



**HAL**  
open science

## Minimisation des retards dans le séquençement des véhicules sur une ligne d'assemblage multi modèles

Karim Aroui, Gülgün Alpan, Yannick Frein, Jérôme Thomazeau

► **To cite this version:**

Karim Aroui, Gülgün Alpan, Yannick Frein, Jérôme Thomazeau. Minimisation des retards dans le séquençement des véhicules sur une ligne d'assemblage multi modèles. 5èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, Jul 2013, Strasbourg, France. hal-00904934

**HAL Id: hal-00904934**

**<https://hal.science/hal-00904934>**

Submitted on 18 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Minimisation des retards dans le séquençement des véhicules sur une ligne d'assemblage multi modèles

K. Aroui<sup>1</sup>, G. Alpan<sup>1</sup>, Y. Frein<sup>1</sup>, J. Thomazeau<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Grenoble INP/ UJF-Grenoble 1/ CNRS, G-SCOP UMR5272,  
46, Avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1  
*karim.aroui@grenoble-inp.fr*

<sup>2</sup>Renault Trucks, Centre de montage de Bourg en Bresse  
Avenue Amédée Mercier, BP 46 – 01002 Bourg en Bresse Cedex

**Résumé**— Dans cet article, nous considérons le problème du séquençement sur une ligne d'assemblage à transport continu de véhicules industriels. Pour équilibrer au mieux la charge dynamique, nous proposons de minimiser les retards à l'issue de chaque véhicule. Nous proposons une formalisation par un modèle de type programmation linéaire. Le modèle est testé sur des instances du cas d'étude de l'usine de montage de Renault Trucks à Bourg en Bresse.

**Mots-clés**— Séquençement ; Ligne d'assemblage multi modèles ; Retard de production ; Programmation linéaire.

## I. INTRODUCTION

Les exigences des systèmes de production ont changé de façon spectaculaire notamment en raison de la nécessité de fabriquer une très grande variété de produits. À l'origine, en utilisant les lignes d'assemblage à modèle unique, les entreprises manufacturières ont pu produire efficacement de grandes quantités d'un même produit. De nos jours, la diversification de la demande des clients a nécessité l'invention de plus en plus de méthodes modernes de fabrication. La ligne d'assemblage multi modèles (Mixed-Model Assembly Line : MMAL) est connue pour être un cas particulier de lignes de production où différentes variations de produits à base commune (appelées modèles) sont inter-mélangées pour être assemblées sur une même ligne [16]. La notion de MMAL est largement utilisée, de la fabrication des produits électroniques à l'industrie automobile, pour faire correspondre la production à l'évolution des exigences des clients tout en gardant de petites tailles de stock. Sur une telle ligne le plus souvent les produits sont transportés sur un convoyeur et les opérateurs se déplacent le long de la chaîne tout en travaillant sur un produit.

De nombreux travaux de recherche se sont focalisés sur le problème du séquençement des modèles dans des environnements MMAL où l'équilibrage statique des charges a déjà été réalisé. L'équilibrage statique de la ligne se formule principalement comme un problème d'affectation de tâches à des postes dans lequel on cherche soit à minimiser le nombre de postes sous contrainte du respect du temps de cycle requis par la charge de chaque poste, soit à minimiser le temps de cycle pour un nombre de postes donné. Le séquençement, quant à lui, est le problème de la détermination de l'ordre dans lequel les modèles doivent être introduits dans la chaîne de

montage tout en respectant les contraintes engendrées par l'équilibrage de la ligne. Le problème qui nous concerne dans ce travail est celui du séquençement. Dans la littérature deux principaux objectifs ont été examinés : le lissage de la consommation des pièces ([16], [15], [5] et [10]), et la minimisation de la surcharge de travail ([22], [20] et [3]). Quelques auteurs ont considéré les deux critères simultanément ([1] et [14]). Mosadegh et al. [17] résout à la fois l'équilibrage des charges et le séquençement avec des temps opératoires dépendants des postes.

Ces objectifs ont été repris dans trois approches du séquençement données dans [10] :

1. Lissage de la charge de travail : le but de ce problème est de minimiser la surcharge de travail basé sur un ordonnancement détaillé (temps opératoires).

2. Car sequencing : Ces problèmes tentent de minimiser la surcharge de travail de manière implicite. Ceci passe par la minimisation du nombre de violations d'un ensemble de règles de séquençement : contraintes d'espacement et de succession ([9] et [11]).

3. Lissage de la consommation des composants : Ces problèmes se concentrent sur le lissage de la production et de la consommation des composants.

La plupart des travaux, notamment l'essentiel de ceux développés dans le contexte automobile, considère l'approche dite car sequencing et donc sans modéliser directement les charges aux postes. Dans ce travail, notre étude relève de la première approche et se concentre sur le problème du séquençement sur une ligne d'assemblage multi modèles avec minimisation de la surcharge de travail (MMSP-W). Cette approche a été peu développée ; on trouve néanmoins quelques travaux dans [6], [7], [8], [23], [18] et [2], entre autres.

Yano et Rachamadugu [23] ont considéré un cas avec un seul poste et deux types de produits et ont proposé une procédure qui permet d'obtenir une solution optimale lorsque certaines conditions sont remplies. Ensuite, ils ont étendu la procédure pour  $k$  postes et deux produits.

Toujours dans le cas d'un seul poste et deux produits, Bolat et Yano [8] donnent quatre procédures pour minimiser la surcharge de travail. Deux d'entre elles sont basées sur les

règles d'espacement. Les deux autres procédures sont coûteuses en termes de temps de calculs. Des solutions optimales peuvent être obtenues avec ces procédures en fonction de la charge des postes et certaines conditions sur les valeurs des paramètres.

Des méthodes exactes, comme le Branch and Bound, ont été utilisées pour résoudre le problème non seulement avec les critères d'optimisation de charge [20], mais aussi avec des critères de lissage de la consommation de pièces [13]. Néanmoins, les temps de calcul ne sont acceptables que pour les petites instances.

Dans [4], Bautista et Cano ont pris en compte les liens entre les postes pour la minimisation des retards (les tâches sur un poste ne peuvent commencer que si le poste antérieur a fini ces tâches). Le problème est résolu grâce à une heuristique basée sur le Bounded Dynamic Programming qui combine des caractéristiques de la programmation dynamique (déterminer le plus court chemin dans un graphe) avec des fonctions de Branch and Bound (la recherche d'une borne de la solution optimale du problème).

Dans plusieurs articles ([3] et [4]), le retard est calculé par rapport à la limite du poste de travail et non pas par rapport au temps de cycle sachant que la zone attribuée au poste est plus grande que le temps de cycle. Dans ce cas, des produits dont le temps opératoire est plus grand que le temps de cycle n'engendrent pas forcément des retards. Dans Bautista et Cano [2], si un produit atteint la limite du poste, ces tâches sont considérées comme inachevées et seront finies dans d'autres postes.

Notre recherche se concentre sur une étude de cas du centre de montage de camion Renault Trucks à Bourg-en-Bresse. Une des spécificités de l'industrie du camion est que tous les types de camions sont assemblés sur la même ligne. Les camions qui passent sur la même ligne peuvent être très différents. Ils peuvent nécessiter des ressources et composants différents et peuvent donc nécessiter des temps opératoires différents. La séquence des produits est par conséquent importante dans l'industrie du camion et doit être prise en considération.

Ce travail est motivé par l'étude de cas qui nécessite l'adaptation des approches et modèles parus dans la littérature pour prendre en compte notamment la grande diversité des camions (les modèles supposant 2 types de produits sont par exemple totalement inopérants dans notre cas). De plus lorsqu'un opérateur a une surcharge de travail sur un produit, il devra néanmoins terminer le travail sur ce produit avant de commencer le suivant avec donc un certain retard ce qui n'est pas pris en compte dans la plupart des travaux précédents qui attribuent cette surcharge à un autre poste ou à des opérateurs polyvalents.

Cet article s'organise comme suit : dans la section 2, on décrit le problème et on cite les hypothèses prises en compte. Dans la section 3, la formulation en programmation linéaire du problème à un seul poste de travail est proposée. Les résultats des tests liés à cette formulation sont abordés dans la section 4. L'extension de la formulation à plusieurs postes est décrite dans la section 5 et ses résultats sont présentés dans la section 6.

## II. DESCRIPTION DU PROBLEME

Les caractéristiques de la ligne d'assemblage et les hypothèses prises en compte dans la résolution du problème sont :

- L'équilibrage statique de la ligne de montage a déjà été fait. Toutes les tâches sont affectées aux différents postes de travail de la ligne.
- Les produits se déplacent sur la chaîne à une vitesse constante. Il n'y a pas de stocks tampons entre les postes de travail.
- Les produits nécessitent une quantité spécifique de travail (tâches ayant des temps opératoires) à chaque poste. Les temps opératoires sont déterministes. Le temps de réglage et le temps requis par les opérateurs pour revenir au début du poste après la fin d'une tâche sur un produit sont inclus dans le temps opératoires.

À chaque poste, l'opérateur réalise ses opérations sur les produits lors de leur passage sur la chaîne (dans certains postes, il peut y avoir plusieurs opérateurs qui travaillent en parallèle et peuvent donc être considérés comme indépendants). Lorsqu'il finit ses opérations sur un produit, il peut commencer les opérations sur le produit suivant s'il est déjà entré dans son poste sinon il attend jusqu'à ce que le produit soit disponible. La longueur de chaque poste de travail correspond au temps de cycle (intervalle de temps entre le lancement de deux produits consécutifs sur la chaîne de montage). Comme déjà indiqué, dans une ligne d'assemblage multi modèles, différents produits sont assemblés et chaque produit peut exiger différentes opérations et aura donc des temps opératoires différents. Les produits ayant des temps opératoires supérieurs au temps de cycle entraînent une surcharge de travail. L'opérateur doit terminer toutes les opérations sur ce produit et commencera le prochain produit avec un retard. En pratique, l'opérateur doit finir les opérations à temps soit en se précipitant (ce qui engendre des défauts qualité, de la fatigue, ergonomie non respectée..) ou à l'aide d'un opérateur polyvalent (très coûteux). Nous modélisons ceci en tant que retard pour diminuer les situations à éviter.

L'exemple suivant illustre ces hypothèses : le séquençement de cinq produits sur un poste de travail. Les temps opératoires de chaque produit sont donnés dans le tableau 1, le temps de cycle étant de 5 unités de temps.

TABLE I  
TEMPS OPERATOIRES DE L'EXEMPLE

Modèle	$m1$	$m2$	$m3$	$m4$	$m5$
Temps	5	6	4	3	3

La Fig.1 montre le diagramme de Gantt de la production des produits  $m4$ ,  $m2$ ,  $m1$ ,  $m5$  puis  $m3$ . Nous pouvons remarquer que le retard provoqué par  $m2$  n'est pas considéré comme une opération inachevée, mais répercuté sur le début des opérations pour le produit  $m1$  qui finit donc aussi en retard. Pour commencer les opérations sur le produit  $m3$ , l'opérateur ne peut pas aller au-delà de la limite de début de poste et doit attendre que le produit soit disponible dans sa zone : un temps d'inactivité (repos) se produit.

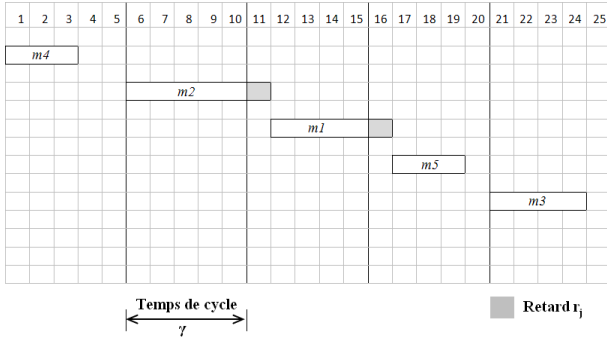


Fig. 1. Diagramme de Gantt de l'exemple

### III. FORMULATION DU PROBLEME A UN POSTE

Dans cette section, nous présentons la modélisation sur un seul poste du problème du séquençage sur une ligne d'assemblage multi modèles pour la minimisation des retards. C'est-à-dire qu'on considère que la ligne est composée d'un seul poste de travail.

Données:

- n nombre des produits à séquencer
- $\gamma$  temps de cycle
- i indice sur les produits
- j indice sur les positions
- $t_i$  temps opératoire du produit i
- $d_i$  retard ou repos pour le produit i:  $d_i = t_i - \gamma$

Variables:

- $x_{ij}$  1 si le produit i est affecté à la position j, 0 sinon
- $c_j$  retard ou repos cumulé à la position j
- $r_j$  retard cumulé à la position j :  $r_j = \max(0, c_j)$

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n r_j$$

Sous contraintes :

$$c_j = r_{j-1} + \sum_{i=1}^n d_i x_{ij} \quad \forall j \quad (1)$$

$$r_j \geq 0 \quad \forall j \quad (2)$$

$$r_j \geq c_j \quad \forall j \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \forall j \quad (6)$$

$$c_j, r_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \quad (7)$$

Le tableau suivant permet d'illustrer la signification des variables  $c_j$  et  $r_j$ . Il présente les valeurs de ces deux variables pour l'exemple cité dans la section 2.

TABLE II  
VALEURS DES VARIABLES DE L'EXEMPLE

Séquencement \ Variables	$\sum_{i=1}^n d_i x_{ij}$	$c_j$	$r_j$
m4	-2	-2	0
m2	1	1	1
m1	0	1	1
m5	-2	-1	0
m3	-1	-1	0

La fonction objectif minimise la somme des retards sur le poste de travail. Les contraintes (1) calculent le retard ou le repos sur le poste de travail pour les produits pour toute position j. Les contraintes (2) et (3) calculent les variables  $r_j$ . Les contraintes (4) et (5) assurent respectivement que chaque produit a été affecté à une seule position et qu'un seul produit a été attribué à chaque position.

### IV. RESULTATS ET OBSERVATIONS POUR LE MODELE A UN POSTE

#### A. Processus de génération des données

Deux groupes de tests ont été faits. Le premier correspond à des données réelles issues du centre de montage de camions de Renault Trucks à Bourg en Bresse. Dix postes de travail avec différents taux de charges ont été testés pour une journée de production donnée. Ces postes de travail appartiennent à une ligne d'assemblage qui fabrique 43 camions par équipe (cadence de la journée testée), le temps de cycle étant de 10 minutes. Pour ce groupe de tests on pourra comparer l'efficacité (valeur de la somme des retards) de la procédure par rapport à celle utilisée chez Renault Trucks pour séquencer la ligne de montage.

D'autres instances ont été testées pour déterminer les limites de ce modèle linéaire et les facteurs de complexité du problème (tables IV, V et VI).

Les tests ont été faits sur IBM ILOG CPLEX Optimization Studio V12.4 tournant sur un PC Dell avec Intel Core i5 avec 2.50 GHz et 4 GB de RAM, Windows XP étant le système d'exploitation.

#### B. Analyse de la complexité et observations

La comparaison faite (instances du premier groupe) avec les résultats de la procédure utilisée actuellement chez Renault Trucks est donnée par la table III. La procédure utilisée actuellement (respect de contraintes d'espacement et de succession) prend en compte des contraintes liées à plusieurs postes de travail de la ligne d'assemblage. La confrontation des résultats pour un seul poste n'est donc pas parfaite. Toutefois, elle nous permet d'avoir un point de repère.

TABLE III  
COMPARAISON AVEC LA PROCEDURE ACTUELLE DE SEQUENCMENT

Instances	Temps de calcul (sec)	taux de charge	nombre de produits	Gain
1	25	82.3%	43	56%
2	2	79%	43	0%
3	1	91.6%	43	16%
4	2.6	90.3%	43	0%
5	15.1	97.7%	43	0%
6	1298	69.1%	43	35%

L'observation des résultats des tests a montré que la complexité du modèle proposé est liée au nombre de produits à séquencer, au taux de charge du poste mais aussi à l'écart entre les temps opératoires et le temps de cycle comme nous l'illustrons ci-dessous.

Plusieurs solutions sont optimales puisque plusieurs combinaisons possibles peuvent donner la même valeur de la fonction objectif. En général, Cplex trouve rapidement une des solutions optimales mais doit bien sûr vérifier tous les nœuds pour s'apercevoir que c'est la solution optimale.

La table IV montre l'effet du nombre de produits à séquencer sur l'évolution du temps de calcul. La complexité augmente avec le nombre de produits à séquencer.

TABLE IV  
EFFET DU NOMBRE DE PRODUITS A SEQUENCER

nombre de produits	taux de charge	intervalle des temps	Temps de calcul (sec)
43	93,74%	[8,9 , 10,7]	1,25
102	93,74%	[8,9 , 10,7]	1,9
204	93,74%	[8,9 , 10,7]	10,7
408	93,74%	[8,9 , 10,7]	78,9
612	93,74%	[8,9 , 10,7]	296,2
655	93,74%	[8,9 , 10,7]	470,2

La complexité est influencée par le taux de charge de poste étudié. Le temps de calcul croit exponentiellement avec le taux de charge (table V).

TABLE V  
EFFET DU TAUX DE CHARGE

taux de charge	nombre de produits	intervalle des temps	Temps de calcul (sec)
91,40%	43	[7.5 , 13.1]	3,88
92,88%	43	[7.5 , 13.1]	4,97
94,12%	43	[7.5 , 13.1]	7,59
95,16%	43	[7.5 , 13.1]	9,78
96,23%	43	[7.5 , 13.1]	10,2
96,70%	43	[7.5 , 13.1]	17,28
97,40%	43	[7.5 , 13.1]	22,25
97,86%	43	[7.5 , 13.1]	44,38
98,40%	43	[7.5 , 13.1]	193,2
98,53%	43	[7.5 , 13.1]	1581,5
98,84%	43	[7.5 , 13.1]	2454,8

L'écart entre des temps opératoires et le temps de cycle est aussi un facteur de complexité du problème. La table VI montre qu'en augmentant la largeur de l'intervalle des temps opératoires, le temps de calcul augmente.

TABLE VI  
EFFET DE L'ECART ENTRE LES TEMPS OPERATOIRES ET LE TEMPS DE CYCLE

intervalle des temps	nombre de produits	taux de charge	Temps de calcul (sec)
[9.6 , 10.4]	43	97,77%	1,6
[8.9 , 11.1]	43	97,77%	3,5
[8.9 , 11.2]	43	97,77%	3,8
[8.8 , 11.3]	43	97,77%	4,7
[8.6 , 11.4]	43	97,77%	634,1
[8.5 , 11.4]	43	97,77%	10363

### C. Caractérisation de la solution optimale

Tout d'abord bien évidemment pour les produits ayant des temps opératoires identiques, leurs ordres entre eux ne changent pas la valeur de la fonction objective.

L'observation des résultats nous a permis de trouver quelques caractéristiques de la solution optimale :

- La solution optimale est bien sûr une succession de sous-séquences de produits dont les temps opératoires sont inférieurs au temps de cycle et de sous-séquences de produits dont les temps opératoires sont supérieurs au temps de cycle. Nous allons donner ci-après deux propriétés que nous avons observées dans la solution optimale sur l'ordre des produits dans ces sous-séquences de produits.

- Dans une sous-séquence de produits ayant des temps opératoires supérieurs au temps de cycle, ces produits sont classés dans l'ordre croissant de leurs temps opératoires (voir démonstration dans l'annexe).

- Dans une sous-séquence de produits ayant des temps opératoires inférieurs au temps de cycle, ces produits sont classés dans l'ordre croissant de leurs temps opératoires (voir démonstration dans l'annexe).

### V. FORMULATION DU PROBLEME A PLUSIEURS POSTES

Dans cette section, nous présentons la modélisation sur plusieurs postes du problème du séquencement sur une ligne d'assemblage multi modèles pour la minimisation des retards. Comme la ligne est tractée, l'ordre de passages des produits sera le même pour tous les postes.

En plus des notations données dans la formulation du problème à un seul poste, celle du problème à plusieurs postes a les notations suivantes :

Données :

- T nombre de postes
- p indice des postes
- $t_{ip}$  temps opératoire du produit i au poste p
- $d_{ip}$  retard ou repos pour le produit i au poste p
- $d_{ip} = t_{ip} - \gamma$

Variables :

- $x_{ij}$  1 si le produit i est affecté à la position j, 0 sinon
- $c_{jp}$  retard ou repos cumulé au poste p à la position j
- $r_{jp}$  retard cumulé au poste p à la position j

$$\text{Min } \sum_{p=1}^T \sum_{j=1}^n r_{jp}$$

Sous contraintes :

$$c_{jp} = r_{j-1,p} + \sum_{i=1}^n d_{ip} x_{ij} \quad \forall j \forall p \quad (8)$$

$$r_{jp} \geq 0 \quad \forall j \forall p \quad (9)$$

$$r_{jp} \geq c_{jp} \quad \forall j \forall p \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (12)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \forall j \quad (13)$$

$$c_{jp}, r_{jp} \in \mathbb{R} \quad \forall j \forall p \quad (14)$$

Trois tests ont été faits pour la modélisation à plusieurs postes de travail. Les instances utilisées sont issues des données réelles du cas d'étude (centre de montage de camions de Renault Trucks à Bourg en Bresse). La première correspond à 3 postes de travail et 18 produits, la deuxième instance correspond à 3 postes de travail et 24 produits et la dernière à 4 postes de travail et 15 produits. Les résultats et la comparaison avec le séquençement fait grâce à la procédure actuelle à Renault Trucks sont donnés dans la table IV.

TABLE VII  
RESULTATS DES TESTS POUR LE MODELE A PLUSIEURS POSTES

Instances	1	2	3
Nombres de postes	3	3	4
Nombres de produits	18	24	15
Temps de calcul	852	1213	60
Valeur de la fonction objectif (min)	24.7	27,6	52
Gain	42.2%	34.6%	56.2%

Les temps de calcul sont raisonnables par rapport aux gains enregistrés.

#### IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons traité le problème de séquençement de véhicules industriels sur une ligne d'assemblage multi-modèles à transport continu. Le critère d'optimisation pris en compte est la minimisation des retards.

Nous avons proposé une modélisation en programmation linéaire à un seul poste et à plusieurs postes. La performance de ces modèles a été évaluée en utilisant des données provenant du cas d'étude (centre de montage Renault Trucks de Bourg en Bresse) et nous avons montré que la complexité du problème est liée, entre autres, aux nombre de temps opératoires différents et supérieurs au temps de cycle.

Le problème est considéré comme NP-difficile ([23], [19], [18] et [14]). Les observations faites sur les caractéristiques de la solution optimale peuvent permettre de trouver des solutions approchées efficaces. Nous avons constaté en particulier que la séquence arrive à un point de régénération

(quand  $r_j = 0$ ). Cette caractéristique peut permettre de découper le problème en plusieurs sous-problèmes indépendants. La programmation dynamique serait une piste intéressante à explorer.

#### REMERCIEMENTS

Les auteurs ont apprécié la collaboration du centre de montage Renault Trucks de Bourg en Bresse. Ce travail a été financé par le fond interministériel dans le cadre du projet OPTIFLUX+. Nous remercions les organismes financeurs.

#### ANNEXE – CARACTERISTIQUES DE LA SOLUTION OPTIMALE

Nous allons démontrer dans cette partie les caractéristiques de la solution optimale (citées dans la section IV)

*A. Séquences de produits ayant des temps opératoires supérieurs au temps de cycle*

Supposons que dans la solution optimale on a deux modèles  $a$  et  $b$  attribués respectivement aux positions  $j$  et  $j+1$  tels que  $t_a > \gamma$  et  $t_b > \gamma$ . Notons  $r_{j-1}$  le retard cumulé jusqu'à la position  $j-1$ .

Les retards des modèles  $a$  et  $b$  sont:

$$d_a = t_a - \gamma \quad \text{et} \quad d_b = t_b - \gamma$$

Calculons le retard cumulé à chaque position :

$$r_j = \max(0, c_j) \quad \text{avec} \quad c_j = r_{j-1} + d_a$$

$$\left. \begin{array}{l} r_{j-1} \geq 0 \\ d_a > 0 \end{array} \right\} \text{ alors } c_j \geq 0 \Rightarrow r_j = c_j = r_{j-1} + d_a$$

De même, on prouve que :  $r_{j+1} = c_{j+1} = r_j + d_b$

alors  $r_{j+1} = r_{j-1} + d_a + d_b$

La somme des retards (fonction objectif) est alors :

$$R_{opt} = r_j + r_{j+1} = 2 * r_{j-1} + 2 * d_a + d_b$$

Si le modèle  $b$  était attribué à la position  $j$  et le modèle  $a$  à la position  $j+1$  :

$$r_j = c_j = r_{j-1} + d_b$$

$$\text{et } r_{j+1} = r_{j-1} + d_a + d_b$$

La somme des retards (fonction objectif) est alors :

$$R' = r_j + r_{j+1} = 2 * r_{j-1} + 2 * d_b + d_a$$

Puisque  $R_{opt}$  correspond à la solution optimale et qu'on est dans un problème de minimisation alors

$$R_{opt} \leq R' \text{ alors } d_a \leq d_b \text{ et } t_a \leq t_b$$

Alors, le classement dans la solution optimale est l'ordre croissant des temps opératoires.

*B. Séquences de produits ayant des temps opératoires inférieurs au temps de cycle*

Supposons qu'on a deux modèles  $a$  et  $b$  à séquencer aux positions  $j$  et  $j+1$  tels que  $t_a < t_b < \gamma$ . Notons  $r_{j-1}$  le retard cumulé jusqu'à la position  $j-1$ .

Les repos des modèles  $a$  et  $b$  sont:

$$d_a = t_a - \gamma < 0 \quad \text{et} \quad d_b = t_b - \gamma < 0$$

1. Si on classe les produits dans l'ordre croissant des temps opératoires c'est-à-dire le modèle  $a$  à la position  $j$  et le modèle  $b$  à la position  $j+1$  :

Calculons le retard cumulé à chaque position :

$$r_j^{crois} = \max(0, c_j) \quad \text{avec} \quad c_j = r_{j-1} + d_a$$

$$r_{j+1}^{crois} = \max(0, c_{j+1}) = \max(0, r_j^{crois} + d_b) \\ = \max(0, \max(0, r_{j-1} + d_a) + d_b)$$

2. Si on classe les produits dans l'ordre croissant des temps opératoire c'est-à-dire le modèle  $b$  à la position  $j$  et le modèle  $a$  à la position  $j+1$  :

$$r_j^{décr} = \max(0, c_j) \text{ avec } c_j = r_{j-1} + d_b \\ r_{j+1}^{décr} = \max(0, c_{j+1}) = \max(0, r_j^{décr} + d_a) \\ = \max(0, \max(0, r_{j-1} + d_b) + d_a)$$

Nous allons traiter tous les cas possibles et vérifier quel classement minimise la fonction objectif :

- Si  $r_{j-1} + d_a > 0$ :

alors  $r_j^{crois} = r_{j-1} + d_a$  et  $r_{j+1}^{crois} = \max(0, r_{j-1} + d_b + d_a)$

▪ Si  $r_{j-1} + d_b + d_a > 0$

$$R_{croissant} = r_j^{crois} + r_{j+1}^{crois} = 2 * r_{j-1} + d_b + 2 * d_a$$

• Si  $r_{j-1} + d_b > 0$

$$\text{alors } r_j^{décr} = r_{j-1} + d_b$$

et  $r_{j+1}^{décr} = \max(0, r_{j-1} + d_b + d_a) = r_{j-1} + d_b + d_a$

$$R_{décroissant} = r_j^{décr} + r_{j+1}^{décr} = 2 * r_{j-1} + d_a + 2 * d_b$$

$d_b > d_a$  alors  $R_{décroissant} > R_{croissant}$

• Si  $r_{j-1} + d_b \leq 0$

Impossible car  $r_{j-1} + d_b + d_a > 0$  et  $d_a \leq 0$

▪ Si  $r_{j-1} + d_b + d_a \leq 0$

$$\text{alors } r_{j+1}^{crois} = 0 \text{ et } R_{crois} = r_{j-1} + d_a$$

• Si  $r_{j-1} + d_b > 0$

alors  $r_j^{décr} = r_{j-1} + d_b$  et  $r_{j+1}^{décr} = 0$  et  $R_{décr} = r_{j-1} + d_b$

$d_b > d_a$  alors  $R_{décroissant} > R_{croissant}$

• Si  $r_{j-1} + d_b \leq 0$

Impossible car  $r_{j-1} + d_a > 0$  et  $d_b > d_a$

- Si  $r_{j-1} + d_a \leq 0$ :

$$\text{alors } r_j^{crois} = 0 \text{ et } r_{j+1}^{crois} = \max(0, d_b) = 0$$

$$R_{décroissant} = R_{croissant} = 0$$

Dans tous les cas  $R_{décroissant} \geq R_{croissant}$  alors le séquençement dans l'ordre croissant des temps opératoires minimise la fonction objectif.

## RÉFÉRENCES

- [1] Aigbedo H. et Monden Y. A parametric procedure for multicriterion sequence scheduling for just-in-time mixed-model assembly lines. *International Journal of Production Research*, vol. 35, pp. 2543-2564, 1997.
- [2] Bautista J., Cano A. et Alfaro R. Modeling and solving a variant of the mixed-model sequencing problem with work overload minimisation and regularity constraints. An application in Nissan's Barcelona Plant. *Expert systems with applications*, vol. 39, pp. 11001-11010, 2012.

- [3] Bautista J. et Cano J. Minimizing work overload in mixed-model assembly lines. *International Journal of Production Economics*, vol. 112/1, pp. 177-191, 2008.
- [4] Bautista J. et Cano J. Solving mixed model sequencing problem in assembly lines with serial workstations with work overload minimization and interruption rules. *European Journal of Operational Research*, vol. 210 pp 495-513, 2011.
- [5] Bautista J., Companys R. et Corominas A. Heuristics and exact algorithms for solving the Monden problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 88, pp. 101-113, 1996.
- [6] Bolat A. Stochastic procedures for scheduling minimum job sets on mixed model assembly lines. *Journal of Operational Research Society*, vol. 48, pp. 490-501, 1997.
- [7] Bolat A. et Yano C. A surrogate objective for utility work in paced assembly lines. *Production Planning & Control*, vol. 3, pp. 406-412, 1992a.
- [8] Bolat A. et Yano C. Scheduling algorithms to minimize utility work at a single station on a paced assembly line. *Production Planning & Control*, vol. 3, pp. 393-405, 1992b.
- [9] Boysen N. et Flidner M. Comments on "Solving real car sequencing problems with ant colony optimization. *European Journal of Operational Research*, vol. 182, pp 466-468, 2006.
- [10] Boysen N., Flidner M. et Scholl A. Sequencing mixed-model assembly lines: Survey, classification and model critique. *European Journal of Operational Research*, vol. 192/2, pp. 349-373, 2009.
- [11] Golle U., Boysen N. et Rothlauf F. Analysis and design of sequencing rules for car sequencing. *European Journal of Operational Research*, vol. 206, pp 579-585, 2010.
- [12] Kim S. et Jeong B. Product sequencing problem in Mixed-Model Assembly Line to minimize unfinished works. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 53, pp. 206-214, 2007.
- [13] Korkmaz T. et Meral S. Bicriteria sequencing methods for the mixed-model assembly line in just-in-time production systems. *European Journal of Operational Research*, vol. 131, pp. 188-207, 2001.
- [14] Kotani S., Ito T. et Ohno K. Sequencing problem for a mixed-model assembly line in the Toyota production system. *International Journal of Production Research* vol. 42, pp. 4955-4974, 2004.
- [15] Miltenburg J. Level schedules for mixed-model assembly lines in just-in-time productions systems. *Management Science*, vol. 35, pp. 192-207, 1989.
- [16] Monden Y. *Toyota Production System*. Industrial Engineering and Management Press, Institute of Industrial Engineers, Atlanta, GA, 1983.
- [17] Mosadegh H., Zandieh M. et Fatemi Ghomi S. Simultaneous solving of balancing and sequencing problems with station-dependent assembly times for mixed-model assembly lines, *Applied Soft Computing*, vol. 12, pp. 1359-1370, 2012.
- [18] Scholl A., Klein R. et Domschke W. Pattern based vocabulary building for effectively sequencing mixed-model assembly lines. *Journal of Heuristics*, vol. 4, pp. 359-381, 1998.
- [19] Tsai L.-H. Mixed-model sequencing to minimize utility work and the risk of conveyor stoppage. *Management Science*, vol.41, pp. 485-495, 1995.
- [20] Xiaobo Z. et Ohno K. Algorithms for sequencing mixed models on an assembly line in a sit production system. *Computers and Industrial Engineering*, vol. 32, pp. 47-56, 1997.
- [21] Xiaobo Z. et Ohno K. Properties of a sequencing problem for a mixed model assembly line with conveyor stoppages. *European Journal of Operational Research*, vol. 124, pp 560-570, 2000.
- [22] Yano C.A. et Bolat A. Survey, development and applications of algorithms for sequencing paced assembly lines. *Journal of Manufacturing and Operations Management* vol. 2, pp. 172-198, 1989.
- [23] Yano C.A. et Rachamadugu R. Sequencing to minimize work overload in assembly lines with product options. *Management Science*, vol. 37, pp. 572-586, 1991.