



**HAL**  
open science

# Méthode d'estimation de l'invariant océanique par couple de modes en acoustique sous-marine passive

Yann Le Gall, Julien Bonnel

► **To cite this version:**

Yann Le Gall, Julien Bonnel. Méthode d'estimation de l'invariant océanique par couple de modes en acoustique sous-marine passive. GRETSI 2013, Sep 2013, Brest, France. hal-00904157

**HAL Id: hal-00904157**

**<https://hal.science/hal-00904157>**

Submitted on 13 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode d'estimation de l'invariant océanique par couple de modes en acoustique sous-marine passive

Yann LE GALL, Julien BONNEL

Lab-STICC (UMR CNRS 6285), ENSTA Bretagne (Université Européenne de Bretagne)  
2 rue François Verny, 29200 Brest  
yann.le\_gall@ensta-bretagne.fr, julien.bonnel@ensta-bretagne.fr

**Résumé** – Dans de nombreux guides d'onde océaniques, la propagation acoustique est caractérisée par un scalaire que l'on appelle l'invariant océanique. Cette propriété est utilisée dans un grand nombre d'applications pour lesquelles la connaissance de l'invariant océanique est requise. C'est pourquoi des méthodes d'estimation rapide de l'invariant océanique en contexte opérationnel sont nécessaires. L'invariant océanique est classiquement considéré comme un scalaire mais plusieurs études montrent qu'il est mieux modélisé par une distribution en raison de sa dépendance par rapport à la fréquence et aux couples de modes du guide d'onde océanique. Nous présentons une nouvelle méthode d'estimation de l'invariant océanique en milieu petit fond dans une configuration minimale (contexte passif et monocapteur). La méthode vise à obtenir une estimation de l'invariant océanique pour chaque couple de modes, démarche très peu abordée jusqu'à présent. Les performances de l'estimation sont évaluées sur des données simulées. Les résultats obtenus montrent que la méthode permet une estimation précise et robuste au bruit quand le nombre de modes propagatifs n'est pas trop important.

**Abstract** – In many oceanic waveguides, acoustic propagation is characterized by a parameter called waveguide invariant. This property is widely used in a growing number of passive and active sonar applications where knowledge of the waveguide invariant value is required. Therefore estimation techniques of the waveguide invariant in operational context are needed. The waveguide invariant is classically considered as scalar but several studies show that it is better modeled by a distribution because of its dependence on frequency and mode pairs. This paper presents a new method for estimating the waveguide invariant distribution. Using the noise radiated by a distant ship and a single hydrophone, the proposed methodology allows estimating the waveguide invariant for each pair of modes in shallow water. Performance is evaluated on simulated data. Results show that the estimation is reliable provided that the number of modes is not too high.

## 1 Introduction

Dans les guides d'onde océaniques, la propagation acoustique est décrite par la théorie de la propagation modale et le champ acoustique peut être vu comme une somme de modes [1]. Lorsque l'on représente l'intensité acoustique  $I(r, f)$  créée par une source large bande dans le plan distance-fréquence, on observe un motif issu des interférences entre modes propagatifs (Fig. 1 (a)). Ce motif d'interférence est formé de striations dont la pente  $\frac{\delta f}{\delta r}$  s'avère être caractérisée par un scalaire  $\beta$  que l'on appelle l'invariant océanique (ou *waveguide invariant* dans la littérature anglophone) [2] :  $\frac{\delta f}{\delta r} = \beta \cdot \frac{f}{r}$ . L'invariant océanique résume la dispersion acoustique dans le guide d'onde. En milieu petit fond, l'invariant océanique dépend peu des caractéristiques de l'environnement marin (profil de célérité, propriétés du fond...) ce qui en fait une donnée de choix dans de nombreuses applications lorsque l'environnement est mal connu. L'invariant est beaucoup utilisé pour localiser les sources large bande grâce au lien direct qui existe entre la pente des striations, l'invariant océanique et la distance  $r$  à laquelle se trouve la source [3]. Il est aussi utilisé pour améliorer la détection de cibles [4], pour supprimer les effets de la dispersion [5] ou encore dans des expériences de miroir à retournement temporel

[6]. On considère généralement que  $\beta = 1$ , sa valeur typique en milieu petit fond. Cependant, cela reste une approximation et les différences pouvant exister entre cette approximation et la réalité peuvent contrarier l'application. Supposer à tort que  $\beta = 1$  alors qu'en réalité  $\beta \approx 1.2$  se traduit directement par une erreur de 20% dans une application de localisation. Par ailleurs, la dépendance de l'invariant océanique par rapport à l'environnement marin peut être utilisée pour obtenir des informations sur l'environnement [7]. Ainsi, la connaissance précise de l'invariant océanique est souvent essentielle et des techniques pour l'estimer en contexte opérationnel sont requises.

Estimer l'invariant océanique n'est pas un problème simple. En effet, contrairement à ce que son nom laisse à penser, l'invariant océanique n'est pas une constante : l'invariant varie peu, mais l'invariant varie bel et bien ! [1]. En pratique, l'invariant dépend de la fréquence et des modes considérés [8]. Rouseff et Spindel [8] ont montré que l'invariant océanique est mieux modélisé par une distribution que par un scalaire et que cette distribution globale peut être estimée à partir de l'intensité acoustique  $I(r, f)$ . D'autres approches permettent d'estimer une valeur dominante de l'invariant océanique [9, 10].

En prenant pleinement en compte la dépendance de l'invariant océanique par rapport aux couples de modes, nous in-

roduisons une nouvelle technique d'estimation de l'invariant océanique à basse fréquence en milieu petit fond. La méthode tire parti du faible nombre de modes propagatifs à basse fréquence pour obtenir une estimation de l'invariant océanique pour chaque couple de modes. Une approche similaire a été adoptée récemment par Zhou *et al.* avec une antenne et un sonar actif [11]. Cependant, la méthode présentée ici s'applique à un contexte passif et monocapteur où la source d'opportunité est le bruit large bande d'un navire en mouvement.

## 2 Invariant océanique par couple de modes

Pour une source large bande de densité spectrale  $\gamma_b(f)$  dans un milieu dont les propriétés ne dépendent pas de la distance  $r$  (range-independent), l'intensité acoustique à une distance  $r$  de la source peut s'écrire [1] :

$$I(r, f) = \frac{\gamma_b(f)}{r} \left[ \sum_m^N A_m^2 + \sum_{m,n}^N A_m A_n \cos(\Delta k_{mn}(f)r) \right], \quad (1)$$

où  $N$  est le nombre de modes propagatifs à la fréquence  $f$ ,  $A_m$  et  $k_{rm}(f)$  sont respectivement l'amplitude et le nombre d'onde du mode  $m$ , et  $\Delta k_{mn}(f) = k_{rm}(f) - k_{rn}(f)$  est la différence entre nombre d'onde pour les modes  $m$  et  $n$  à la fréquence  $f$ . La quantité  $A_m$  est fonction des profondeurs de la source et du récepteur, elle varie peu avec la fréquence de sorte que sa dépendance fréquentielle peut être ignorée. Notons aussi que  $k_{rm}(f)$  et  $A_m$  dépendent tous deux des paramètres de l'environnement (profile de célérité, propriétés du fond...).

L'intensité acoustique est donc une somme de cosinus, où chaque cosinus résulte de l'interférence entre deux modes propagatifs. Ces termes en cosinus sont à l'origine du motif d'interférence qui apparaît quand on représente l'intensité acoustique dans le plan distance-fréquence. Chaque terme en cosinus de l'expression (1) donne des striations dont la pente  $\frac{\delta f}{\delta r}$  se détermine en trouvant la direction du plan  $(r, f)$  pour laquelle l'intensité du cosinus ne change pas. On peut montrer que pour le couple de modes  $m$  et  $n$  la pente vaut [1] :

$$\frac{\delta f}{\delta r} = - \frac{\Delta k_{mn}(f)}{r \cdot \frac{\delta \Delta k_{mn}(f)}{\delta f}}. \quad (2)$$

L'invariant océanique pour le couple de modes  $m$  et  $n$  est alors défini par [8] :

$$\beta_{mn} = - \frac{1}{f} \frac{\Delta k_{mn}(f)}{\frac{\delta \Delta k_{mn}(f)}{\delta f}}. \quad (3)$$

Notons que, avec cette définition,  $\beta_{mn}$  est une fonction de la fréquence. Les explications classiques de l'invariant océanique en milieu petit fond avancent que  $\beta = 1$  car dans un guide de Pekeris  $\beta_{mn} \approx 1$  quelque soit  $m$  et  $n$  quand  $f$  est grand devant la fréquence de coupure des modes. En basse fréquence, lorsqu'il y a peu de modes propagatifs, l'invariant dépend des modes considérés, de la fréquence et des propriétés

du fond [12]. Si le profil de célérité n'est pas constant, l'invariant est aussi affecté par le profil [8]. Ainsi, dans un environnement donné, l'invariant océanique est distribué selon la fréquence et les couples de modes. Cela ne remet pas en cause le concept d'invariant océanique, mais l'invariant océanique est mieux modélisé par une distribution que par un scalaire. A titre d'exemple on calcule de manière analytique l'histogramme de  $\beta$  sur une fenêtre d'analyse  $\Delta f = [125, 153]$  Hz dans un guide de Pekeris de paramètres  $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_b = 1850 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_{eau} = 1520 \text{ m/s}$ ,  $c_b = 1750 \text{ m/s}$  et profondeur  $D = 35 \text{ m}$ . Le résultat est présenté sur la Fig. 1 (b). On peut voir la dépendance de l'invariant océanique par rapport aux couples de modes et la différence significative par rapport à la valeur canonique  $\beta = 1$ . Des valeurs allant de 0.8 à 1.6 peuvent classiquement être observées en milieu petit fond.

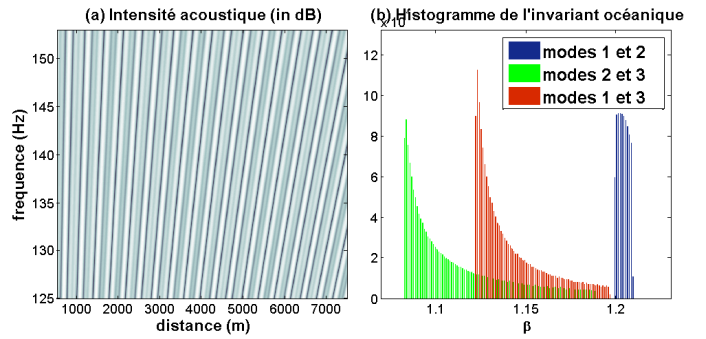


FIGURE 1 – (a) Intensité acoustique  $I(r, f)$  dans un guide de Pekeris (b) Histogramme de l'invariant océanique.

Dans la section qui suit, on montre comment cette dépendance par rapport aux couples de modes peut être estimée à partir de l'intensité acoustique  $I(r, f)$ . Cette intensité acoustique peut être obtenue dans une configuration opérationnelle simple en enregistrant le bruit rayonné par un navire en mouvement à l'aide d'un unique hydrophone. Une représentation temps fréquence  $I(t, f) = I(r(t), f)$  du signal reçu donne le motif d'interférence  $I(r, f)$  après conversion du temps en distance (la distance  $r(t)$  peut généralement être obtenue à l'aide du GPS ou du système AIS<sup>1</sup>).

## 3 Estimation de l'invariant océanique

En considérant l'Eq. (3) comme une équation différentielle sur  $\Delta k_{mn}(f)$ , on peut montrer que [1] :

$$\Delta k_{mn}(f) = \alpha_{mn} f^{\frac{-1}{\beta_{mn}}}, \quad (4)$$

où  $\alpha_{mn}$  est une constante qui dépend des numéros des modes. La quantité  $\Delta k_{mn}(f)$  est appelée courbe de dispersion relative (CDR) entre les modes  $m$  et  $n$ . Elle porte l'information sur l'invariant océanique pour le couple de modes  $m$  et  $n$  et peut donc servir à estimer cette valeur.

1. Automatic Identification System, obligatoire pour la plupart des navires.

Les CDRs peuvent être obtenues à partir de l'intensité acoustique  $I(r, f)$ , donnée par l'Eq. (1) en réalisant une transformée de Fourier spatiale  $TF_r$  selon  $r$  [13, 14] (Fig. 2 (a)) :

$$\begin{aligned} I(\Delta k, f) &= TF_r[r \cdot I(r, f)], \\ &= \gamma_b(f) \sum_{m,n} A_m A_n \delta(\Delta k - \Delta k_{mn}(f)). \end{aligned} \quad (5)$$

Comme l'invariant océanique pour le couple de modes  $\beta_{mn}$  est lié à la CDR  $\Delta k_{mn}(f)$  par l'Eq. (4), il peut être estimé à partir de  $I(\Delta k, f)$ . Pour faciliter l'estimation, un changement de variable logarithmique [ $\Delta k \rightarrow \ln(\Delta k)$ ,  $f \rightarrow \ln(f)$ ] est appliqué sur  $I(\Delta k, f)$ . Cette opération linéarise les CDRs. Elles deviennent des droites dont la pente est déterminée par  $\beta_{mn}$  :

$$\ln(\Delta k_{mn}(f)) = \frac{-1}{\beta_{mn}} \cdot \ln(f) + \ln(\alpha_{mn}). \quad (6)$$

En pratique, la linéarisation des CDRs est réalisée par un ré-échantillonnage logarithmique des axes de  $I(\Delta k, f)$  (Fig. 2 (b)).

On peut ensuite estimer chaque  $\beta_{mn}$  en estimant la pente de chaque CDR linéarisée. Une transformée de Radon [15] est appliquée sur  $I[\ln(\Delta k), \ln(f)]$  pour estimer ces pentes. La transformée de Radon passe  $I[\ln(\Delta k), \ln(f)]$  dans un nouveau domaine  $\rho$ - $\theta$ . Dans ce domaine, chaque CDR linéarisée donne un maximum en  $(\rho_{max}, \theta_{max})$ , où  $\theta_{max}$  est l'angle de la CDR linéarisée<sup>2</sup>, cf Fig. 2 (c). La pente estimée vaut  $\tan(\theta_{max})$ , ce qui conduit à  $\beta_{mn} = -1/\tan(\theta_{max})$ , cf Fig. 2 (d). Par ailleurs, la contribution de chaque CDR linéarisée sur la transformée de Radon (et donc chaque  $\beta_{mn}$ ) peut être isolée en utilisant des outils classiques de segmentation d'image : ici on utilise un seuillage et la morphologie mathématique [16].

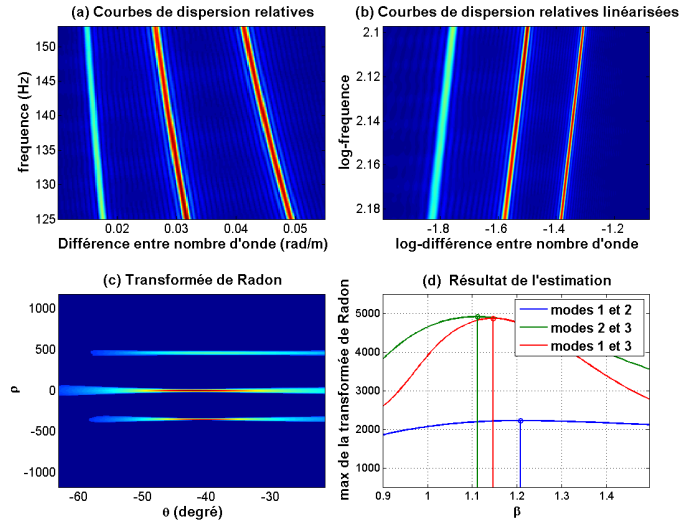


FIGURE 2 – (a) Courbes de dispersion relatives (b) Courbes de dispersion relatives linéarisées (c) Transformée de Radon (d) Résultat : la valeur estimée de  $\beta_{mn}$  est la valeur de  $\beta$  qui maximise la courbe correspondante.

Il faut noter que, pour chaque couple de modes, l'invariant océanique est distribué selon la fréquence, cf Fig. 1 (b). Par conséquent les CDRs ne sont qu'approximativement des droites, et pour chaque couple de modes l'algorithme donne une valeur moyenne de la distribution de l'invariant sur la fenêtre d'analyse  $\Delta f$ .

## 4 Résultats et discussions

La méthode a été testée sur trois cas synthétiques. Le premier environnement est le guide de Pekeris donné à la section 2. Le deuxième environnement est le même guide de Pekeris en changeant la célérité du fond par  $c_b = 1650$  m/s. Le troisième environnement est le même que le premier en changeant le profil de célérité constant de la colonne d'eau par un profil consistant en une couche de mélange de 15 m en surface où  $c_{eau} = 1530$  m/s, suivie par un gradient linéaire de célérité jusqu'à  $c_{eau} = 1495$  m/s. L'intensité acoustique est obtenue en simulant la propagation du bruit d'un navire en mouvement sur une distance  $\Delta r = [500, 7500]$  m du récepteur. Sachant que les navires peuvent être considérés comme des sources proches de la surface, la profondeur de source choisie est  $z_s = 5$  m. La profondeur du récepteur est choisie arbitrairement à  $z_r = 17$  m. Pour le premier et le troisième environnement, l'estimation est effectuée sur une fenêtre d'analyse  $\Delta f = [125, 153]$  Hz. Pour le deuxième environnement l'estimation est réalisée sur une fenêtre d'analyse  $\Delta f = [160, 194]$  Hz. Les fenêtres  $\Delta f$  sont choisies pour qu'il y ait trois modes propagatifs dans chaque cas. Du bruit a été ajouté aux signaux simulés. C'est un bruit blanc Gaussien dans le domaine de la pression, soit un bruit suivant une loi du  $\chi^2$  à deux degrés de liberté dans le domaine de l'intensité. Le rapport signal sur bruit (RSB) est défini comme étant le rapport entre la puissance moyenne du bruit de bateau reçu dans la fenêtre d'analyse  $\Delta r$  et la puissance du bruit ambiant.

Les histogrammes théoriques de  $\beta_{mn}$  peuvent être calculés comme en section 2, et les valeurs théoriques de  $\beta_{mn}$  peuvent être définies comme les moyennes des histogrammes. Pour les trois environnements, les valeurs théoriques sont :

- cas 1 :  $\beta_{12} = 1.203$ ,  $\beta_{23} = 1.110$ ,  $\beta_{13} = 1.141$  ;
- cas 2 :  $\beta_{12} = 1.227$ ,  $\beta_{23} = 1.176$ ,  $\beta_{13} = 1.193$  ;
- cas 3 :  $\beta_{12} = 1.491$ ,  $\beta_{23} = 1.059$ ,  $\beta_{13} = 1.187$ .

Les valeurs de l'invariant océanique varient significativement d'un environnement à l'autre, ce qui montre que l'invariant océanique porte de l'information sur les propriétés du fond et de la colonne d'eau.

Les résultats sont résumés dans le Tableau 1. Il y a une bonne cohérence entre les valeurs théoriques et les valeurs estimées de l'invariant océanique. L'ensemble de la méthode est illustrée pour le premier environnement (sans bruit) sur la Fig. 1 et la Fig. 2. La Fig. 2 (a) représente l'image  $I(\Delta k, f)$  obtenue en réalisant la transformée de Fourier spatiale de l'intensité acoustique  $I(r, f)$  de la Fig. 1 (a) : on voit clairement les trois CDRs. La Fig. 2 (b) présente le résultat du ré-échantillonnage

2. La quantité  $\rho_{max}$  est liée à  $\alpha_{mn}$ , mais n'est pas utilisée ici.

logarithmique de  $I(\Delta k, f)$  : on peut y voir les trois CDRs linéarisées. La Fig. 2 (c) présente le résultat de la transformée de Radon et les trois maxima correspondant aux CDRs linéarisées. La Fig. 2 (d) présente le résultat de l'estimation de l'invariant océanique. Pour chaque couple de modes, les valeurs estimées (c.à.d. les maxima sur la Fig. 2 (d)) sont cohérentes avec les valeurs moyennes de la distribution théorique (voir Fig. 1 (b)). L'étude de sensibilité au bruit montre que la méthode est robuste à de relativement faibles RSB (Tableau 1).

TABLE 1 – Résultats de l'estimation (200 réalisations).

milieu		1			2			3		
RSB (en dB)		2	-2	-5	2	-2	-5	2	-2	-5
$\hat{\beta}_{12}$	moyenne	1.208	1.206	1.205	1.227	1.225	1.227	1.486	1.490	1.498
	ecart-type	0.014	0.021	0.045	0.018	0.032	0.057	0.033	0.050	0.099
$\hat{\beta}_{23}$	moyenne	1.110	1.110	1.110	1.173	1.173	1.172	1.058	1.058	1.058
	ecart-type	0.004	0.006	0.008	0.006	0.008	0.013	0.003	0.004	0.007
$\hat{\beta}_{13}$	moyenne	1.142	1.146	1.144	1.194	1.195	1.195	1.190	1.190	1.190
	ecart-type	0.003	0.004	0.009	0.004	0.005	0.008	0.005	0.008	0.014

Cependant, il faut noter que la méthode est sensible à la taille de la fenêtre  $\Delta r$ . En effet,  $\Delta r$  affecte la résolution des CDRs selon le principe d'incertitude de Fourier. Pour une fenêtre de taille finie, la distribution de Dirac dans l'Eq. (5) doit être remplacé par un sinus cardinal. Si la largeur de la fenêtre  $\Delta r$  est trop faible, la résolution des CDRs pourrait être trop faible pour garantir une bonne estimation de l'invariant océanique. Des simulations suggèrent qu'une taille de fenêtre de 100 fois la profondeur d'eau est nécessaire pour que l'estimation soit fiable. Les environnements relativement profonds nécessitent donc une large fenêtre  $\Delta r$  pour laquelle des variabilités bathymétriques et océaniques pourraient remettre en question l'hypothèse d'invariance en distance du milieu.

Les profondeurs de la source et du récepteur n'ont pas d'influence sur les nombres d'onde et donc n'affectent pas les valeurs des  $\beta_{mn}$ . Cependant, elles déterminent les amplitudes modales  $A_m$ , et donc les amplitudes des CDRs. Si la source ou le récepteur est proche d'un mode  $p$  alors l'estimation des  $\beta_{pm}$  peut être difficile.

D'autre part, la méthode présentée ici repose sur la séparabilité des CDRs dans le domaine  $I(\Delta k, f)$ . Pour nos simulations, cette séparabilité est obtenue quand le nombre de modes n'est pas trop élevé (typiquement  $< 5$  modes), c.à.d. quand la fréquence est faible. Pour le premier environnement par exemple, la méthode peut être utilisée de  $f = 65$  Hz (deux modes propagatifs) jusqu'à  $f = 197$  Hz (quatre modes propagatifs). La séparabilité devient plus problématique lorsque le nombre de modes augmente et la méthode proposée devient moins fiable. Cependant, quand le nombre de modes est important la méthode est aussi moins pertinente car l'invariant océanique est plutôt défini pour des groupes de modes [1].

## 5 Conclusion

Dans cet article, une nouvelle méthode d'estimation de l'invariant océanique a été présentée. À partir de la définition de l'invariant océanique par couple de modes, on peut montrer que pour chaque couple de modes l'information sur l'invariant

océanique est entièrement portée par la CDR correspondante. De plus, ces CDRs peuvent être obtenues en calculant la transformée de Fourier selon  $r$  de l'intensité acoustique  $I(r, f)$ . Il est donc possible d'estimer l'invariant océanique pour chaque couple de modes à partir de l'intensité acoustique  $I(r, f)$ . La méthode proposée s'applique dans un contexte opérationnel simple (passif et monocapteur). Elle offre de bonnes perspectives pour toutes les applications qui utilisent l'invariant océanique, y compris pour la caractérisation de l'environnement (pour chaque couple de modes l'invariant océanique dépend des propriétés de la colonne d'eau et du fond).

## Références

- [1] FB Jensen, WA Kuperman, MB Porter, H. Schmidt, et al. *Computational ocean acoustics, Second edition*. (Springer Science+ Business Media, 2011), Chaps. 2 and 5, pp. 133–139, 337–360, 440–442.
- [2] S.D. Chuprov. Interference structure of a sound field in a layered ocean. *Ocean Acoustics, Modern State*, pages 71–91, 1982.
- [3] K.L. Cockrell et H. Schmidt. Robust passive range estimation using the waveguide invariant. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127 :2780–2789, 2010.
- [4] R. Goldhahn, G. Hickman, et J. Krolik. Waveguide invariant broadband target detection and reverberation estimation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124 :2841–2851, 2008.
- [5] DZ Gao, N. Wang, et HZ Wang. A dedispersion transform for sound propagation in shallow water waveguide. *Journal of Computational Acoustics*, 18(3) :245–257, 2010.
- [6] W.S. Hodgkiss, H.C. Song, W.A. Kuperman, T. Akal, C. Ferla, et D.R. Jackson. A long-range and variable focus phase-conjugation experiment in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105 :1597–1604, 1999.
- [7] K.D. Heaney. Rapid geoacoustic characterization using a surface ship of opportunity. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, 29(1) :88–99, 2004.
- [8] D. Rouseff et R.C. Spindel. Modeling the waveguide invariant as a distribution. In *AIP Conference Proceedings*, volume 621, pages 137–148. 2002.
- [9] L.A. Brooks, MRF Kidner, A.C. Zander, C.H. Hansen, et Z.Y. Zhang. Techniques for extraction of the waveguide invariant from interference patterns in spectrograms. In *Proceedings of Acoustics 2006*, New Zealand, pages 445–452.
- [10] D. Rouseff et L.M. Zurk. Striation-based beamforming for estimating the waveguide invariant with passive sonar. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(2) :EL76–EL81, 2011.
- [11] S. Zhou, H. Niu, Y. Ren, et L. He. Fluctuating modal interference characteristics in shallow water with a seasonal thermocline. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1495, page 321–328, 2012.
- [12] EC Shang, JR Wu, et ZD Zhao. Relating waveguide invariant and bottom reflection phase-shift parameter P in a Pekeris waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131 :3691–3697, 2012.
- [13] C. Gervaise, BG Kinda, J. Bonnel, Y. Stéphane, et S. Vallez. Passive geoacoustic inversion with a single hydrophone using broadband ship noise. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(3) :1999–2010, 2012.
- [14] Kevin L Cockrell et Henrik Schmidt. A relationship between the waveguide invariant and wavenumber integration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(1) :EL63–EL68, 2010.
- [15] Gregory Beylkin. Discrete radon transform. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 35(2) :162–172, 1987.
- [16] Jean Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. 1982.