



HAL
open science

Théorème de Chebotarev effectif

Bruno Winckler

► **To cite this version:**

| Bruno Winckler. Théorème de Chebotarev effectif. 2013. hal-00907410

HAL Id: hal-00907410

<https://hal.science/hal-00907410>

Preprint submitted on 21 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorème de Chebotarev effectif

Bruno Winckler*

7 novembre 2013

ABSTRACT : Let K be a number field, and L be a finite normal extension of K with Galois group G . It is known that the number of Frobenius automorphisms corresponding to prime ideals, whose norms are less than x , is equivalent to the logarithmic integral as x tends to infinity, and these automorphisms are well-distributed among the conjugacy classes of G : this is the Chebotarev theorem. The purpose of this paper is to compute the absolute constants of the error term appearing in a previous work about this theorem, due to Lagarias and Odlyzko.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Fil de la preuve	3
3	Fonctions L d'Artin et transformées de Mellin	4
4	Réduction au cas des fonctions L de Hecke	7
5	L'intégrale sur un contour	14
6	La formule explicite	17
7	Les régions sans zéros	20
8	Estimations finales	21

1 Introduction

La répartition des nombres et idéaux premiers est un problème récurrent en théorie des nombres. Par exemple, on sait depuis le XIX^e siècle que la quantité de nombres premiers inférieurs à x est asymptotiquement équivalente à $\frac{x}{\ln(x)}$, tandis que le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet affirme que les nombres premiers se répartissent « uniformément » dans chaque classe de congruence possible. Le théorème de densité de Chebotarev, prouvé dans [Che] en 1926, généralise les résultats de cette nature à l'ensemble des idéaux premiers d'une extension galoisienne L/K de corps de nombres : les automorphismes de Frobenius associés aux idéaux premiers par la théorie algébrique des corps se répartissent « uniformément » dans chaque classe de conjugaison du groupe

*Université Bordeaux 1, Talence, bruno.winckler@math.u-bordeaux1.fr

de Galois. Ce théorème a de nombreuses applications, par exemple dans la théorie des courbes elliptiques ou des formes modulaires, comme l'illustre [Ser], et ceci suffit à justifier la recherche d'un développement asymptotique aussi précis que possible. Dans cette direction, [L & O] donne les deux premiers termes du développement asymptotique de la fonction de décompte de ces idéaux premiers à des constantes non explicites près, et [Es] annonce une explicitation de ces constantes si on admet l'hypothèse de Riemann généralisée. En vue d'applications diophantiennes qui feront l'objet d'une étude ultérieure, on cherche à exhiber de telles constantes, et c'est l'objet de cet article. On précise le contexte ci-dessous.

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, d_L le discriminant absolu de L , n_L le degré de L sur \mathbb{Q} . Si G est le groupe de Galois de cette extension, on désigne un ensemble de G stable par conjugaison par la lettre C ; pour tout $x > 1$, la fonction $\pi_C(x)$ décompte le nombre d'idéaux premiers \mathfrak{p} de K de norme inférieure ou égale à x , qui ne se ramifient pas dans L , et tels que $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] \in C$, où $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]$ est l'unique automorphisme de Galois (à conjugaison près) qui, réduit modulo \mathfrak{p} , coïncide avec l'automorphisme de Frobenius.

Si $C = G$, alors $\pi_C(x) = \pi_K(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ quand $x \rightarrow \infty$. Le théorème de Chebotarev énonce que plus généralement, on a

$$\pi_C(x) \sim \frac{|C|}{|G|} \frac{x}{\ln(x)} \text{ quand } x \rightarrow \infty.$$

Plus précisément, si $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ et $\zeta_L(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_L) \setminus \{0\}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$, alors on a une forme effective, qui s'exprime à l'aide de l'éventuel zéro positif β de la fonction ζ_L tel que $0 < 1 - \beta \leq \frac{1}{4 \ln(d_L)}$.

Théorème 1.1 (Théorème de Chebotarev effectif) *Conservons les notations ci-dessus. On a, pour tout $x \geq \exp\left(8n_L(\ln(150867d_L^{44/5}))^2\right)$,*

$$\left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x^\beta) + C_0 x \exp\left(-\frac{1}{99} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right),$$

avec $C_0 = 783846699796966 < 7,84 \cdot 10^{14}$.

On en sait un peu plus sur β : d'après [Sta], page 148, il existe une constante absolue et effectivement calculable c telle que $\beta < 1 - \frac{1}{cd_L^{1/n_L}}$; d'après [B & G], il est fort probable que $c = \frac{\pi^2}{6}$ convienne. Le terme d'erreur est nettement plus petit si on suppose que l'hypothèse de Riemann est vérifiée pour ζ_L :

Théorème 1.2 *Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie pour ζ_L . Alors, pour tout $x \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| &\leq \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x} \left[\left(32 + \frac{181}{\ln(x)} \right) \ln(d_L) \right. \\ &\quad \left. + \left(28 \ln(x) + 330 + \frac{1655}{\ln(x)} \right) n_L \right]. \end{aligned}$$

Remarque. Dans [Es], Oesterlé énonce même, sans démonstration,

$$\left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) \right| \leq \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x} \left(\ln(d_L) \left(\frac{1}{\pi} + \frac{5,3}{\ln(x)} \right) + n_L \left(2 + \frac{\ln(x)}{2\pi} \right) \right).$$

Ces deux théorèmes sont démontrés dans [L & O], mais avec des constantes non explicites. Pour trouver ces constantes, on suit la stratégie de démonstration proposée par [L & O], en soignant les majorations.

On remercie F. Pazuki, P. Autissier pour leurs conseils avisés, et K. Belabas pour l'intérêt manifesté pour ces résultats.

2 Fil de la preuve

L'essentiel de la preuve consiste en la recherche d'une formule asymptotique avec un terme d'erreur explicite pour $\psi_C(x) = \psi_C(x, L/K)$, une sorte de fonction pondérée de décompte des puissances d'idéaux premiers, intimement liée à $\pi_C(x, L/K)$. Cette fonction classique est définie par

$$\psi_C(x, L/K) = \sum_{\substack{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^m \leq x \\ \mathfrak{p} \text{ non ramifié} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}} \right]^m = C}} \ln(N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})).$$

Conformément à [L & O], voici les étapes de la preuve :

1. La fonction ψ_C est très proche d'une transformée de Mellin inverse tronquée :

$$I_C(x, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F_C(s) \frac{x^s}{s} ds,$$

où la fonction F_C est construite en faisant une combinaison linéaire de dérivées logarithmiques de fonctions L, en profitant de la formule d'orthogonalité des caractères de G pour exclure tous les idéaux premiers qui ne nous intéressent pas ; c'est dans le même esprit que la preuve traditionnelle du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet est construite (voir [Ser2] par exemple). On cherche à étudier l'écart $R_1(x, T)$ entre ψ_C et I_C . Cet écart est explicité dans la section 3.

2. La fonction F_C peut, en fait, être écrite comme combinaison linéaire de dérivées logarithmiques de fonctions L de Hecke. Toutes les singularités de F_C , qui sont des pôles simples, apparaissent en tant que zéros et pôles de ζ_L . Cette étape est l'objet de la section 4, et est déjà entièrement explicite dans [L & O] : je citerai le résultat en question *sans le redémontrer*.
3. L'intégrale $I_C(x, T)$ diffère d'une intégrale sur un contour $B_C(x, T)$ par un terme d'erreur $R_2(x, T)$ (la fameuse étape où on « translate à gauche la droite (!) d'intégration »). On a ici besoin de résultats de densité sur les zéros non triviaux de ζ_L pour estimer R_2 ; c'est l'objet de la section 4.
4. L'intégrale sur un contour est évaluée grâce au théorème des résidus, dans la section 6. L'intégrande a pour pôles les zéros et les pôles de ζ_L ; on en tire un terme principal $\frac{|C|}{|G|} x$ (c'est le pôle $s = 1$) et une somme $S(x, T)$ indicée par les zéros de ζ_L à l'intérieur du contour de $B_C(x, T)$. On en déduit une formule explicite tronquée pour $\psi_C(x)$ avec un terme d'erreur inconditionnel, qui est donnée dans le théorème 6.1 de la section 6.

5. Il faut à présent étudier la somme sur les zéros $S(x, T)$. Si on suppose vraie l'hypothèse de Riemann généralisée, on peut directement aller à la section 8. Sinon, on a besoin de mieux connaître l'emplacement des zéros non triviaux : on dévoile des régions proches de $\text{Re}(s) = 1$ sans zéros pour ζ_L , dans la section 7.
6. La formule asymptotique $\psi_C(x) \sim \frac{|C|}{|G|}x$ avec un reste explicité en découle, par un bon choix de T en fonction de x , visant à minimiser les termes d'erreur. C'est traité dans la section 8.
7. Enfin, la formule explicite pour π_C s'obtient par une transformée d'Abel, à la fin de ce papier.

Les résultats non prouvés ici sont ceux qui ont déjà été explicités dans [L & O], auquel cas on renvoie le lecteur à ce papier. Dans un souci d'auto-suffisance, on rappelle néanmoins toutes les définitions nécessaires à la compréhension de la preuve. Enfin, quand on remplace les constantes réelles par des nombres rationnels, cela se fait systématiquement grâce aux fractions continuées réduites à l'ordre 3.

3 Fonctions L d'Artin et transformées de Mellin

Par commodité, on note $\pi_C(x) = \pi_C(x, L/K)$, $\psi_C(x) = \psi_C(x, L/K)$ et $N = N_{K/\mathbb{Q}}$. Enfin, les sommes $\sum_{\mathfrak{p}}$ sont toujours indicées par les idéaux premiers non nuls de l'anneau des entiers de K .

L'article [L & O] prouve que la fonction F_C citée dans la section précédente a pour expression

$$F_C(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{m=1}^{\infty} \theta(\mathfrak{p}^m) \ln(N(\mathfrak{p})) (N(\mathfrak{p}))^{-ms},$$

où pour \mathfrak{p} non ramifié dans L on a $\theta(\mathfrak{p}^m) = 1$ si $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^m = C$, $\theta(\mathfrak{p}^m) = 0$ sinon, et $|\theta(\mathfrak{p}^m)| \leq 1$ si \mathfrak{p} se ramifie dans L .

On voit alors que si on oublie un instant les facteurs correspondant aux idéaux premiers ramifiés, $\psi_C(x)$ est une somme partielle des coefficients de $F_C(s)$. Pour obtenir $\psi_C(x)$ à partir de $F_C(s)$, on utilise la version tronquée de la transformée inverse de Mellin :

Lemme 1 *Si $y > 0$, $\sigma > 0$ et $T > 0$, alors*

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{y^s}{s} ds - 1 \right| &\leq y^\sigma \min(1, T^{-1} |\ln(y)|^{-1}) \text{ si } y > 1, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{y^s}{s} ds - \frac{1}{2} \right| &\leq \sigma T^{-1} \text{ si } y = 1, \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| &\leq y^\sigma \min(1, T^{-1} |\ln(y)|^{-1}) \text{ si } 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Voir [Dav], pages 109–110, par exemple. \square

Soient $\sigma_0 > 1$ et $x \geq 2$. On définit $I_C(x, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} F_C(s) \frac{x^s}{s} ds$. Comme la série de Dirichlet définissant F_C est absolument convergente pour $\text{Re}(s) > 1$, on peut intégrer

terme à terme (suivant le lemme 3.1) pour obtenir

$$\left| I_C(x, T) - \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m \leq x}} \theta(\mathfrak{p}^m) \ln(N(\mathfrak{p})) \right| \leq \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m = x}} (\ln(N(\mathfrak{p})) + \sigma_0 T^{-1}) + R_0(x, T), \quad (1)$$

où

$$R_0(x, T) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m < x}} \left(\frac{x}{N(\mathfrak{p})^m} \right)^{\sigma_0} \min \left(1, T^{-1} \left| \ln \left(\frac{x}{N(\mathfrak{p})^m} \right) \right|^{-1} \right) \ln(N(\mathfrak{p})). \quad (2)$$

La somme du membre de gauche dans (1) égale $\psi_C(x)$, aux termes ramifiés près. On a $N(\mathfrak{p}) \geq 2$, et d'après [Ser] (prop. 5 du n°1.3) on a

$$\sum_{\mathfrak{p} \text{ ramifié}} \ln(N(\mathfrak{p})) \leq \frac{2}{|G|} \ln(d_L).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m \leq x}} \theta(\mathfrak{p}^m) \ln(N(\mathfrak{p})) - \psi_C(x) \right| &\leq \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ \mathfrak{p} \text{ ramifié} \\ N(\mathfrak{p})^m \leq x}} \ln(N(\mathfrak{p})) \\ &\leq \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramifié}} \ln(N(\mathfrak{p})) \sum_{N(\mathfrak{p})^m \leq x} 1 \\ &\leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramifié}} \ln(N(\mathfrak{p})) \\ &\leq \frac{2}{\ln(2)} \frac{\ln(x) \ln(d_L)}{|G|}. \end{aligned} \quad (3)$$

Comme il y a au plus n_K paires distinctes (\mathfrak{p}, m) telles que $N(\mathfrak{p})^m = x$, on a

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m = x}} \ln(N(\mathfrak{p})) \leq n_K \ln(x) \text{ et } \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m = x}} \sigma_0 T^{-1} \leq n_K \sigma_0 T^{-1}. \quad (4)$$

Alors, (1), (3) et (4) entraînent

$$\psi_C(x) = I_C(x, T) + R_1(x, T),$$

où

$$R_1(x, T) \leq \frac{2}{\ln(2)} \frac{\ln(x) \ln(d_L)}{|G|} + n_K \sigma_0 T^{-1} + n_K \ln(x) + R_0(x, T). \quad (5)$$

Le reste de la section est voué à estimer $R_0(x, T)$. À présent, on prend $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\ln(x)}$ (on a alors $x^{\sigma_0} = ex$). Écrivons $R_0(x, T) = S_1 + S_2 + S_3$, où S_1 est la somme dans (2) n'impliquant que les idéaux \mathfrak{p} tels que $|N(\mathfrak{p})^m - x| \geq \frac{1}{4}x$, tandis que S_2 est indicé par ceux tels que $|x - N(\mathfrak{p})^m| \leq 1$, et S_3 récupère les termes restants.

Pour \mathfrak{p} tel que $|N(\mathfrak{p}^m) - x| \geq \frac{1}{4}x$, on a $\min\left(1, T^{-1} \left| \ln\left(\frac{x}{N(\mathfrak{p}^m)}\right) \right|^{-1}\right) \leq \frac{T^{-1}}{\ln(\frac{5}{4})}$. On obtient alors,

$$S_1 \leq \frac{xT^{-1}e}{\ln(\frac{5}{4})} \sum_{\mathfrak{p}, m} N(\mathfrak{p})^{-m\sigma_0} \ln(N(\mathfrak{p})) = \frac{xT^{-1}e}{\ln(\frac{5}{4})} \left(-\frac{\zeta'_K(\sigma_0)}{\zeta_K(\sigma_0)} \right).$$

La dernière majoration dépend de la comparaison entre $-\frac{\zeta'_K(\sigma_0)}{\zeta_K(\sigma_0)}$ et $(\sigma_0 - 1)^{-1}$. De l'analyse classique permet d'obtenir

Lemme 2 On a, pour $\sigma > 1$,

$$-\frac{\zeta'_K(\sigma)}{\zeta_K(\sigma)} \leq -n_K \frac{\zeta'_Q(\sigma)}{\zeta_Q(\sigma)} \leq n_K(\sigma - 1)^{-1}.$$

Démonstration. La première inégalité est prouvée dans [L & O], page 426, et la deuxième inégalité se déduit de l'égalité

$$\zeta_Q(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} - \sigma I(\sigma), \quad (6)$$

où $I(\sigma) = \int_1^\infty (t - [t])t^{-\sigma-1} dt$. Sachant cela, on obtient facilement

$$\frac{\zeta'_Q(\sigma)}{\zeta_Q(\sigma)} + \frac{1}{\sigma - 1} > \frac{1 - (2\sigma - 1)I(\sigma)}{\zeta(\sigma)(\sigma - 1)}$$

pour tout $\sigma > 1$. Comme $I(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} - \zeta_Q(\sigma) \right)$, l'inégalité à démontrer se réduit à l'inégalité $\zeta_Q(\sigma) \geq \frac{\sigma^2}{(\sigma-1)(2\sigma-1)}$, qui est un exercice simple d'analyse. \square

Reprenons. On a

$$S_1 \leq \frac{xT^{-1}e}{\ln(\frac{5}{4})} \left(-n_K \frac{\zeta'_Q(\sigma_0)}{\zeta_Q(\sigma_0)} \right) \leq \frac{e}{\ln(\frac{5}{4})} n_K x T^{-1} \ln(x). \quad (7)$$

La majoration de S_2 est poussée plus loin que dans [L & O] assez facilement : on a, pour $x \geq 2$,

$$S_2 \leq 2n_K \ln(x+1) \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\sigma_0} \leq \frac{4e \ln(3)}{\ln(2)} n_K \ln(x). \quad (8)$$

Enfin, pour S_3 (qui est indicé par les idéaux \mathfrak{p} tels que $1 < |N(\mathfrak{p}^m) - x| < \frac{x}{4}$) on a, en

vertu de l'inégalité $\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \leq \frac{2n}{|x-n|}$ (pour $2n \geq x$),

$$\begin{aligned}
S_3 &\leq \frac{4e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} T^{-1} \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \sum_{\substack{n \\ 1 < |n-x| < \frac{x}{4}}} \left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \\ N(\mathfrak{p})^m = n}} 1 \\
&\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 1 < |n-x| < \frac{x}{4}}} \frac{n}{|x-n|} \\
&\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 1 < k < \frac{x}{4}}} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \\
&\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} x \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} x (\ln(x))^2
\end{aligned} \tag{9}$$

En regroupant (7), (8) et (9), on obtient une majoration de R_0 , puis de R_1 :

$$\begin{aligned}
R_0(x, T) &\leq \frac{4e \ln(3)}{\ln(2)} n_K \ln(x) + \left(\frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} + \frac{e}{\ln\left(\frac{5}{4}\right) \ln(2)} \right) n_K T^{-1} x (\ln(x))^2 \\
&\leq \frac{69}{4} n_K \ln(x) + \frac{65}{3} n_K T^{-1} x (\ln(x))^2
\end{aligned} \tag{10}$$

valable pour tout $x \geq 2$ et tout $T \geq 1$, et donc,

$$R_1(x, T) \leq \frac{2}{\ln(2)} \frac{\ln(x) \ln(d_L)}{|G|} + \frac{73}{4} n_K \ln(x) + \frac{145}{6} n_K T^{-1} x (\ln(x))^2. \tag{11}$$

4 Réduction au cas des fonctions L de Hecke

Soit $g \in G$, et soit H le sous-groupe de G engendré par g , E le corps fixé par H , et notons avec la lettre χ les caractères irréductibles de H (qui sont de dimension 1).

Lemme 3 *On a*

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \frac{L'}{L}(s, \chi, L/E).$$

Démonstration. Voir [L & O], pages 429–431. \square

Ainsi, F_C s'écrit non seulement à l'aide de fonctions L d'Artin correspondant à des caractères non linéaires de G , mais on peut aussi les exprimer comme combinaison linéaire de dérivées logarithmiques de fonctions L de Hecke *abéliennes*. L'article [L & O] utilise ceci pour améliorer la localisation et la densité des singularités de F_C .

On a donc

$$I_C(x, T) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi, L/E) ds, \tag{12}$$

et on a vu que ψ_C s'écrit comme somme de cette intégrale et de R_1 , qu'on a déjà estimé en (11). Il s'agit donc, à présent, d'évaluer les intégrales présentes dans (12). D'où la

nécessité de borner le nombre de singularités de $\frac{L'}{L}$. C'est l'occasion de rappeler quelques propriétés classiques de ces fonctions L , qu'on peut retrouver dans le chapitre 5 de [Neu].

Comme les corps L et E sont fixés, on peut omettre L/E dans l'écriture de $L(s, \chi, L/E)$. Soit $F(\chi)$ le conducteur de χ , et soit

$$A(\chi) = d_E N_{E/\mathbb{Q}}(F(\chi))$$

On définit $\delta(\chi)$ comme étant égal à 1 pour le caractère principal, et 0 sinon. Enfin, pour rappel, pour chaque χ il existe deux entiers naturels $a(\chi)$ et $b(\chi)$ tels que $a(\chi) + b(\chi) = n_E$, de sorte que si on pose

$$\gamma_\chi(s) = \left(\pi^{-(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{b(\chi)} \left(\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{a(\chi)}$$

et

$$\xi(s, \chi) = (s(s-1))^{\delta(\chi)} A(\chi)^{s/2} \gamma_\chi(s) L(s, \chi), \quad (13)$$

alors on a l'équation fonctionnelle

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = W(\chi) \xi(s, \chi),$$

où $W(\chi)$ est une constante de module 1. De plus, $\xi(\cdot, \chi)$ est une fonction entière d'ordre 1 qui ne s'annule pas en 0, donc

$$\xi(s, \chi) = e^{B_1(\chi) + B(\chi)s} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \quad (14)$$

pour des constantes $B_1(\chi)$ et $B(\chi)$, où $\rho = \beta + i\gamma$ parcourt l'ensemble des zéros (non triviaux) de $L(s, \chi)$ tels que $0 < \beta < 1$. La lettre ρ désignera toujours ces zéros. En dérivant logarithmiquement (13) et (14), on obtient la relation importante

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = B(\chi) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \ln(A(\chi)) - \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s), \quad (15)$$

valable pour tout nombre complexe s où ces quantités sont définies. On ne sait pas déterminer exactement la dépendance de B en fonction de χ , mais on sait tout de même déduire de l'équation fonctionnelle ceci :

Lemme 4 *En conservant les notations ci-dessus,*

$$\operatorname{Re}(B(\chi)) = - \sum_{\rho} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{L'}{L}(s, \bar{\chi}) &= \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} \right) - \ln(A(\chi)) - 2\delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) \\ &\quad - 2 \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s). \end{aligned} \quad (16)$$

Démonstration. Voir [Odl]. \square

On établit ici quelques résultats préliminaires.

Lemme 5 Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors $\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| \leq \frac{n_E}{\operatorname{Re}(s)-1}$.

Démonstration. En comparant leurs séries de Dirichlet, on voit que

$$\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| \leq -\frac{\zeta'_E}{\zeta_E}(\operatorname{Re}(s)),$$

et on en arrive aisément au résultat du lemme. \square

Lemme 6 1. Si $\operatorname{Re}(z) \geq a$, avec $a \geq 1$, alors

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \ln(|z|) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}.$$

2. Si $|\operatorname{Im}(z)| \geq b \geq 1$, alors

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \ln(|z|) + \pi \left(1 + \frac{1}{2b} \right) + \frac{1}{2b}.$$

3. Si $|z+k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k , alors

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \ln(|z|) + \frac{83}{5}.$$

Démonstration. Le produit de Weierstrass de Γ nous enseigne, en considérant sa dérivée logarithmique, que

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

pour tout complexe z différent des entiers négatifs (γ_0 désigne la constante d'Euler-Mascheroni). Alors, en utilisant la formule d'Euler-McLaurin (pour $z > 0$) avec cette somme, on obtient que

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \ln(z) - \frac{1}{2z} + \int_0^{\infty} \frac{B_1(\{x\})}{(z+x)^2} dx,$$

où $B_1 = X - \frac{1}{2}$ est le premier polynôme de Bernoulli; l'égalité pour tout z complexe (à l'exception de $z \leq 0$) s'obtient par le principe du prolongement analytique. On en déduit que, pour $\operatorname{Re}(z) \geq a \geq 1$,

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \ln(|z|) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}.$$

On procède de même pour l'inégalité dans le domaine $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$. Passons à la troisième inégalité : si $\operatorname{Re}(z) < 1$ et $|\operatorname{Im}(z)| < 1$ (notons que le cas $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$ est déjà traité et vérifie l'inégalité annoncée), l'équation fonctionnelle vérifiée par Γ permet de montrer que

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k}$$

pour tout entier $m > 0$. On pose $m = -[\operatorname{Re}(z) - 1]$, de sorte que $\operatorname{Re}(z+m) \geq 1$ (c'est le plus petit entier naturel à vérifier cette inégalité), ce qui permet de borner $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m)$:

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) \right| \leq \ln(\sqrt{5}) + \frac{\pi}{2} + 1.$$

Comme $|z + k| < \frac{1}{2}$ pour au plus un entier naturel k , et qu'on a en plus supposé que $|z + k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k et $\operatorname{Re}(z) < 2 - m$, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k} \right| \leq 10 + \sum_{k=0}^{m-3} \frac{1}{-2+(m-k)} < 10 + \sum_{j=1}^{m-2} \frac{1}{j} \leq 11 + \ln(|z| + 1),$$

ce raisonnement valant du moins si $m > 2$ (si $m \leq 2$, l'inégalité vaut même sans le terme logarithmique), pour finalement donner l'inégalité

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \ln(|z|) + \ln(9) + \ln(\sqrt{5}) + \frac{\pi}{2} + 12,$$

valable pour tout z complexe tel que $|z + k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k . D'où l'inégalité annoncée. \square

Lemme 7 Si $\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ et $|s| \geq \frac{1}{8}$, alors

$$\left| \frac{\gamma'_\chi(s)}{\gamma_\chi(s)} \right| \leq \frac{n_E}{2} \left(\ln(1 + |s|) + \frac{164}{7} \right), \quad (17)$$

Démonstration. Le lemme précédent montre que si $|z| \geq \frac{1}{16}$ et $\operatorname{Re}(z) \geq -\frac{1}{4}$, alors :

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \right| \leq \ln(|z|) + \frac{827}{36}. \quad (18)$$

En effet, si on suppose $\operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{4}$, alors $\operatorname{Re}(z+2) > \frac{7}{4}$, donc

$$\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+2) \right| \leq \ln(|z|+2) + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{7}.$$

L'équation fonctionnelle donne alors l'inégalité (18). En particulier, si

$$\gamma_\chi(s) = \left[\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right]^{b(\chi)} \cdot \left[\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right]^{a(\chi)},$$

alors

$$\frac{\gamma'_\chi(s)}{\gamma_\chi(s)} = -\frac{b(\chi)\ln(\pi)}{2} + \frac{b(\chi)}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) - \frac{a(\chi)\ln(\pi)}{2} + \frac{a(\chi)}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right),$$

et le résultat en découle simplement. \square

Remarque. Ce même lemme 6 permet de démontrer que si $s = \sigma + it$ avec $\sigma \geq 2$, alors $\left| \frac{\gamma'_\chi(s)}{\gamma_\chi(s)} \right| \leq \frac{n_E}{2} \left(\ln(|t| + \sigma + 1) + \frac{405}{134} \right)$. Cette inégalité plus précise nous sera utile plus particulièrement dans le prochain lemme (pour $\sigma \geq 1$, on peut remplacer 405 par 539, et on l'utilisera dans la démonstration du lemme 13).

Fort de tous ces résultats, on peut démontrer le premier lemme important de [L & O] sous une forme explicite :

Lemme 8 Soit $n_\chi(t)$ le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de $L(s, \chi)$ avec $0 < \beta < 1$ et $|\gamma - t| \leq 1$. Pour tout t , on a

$$n_\chi(t) + n_\chi(-t) \leq \frac{5}{2} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(|t| + 3) + \frac{1075}{134} \right) \right].$$

Démonstration. On part de l'identité (16) :

$$\sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} \right) = \frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{L'}{L}(s, \bar{\chi}) + \ln(A(\chi)) + 2\delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) + 2\frac{\gamma'_{\chi}}{\gamma_{\chi}}(s).$$

On sait estimer chacune des quantités du membre de droite, d'après ce qui précède. Prenons $s = 2 + it$. On a :

$$\left| \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} \right) \right| \leq 3 + \ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(|t| + 3) + \frac{673}{134} \right),$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} \right) &\geq \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| \leq 1}} \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+t| \leq 1}} \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (t+\gamma)^2} \\ &\geq \left(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| \leq 1}} + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+t| \leq 1}} \right) \frac{2}{5} = \frac{2}{5} (n_{\chi}(t) + n_{\chi}(-t)). \square \end{aligned}$$

Ce lemme permet d'obtenir d'autres estimations qui informent sur l'importance des zéros des fonctions L dans la preuve effective du théorème de Chebotarev : des calculs lourds mais sans mystère conduisent à :

Lemme 9 *Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1$, on a*

$$\begin{aligned} \left| B(\chi) + \sum_{|\rho| < \varepsilon} \frac{1}{\rho} \right| &\leq \frac{1}{8} \left(5\pi^2 + 34 + \frac{10}{\varepsilon} \right) \ln(A(\chi)) \\ &\quad + \left(\frac{10842}{107} + \frac{1790}{157\varepsilon} \right) n_E \end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\left| B(\chi) + \sum_{|\rho| < \varepsilon} \frac{1}{\rho} \right| \leq \left| B(\chi) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right| \quad (19)$$

$$+ \left| \sum_{|\rho| \geq 1} \left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right| \quad (20)$$

$$+ \left| \sum_{|\rho| < 1} \frac{1}{2-\rho} \right| \quad (21)$$

$$+ \left| \sum_{\varepsilon < |\rho| < 1} \frac{1}{\rho} \right|. \quad (22)$$

Les sommes dans (20) et (22) s'estiment de la même manière, à l'aide de la fonction n_{χ} introduite pour le lemme 8. Par exemple, dans le cas de (20), comme $\left| \frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho} \right| =$

$\frac{2}{|(2-\rho)\rho|} \leq \frac{2}{|\rho|^2}$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{|\rho| \geq 1} \left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right| &\leq \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \text{ impair}}}^{\infty} \sum_{\substack{|\rho| \geq 1 \\ t \leq \gamma \leq t+2}} \frac{2}{|\rho|^2} \\
&\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n_{\chi}(2j+2) + n_{\chi}(-(2j+2))}{(2j+1)^2} + 2n_{\chi}(0) \\
&\leq 5 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \frac{1}{2} \right) \left(\ln(A(\chi)) + \frac{1075}{134} n_E \right) \\
&\quad + 5n_E \left(\ln(5) + \int_0^{\infty} \frac{\ln(2t+5)}{(2t+1)^2} dt + \frac{1}{2} \ln(3) \right) \\
&= \frac{5}{8} (\pi^2 + 4) \ln(A(\chi)) \\
&\quad + 5 \left[\frac{1075}{134 \cdot 8} (\pi^2 + 4) + \left(\frac{13}{8} \ln(5) + \frac{\ln(3)}{2} \right) \right] n_E.
\end{aligned}$$

Semblablement, on trouve

$$\left| \sum_{\varepsilon < |\rho| < 1} \frac{1}{\rho} \right| \leq \frac{n_{\chi}(0)}{\varepsilon} \leq \frac{5}{4\varepsilon} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(3) + \frac{1075}{134} \right) \right].$$

Si $|\rho| < 1$, alors $|2-\rho| > 1$, donc

$$\left| \sum_{|\rho| < 1} \frac{1}{2-\rho} \right| \leq \frac{5}{4} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(3) + \frac{1075}{134} \right) \right],$$

et il ne reste plus que la somme (19) à évaluer. Pour cela, on pose $s = 2$ dans (15), et on estime tous les termes qui nous intéressent grâce aux lemmes 5 et 7 (plus précisément, la remarque qui suit le lemme 7) :

$$\left| B(\chi) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right| \leq \frac{3}{2} + \frac{n_E}{2} \left(\ln(3) + \frac{673}{134} \right) + \frac{1}{2} \ln(A(\chi)).$$

En regroupant toutes ces estimations, on obtient le lemme annoncé. \square

Dans le même esprit de preuve :

Lemme 10 Si $s = \sigma + it$ avec $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 3$ et $|s| \geq \frac{1}{8}$, alors :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{\delta(\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| \leq 1}} \frac{1}{s-\rho} \right| &\leq \frac{5}{4} \left(1 + \frac{7}{4} \pi^2 \right) \ln(A(\chi)) \\
&\quad + \frac{n_E}{2} \ln(|t|+5) \left(57 + \frac{35}{|t|+4} \right) \\
&\quad + \frac{50096}{255} n_E + \frac{53}{6}.
\end{aligned}$$

Démonstration. On évalue l'identité (15) en $\sigma + it$ puis en $3 + it$, et on soustrait les deux égalités résultantes. Ainsi, $B(\chi)$ est éliminé, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(s, \chi) - \frac{L'}{L}(3 + it, \chi) &= \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{3 + it - \rho} \right) - \frac{\gamma'_{\chi}(s)}{\gamma_{\chi}} + \frac{\gamma'_{\chi}(3 + it)}{\gamma_{\chi}} \\ &\quad - \delta(\chi) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2+it} - \frac{1}{3+it} \right). \end{aligned}$$

La seule quantité à réellement poser problème, dans la majoration qui nous intéresse, est la somme sur les zéros ρ . L'application des lemmes 5 et 7 permet de majorer de la façon suivante :

$$\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{\delta(\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| \leq 1}} \frac{1}{s-\rho} \right| \leq \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| > 1}} \left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+it-\rho} \right| \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| \leq 1}} \left| \frac{1}{3+it-\rho} \right| \quad (24) \\ &+ \frac{53}{6} + \left(\ln(|t|+4) + \frac{24811}{1876} \right) n_E. \end{aligned}$$

On a $|3 + it - \rho| > 2$ pour tout zéro ρ non trivial (car $0 < \text{Re}(\rho) < 1$), donc

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| \leq 1}} \left| \frac{1}{3+it-\rho} \right| \leq \frac{1}{2} n_{\chi}(t),$$

et on utilise alors le lemme 8 pour majorer (24). À présent, (23) se calcule progressivement (on note $s = \sigma + it$ et $\rho = \beta + i\gamma$) :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| > 1}} \left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+it-\rho} \right| &= \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t| > 1}} \frac{3-\sigma}{|s-\rho||3+it-\rho|} \\ &\leq \frac{7}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-(t+2k)| \leq 1}} \frac{1}{|t-\gamma|^2} \\ &\quad + \frac{7}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-(t-2k)| \leq 1}} \frac{1}{|t-\gamma|^2} \\ &\leq \frac{7}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_{\chi}(t+2k) + n_{\chi}(t-2k)}{(2k-1)^2} \\ &\leq \frac{35\pi^2}{16} \left(\ln(A(\chi)) + \frac{1075}{134} n_E \right) \\ &\quad + \frac{35}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(|t|+2k+3)}{(2k-1)^2} n_E. \end{aligned}$$

Cette dernière somme se majore, par exemple, par une comparaison série-intégrale; on obtient ainsi $\frac{\ln(|t|+5)}{2} \left(3 + \frac{1}{|t|+4} \right)$ comme majorant. On en déduit le lemme, en regroupant

les différentes estimations faites ici. Par commodité, on utilise la majoration $\frac{24811}{1876} + \frac{1075}{134} \left(\frac{5}{4} + \frac{35\pi^2}{16} \right) \leq \frac{50096}{255}$. \square

5 L'intégrale sur un contour

Maintenant, on se charge d'évaluer $I_C(x, T)$ en passant par l'évaluation de

$$I_\chi(x, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi) ds \quad (25)$$

pour chaque caractère χ de H . À présent, on a besoin que T soit différent des zéros de toutes les fonctions $L(s, \chi)$ (cette condition s'éclairera plus tard). On introduit un nouveau paramètre U , vérifiant $U = j + \frac{1}{2}$ pour un certain entier naturel j (plus tard, on fera tendre U vers $+\infty$), et on définit

$$I_\chi(x, T, U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{T,U}} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi) ds, \quad (26)$$

où $B_{T,U}$ est le rectangle (orienté dans le sens trigonométrique) dont les sommets sont $\sigma_0 - iT$, $\sigma_0 + iT$, $-U + iT$ et $-U - iT$. Cette intégrale s'exprime simplement à l'aide des singularités de l'intégrande, mais ceci attendra encore un peu. Dans cette section, on montrera que $R_\chi(x, T, U) = I_\chi(x, T, U) - I_\chi(x, T)$ est petit. On divise $R_\chi(x, T, U)$ en trois intégrales, celle verticale

$$V_\chi(x, T, U) = \frac{1}{2\pi} \int_T^{-T} \frac{x^{-U+it}}{-U+it} \frac{L'}{L}(-U+it, \chi) dt, \quad (27)$$

et les deux intégrales horizontales

$$H_\chi(x, T, U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-U}^{-1/4} \left(\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \frac{L'}{L}(\sigma-iT, \chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT} \frac{L'}{L}(\sigma+iT, \chi) \right) d\sigma \quad (28)$$

et

$$H_\chi^*(x, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/4}^{\sigma_0} \left(\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \frac{L'}{L}(\sigma-iT, \chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT} \frac{L'}{L}(\sigma+iT, \chi) \right) d\sigma \quad (29)$$

Pour borner $\frac{L'}{L}$, et donc estimer ces intégrales, on a besoin du lemme 6, qui renseigne sur la taille de $\frac{L'}{L}$.

On en déduit :

Lemme 11 *Si $s = \sigma + it$ avec $\sigma \leq -\frac{1}{4}$ et $|s + m| \geq \frac{1}{4}$ pour tout entier naturel m , alors*

$$\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| \leq \ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(|s| + 2) + \frac{19683}{812} \right).$$

Démonstration. Partant de l'équation fonctionnelle vérifiée par $L(\cdot, \chi)$, on a

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{L'}{L}(1-s, \bar{\chi}) - \ln(A(\chi)) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(1-s) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s),$$

et $\operatorname{Re}(1-s) \geq \frac{5}{4}$, ce qui permet d'utiliser le lemme 5 pour borner $\frac{L'}{L}(1-s, \bar{\chi})$. De plus, le lemme 6 donne une autre version du lemme 7, pour z tel que $|z+k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k : on obtient l'inégalité similaire $\left| \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(z) \right| \leq \frac{n_E}{2} (\ln(1+|z|) + \frac{989}{58})$. Alors,

$$\left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| \leq \ln(A(\chi)) - \frac{n_E}{\sigma} + n_E \left(\ln(|s|+2) + \frac{16435}{812} \right),$$

d'où le résultat. \square

Reprenons : les intégrales verticale (27) et horizontale (28) sont estimées à l'aide de l'inégalité ci-dessus. On a, pour $x \geq 2$, $T \geq 1$ et $U \geq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} |V_\chi(x, T, U)| &\leq \frac{x^{-U}}{2\pi U} \int_{-T}^T \left| \frac{L'}{L}(-U+it, \chi) \right| dt \\ &\leq \frac{x^{-U} T}{\pi U} \left(\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(U+T+2) + \frac{19683}{812} \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

et, sous ces mêmes conditions,

$$\begin{aligned} |H_\chi(x, T, U)| &\leq \frac{1}{\pi T} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} x^\sigma \left(\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(|\sigma|+T+2) + \frac{19683}{812} \right) \right) d\sigma \\ &\leq \frac{x^{-1/4}}{\pi T \ln(x)} \left[\ln(A(\chi)) + \left(\ln\left(T + \frac{9}{4}\right) + \frac{19683}{812} \right) n_E \right] \\ &\quad + \frac{n_E x^{-1/4}}{\pi T (\ln(x))^2} \frac{1}{\left(T + \frac{9}{4}\right)}, \end{aligned} \quad (31)$$

Estimer l'intégrale $H_\chi^*(x, T)$ est un peu plus ardu, et nécessite le lemme 10. Il nous indique que

$$\begin{aligned} \left| \frac{L'}{L}(\sigma+iT, \chi) - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T| \leq 1}} \frac{1}{\sigma+iT-\rho} \right| &\leq \frac{571}{25} \ln(A(\chi)) \\ &\quad + n_E \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \end{aligned}$$

pour σ dans $[-\frac{1}{4}, \sigma_0]$, $x \geq 2$ et $T \geq 2$. On a la même estimation en $\sigma - iT$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| H_\chi^*(x, T) \right. &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/4}^{\sigma_0} \left(\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T| \leq 1}} \frac{1}{\sigma-iT-\rho} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T| \leq 1}} \frac{1}{\sigma+iT-\rho} \right) d\sigma \left| \right. \\ &\leq \frac{ex - x^{-1/4}}{\pi T \ln(x)} \left[\frac{571}{25} \ln(A(\chi)) + n_E \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour en finir avec l'estimation de $H_\chi^*(x, T)$, on doit encore vérifier que l'intégrale ci-dessus reste assez « petite ».

Lemme 12 Soit $\rho = \beta + i\gamma$, avec $0 < \beta < 1$ et $\gamma \neq t$. Si $|t| \geq 2$, $x \geq 2$ et $1 < \sigma_1 \leq 3$, alors :

$$\left| \int_{-1/4}^{\sigma_1} \frac{x^{\sigma+it}}{(\sigma+it)(\sigma+it-\rho)} d\sigma \right| \leq \left(\sigma_1 + \frac{9}{4} \right) \frac{x^{\sigma_1}}{(|t|-1)(\sigma_1-\beta)}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\gamma > t$. Soit B le rectangle (orienté dans le sens trigonométrique) dont les sommets ont pour affixes $\sigma_1 + i(t-1)$, $\sigma_1 + it$, $-\frac{1}{4} + it$ et $-\frac{1}{4} + i(t-1)$. Le théorème de Cauchy assure que

$$\int_B \frac{x^s}{s(s-\rho)} ds = 0,$$

puisque l'intégrande n'a pas de singularité à l'intérieur du rectangle. En outre, sur les arêtes du rectangle, à l'exception de celle joignant $-\frac{1}{4} + it$ et $\sigma_1 + it$, on peut le majorer par $\frac{x^{\sigma_1}}{(|t|-1)(\sigma_1-\beta)}$. D'où le résultat pour $\gamma > t$. On procède de même si $\gamma < t$, en changeant $i(t-1)$ en $i(t+1)$ dans les affixes des sommets du rectangle. \square

Ceci prouve que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/4}^{\sigma_0} \frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \left(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T| \leq 1}} \frac{1}{\sigma-iT-\rho} \right) d\sigma \right| \\ \leq \frac{\sigma_0 + \frac{9}{4}}{2\pi} n_\chi(-T) \frac{x^{\sigma_0}}{(T-1)(\sigma_0-1)} \\ \leq \frac{5(13 \ln(x) + 4) ex}{16\pi(T-1)} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+3) + \frac{1075}{134} \right) \right] \end{aligned}$$

pour $x \geq 2$ et $T \geq 2$. On a le même résultat pour les zéros indicés grâce à la condition $|\gamma - T| \leq 1$. Si on suppose l'hypothèse de Riemann généralisée, le terme en $\ln(x)$ disparaît, d'après [L & O], page 445. On ne s'en chargera pas ici.

En fin de compte, on obtient

$$\begin{aligned} |H_\chi^*(x, T)| &\leq \left(\frac{5(13 \ln(x) + 4) ex}{8(T-1)} + \frac{571}{25} \frac{ex - x^{-1/4}}{T \ln(x)} \right) \frac{\ln(A(\chi))}{\pi} \\ &+ \frac{n_E}{\pi} \left[\left(\frac{57}{2} \frac{ex - x^{-1/4}}{T \ln(x)} + \frac{5(13 \ln(x) + 4) ex}{8(T-1)} \right) \ln(T+5) \right. \\ &\left. + \frac{5375(13 \ln(x) + 4) ex}{2144(T-1)} + \frac{5921}{28} \frac{ex - x^{-1/4}}{T \ln(x)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

En combinant (30), (31) et (32), on obtient le résultat principal de la section, à savoir,

$$\begin{aligned}
|I_\chi(x, T) - I_\chi(x, T, U)| &\leq \frac{65e}{8\pi} \frac{x \ln(x)}{T-1} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{5e}{2\pi} \frac{x}{T-1} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{e}{\pi} \frac{x}{T \ln(x)} \left[\frac{571}{25} \ln(A(\chi)) + n_E \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \right] \\
&+ \frac{x^{-U} T}{\pi U} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(U+T+2) + \frac{19683}{812} \right) \right] \\
&+ \frac{4n_E x^{-1/4}}{17\pi T (\ln(x))^2}. \tag{33}
\end{aligned}$$

6 La formule explicite

On en arrive enfin à une formule explicite pour ψ_C en fonction des zéros ρ . On revient à la définition de $I_\chi(x, T, U)$ donnée en (26), où on rappelle que $x \geq 2$ et $U = j + \frac{1}{2}$ pour un certain entier naturel j . Soit $T \geq 2$ différent de l'ordonnée de tout zéro de tout $L(s, \chi)$. Par le théorème de Cauchy, $I_\chi(x, T, U)$ égale la somme des résidus de l'intégrande aux pôles à l'intérieur de $B_{T,U}$. Pour un décompte détaillé des résidus, on renvoie à [L & O], pages 446–448 : on a en tout cas

$$\begin{aligned}
I_\chi(x, T, U) &= -\delta(\chi)x + \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - b(\chi) \sum_{1 \leq m \leq \frac{U+1}{2}} \frac{x^{1-2m}}{2m-1} \\
&- a(\chi) \sum_{1 \leq m \leq \frac{U}{2}} \frac{x^{-2m}}{2m} + r(\chi) + (a(\chi) - \delta(\chi)) \ln(x), \tag{34}
\end{aligned}$$

où

$$r(\chi) = B(\chi) - \frac{1}{2} \ln(A(\chi)) + \frac{n_E}{2} \ln(\pi) + \delta(\chi) - \frac{b(\chi)}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{a(\chi)}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1).$$

Quand $U \rightarrow +\infty$, (33) et (34) donnent la formule explicite suivante, valide pour tout $x \geq 2$ et tout $T \geq 2$ différent de l'ordonnée d'un zéro.

$$\begin{aligned}
\left| I_\chi(x, T) + \delta(\chi)x \right. &- \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - r(\chi) - (a(\chi) - \delta(\chi)) \ln(x) \\
&- \left. \frac{n_E}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} (b(\chi) - a(\chi)) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right| \\
&\leq \frac{65e}{8\pi} \frac{x \ln(x)}{T-1} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{5e}{2\pi} \frac{x}{T-1} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{e}{\pi} \frac{x}{T \ln(x)} \left[\frac{571}{25} \ln(A(\chi)) + n_E \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \right] \\
&+ \frac{4n_E x^{-1/4}}{17\pi T (\ln(x))^2}. \tag{35}
\end{aligned}$$

On a alors presque ce qu'on veut :

Théorème 6.1 *Si $x \geq 2$ et $T \geq 2$, alors*

$$\begin{aligned}
\left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x, T) \right| &\leq \frac{|C|}{|G|} \left(\frac{145}{6} n_L \frac{x(\ln(x))^2}{T} \right. \\
&+ \frac{65e}{8\pi} \frac{x \ln(x)}{T-1} \left[\ln(d_L) + n_L \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{5}{2} \left(\frac{e}{\pi} + 1 \right) \frac{x}{T-1} \left[\ln(d_L) + n_L \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{e}{\pi} \frac{x}{T \ln(x)} \left[\frac{571}{25} \ln(d_L) + n_L \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \right] \\
&+ \ln(x) \left[\frac{2}{\ln(2)} \ln(d_L) + \frac{77}{4} n_L \right] + \frac{94}{7} \ln(d_L) + \frac{3817}{30} n_L \\
&+ \left. \frac{4n_L x^{-1/4}}{17\pi T (\ln(x))^2} \right),
\end{aligned}$$

où

$$S(x, T) = \frac{|C|}{|G|} \sum_x \bar{\chi}(g) \left(\sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right), \quad (36)$$

les deux dernières sommes étant sur les zéros non triviaux de $L(\cdot, \chi)$.

Démonstration. D'après le lemme 9, on a

$$\left| r(\chi) + \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right| \leq \left(\frac{5\pi^2}{8} + \frac{29}{4} \right) \ln(A(\chi)) + \left(\frac{2102053}{16799} + \frac{1}{2} \ln(\pi) + \frac{1}{2} \gamma_0 + \ln(2) \right) n_E,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left| I_\chi(x, T) + \delta(\chi)x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right| &\leq \frac{65e}{8\pi} \frac{x \ln(x)}{T-1} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{5e}{2\pi} \frac{x}{T-1} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\
&+ \frac{e}{\pi} \frac{x}{T \ln(x)} \left[\frac{571}{25} \ln(A(\chi)) + n_E \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \right] \\
&+ n_E \ln(x) + \frac{94}{7} \ln(A(\chi)) + \frac{3817}{30} n_E \\
&+ \frac{4n_E x^{-1/4}}{17\pi T (\ln(x))^2}.
\end{aligned}$$

Alors, (12) et (25) donnent, pour $T \neq \text{Im}(\rho)$ pour tout zéro ρ de tout $L(s, \chi)$, la même majoration (à une multiplication par $\frac{|C|}{|G|}$ près) pour

$$\left| I_C(x, T) - \frac{|C|}{|G|} \sum_x \bar{\chi}(g) \left(\delta(\chi)x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right) \right|$$

en remplaçant $\ln(A(\chi))$ par $\ln(d_L)$ et n_E par n_L , en vertu des formules

$$\sum_x \ln(A(\chi)) = \ln(d_L) \text{ (formule du discriminant) et } n_E \cdot [L : E] = n_L.$$

Comme $\psi_C(x, T) = I_C(x, T) + R_1(x, T)$,

$$\begin{aligned} \left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} x + S(x, T) \right| &\leq \frac{|C|}{|G|} \left(\frac{145}{6} n_L \frac{x(\ln(x))^2}{T} \right. \\ &+ \frac{65e}{8\pi} \frac{x \ln(x)}{T-1} \left[\ln(d_L) + n_L \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\ &+ \frac{5e}{2\pi} \frac{x}{T-1} \left[\ln(d_L) + n_L \left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268} \right) \right] \\ &+ \frac{e}{\pi} \frac{x}{T \ln(x)} \left[\frac{571}{25} \ln(d_L) + n_L \left(\frac{57}{2} \ln(T+5) + \frac{5921}{28} \right) \right] \\ &+ \ln(x) \left[\frac{2}{\ln(2)} \ln(d_L) + \frac{77}{4} n_L \right] + \frac{94}{7} \ln(d_L) + \frac{3817}{30} n_L \\ &\left. + \frac{4n_L x^{-1/4}}{17\pi T (\ln(x))^2} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne le théorème si $T \neq \text{Im}(\rho)$ pour tout zéro ρ de fonction L . Maintenant, si $T = \text{Im}(\rho_T)$ pour un certain zéro ρ_T (ou plusieurs ; il y en a au plus $\sum_x n_\chi(T)$), on a, pour ε assez proche de 0,

$$S(x, T + \varepsilon) = S(x, T) + \frac{|C|}{|G|} \sum_x \bar{\chi}(g) \sum_{\substack{\rho_T \\ T = \text{Im}(\rho_T)}} \frac{x^{\rho_T}}{\rho_T}$$

et $T + \varepsilon$ différent de tout zéro de fonction L . Alors,

$$\begin{aligned} \left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} x + S(x, T) \right| &\leq \left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|} x + S(x, T + \varepsilon) \right| \\ &+ \frac{|C|}{|G|} \sum_x n_\chi(T) \frac{x}{T} \end{aligned}$$

On sait estimer la dernière somme grâce au lemme 8 et la formule du discriminant, tandis que la première quantité du membre de droite s'évalue à l'aide des calculs qui précèdent. On obtient la majoration du théorème en faisant tendre ε vers 0. \square

C'est le résultat principal du papier : on a exprimé $\psi_C(x)$ en fonction d'un terme principal $\frac{|C|}{|G|}x$, de $S(x, T)$ et un terme d'erreur relativement petit. Il reste à estimer $S(x, T)$. Si on suppose la justesse de l'hypothèse de Riemann généralisée, on peut avoir une bonne borne à partir des résultats déjà établis ; si on veut un résultat incondionnel, on doit montrer que les zéros ρ ne s'approchent pas trop de la droite $\text{Re}(s) = 1$.

7 Les régions sans zéros

Cette section concerne les zéros exceptionnels que les fonctions ζ_L peuvent éventuellement avoir. Pour rappel, comme $\zeta_L = \prod_{\chi} L(\cdot, \chi)$, un zéro pour ζ_L en entraîne un pour au moins une des fonctions $L(\cdot, \chi)$; dans le cas du lemme 14 à venir, il n'y a en vérité qu'une seule fonction $L(\cdot, \chi)$ éventuellement concernée. Seul un résultat nécessite d'être explicite, c'est le lemme 8.1 de [L & O], que voici :

Lemme 13 *La fonction ζ_L n'a pas de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ dans la région délimitée par les conditions*

$$|\gamma| \geq \frac{1}{1 + 4 \ln(d_L)}$$

et

$$\beta \geq 1 - (7 - 4\sqrt{3}) \left(22 \ln(d_L) + n_L \left(\frac{5}{2} \ln(|\gamma| + 3) + \frac{1078}{67} + 2 \ln(3) \right) + \frac{15}{2} \right)^{-1}.$$

Démonstration. Partant de la formule du produit eulérien pour ζ_L , on a pour $\sigma = \text{Re}(s) > 1$,

$$-\frac{\zeta'_L}{\zeta_L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_L(m) m^{-s},$$

où

$$\Lambda_L(m) = \begin{cases} \left(\sum_{\substack{\mathfrak{p}|p \\ \mathfrak{f}(\mathfrak{p}/p)|r}} \mathfrak{f}(\mathfrak{p}/p) \right) \ln(p) & \text{si } n = p^r, p \text{ premier, } r \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\Lambda_L(m) \geq 0$ pour tout entier naturel non nul m . Par conséquent, en vertu de l'identité traditionnelle

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos(\theta))^2,$$

on sait que

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(-3 \frac{\zeta'_L}{\zeta_L}(\sigma) - 4 \frac{\zeta'_L}{\zeta_L}(\sigma + it) - \frac{\zeta'_L}{\zeta_L}(\sigma + 2it) \right) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_L(m) m^{-\sigma} (1 + \cos(t \ln(m)))^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Or, si on prend pour χ le caractère trivial, l'égalité (15) montre que

$$2 \frac{\zeta'_L}{\zeta_L}(s) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{s - \bar{\rho}} \right) - \ln(d_L) - 2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - 2 \frac{\gamma'_L}{\gamma_L}(s),$$

où la somme est indicée par les zéros ρ de ζ_L . Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}\right) > 0$ pour tout ρ . À présent, considérons $\beta + i\gamma$ un zéro tel que $|\gamma| \geq \frac{1}{1+4\ln(d_L)}$. Alors, pour $2 \geq \sigma > 1$, d'après l'inégalité citée dans la remarque qui précède le lemme 8,

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'_L(\sigma)}{\zeta_L(\sigma)} &\leq \frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}\ln(d_L) + \frac{\gamma'_L(\sigma)}{\gamma_L(\sigma)}, \\ &\leq \frac{1}{\sigma-1} + 1 + \frac{1}{2}\ln(d_L) + \frac{n_L}{2} \left(\ln(3) + \frac{539}{134} \right). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'_L(\sigma + 2i\gamma)}{\zeta_L(\sigma + 2i\gamma)}\right) &\leq \frac{1}{2}\ln(d_L) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma + 2i\gamma - 1} + \frac{1}{\sigma + 2i\gamma}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{\gamma'_L(\sigma + 2i\gamma)}{\gamma_L(\sigma + 2i\gamma)}\right) \\ &\leq \frac{5}{2}\ln(d_L) + \frac{n_L}{2} \left(\ln(2|\gamma| + 3) + \frac{539}{134} \right) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et, en conservant la contribution du zéro $\rho = \beta + i\gamma$,

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'_L(\sigma + i\gamma)}{\zeta_L(\sigma + i\gamma)}\right) \leq \frac{9}{2}\ln(d_L) + \frac{n_L}{2} \left(\ln(|\gamma| + 3) + \frac{539}{134} \right) + 1 - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

Ces inégalités, et le fait souligné ci-dessus que tous les coefficients de Dirichlet de $-\frac{\zeta'_L}{\zeta_L}$ soient positifs, impliquent que pour tout $\sigma > 1$,

$$\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{3}{\sigma - 1} + 22\ln(d_L) + n_L \left(\frac{5}{2}\ln(|\gamma| + 3) + 4 \cdot \frac{539}{134} + 2\ln(3) \right) + \frac{15}{2},$$

et il suffit alors de prendre

$$\sigma = 1 + (2\sqrt{3} - 3) \left(22\ln(d_L) + n_L \left(\frac{5}{2}\ln(|\gamma| + 3) + 4 \cdot \frac{539}{134} + 2\ln(3) \right) + \frac{15}{2} \right)^{-1}$$

pour obtenir le résultat du lemme. \square

Lemme 14 *Si $n_L > 1$, alors ζ_L a au plus un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ dans la région délimitée par les conditions*

$$|\gamma| \leq \frac{1}{4\ln(d_L)} \text{ et } \beta \geq 1 - \frac{1}{4\ln(d_L)}.$$

Ce zéro, s'il existe, est réel et simple, et correspond à un unique caractère (réel) χ_0 qui annule $L(\cdot, \chi_0)$. Par ailleurs, si $n_L = 1$, alors ζ_L n'admet pas de zéro tel que $|\gamma| < 14$.

Démonstration. Voir [L & O], pages 455–456. \square

8 Estimations finales

Théorème 8.1 *Si ζ_L vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée, alors*

$$\begin{aligned} \left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x \right| &\leq \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x} \ln(x) \left[\left(\frac{23}{3} + \frac{4781}{96\ln(x)} \right) \ln(d_L) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{863}{31}\ln(x) + \frac{68}{3} + \frac{58681}{113\ln(x)} \right) n_L \right] \end{aligned}$$

pour tout $x \geq 2$.

Remarque. Plus précisément, on a, pour tout $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} \left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x \right| &\leq \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x} \left[\left(\frac{23}{3} \ln(x) + \frac{29}{3} + \frac{336}{17 \ln(x)} + \frac{26 \ln(x)}{9\sqrt{x}} + \frac{94}{7\sqrt{x}} \right) \ln(d_L) \right. \\ &\quad + \left(\frac{863}{31}(\ln(x))^2 + \frac{68}{3} \ln(x) + \frac{1198}{13} + \frac{1343}{6 \ln(x)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{77 \ln(x)}{4\sqrt{x}} + \frac{3817}{30\sqrt{x}} + \frac{3}{40x^{3/4}(\ln(x))^2} \right) n_L \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. Si ζ_L vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée, alors toutes les fonctions $L(\cdot, \chi)$ associées à ζ_L par la formule $\zeta_L = \prod_{\chi} L(\cdot, \chi)$ la vérifient également. Ainsi, pour chaque χ il n'existe pas de zéro ρ non trivial tel que $|\rho| < \frac{1}{2}$, et par le lemme 8 :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right| &\leq \sqrt{x} \left(2n_\chi(0) + \sum_{0 \leq j \leq \frac{T-1}{2}} \frac{n_\chi(2j+2) + n_\chi(-(2j+2))}{2j+1} \right) \\ &\leq \frac{5}{2}\sqrt{x} \left[\left(2 + \frac{\ln(T)}{2} \right) \left(\ln(A(\chi)) + \frac{1075}{134}n_E \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{281}{55} + \frac{\ln(T+4)\ln(T)}{4} \right) n_E \right], \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{T-1}{2}} \frac{\ln(2t+5)}{2t+1} dt &= \frac{1}{2} \int_1^{\frac{T-1}{2}} \left(\frac{\ln(2t+5)}{2t+1} + \frac{\ln(2t+1)}{2t+5} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{T-1}{2}} \left(\frac{\ln(2t+5)}{2t+1} - \frac{\ln(2t+1)}{2t+5} \right) dt \\ &\leq \frac{\ln(T)\ln(T+4) - \ln(3)\ln(7)}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \ln(2) + 9 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

En se rappelant la définition de $S(x, T)$ donnée dans le théorème 6.1, ceci implique que pour tout $T \geq 2$, $|S(x, T)|$ admet la même majoration, à une multiplication par $\frac{|C|}{|G|}$ près, en remplaçant $\ln(A(\chi))$ par $\ln(d_L)$ et n_E par n_L . On pose $T = \sqrt{x} + 1$, par exemple (on a bien $T \geq 2$), et la formule explicite du théorème 6.1 prouve le résultat désiré. \square

Théorème 8.2 Soit β_0 le zéro réel éventuel de ζ_L vérifiant $\beta_0 \geq 1 - \frac{1}{4 \ln(d_L)}$, et χ_0 le caractère (réel) tel que $L(\beta_0, \chi_0) = 0$. Si $x \geq \exp\left(4n_L(\ln(150867d_L^{44/5}))^2\right)$, alors

$$\psi_C(x) = \frac{|C|}{|G|}x - \frac{|C|}{|G|}\chi_0(g) \frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + \frac{|C|}{|G|}R(x),$$

où $|R(x)| \leq 1505234280710x \exp\left(-\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)$. Le second terme peut être supprimé en l'absence du zéro exceptionnel β_0 .

Démonstration. Pour alléger les calculs, posons $a = \exp\left(\frac{15}{44}\right)$, $b = 3^{\frac{4}{5}} \exp\left(\frac{2156}{335}\right)$ et $c = 2\frac{7-4\sqrt{3}}{5}$. Si $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\rho \neq \beta_0$ est un zéro non trivial d'une fonction L tel que

$|\gamma| < T$, alors la borne inconditionnelle du lemme 13 montre que

$$|x^\rho| = x^\beta \leq x \exp\left(-\frac{c \ln(x)}{\ln((ad_L)^{44/5}(b(T+3))^{n_L})}\right)$$

pour $x \geq 2$ et $T \geq 2$. De plus, le lemme 8 montre, en imitant le raisonnement de la démonstration du théorème 8.1, que

$$\sum_x \sum_{\substack{|\rho| \geq \frac{1}{2} \\ |\gamma| \leq T}} \left| \frac{1}{\rho} \right| \leq \frac{5}{2} \left[\left(2 + \frac{\ln(T)}{2}\right) \left(\ln(d_L) + \frac{1075}{134} n_L\right) + \left(\frac{281}{55} + \frac{\ln(T+4) \ln(T)}{4}\right) n_L \right].$$

Par ce même lemme, comme $\rho \neq 1 - \beta_0$ implique $|\rho| \geq \frac{1}{4 \ln(d_L)}$ (par le lemme 14), on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_x \sum_{\substack{\rho \neq 1 - \beta_0 \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \left(\left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| + \left| \frac{1}{\rho} \right| \right) \right| &\leq (\sqrt{x} + 1) \sum_x \sum_{\substack{\rho \neq 1 - \beta_0 \\ |\rho| < \frac{1}{2}}} \left| \frac{1}{\rho} \right| \\ &\leq 5(\sqrt{x} + 1) \left[\ln(d_L) + n_L \left(\ln(3) + \frac{1075}{134} \right) \right] \ln(d_L) \\ &\leq \frac{8945}{9} (\sqrt{x} + 1) (\ln(d_L))^2 \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hermite-Minkowski $d_L \geq \frac{\pi}{3} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{n_L - 1}$, valable quand $n_L > 1$ (ce dont on déduit plus précisément $n_L \leq \frac{\ln(d_L)}{\ln(\frac{3\pi}{4})}$). À noter que si $n_L = 1$ (et $\ln(d_L) = 0$), alors cette inégalité est également vraie. Pour finir,

$$\frac{x^{1-\beta_0}}{1-\beta_0} - \frac{1}{1-\beta_0} = x^\sigma \ln(x) \leq \sqrt{x} \ln(x)$$

pour un certain $\sigma \in [0, 1 - \beta_0]$. Tout ceci nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\left| S(x, T) - \frac{|C|}{|G|} \chi_0(g) \frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} \right| &= \frac{|C|}{|G|} \left[\sum_x \bar{\chi}(g) \left(\sum_{\substack{|\rho| > \frac{1}{2} \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{\substack{|\rho| < \frac{1}{2} \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho| < \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right) - \chi_0(g) \frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} \right] \\
&\leq \frac{|C|}{|G|} \frac{5}{2} \left[\left(2 + \frac{\ln(T)}{2} \right) \left(\ln(d_L) + \frac{1075}{134} n_L \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{281}{55} + \frac{\ln(T+4) \ln(T)}{4} \right) n_L \right] x \exp \left(- \frac{c \ln(x)}{\ln((ad_L)^{44/5} (b(T+2))^{n_L})} \right) \\
&\quad + \frac{|C|}{|G|} \left(\frac{8945}{9} (\sqrt{x} + 1) (\ln(d_L))^2 + \frac{x^{1-\beta_0}}{1-\beta_0} - \frac{1}{1-\beta_0} \right) \\
&\leq \frac{|C|}{|G|} \frac{5}{2} \left[\frac{4607}{10} + \frac{2012}{23} \ln(T) + \frac{(\ln(T+2))^2}{4 \ln(\frac{\pi}{3})} \right] \ln(d_L) \\
&\quad \times x \exp \left(- \frac{c \ln(x)}{\ln((ad_L)^{44/5} (b(T+2))^{n_L})} \right) \\
&\quad + \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x} \left(\ln(x) + \frac{8945}{9} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (\ln(d_L))^2 \right).
\end{aligned}$$

En posant $T = \frac{1}{b(ad_L)^{44/5}} \exp \left(\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \right) - 3$ et en considérant les réels $x \geq 2$ tels que $\ln(x) \geq 4n_L (\ln(5b(ad_L)^{44/5}))^2$, on a bien $T \geq 2$, et

$$\begin{aligned}
\left| S(x, T) - \frac{|C|}{|G|} \chi_0(g) \frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} \right| &\leq \frac{|C|}{|G|} \frac{5}{2} \ln(d_L) \left(\frac{4607}{10} + \frac{2012}{23} \ln(T) + \frac{(\ln(T+2))^2}{4 \ln(\frac{\pi}{3})} \right) \\
&\quad \times x \exp \left(-c \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \right) \\
&\quad + \frac{|C|}{|G|} \left(\frac{293321}{69696} \sqrt{x} \ln(x) + \left(\frac{5}{88} \right)^2 \frac{\ln(x)}{n_L} \right) \\
&\leq 11715979982 \frac{|C|}{|G|} x \exp \left(-\frac{c}{2} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \right) \\
&\quad + \frac{|C|}{|G|} \frac{320}{19} n_L x \exp \left(-c \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \right), \tag{37}
\end{aligned}$$

d'après les inégalités (38) et (39) listées ci-après. On invoque à nouveau le théorème 6.1. Ce choix pour T , ainsi que les inégalités suivantes,

$$\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \leq \exp \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \right) + a(\ln(a) - 1) \text{ pour tous } x \geq 2, a > 1, \tag{38}$$

$$\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \leq \exp \left(\frac{1}{4a^2 n_L} \right) x \exp \left(-\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \right) \text{ pour tous } x \geq 2, a > 0, \tag{39}$$

$$\frac{44}{5} \ln(d_L) \leq \ln(5b(ad_L)^{44/5}) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \text{ (supposée vérifiée ci-dessus),}$$

$$n_L \leq \frac{5}{88 \ln(\frac{\pi}{3})} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \text{ (Hermite-Minkowski et l'inégalité ci-dessus)}$$

impliquent que :

$$\begin{aligned} \left| \psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x, T) \right| &\leq 1505243591773 \frac{|C|}{|G|}x \exp\left(-\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right) \\ &+ \frac{|C|}{|G|} \left[\ln(x) \left(\frac{2}{\ln(2)} + \frac{77}{4 \ln(\frac{\pi}{3})} \right) + \frac{94}{7} + \frac{1647}{5 \ln(\frac{\pi}{3})} \right] \ln(d_L) \\ &\leq 1505243592416 \frac{|C|}{|G|}x \exp\left(-\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Finalement, le rassemblement de (37) et (40) donne le théorème. \square

Pour passer de ψ_C à π_C , le raisonnement est assez classique. Posons

$$\theta_C(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ non ramifié} \\ N(\mathfrak{p}) \leq x \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C}} \ln(N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})).$$

Il y a au plus n_K idéaux \mathfrak{p}^m , avec \mathfrak{p} premier, dont la norme a une certaine valeur donnée, et de plus

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \geq 2 \\ \mathfrak{p} \text{ non ramifié} \\ N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}^m) \leq x}} \ln(N(\mathfrak{p})) = \theta_C(x^{1/2}) + \theta_C(x^{1/3}) + \dots + \theta_C(x^{1/\lceil \ln(x)/\ln(2) \rceil})$$

car $x^{1/M} < 2$ pour $M > \ln(x)/\ln(2)$, donc l'inégalité $\theta_C(x) \leq n_K \theta_{\mathbb{Q}}(x) < 1,01624n_K x$ (tirée de [R& B], théorème 9, valable pour tout $x \geq 2$) implique que :

$$\psi_C(x) - \theta_C(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}, m \geq 2 \\ \mathfrak{p} \text{ non ramifié} \\ N(\mathfrak{p}^m) \leq x}} \ln(N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})) \leq \frac{22}{15} n_K \sqrt{x} \ln(x). \quad (41)$$

Ceci prouve que θ_C vérifie presque la même formule asymptotique que ψ_C :

$$\begin{aligned} \left| \theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x \right| &\leq \frac{|C|}{|G|} \sqrt{x} \ln(x) \left[\left(\frac{23}{3} + \frac{4781}{96 \ln(x)} \right) \ln(d_L) \right. \\ &\left. + \left(\frac{863}{31} \ln(x) + \frac{362}{15} + \frac{58681}{113 \ln(x)} \right) n_L \right] \end{aligned}$$

si on suppose l'hypothèse de Riemann généralisée, et, inconditionnellement,

$$\theta_C = \frac{|C|}{|G|}x - \frac{|C|}{|G|} \chi_0(g) \frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + \frac{|C|}{|G|} R_0(x),$$

où β_0 est l'éventuel zéro exceptionnel de ζ_L dans la région décrite dans le lemme 14, χ_0 le caractère tel que $L(\beta_0, \chi_0) = 0$, avec $|R_0(x)| \leq 1505234280719x \exp\left(-\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)$.

Une transformée d'Abel donne les théorèmes 1.1 et 1.2 : on a en effet

$$\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\text{Li}(x) = \frac{\theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|x}}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\theta_C(t) - \frac{|C|}{|G|}t}{t(\ln(t))^2} dt.$$

On utilise la majoration $\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{t}\ln(t)} \leq \frac{4\sqrt{x}}{\ln(x)}$, obtenue *via* le changement de variable $u = \frac{-\ln(t)}{2}$ qui nous ramène à l'étude de l'exponentielle intégrale, dont on trouve toute une étude dans [A & S], page 228.

Il faut toutefois être vigilant pour obtenir le théorème inconditionnel : comme le théorème 8.2 ne donne une estimation valable qu'à partir de $x \geq \exp(4n_L(\ln(150867d_L))^2) =: a$, on doit faire un léger découpage :

$$\begin{aligned} \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\text{Li}(x) &= -\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\ln(x^{\beta_0})} + \frac{|C|}{|G|}\frac{R_0(x)}{\ln(x)} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\theta_C(t) - \frac{|C|}{|G|}t}{t(\ln(t))^2} dt \\ &+ \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\theta_C(t) - \frac{|C|}{|G|}t}{t(\ln(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Si, à partir de maintenant, on suppose $x \geq a^2$, alors

$$\begin{aligned} \left| \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\text{Li}(x) \right| &= \left| -\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\ln(x^{\beta_0})} + \frac{|C|}{|G|}\frac{R_0(x)}{\ln(2)} + n_K \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2,01624}{(\ln(t))^2} dt \right. \\ &+ \left. \int_{\sqrt{x}}^x \frac{-\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{t^{\beta_0}}{\beta_0} + \frac{|C|}{|G|}R_0(t)}{t(\ln(t))^2} dt \right|, \end{aligned}$$

et $\int_2^{\sqrt{x}} dt \leq \sqrt{x} \leq \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\right)^2\right)x \exp\left(-\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)$, tandis que

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{\exp\left(-c\sqrt{\frac{\ln(t)}{n_L}}\right)}{(\ln(t))^2} dt \leq 4x \frac{\exp\left(-c\sqrt{\frac{\ln(x)}{2n_L}}\right)}{(\ln(x))^2},$$

d'où le théorème 1.1. \square

Références

- [A & S] M. Abramovitz et I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York : Dover, 1964.
- [B & G] P.T. Bateman et E. Grosswald, *Imaginary quadratic fields with unique factorization*, Illinois J. Math. 6. 187–192, 1962.
- [Che] N. Chebotarev, *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören*, Math. Ann. 95, 1926, 191–228.
- [L & O] J. Lagarias, A. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem*, in : Algebraic Number Fields, ed. A. Fröhlich, Academic Press, New York, 1977, p. 409–464.

- [Dav] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Markham, Chicago, 1967.
- [Neu] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Springer Verlag, 1992, 574 pages.
- [Odl] A. M. Odlyzko, *On conductors and discriminants*, *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties* (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), Academic Press, London, 1977, pp. 377–407.
- [Es] J. Esterlé, *Versions effectives du théorème de Chebotarev sous l'hypothèse de Riemann généralisée*, *Astérisque* 61, 1979, 165–167.
- [R& B] J. B. Rosser, L. Schoenfeld. *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, *Illinois J. Math.*, 1962 p. 64–94.
- [Ser] J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 54 (1981), p. 123–201.
- [Ser2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, 1994, 192 pages.
- [Sta] H. M. Stark, *Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem*, *Inventiones math.*, 23 (1974), p. 135–152.