'_{-i} := f^{-1}(H_{-i})$ et $W'_{-i} := f^{-1}(W_{-j})$ soient non-singulières, que leurs intersections le long de $f^{-1}(H_{-i} \cap W_{-j})$ soient transversales dans X, et qu'ils coupent transversalement un DCN fixe donné dans X.

Ces conditions permettent d'utiliser un complexe logarithmique le long d'un DCN contenant toutes ces familles.

Isomorphismes de Thom-Gysin. En général, si H' est une sous-variété non-singulière de codimension r transversale dans X à un diviseur à croisements normaux $D \cup Y$ de sorte que l'on puisse définir un CHM cohomologique sur H' logarithmique en $H' \cap (D \cup Y)$, on peut réaliser les *morphismes de Thom-Gysin* sous forme de morphismes de complexes logarithmiques induisant des morphismes de SHM de type (r, r) [3] (3.3.7):

On a $f^{-1}(U) = X - D$ et si on pose $j_D : f^{-1}(U) \to X$, on trouve pour $r = 1$: :

$$i^!_{H'}(R(j_D)_* j_D^* j_{!*}\mathcal{L}) \simeq i_{H'*}(R(j_{D\cap H'})_* j^*_{D\cap H'} i^*_{H'} j_{!*}\mathcal{L})[-2] \tag{3.2}$$

Le cas $r > 1$ est similaire au cas $r = 1$. On pose

$$K' := Rj_{D*}j_D^* j_{!*}\mathcal{L}, \quad K = Rf_*K', \quad h_i : (V - H_{-i}) \to V, \quad h'_i : (X - H'_{-i}) \to X;$$

D'après les triangles distingués:

$$h'_{i!}(h'_i)^*K' \to K' \to i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K', \quad i^!_{W'_{-j}} h'_{i!}(h'_i)^*K' \to i^!_{W'_{-j}} K' \xrightarrow{\varphi} i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K'$$

on peut calculer la cohomologie: $\mathbb{H}^*_{W_{-j}}(V, (h_i)_! h_i^* K) \simeq H^*_{W'_{-j}}(X, h'_{i!}(h'_i)^*K')$ à l'aide du cône sur φ décalé, afin de mettre une SHM sur ces groupes et donc sur les termes de la filtration δ (3.1).

On va transformer les termes du cône à l'aide d'isomorphismes de Thom-Gysin (définis par le drapeau W'_* dans X chaque fois de codimension 1 ou directement sur W'_{-j} de codimension j). Ainsi par exemple le terme $i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K'$ devient isomorphe au complexe sur $W'_{-j} \cap H'_{-i}$ logarithmique en $D_{-j} \cap W'_{-j} \cap H'_{-i}$.

On considère sur chaque W'_{-k} le diviseur à croisements normaux $D_{-k} := D \cap W'_{-k}$, avec $j_k : (W'_{-k} - D_{-k}) \to W'_{-k}$, $K'_k := Rj_{k*}j_k^* i^*_{W'_{-k}} j_{!*}\mathcal{L}$, alors on a des isomorphismes de Thom-Gysin $i^!_{W'_{-k-1}} K'_k[2] \simeq K'_{k+1}$ en partant de $K'_0 := K'$ pour $k = 0$, jusqu'à $k = j - 1$, de même on a une transformation similaire pour le terme $i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K'$ pour arriver au cône sur un morphisme $\phi_{i,j} : i^*_{W'_{-j}} K'[-2j] \to i^*_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} K'[-2j]$ du complexe K'_j sur W'_{-j} logarithmique en $D_{-j} \cap W'_{-j}$ décalé, et de but le complexe $i^*_{W'_{-k}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} j_{!*}\mathcal{L}$ sur $W'_{-j} \cap H'_{-i}$ logarithmique en $D_{-j} \cap W'_{-j} \cap H'_{-i}$ décalé.

En conclusion la SHM sur $\mathbb{H}^*_{W'_{-j}}(X, (h'_i)_!(h'_i)^*K')$ se déduit à indices près, de la SHM définie par le cône mixte du morphisme de complexes de Hodge mixte logarithmiques $\phi_{i,j}$.

3.1.3. *Cas du voisinage local épointé $B^*_v := B_v - v$ d'un point v de V.* La preuve est similaire à celle qui précède. Pour calculer la cohomologie du voisinage tubulaire moins la fibre centrale $B^*_{X_v} = B_{X_v} - X_v$ à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$, on considère le

morphisme composé suivant

$$I : Ri^!_{X_v} j_{!*}\mathcal{L} \to j_{!*}j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L} \tag{3.3}$$

que l'on appelle morphisme d'intersection I. Soit $j_{X_v} : (X - X_v) \to X$, alors I s'inscrit dans un triangle $Ri^!_{X_v} j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L} \to i^*_{X_v} Rj_{X_v *} j^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L} \xrightarrow{[1]}$. Par conséquent la cohomologie de $B^*_{X_v}$ à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$ est celle du cône sur I.

Définition 3.9. La fibre X_v étant supposée un DCN, les termes $Ri^!_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}$ et $i^*_{X_v} j_{!*}\mathcal{L}$ sont munis d'une structure de complexe de Hodge mixte cohomologique, et par conséquent la cohomologie de $B^*_{X_v}$ se trouve d'une munie de la SHM définie par le cône mixte sur I.

Pour montrer que cette SHM est compatible avec la filtration perverse, on cherche à appliquer la formule (3.1) qui caractérise la filtration perverse d'après 3.7.

En reprenant en abusant les notations précédentes avec B_{X_v} au lieu de X, X_v au lieu de D, $j_{!*}\mathcal{L}_{|B_{X_v}}$ au lieu de $j_{!*}\mathcal{L}$, deux familles H'_{-i} et W'_{-j} dans B_{X_v}, $h'_i : (B_{X_v} - H'_{-i}) \to B_{X_v}$ et $i^!_{W'_{-j}} j_{!*}\mathcal{L}_{|B^*_{X_v}} \xrightarrow{\varphi} i^!_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} j_{!*}\mathcal{L}_{|B^*_{X_v}}$, le groupe de cohomologie $\mathbb{H}^*_{W'_j}(B^*_{X_v}, (h'_i)_!(h'_i)^* j_{!*}\mathcal{L})$ se déduit alors d'un cône sur φ et la SHM, dont on la munit, d'un double cône mixte une fois sur I et une fois sur φ à partir du carré:

$$\begin{array}{ccc} i^!_{X_v\cap W'_{-j}} i^*_{W'_{-j}} j_{!*}\mathcal{L} & \xrightarrow{I_j} & i^*_{X_v\cap W'_{-j}} j_{!*}\mathcal{L} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ i^!_{X_v\cap W'_{-j}} i^*_{W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} j_{!*}\mathcal{L} & \xrightarrow{I^i_j} & i^*_{X_v\cap W'_{-j}} i_{H'_{-i}*} i^*_{H'_{-i}} j_{!*}\mathcal{L} \end{array}$$

En conclusion, la filtration δ sur $\mathbb{H}^*(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ coincide à indices près avec la filtration perverse et de plus elle est réalisée par des sous-SHM.

3.2. **Preuve du théorème 2.2.** C'est le résultat principal de cette note. Par hypothèse on suppose la décomposition au-dessus de $V - v$ satisfaite, ce qui se traduit par l'isomorphisme:

$$Gr_i^{p_\tau}\mathbb{H}^r(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^{r-i}(B_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^i(Rf_* j_{!*}\mathcal{L})). \tag{3.4}$$

La preuve utilise l'isomorphisme précédent afin d'exploiter le théorème d'annulation d'Artin du type section hyperplane de Lefschetz à coefficients dans ${}^pD^{\leq 0}_c(V)$ ([2] 4.1), sur un ouvert de Stein (resp. affine) en bas dans V (le résultat étant local, on peut supposer V projective).

En supposant X_v un DCN, le terme de gauche de (3.4) se trouve muni d'une SHM induite. Pour la commodité de l'argumentation on raisonne sur le terme de droite, puis on interprète le résultat à gauche, autrement dit, par abus de notation on transporte la SHM sur le terme de droite (on ne sait pas encore que cette structure est canonique mais c'est en fait notre but ultime qui sera l'objet d'une autre étude à comparer avec la structure définie dans la théorie des modules différentiels de Hodge).

Dans la suite pour simplifier les notations nous posons $K = Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$, alors il faut prouver que le poids ω de cette SHM satisfait les inégalités:

$$\omega > a + i + j \text{ sur } \mathbb{H}^j(B_v - v, {}^p\mathcal{H}^i(K)) \text{ si } j \geq 0,$$
$$\text{et } \omega \leq a + i + j \text{ sur } \mathbb{H}^j(B_v - v, {}^p\mathcal{H}^i(K)) \text{ si } j \leq -1$$

Les deux cas cités sont duaux. La preuve pour $j > 0$ s'obtient par une *récurrence simple sur la dimension appliquée à une section hyperplane générale de V, l'application du théorème d'Artin-Lefschetz et le morphisme de Gysin pour la section hyperplane générale.* C'est une adaptation de celle de [12] au cas transcendant et diffère donc par l'utilisation de la polarisation et repose sur le fait que si $j_{!*}\mathcal{L}$ est pure de poids a, les poids des SHM sur $\mathbb{H}^*(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$ et $\mathbb{H}^*_Z(X, j_{!*}\mathcal{L})$ sont $\geq a$ (resp. $\leq a$ sur les SHM duales $\mathbb{H}^*(Z, i^*_Z j_{!*}\mathcal{L})$, et $\mathbb{H}^*_c(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$).

1) *Preuve pour $j > 0$, similaire à* [12]. Soit H une section hyperplane générale de V contenant le point v et soit $H_v = B_v \cap H$. En particulier H est normalement plongée en dehors du point v et son transformé strict H' (ne contenant pas X_v) dans X est transverse aux sous-espaces $X_l := f^{-1}(S_l)$ inverse des strates S_l de V; en particulier les troncations perverses commutent avec la restriction à $H - \{v\}$.

On considère la suite exacte de groupes de cohomologie à coefficients dans ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_* j_{!*}\mathcal{L})$:

$$\mathbb{H}^{j-2}(H_v - \{v\})(-1) \simeq \mathbb{H}^j_{H_v - \{v\}}(B_v - \{v\}) \to \mathbb{H}^j(B_v - \{v\}) \to \mathbb{H}^j(B_v - H_v)$$

Si B_v est de dimension 1, $B_v - v$ est de Stein, sinon $B_v - H_v$ est de Stein et sa cohomologie $\mathbb{H}^j(B_v - H_v, {}^p\mathcal{H}^i(K))$ s'annule pour $j \geq 1$ d'après le théorème d'annulation sur un ouvert de Stein appliqué à ${}^p\mathcal{H}^i(K)$ dans ${}^pD^{\leq 0}_c V$. On en déduit que le morphisme de Thom-Gysin:

$$\mathbb{H}^{j-2}(H_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^i(K))(-1) \xrightarrow{G_j} \mathbb{H}^j(B_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^i(K))$$

est surjectif pour $j = 1$, et un isomorphisme pour $j > 1$.

Soit f' la restriction de f à H' et $K' := Rf'_*(j_{!*}\mathcal{L}_{|H'})$. Par transversalité en dehors de v, on a: $\mathbb{H}^{j-2}(H_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^i(K)) \simeq \mathbb{H}^{j-2}(H_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^{i+1}(K'[-1])$. En raisonnant par *récurrence* sur la dimension de V, l'hypothèse de décomposition sur $H' - (X_v \cap H')$ au-dessus de $H - \{v\}$ s'applique à la restriction $j_{!*}(\mathcal{L}_{|H'}[-1])$ de poids $a - 1$ sur H'.

Donc, le terme de la SHM sur $\mathbb{H}^{j-2}(H_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^i(K))$ s'annule pour le poids $\omega' > a - 1 + i + 1 + j - 2 = a + i + j - 2$ et d'après la surjectivité du morphisme de Thom-Gysin G_j, on déduit que le terme de la SHM sur $B_v - \{v\}$ s'annule pour $\omega = \omega' + 2 > a - 1 + i + 1 + j - 2 = a + i + j$ (en ajoutant 2, à cause du twist des SHM).

2) *Preuve pour $j = 0$ et $\omega \geq a + i + j$.* Soient H_1 une section hyperplane générale ne contenant pas v, $k_v : (V - v) \to V$ et $i_v : \{v\} \to V$ les immersions canoniques. On considère la suite exacte:

$$\mathbb{H}^0(V - H_1, Rk_{v*}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K)) \to H^0(i_v^* Rk_{v*}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K)) \to \mathbb{H}^1(V - H_1, Rk_{v!}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K))$$

où on utilise l'écriture suivante: $\mathbb{H}^1_c(V - H_1, {}^p\mathcal{H}^i(K)) = \mathbb{H}^1(V - H_1, Rk_{v!}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K))$ avec $Rk_{v!}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K) \in {}^pD^{\leq 0}_c V$ pour déduire que la cohomologie $\mathbb{H}^1$ de l'espace affine $V - H_1$ s'annule d'après Artin.

Le terme à gauche $\mathbb{H}^0(V - H_1, Rk_{v*}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K))$ est de poids $\omega \geq a + i$ car il s'agit d'un ouvert. Donc, le terme du milieu $\mathbb{H}^0(B_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^i(K)) \simeq H^0(i_v^* Rk_{v*}k_v^* {}^p\mathcal{H}^i(K))$, isomorphe à $Gr_i^{p_\tau}\mathbb{H}^i(X - X_v -, j_{!*}\mathcal{L})$, est de poids $\omega \geq a + i$.

Le cas crucial. Le théorème (2.2) est établi pour $j > 0$ et par dualité pour $j < -1$, pour $j = 0$ si $\omega \geq a + i + j$ et par dualité pour $j = -1$ si $\omega \leq a + i$. Il reste à

l'établir pour $\omega < a+i$ et $j=-1$, c-à-d il faut démontrer l'annulation des termes:

$$Gr^W_{a+r} Gr^{p_\tau}_r \mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{-1}(B_v - v, {}^p\mathcal{H}^r(K)) \tag{3.5}$$

pour tout $r \in \mathbb{Z}$. La preuve se fait en plusieurs étapes. Elle utilise l'idée que la cohomologie de $B_v - v$ s'inscrit dans deux suites exactes issues des triangles:

$$i_v^* Rk_{v!}k_v^* j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^* j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^* Rk_{v*}k_v^* j_{!*}\mathcal{L}, \quad Rk_v^! j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^* j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^* Rk_{v*}k_v^* j_{!*}\mathcal{L}$$

Soient $X^* = X - X_v$ et $B^*_{X_v} = B_{X_v} - X_v$, alors on en déduit le diagramme à coefficients dans $j_{!*}\mathcal{L}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{H}^r_{X_v}(X) & \to & \mathbb{H}^r(X_v) & & & & \mathbb{H}^{r+1}_{X_v}(X) \\
& \searrow \quad \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
& \mathbb{H}^r(X) & & & \mathbb{H}^r(B^*_{X_v}) & & \\
& \nearrow \quad \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\mathbb{H}^r_c(X^*) & \to & \mathbb{H}^r(X^*) & & & & \mathbb{H}^{r+1}_c(X^*)
\end{array} \tag{3.5}$$

ce qui permet de réaliser la cohomologie de $B^*_{X_v}$ à l'aide de l'un des deux cônes mixtes

$$R\Gamma_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \to R\Gamma(X_v, j_{!*}\mathcal{L}), \quad R\Gamma_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \to R\Gamma(X^*, j_{!*}\mathcal{L}).$$

On peut comparer les deux à l'aide du cône mixte formé par les termes à gauche du diagramme: $R\Gamma_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \oplus R\Gamma_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \to R\Gamma(X, j_{!*}\mathcal{L})$.

On introduit d'abord deux morphismes ∂_X et α_X et on en déduit des morphismes injectifs sur des espaces gradués convenables.

Lemme 3.10. *Le morphisme de connexion suivant est injectif:*

$$Gr^W_{a+r} Gr^{p_\tau}_r \mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\partial_X}{\to} Gr^W_{a+r} Gr^{p_\tau}_r \mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}).$$

On considére la suite exacte longue:

$$\mathbb{H}^{-1}(V - v, {}^p\mathcal{H}^r(K)) \to \mathbb{H}^{-1}(B_v - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^r(K)) \overset{\partial_V}{\to} H^0_c(V - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^r(K)) \to$$

Il suffit de montrer que: $\mathbb{H}^{-1}(V - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^r(K))$ est pur de poids $a+r-1$ ou par dualité $H^1_c(V - \{v\}, {}^p\mathcal{H}^r(K))$ est pur de poids $a+r+1$. On considère la section hyperplane H_1 de V ci-dessus ne passant pas par v et la suite exacte:

$$\mathbb{H}^1_{H_1}(V, Rk_{v!}k_v^{*\,p}\mathcal{H}^r(K)) \overset{\varphi}{\to} \mathbb{H}^1(V, Rjk_{v!}k_v^{*\,p}\mathcal{H}^r(K)) \to \mathbb{H}^1(V - H_1, Rk_{v!}k_v^{*\,p}\mathcal{H}^r(K))$$

où φ est surjectif car le dernier terme s'annule; or l'espace

$$\mathbb{H}^{-1}(H_1, Rk_{v!}k_v^{*\,p}\mathcal{H}^r(K))(-1) \simeq \mathbb{H}^1_{H_1}(V, Rk_{v!}k_v^{*\,p}\mathcal{H}^r(K))$$

a une SH pure de poids $a+r+1$ (la SH est définie en tant que sous-quotient de cohomologie sur H_1' lisse dans X, elle est pure par récurrence sur H_1).

Maintenant, on considère la suite exacte longue:

$$\mathbb{H}^{r-1}(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\alpha_X}{\to} \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$$

Lemme 3.11. *Le morphisme suivant induit par α_X est injectif:*
$Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\alpha_X}{\to} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$.

Le poids de $\mathbb{H}^{r-1}(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ est $< a+r$ car X_v est fermé, donc le morphisme $Gr^W_{a+r}\alpha_X$ est injectif. On peut négliger de prendre à droite le gradué pour W, car $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est pur de poids $a+r$.

3.2.1. Pour démontrer $Gr^W_{a+r}Gr^{{}^p\tau}_r\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L}) = 0$, une difficulté provient du fait que ∂_X intervient modulo $Gr^{{}^p\tau}_r$ alors que l'on est sans hypothèse sur la filtration ${}^p\tau$ en v pour utiliser α_X sur le gradué de ${}^p\tau$. En fait, on considère plutôt le morphisme composé $\gamma := \alpha_X \circ \partial_X$ suivant (avec un abus de notation pour ∂_X modulo ${}^p\tau$ ou non):

$$Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\partial_X}{\to} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\alpha_X}{\to} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}), \quad \gamma := \alpha_X \circ \partial_X$$

et on démontre que toute classe $\overline{u} \in Gr^W_{a+r}Gr^{{}^p\tau}_r\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ peut se relever en un élément $u \in {}^p\tau_{\leq r}Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L})$, de telle façon que son image $\gamma(u)$ soit nulle dans $Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$. De la relation $\alpha_X(\partial_X(u)) = 0$, on déduit par le lemmme (3.11) que $\partial_X(u) = 0$, puis $\partial_X(\overline{u}) = \mathrm{cl}(\partial_X(u)) = 0$ et finalement par le lemmme (3.10) on a: $\overline{u} = 0$.

Lemme 3.12 (Lemme principal)**.** *Soit $\gamma := \alpha_X \circ \partial_X$. Toute classe:*

$$\overline{u} \in Gr^{{}^p\tau}_r Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L})$$

est représentée par un élément $u \in {}^p\tau_{\leq r}Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ d'image $\gamma(u)$ nulle dans $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$

Corollaire 3.13. $Gr^{{}^p\tau}_r Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B^*_{X_v}, j_{!*}\mathcal{L}) = 0$.

L'idée est de choisir u tel que l'élément $\gamma(u)$ soit primitif, afin d'utiliser la polarisation sur $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ pour déduire que $\gamma(u)$ est nul.
La preuve se subdivise en plusieurs étapes.
Soit H une section hyperplane générale de X transverse à toutes les strates de Y. On pose $H_v := X_v \cap H$, $B_{H_v} := H \cap B_{X_v}$, et on considère les immersions $j' : (H - H \cap Y) \to H$, $k' : (f(H) - \{v\}) \to f(H)$, la restriction $j_{!*}\mathcal{L}_{|H}$ de $j_{!*}\mathcal{L}$ à H muni d'un isomorphisme canonique $\rho : j_{!*}\mathcal{L}_{|H} \xrightarrow{\sim} j_{!*}\mathcal{L}_{|H}$ car H est transversale aux strates.

Lemme 3.14. *Soient $j_H : (X - H) \to X$ et $(\mathcal{L}_{(X-H)})_! := (j_H)_!j^*_H j_{!*}\mathcal{L}$, alors on peut représenter $\overline{u}$ par un élément $u \in {}^p\tau_r Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ égal à l'image d'un élément $u! \in {}^p\tau_r Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, (\mathcal{L}_{(X-H)})_!)$.*

On a:
$\mathbb{H}^{r-1}(B_{H_v} - H_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^r(B_{H_v} - H_v, j'_{!*}\mathcal{L}_{|H}[-1])$ où $\mathcal{L}_{|H}[-1]$ est de poids $a-1$, d'où par récurrence sur H:

$$G^W_{a+r}Gr^{{}^p\tau}_r\mathbb{H}^{r-1}(B_{H_v} - H_v, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq G^W_{a+r}Gr^{{}^p\tau}_{r+1}\mathbb{H}^r(B_{H_v} - H_v, j'_{!*}\mathcal{L}_{|H}[-1]) = 0.$$

De la suite exacte courte $(\mathcal{L}_{(X-H)})_! \to j_{!*}\mathcal{L} \to (i_H)_*i^*_H j_{!*}\mathcal{L}$, on obtient la suite exacte longue:

$$\mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, (\mathcal{L}_{X-H})_!) \to \mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^{r-1}(B_{H_v} - H_v, j_{!*}\mathcal{L}) \tag{3.6}$$

La suite graduée associée pour W et ${}^p\tau$, c'est à dire la suite obtenue de (3.6) en appliquant $G^W_{a+r}Gr^{{}^p\tau}_r$, reste exacte par hypothèse de décomposition en dehors de X_v et son terme de droite $G^W_{a+r}Gr^{{}^p\tau}_r\mathbb{H}^{r-1}(B_{H_v} - H_v, j_{!*}\mathcal{L})$ s'annule par l'hypothèse de récurrence sur la semi-purité sur H. Par conséquent l'élément $\overline{u}$ dans le terme du milieu est l'image d'un élément $\overline{u}!$ à gauche. On choisit un représentant $u! \in G^W_{a+r}\,{}^p\tau_r\mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, (\mathcal{L}_{(X-H)})_!)$ de $\overline{u}!$, et on prend pour u l'image de $u!$ dans $G^W_{a+r}\,{}^p\tau_r\mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$.

Preuve du lemme principal.
1) L'élément $\gamma(u)$ *est primitif.* En effet l'élément $u \in G^W_{a+r}\, {}^p\tau_r \mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ défini comme image de $u! \in G^W_{a+r}\, {}^p\tau_r \mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, (\mathcal{L}_{(X-H)})_!)$ est l'élément annoncé dans le lemme, puisque sa classe est $\overline{u}$ et de plus sa restriction $\rho(\gamma(u)) \in G^W_{a+r}\mathbb{H}^r(H, j_{!*}\mathcal{L}) = \mathbb{H}^r(H, j_{!*}\mathcal{L})$ à H s'annule, et par conséquent $\gamma(u) \in \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est un élément primitif.
2) Il reste à prouver que $\gamma(u)$ s'annule. On utilise le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^{r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) & \overset{\partial_X}{\to} & \mathbb{H}^r_c(X - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \alpha_X \\ \mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) & \overset{A}{\to} & \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) \end{array}$$

qui réalise $\gamma(u) = \alpha_X \circ \partial_X(u) = A \circ \partial(u)$, comme l'image d'un élément $\partial(u) \in Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$, et on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) & & \\ & A\nearrow & & A^*\searrow & \\ Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) & & \xrightarrow{I} & & Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \end{array}$$

et son dual

$$\begin{array}{ccccc} & & Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X, j_{!*}\mathcal{L}) & & \\ & \nearrow A & & A^*\searrow & \\ Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) & & \xrightarrow{I} & & Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \end{array}$$

Soit η le cup-produit avec la classe d'une section hyperplane de X, alors la polarisation Q sur la partie primitive de $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est définie, à l'aide du produit de dualité de Poincaré P et de l'opérateur C de Weil, par la formule: $Q(v, b) := P(Cv, \eta^r(\overline{b}))$. On a aussi le produit non-dégénéré défini par dualité:

$$P_v : Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \otimes Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{C}.$$

La dualité entre A et A^* est définie pour tout $b \in Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ et tout $c \in Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ par la formule : $P(Ab, c) = P_v(b, A^*c)$.
A l'élément $u \in {}^p\tau_{\leq -r} Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r-1}(B_{X_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ correspond une image par le morphisme de connexion $\partial u := u' \in Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ tel que $\gamma(u) = A(u')$. Soit C l'opérateur de Weil défini par la SH sur $Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$, alors:

$$P(C.Au', \eta^r A\overline{u'}) = P_v(Cu', A^* \circ A(\eta^r \overline{u'})) = P(C.u', \eta^r I(\overline{u'})).$$

Or: $I(u') = A^* \circ A \circ \partial(u) = A^* \circ \alpha_X \circ \partial_X(u) = 0$ car $A^* \circ \alpha_X = 0$; on en déduit $P(C.Au', \eta^r A\overline{u'}) = 0$, donc $Au' = 0$ par polarisation, ce qui termine la preuve.

References

[1] D. Arapura: The Leray spectral sequence is motivic, *Inv. Math.* 160 , no. 3, (2005) p 567-589.
[2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, Deligne: Faisceaux Pervers, *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers Vol.I, Astérisque* 100 (1982).
[3] P. Brosnan, F. El Zein: Admissible Variation of mixed Hodge structure. To appear in *Hodge theory, Princeton series.* Editors: Eduardo Cattani, El Zein Fouad, Ph. Griffiths, and Le D.T. *ICTP summer school (2010), http://front.math.ucdavis.edu/1302.5814* .
[4] J.L. Brylinski: (Co)- Homologie d' Intersection et Faisceaux Pervers, *Séminaire Bourbaki,* 585, (1981/1982).
[5] E. Cattani, A. Kaplan, W. Schmid: L^2 and intersection cohomologies, *Inv. Math.*, 87 (1987), p 217-252.

[6] M.A. de Cataldo, L. Migliorini: The perverse filtration and the Lefschetz hyperplane theorem, arXiv:0805.4634, *Annals of Math.*, 171, No. 3, (2010), p 2089-2113.
[7] P. Deligne: Théorie de Hodge I, *Actes, Congrès intern. math.*, Tome 1, (1970), p 425-430.
[8] P. Deligne: Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES*, 35 (1968), p107-126.
[9] P. Deligne: Théorie de Hodge II, *Publ. Math. IHES* 40 (1972), p 5-57.
[10] P. Deligne: La Conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES*, 52 (1980), p137-252.
[11] P.Deligne: Décompositions dans la catégorie Dérivée, Motives (Seattle, WA, 1991), *Proc. Symp. Pure Math.*, 55, Part 1, A.M.S., Providence, RI, (1994).
[12] P. Deligne, O. Gabber: Théorème de pureté d'après Gabber, *Note written by Deligne and distributed at IHES* (1981).
[13] F. El Zein:Théorie de Hodge à coefficients : étude locale, *CR Ac. Sc.* t 307 Série I (1988), p 593-598.
[14] F. El Zein: Topology of Algebraic Morphisms, *Contemporary Mathematics* , 474, http://arxiv.org/abs/math/0702083.
[15] El Zein F., Lê Dũng Tráng, De la Pureté locale à la décomposition, à paraître dans C. R. Math. Acad. Sci. Paris.
[16] M. Goresky, R. Macpherson: Intersection homology II, *Inv.Math.*, 72 (1983), p 77-129.
[17] M. Kashiwara, T. Kawai: Hodge Structure and Holonomic Systems, *Proc. Japan Acad.* 62, Ser. A (1986).
[18] M. Kashiwara: A study of variation of mixed Hodge structure, *Publ. RIMS, Kyoto univ.* 22 (1986), p 991-1024.
[19] M. Kashiwara, T. Kawai: Poincaré lemma for a variation of Hodge structure, *Publ. RIMS, Kyoto univ.* 23 (1987), p 345-407.
[20] D.T. Lê, B. Teissier: Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney.II, *Proc. Symp. Pure Math.*, 40, Part 2, A.M.S., Providence, U.S.A . (1983), p 65-103.
[21] M. Saito: Modules de Hodge polarisables, *Publ. RIMS, Kyoto univ.*, 24 (1988), 849-995. (2) Mixed Hodge Modules. 26 (1990), p 221-333.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France
E-mail address: elzein@math.jussieu.fr

Université d'Aix-Marseille LATP, UMR-CNRS 7353 39, rue Joliot-Curie F-13453 Marseille Cedex 13, France
E-mail address: ledt@ictp.it