



HAL
open science

RELATIONS DE DENSITÉ DANS LES PRODUITS LAITIERS

Jean Pien, Mlle G. Maurice

► **To cite this version:**

Jean Pien, Mlle G. Maurice. RELATIONS DE DENSITÉ DANS LES PRODUITS LAITIERS. Le Lait, 1938, 18 (176), pp.582-610. hal-00895328

HAL Id: hal-00895328

<https://hal.science/hal-00895328>

Submitted on 11 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Conclusions

1. Le ferment extensible, dont nous avons donné la description, est une symbiose stable du *Strept. acidi lactici* (*Strept. lactis*, var. maltigènes) et du diplocoque, celui-ci n'appartenant pas au groupe des bactéries lactiques.

2. La symbiose bactérienne possède une grande activité protéolytique. Pendant le chambrage prolongé du ferment, son acidité baisse graduellement, donnant lieu à une forte peptonisation de l'albumine.

3. L'utilisation pratique dudit ferment en fromagerie est parfaitement acceptable.

LITTÉRATURE

- [1] S. A. KOROLÉFF. Les bases de la microbiologie technique en laiterie, 1932. Gossizdat-Moskwa.
- [2] B. W. HAMMER. Observations on the ropiness in Butter Cultures. *Journal of Dairy Science*, vol. XIII, n° 1, 1930.
- [3] B. W. HAMMER et P. M. BAKER. Classification of the *Strept. lactis* group. *Agric. Exp. St.*; Iowa, St. College of Agr., Dairy Section, Ames, Iowa, 1926. *Research Bull.*, n° 99.

RELATIONS DE DENSITÉ DANS LES PRODUITS LAITIERS

par

JEAN PIEN

et

M^{lle} G. MAURICE

Ingénieur-Chimiste I. C. R.
Docteur ès Sciences.
Directeur des Laboratoires
des Fermiers Réunis.

Chimiste
des Laboratoires des Fermiers
Réunis.

Dans la pratique du contrôle industriel rapide du lait ou des produits laitiers (crèmes, lait écrémé, laits concentrés...) il est toujours nécessaire de connaître le taux de matière grasse au litre ou au kilogramme, la densité et, souvent aussi, l'extrait sec.

Ces trois éléments sont indispensables pour l'examen sommaire de la composition du lait en nature ; deux au moins le sont également pour certaines applications industrielles telles que le contrôle de la richesse des crèmes en poids ; dans tous les autres cas il faut évidemment toujours disposer au moins de l'un d'entre eux.

Or, il arrive que certaines de ces déterminations sont difficiles à réaliser ou même totalement impossibles dans le cas de la pratique courante de ce contrôle industriel. Il en est ainsi, non seulement du dosage direct des extraits secs, qui nécessite un examen de laboratoire proprement dit, mais encore de la détermination de

la densité des laits concentrés et surtout des crèmes qui, même au laboratoire, comporte de très sérieuses difficultés techniques et de nombreuses causes d'erreur.

Peut-on néanmoins parvenir à connaître ces éléments dont la détermination est évitée ou difficile ou impossible, en les déduisant par exemple par le calcul, de ceux qui ont pu être connus avec facilité ?

En d'autres termes, le problème qui se pose est le suivant :

Considérant les trois éléments : densité, matière grasse, extrait sec, déduire la valeur de l'un d'entre eux de la connaissance exacte des deux autres — ou même dans certains cas pratiques de la connaissance d'un seul des deux autres.

La solution de ce problème permettrait de résoudre des questions comme les suivantes :

Calculer l'extrait sec du lait connaissant sa densité et sa matière grasse (on sait que ce problème est déjà résolu grâce à la formule de Fleischmann et autres similaires ; mais nous montrerons qu'il y a lieu de les retoucher légèrement).

Calculer le taux de concentration du lait connaissant sa densité actuelle et sa densité initiale ; ou bien calculer la densité des laits concentrés connaissant leur taux de concentration.

Calculer la densité de la crème en fonction de sa matière grasse, seule (au litre ou au kilo).

Calculer la richesse de la crème au kilogramme connaissant sa richesse au litre et inversement, etc...

Autant de questions d'un intérêt pratique évident que nous allons étudier successivement après avoir considéré le problème dans son ensemble.

**

ÉQUATION FONDAMENTALE DE LA DENSITÉ DES PRODUITS LAITIERS

Les différents produits laitiers que nous avons en vue (lait entier, crèmes, laits concentrés, lait écrémé...) peuvent être considérés comme des mélanges en proportions variables des trois constituants suivants :

L'eau.

La matière grasse (parfois nulle).

La matière sèche non grasse (lactose, matières azotées, sels...).

Le poids spécifique (1) de ces divers produits ou, plus exactement, le poids du litre exprimé en grammes est égal à la somme des poids de ces trois groupes de composants contenus dans un litre de liquide et exprimés en grammes.

Exemple :

1 032 grammes (poids d'un litre de lait) = 36 grammes de matière grasse + 90 grammes de matière sèche non grasse + 906 grammes d'eau.

Appelons :

P le poids du litre d'un produit laitier quelconque en grammes ;

B le poids en grammes de la matière grasse contenue dans un litre ;

e le poids en grammes des matières sèches non grasses par litre ;

E le poids en grammes de l'extrait sec total (B + e) par litre.

L'équation générale qui exprime le poids du litre est la suivante :

$$P = B + e + \text{eau}$$

ou encore :

$$P = E + \text{eau}$$

Dans la pratique du contrôle industriel des produits laitiers, avons-nous dit, seuls les termes P, B, E sont à envisager. Même dans le contrôle du laboratoire, ce sont les seuls termes des formules ci-dessus qui peuvent être déterminés directement. Les teneurs en extrait dégraissé et en eau sont, en effet, déduites des trois autres.

Le problème que nous avons posé consiste donc à déterminer l'un de ces trois facteurs P, B, E connaissant les deux autres.

Or, il est facile de se rendre compte que, sous cette forme, le problème ne comporte pas de solution, car si :

$$e = E - B \text{ et } \text{eau} = P - E \text{ ou } P - (B + e)$$

les équations initiales deviennent, en y exprimant l'eau de cette manière :

$$P = (B + e) + P - (B + e)$$

(1) Rappelons que le poids spécifique est le poids de l'unité de volume exprimé en unités du même système. Exemple : 1 kg. 032 pour 1 litre de lait. C'est un abus de langage commode qui fait écrire 1.032 grammes par exemple pour le poids spécifique ou pour la densité du lait. En fait, le poids spécifique s'exprime par les mêmes chiffres que la densité, nombre abstrait qui traduit le rapport du poids d'un certain volume de lait au poids du même volume d'eau (exemple : 1,032). Dans les calculs qui suivent nous aurons besoin d'écrire le poids en grammes du litre de lait. Pour la facilité nous désignerons quelquefois ce nombre par « poids spécifique » ou même « densité » bien que ce soit là une incorrection.

ou :

$$P = E + P - E$$

Mathématiquement cela signifie que les équations initiales sont devenues des identités et que de ce fait il est absolument impossible de calculer P, B ou E en fonction des deux autres.

L'ignorance du terme « eau », en même temps que celle de l'un de ces trois termes, nous met constamment dans la situation d'avoir deux inconnues pour une seule équation et l'on sait que dans ce cas le problème est indéterminé.

Celui-ci serait donc entièrement résolu si le terme « eau » pouvait être connu isolément, soit par un dosage autre que celui du résidu sec, soit par une équation nouvelle apportant des éléments différents de ceux de la première.

Or, le terme « eau » peut s'exprimer soit en poids, soit en volume, par le même chiffre. Au lieu de :

$$P \text{ gr.} = \text{poids de B} + \text{poids de e} + \text{poids de l'eau}$$

nous pouvons donc écrire, en considérant les volumes des constituants du produit :

$$1.000 \text{ cm}^3 = \text{volume de B} + \text{volume de e} + \text{volume de l'eau.}$$

Introduisons maintenant une hypothèse importante : supposons connue la densité de la matière grasse pure (que nous appellerons d_1) et celle des matières sèches non grasses (d_2) ; nous pouvons écrire :

$$1.000 \text{ cm}^3 = \frac{B \text{ gr.}}{d_1} + \frac{e \text{ gr.}}{d_2} + \text{volume de l'eau}$$

d'où :

$$\text{volume de l'eau (en cm}^3\text{)} = 1.000 - \left(\frac{B}{d_1} + \frac{e}{d_2} \right)$$

Le nombre qui exprime ce volume d'eau est le même que celui qui traduit le poids d'eau. Transportons donc cette expression du volume de l'eau dans l'équation initiale où elle représentera, par le même chiffre, l'eau en poids. Il vient :

$$P = B + e + 1.000 - \left(\frac{B}{d_1} + \frac{e}{d_2} \right) \quad (\text{équation n}^\circ 1)$$

Dans cette équation : P, B, E (donc e qui vaut E - B) pouvant être connus par des dosages directs, d_1 et d_2 étant supposés connus à l'avance, si l'un des trois termes vient à manquer, il sera facile de le déduire des autres. On aura toujours une équation pour une seule inconnue et le problème, naturellement, comportera toujours une solution.

Par conséquent, la question générale : « déterminer l'un des termes P, B ou E connaissant les deux autres », et toutes les autres questions qui en découlent, peuvent être résolues à la condition de fixer à l'avance d_1 et d_2 , c'est-à-dire la densité de la matière grasse pure et celle des matières sèches non grasses.

Nous reconnaissons ici la voie qui mène aux formules du type Fleischmann. Nous aurions pu nous dispenser de nous arrêter à ces formules bien connues. Mais ayant à nous demander, pour la suite de ce travail, quelles sont les valeurs à prendre pour d_1 et d_2 , et ayant été amenés à constater que les valeurs introduites pour ces termes dans les formules d'extrait sec méritent d'être réétudiées ou révisées, nous nous croyons autorisés à nous arrêter à cette question pour proposer une légère modification de ces formules.

Fixons donc auparavant des valeurs à prendre pour d_1 et d_2 .

Densité moyenne de la matière grasse pure du lait (d_1).

On ne rencontre dans la littérature qu'un assez petit nombre de déterminations de la densité de la matière grasse du lait. Encore la plupart d'entre elles ont-elles été obtenues sur de la matière grasse de beurre, c'est-à-dire ayant subi, dans la crème au cours de la maturation, une acidification plus ou moins prononcée. D'autres incertitudes naissent aussi parfois de la température à laquelle a été effectuée cette mesure.

Voici quelques-uns des chiffres que nous avons pu relever :

0,865 à 0,868	à 100°	(KÖNIGS, MAYER, GUTZEIT)
0,874	à 90°	(KÖNIGS)
0,881	à 80°	(KÖNIGS)
0,888	à 70°	(KÖNIGS)
0,895	à 60°	(KÖNIGS)
0,901	à 50°	(KÖNIGS)
0,912	à 35°	(KÖNIGS)
0,910 à 0,912	à 37°	(BELL)
0,910	à 15°	(BOURCART)
0,920 à 0,922	à 15°	(Adopté par M. KLING pour le beurre)
0,924	à 17°	(HARAN)
0,925	à 15°	(KÖNIGS)
0,930	à 15°	(FLEISCHMANN)
0,930	à 15°	(PIERRE)
0,9347	à 15°	(HINARD)
0,950	à 15°	(DEMICHEL)
0,980	à ?	(QUESNEVILLE)
0,900 à 0,940		(SCHROEDER)

Si l'on trace la courbe de la densité en fonction de la température d'après les chiffres de KÖNIGS, on se trouve en présence d'une droite.

Un calcul simple nous montre que l'équation de cette droite est :

$$y = 925 - 0,68 (t - 15)$$

pour $t = 15^{\circ}$, $y = 925$.

Un certain nombre de chiffres reproduits ci-dessus sont conformes à cette valeur ou relativement voisins (KLING, FLEISCHMANN, PIERRE, HARAN). D'autres sont nettement plus élevés.

Nous avons donc cru devoir refaire des mesures directes en prenant toutes les précautions nécessaires à la réussite de ce genre de déterminations délicates (utilisation d'un petit pycnomètre contrôlé). Nous avons effectué nos déterminations sur de la matière grasse ramenée préalablement à 15° . La surfusion de la matière grasse dure assez longtemps pour que de telles mesures soient possibles.

Or, nous avons constaté qu'il y a lieu d'établir une distinction entre la matière grasse de lait frais et la matière grasse du beurre provenant de crème acidifiée. Dans ce dernier cas, qui correspond à la plupart des chiffres rappelés ci-dessus, les chiffres trouvés sont toujours plus élevés que dans le cas de la matière grasse de lait frais ou de crème douce sortant de l'écrémeuse.

Dans nos essais, la matière grasse du beurre a été extraite par fusion, filtration et séchage. La matière grasse du lait a été extraite par l'éther-alcool ammoniacal (Adam). Celle de la crème a été extraite soit par le même méthode, soit par barattage, lavage, fusion, filtration et séchage. La concordance de ces deux séries de chiffres obtenus pour la crème permet de penser que l'extraction par l'Adam ne fausse pas la densité. Celle de la matière grasse de lait peut donc être tenue pour exacte. Or c'est elle qui présente pour nous le plus d'importance, surtout en ce qui concerne les formules d'extrait sec qui se rapportent aux laits normaux non acides.

Nous avons donc trouvé :

1° Matière grasse pure de beurres provenant de crèmes acides.

Nos résultats sont compris entre 0,9227 et 0,9231, avec une moyenne générale de 0,923

2° Matière grasse pure de beurres provenant de crèmes peu acides ou douces.

Nous avons obtenu des chiffres un peu variables compris entre 0,916 et 0,923 avec une moyenne générale de 0,919.

3° Matière grasse pure de crèmes de lait doux, prises à la sortie de l'écrémeuse.

On obtient les mêmes chiffres soit par barattage (d'ailleurs

très difficile) soit par extraction à l'Adam. Les chiffres sont compris entre 0,9148 et 0,9161 avec une moyenne générale de 0,915.

4° Matière grasse pure de lait extraite à l'Adam.

Les chiffres sont compris entre 0,913 et 0,9158 avec une moyenne générale de 0,9141.

Il est hors de doute que les chiffres de 0,925-0,930 et plus, donnés par certains auteurs, correspondent à des matières grasses de beurres issus normalement de crèmes acides. Si l'on s'en tient, comme il convient ici, au cas de la matière grasse de lait doux ou de crème douce, on voit que le chiffre à adopter est nettement inférieur et voisin de 0,914-0,915.

Nous proposons donc de prendre pour d_1 la valeur : 0,915.

REMARQUES

Tous nos essais ont été effectués à 15° exactement. Nous n'avons pas fait de déterminations à diverses températures sur la matière grasse pure de lait comme KÖNIGS l'a fait pour la matière grasse pure de beurre. Néanmoins la courbe de Königs nous permet d'extraire deux renseignements qui peuvent avoir leur utilité dans la pratique :

a) *Variation de la densité de la matière grasse en fonction de la température.*

D'après la fonction que nous avons calculée de la courbe de Königs $y = 925 - 0,68(t - 15)$ il est clair qu'une augmentation de 1° fait baisser la densité de 0,00068 (d'autres auteurs donnent 0,00064).

b) *Calcul du coefficient et du binôme de dilatation de la matière grasse pure du lait.*

Ce renseignement, que nous n'avons jamais rencontré dans aucun ouvrage, peut se déduire également de la courbe de Königs.

A 15°, un litre de matière grasse pure (issue du beurre) pèse 925 grammes.

A 100°, un litre de matière grasse pure (issue du beurre) pèse 867 grammes.

Le volume d'un certain poids P de matière grasse pure vaut à t_1 : $V_1 = \frac{P}{D_1}$. A t_2 ce même poids occupe un volume $V_2 = \frac{P}{D_2}$.

Le rapport des volumes $\frac{V_1}{V_2}$ est donc égal à $\frac{D_2}{D_1}$

D'autre part $V_2 = V_1(1 + \beta t)$ où β est le coefficient de dilatation de la matière grasse et $(1 + \beta t)$ le binôme de dilatation de cette substance.

On a donc :

$$1 + \beta t = \frac{V_2}{V_1} = \frac{D_1}{D_2}$$

Pour l'intervalle 15°-100° on a donc :

$$1 + \beta t = \frac{925}{867} = 1,06689 \text{ et } \beta = 0,0007869.$$

Ces valeurs permettent en particulier de calculer la dilatation subie par un volume quelconque de matière grasse pure passant de t_1^0 à t_2^0 .

Ainsi, 1.000 cm₃ de matière grasse pure à 15° occupent à 100° un volume de 1.066 cm₃ 89.

Densité moyenne de la matière sèche non grasse (d_2).

En réalité fort peu de travaux ont été consacrés à cette question. La détermination de la densité de l'extrait non gras du lait présente d'ailleurs de grandes difficultés.

1° Une première méthode, indirecte, consiste à effectuer cette détermination en la tirant par le calcul de l'analyse très exacte de laits écrémés.

Supposons, en effet, connus par détermination directe, la densité ou mieux le poids du litre P et l'extrait sec e d'un lait écrémé.

L'équation n° 1 permet d'écrire en faisant B = 0 :

$$P = e + 1.000 - \frac{e}{d_2}$$

d'où :

$$\frac{e}{d_2} - = e + 1.000 - P = e - (P - 1.000)$$

et

$$d_2 = \frac{e}{e - (P - 1.000)}$$

Exemple :

$$P = 1.035 ; e = 92,0$$

on a :

$$d_2 = \frac{92}{92 - 35} = 1,614$$

Mais cette méthode comporte, en théorie et en pratique, une légère cause d'erreur due à l'extrait sec lui-même qui subit à 100° un commencement de décomposition manifeste, avec perte de matière sèche. Or, la densité d_2 que nous cherchons est celle de matière sèche non altérée.

2° Une meilleure méthode consiste à procéder d'une manière directe. Pesons p gr. de poudre de lait écrémé sèche (ou d'humidité connue). Dissolvons avec soin cette prise d'essai dans de l'eau distillée ; ramenons à 15° ; complétons à 100 cm³. Après agitation, prenons la « densité » P à 15° du lait ainsi reconstitué.

L'extrait sec de ce lait, par litre, est égal à 10 p.

Nous avons donc comme ci-dessus :

$$P = 10 p + 1.000 - \frac{10 p}{d_2} \text{ ou } d_2 = \frac{10 p}{10 p - (P - 1.000)}$$

3° Enfin, une dernière méthode consiste à mélanger un poids connu p de poudre de lait sèche à un volume connu v d'éther de pétrole ou d'éther sulfurique et à mesurer le volume final V.

La différence V - v représente évidemment le volume de p gr. de poudre dont on peut ainsi déduire la densité réelle.

L'expérience est difficile à réussir. Il faut opérer au picnomètre, verser l'éther d'une burette graduée sur la poudre en agitant, prendre des précautions spéciales pour ne pas perdre d'éther et rester à 15° pour les mélanges comme pour la pesée.

Voici les résultats que nous avons obtenus en appliquant ces trois groupes de méthodes :

1° Application de la première méthode (d_2 tiré de l'extrait sec par le calcul).

a) Sur des laits écrémés très frais absolument exempts de matière grasse.

Les densités à 15° prises au picnomètre ou au densimètre de précision sont toutes comprises entre 1.034,5 et 1.035. Nos extraits secs à 100° varient entre 90 et 92,7 (valeurs certainement un peu trop faibles).

d_2 (par application de la première formule ci-dessus) est compris entre 1,602 et 1,625 avec une moyenne générale de 1,610.

b) Sur des laits écrémés de quelques jours, bichromatés (correction faite du bichromate sur la densité et sur l'extrait).

Les densités à 15° corrigées sont comprises entre 1033,5 et 1035,8. Les extraits secs corrigés varient entre 87 et 94,6 (laits de provenance très diverses).

d_2 est compris entre 1,602 et 1,630.

Il est à remarquer que, plus le lait est altéré, plus l'extrait sec déterminé directement est faussé (par défaut). Or si e diminue dans la formule ci-dessus, d_2 augmente. Nous sommes donc fondés à conclure que les meilleures valeurs de d_2 sont les plus faibles (1,602) comme correspondant aux extraits secs les plus corrects.

2° Application de la deuxième méthode (par la densité du lait reconstitué avec de la poudre de lait écrémé bien séchée).

Nous avons obtenu des résultats voisins entre eux dont la moyenne générale est $d_2 = 1,5956$.

3° Application de la troisième méthode (volume réel de la poudre sèche apprécié à l'aide du pycnomètre).

Nous avons obtenu des chiffres compris entre 1,596 et 1,613 avec une moyenne générale de 1,605.

Ainsi toutes nos moyennes (en ne prenant pour les résultats de la première série que les plus faibles, pour la raison indiquée) sont comprises entre 1,595 et 1,605.

Nous prenons donc comme moyenne générale : $d_2 = 1,600$.

Les rares chiffres donnés par les quelques auteurs qui se sont occupés de ces questions sont compris entre 1,520 et 1,650. Quelques chiffres plus précis peuvent être donnés :

$$\begin{aligned} d_2 &= 1,606 \text{ (Hinard)} \\ &= 1,603 \text{ (Demichel)} \\ &= 1,600 \text{ (Fleischmann)} \end{aligned}$$

La valeur que nous avons retrouvée est donc exactement celle de Fleischmann ; alors que pour d_1 (0,915) nous différons notablement du chiffre qu'il avait adopté (0,930) et qui se rapporte vraisemblablement à de la matière grasse pure de beurre.

* * *

CORRECTION A APPORTER AUX FORMULES DE L'EXTRAIT SEC

Revenons à notre formule fondamentale (équation n° 1) :

$$P = B + e + 1.000 - \left(\frac{B}{d_1} + \frac{e}{d_2} \right)$$

Maintenant que nous connaissons les valeurs à donner à d_1 (0,915) et à d_2 (1,600) cette équation, où $e = E - B$, permet, connaissant deux termes P, B, E de déterminer le troisième. Or, c'est là le problème que nous nous sommes proposé en commençant.

Le cas particulier le plus intéressant et le plus connu de l'application de cette formule est celui qui conduit aux équations dites « d'extrait sec » (Fleischmann et autres) permettant de calculer E connaissant le poids du litre P et la matière grasse au litre B.

Arrêtons-nous un instant à ces formules pour y introduire une petite modification de nature à les rendre plus exactes.

Dégageons d'abord la valeur de E.

La formule fondamentale peut s'écrire :

$$P = B - \frac{B}{d_1} + e - \frac{e}{d_2} + 1.000$$

$$= B \left(1 - \frac{1}{d_1} \right) + e \left(1 - \frac{1}{d_2} \right) + 1.000$$

Posons : $\alpha = 1 - \frac{1}{d_1}$ $\beta = 1 - \frac{1}{d_2}$

Il vient :

$$P = B\alpha + e\beta + 1.000$$

ou, comme $e = E - B$.

$$P = B\alpha + E\beta - B\beta + 1.000$$

$$= E\beta + B(\alpha - \beta) + 1.000$$

d'où :

$$E\beta = P - 1.000 - B(\alpha - \beta) = P - 1.000 + B(\beta - \alpha)$$

et finalement :

$$E = \frac{1}{\beta} (P - 1.000) + \frac{\beta - \alpha}{\beta} B \quad (\text{équation n}^\circ 2)$$

Les données expérimentales sont : P (poids du litre en grammes) et B (matière grasse en grammes par litre).

Quant aux coefficients $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{\beta - \alpha}{\beta}$, ils se déduisent aisément de d_1 et d_2 puisque $\alpha = \frac{d_1 - 1}{d_1}$ et $\beta = \frac{d_2 - 1}{d_2}$.

Appliquons à d_1 et d_2 les valeurs proposées plus haut. Nous avons :

$$\alpha = -0,0928 \quad \beta = 0,375$$

d'où :

$$\frac{1}{\beta} = 2,666 \quad \text{et} \quad \frac{\beta - \alpha}{\beta} = 1,247$$

Notre formule finale s'écrit donc :

$$E = 2,666 (P - 1.000) + 1,247 B \quad (\text{équation n}^\circ 3)$$

ou :

P = poids en grammes du L. de lait.

B = matière grasse en grammes par L. de lait.

On reconnaît ici la forme la plus simple de l'équation de Fleischmann ; mais on notera qu'elle en diffère quelque peu, car le terme d_1 de Fleischmann vaut 0,930, alors que nous avons estimé devoir le prendre égal à 0,915 pour les raisons exposées plus haut.

En répétant ces calculs dans les cas des formules des divers

autres auteurs afin de leur donner une allure unique, nous obtenons les équations suivantes :

Notre formule ($d_1 = 0,915$ $d_2 = 1,600$)	$E = 2,666 (P - 1.000) + 1,247 B$
Formule de Fleischmann ($d_1 = 0,930$ $d_2 = 1,600$)	$E = 2,665 (P - 1.000) + 1,20 B$
Formule de Pierre ($d_1 = 0,930$ $d_2 = 1,609$)	$E = 2,642 (P - 1.000) + 1,19 B$
Formule de Hinard ($d_1 = 0,934$ $d_2 = 1,605$)	$E = 2,652 (P - 1.000) + 1,18 B$
Formule de Quesneville ($d_1 = 0,978$ $d_2 = 1,571$)	$E = 2,750 (P - 1.000) + 1,06 B$
Formule de Demichel ($d_1 = 0,950$ $d_2 = 1,603$)	$E = 2,658 (P - 1.000) + 1,14 B$

Comparons ces diverses formules dans quelques cas pratiques de laits dont on a déterminé avec beaucoup de soin le poids du litre en grammes à l'aide d'un densimètre de précision, la matière grasse et également l'extrait sec obtenu directement par pesée, soit par la méthode classique au bain-marie bouillant (avec ou sans sable) soit *par dessiccation à 50° en présence de sable et en s'aidant du vide sulfurique jusqu'à poids constant.*

Cette dernière méthode, longue et délicate, doit être considérée comme la plus exacte car elle permet d'éliminer toute trace d'humidité sans provoquer d'altération de l'extrait, alors qu'à 100° on décompose certains éléments du lait et il en résulte une perte non négligeable de matières sèches.

Numéros des laits	1	2	3	4	5	6
Poids du litre en grammes	1.031,35	1.031,05	1.031,40	1.031,40	1.032,00	1.030,60
Matière grasse au litre	35,16	34,50	33,33	34,33	34,00	32,16
Extrait sec par pesée à 100° :						
avec sable	124,40	123,66	122,61	123,65	125,55	119,80
sans sable	124,29	124,02	122,06	123,00	125,60	119,34
Extrait sec à 50° et vide sulfurique	126,80	126,37	125,56	126,06	127,00	122,03
Extrait sec calculé par :						
notre formule	127,41	125,79	125,27	126,51	127,70	121,67
la formule de Fleischmann	125,73	124,14	123,68	124,87	126,08	120,13
la formule de Pierre	124,66	123,08	122,61	123,80	125,00	119,11
la formule de Hinard	124,62	123,05	122,59	123,77	124,98	119,09
la formule de Quesneville	123,47	121,95	121,67	122,73	124,04	118,23
la formule de Demichel	123,40	121,86	121,45	122,59	123,81	117,99

Exprimons maintenant les écarts constatés entre les résultats obtenus par les diverses formules d'une part et par l'extrait sec à 50° avec vide sulfurique d'autre part :

Numéros des laits	1	2	3	4	5	6
Ecart constatés avec :						
notre formule	+ 0,61	— 0,58	— 0,29	+ 0,45	+ 0,70	— 0,36
la formule de Fleischmann . . .	— 1,07	— 2,23	— 1,88	— 1,19	— 0,92	— 1,90
la formule de Pierre	— 2,14	— 3,29	— 2,95	— 2,26	— 2,00	— 2,92
la formule de Hinard	— 2,18	— 3,32	— 2,97	— 2,29	— 2,02	— 2,94
la formule de Quesneville . . .	— 3,33	— 4,42	— 3,89	— 3,33	— 2,96	— 3,80
la formule de Demichel	— 3,40	— 4,51	— 4,11	— 3,47	— 3,19	— 4,04

Ces tableaux comportent quelques enseignements très intéressants :

1° Les extraits secs obtenus à 100° sont déficitaires par suite des décompositions subies par certains éléments du lait à cette température. L'ordre de grandeur de l'erreur ainsi commise est de : 2 gr. 5 à 3 grammes.

2° Notre formule est celle qui s'approche le mieux des extraits secs réels, correctement exécutés, c'est-à-dire obtenus directement par une déshydratation complète à basse température (50°) en s'aidant du vide sulfurique.

3° La formule de Fleischmann est, de toutes les autres, celle qui s'écarte le moins des résultats réels.

La raison de la supériorité de notre formule tient simplement au fait que la valeur du terme d_1 (densité de la matière grasse pure) est conforme à la réalité. Nous avons déterminé d_1 (0,915) sur de la matière grasse pure *de lait*, alors que les autres auteurs ont travaillé sur des matières grasses *de beurre*, c'est-à-dire modifiées par l'acidification au cours de la maturation de la crème.

* * *

EXTENSION DE LA FORMULE DE L'EXTRAIT SEC A LA NOTION DE " COURBE DE DENSITÉ "

Les formules précédentes permettent évidemment, conformément au problème initial posé, de déterminer la densité connaissant l'extrait sec et la matière grasse. Ce problème ne se pose jamais dans la pratique de l'analyse du lait (sauf dans le cas de laits fortement altérés ou caillés par exemple.) Mais il comporte des conséquences intéressantes. En effet :

De l'équation n° 3 on tire :

$$E = 2,666 P - 2,666 + 1,247 B$$

d'où :

$$P = \frac{E - 1,247 B}{2,666} + 1,000 \quad (\text{équation n° 4})$$

Or, le terme $E = B + e$ ($e =$ matière sèche non grasse ou extrait dégraissé).

Donc :

$$P = \frac{B + e - 1,247 B}{2,666} + 1,000$$

ou encore :

$$P = \frac{e - 0,247 B}{2,666} + 1,000$$

ou enfin :

$$P = \frac{e + 2,666}{2,666} - 0,0926 B \quad (\text{équation n° 5})$$

Faisons l'hypothèse que e soit constant. On aurait :

$$P = K_1 - K_2 B$$

expression de la forme $y = -ax + b$.

Cette équation exprime la variation de P (ou de la densité) en fonction de la matière grasse et se représente graphiquement par une droite.

Pour une autre valeur de e on aurait une fonction analogue traduite par une autre droite parallèle à la première car le terme e n'est pas contenu dans le coefficient K_2 et la pente de la courbe n'est pas, de ce fait, affectée par le changement de valeur de e .

En effet : on calcule aisément ces fonctions pour :

$e = 88$	$P = 1033,00 - 0,0926 B$
$e = 90$	$P = 1033,75 - 0,0926 B$
$e = 92$	$P = 1034,50 - 0,0926 B$

Ceci revient à dire que :

a) Si l'extrait sec dégraissé de tous les laits était constant, la densité serait fonction de la matière grasse et le graphique exprimant cette relation serait une droite unique.

b) En envisageant tous les extraits dégraissés possibles entre deux limites extrêmes, on obtient un faisceau de droites parallèles ou une zone rectiligne exprimant la variation de la densité en fonction de la matière grasse.

Dans le cas du lait, où la densité peut toujours être déterminée directement, ce faisceau de droites, cette zone, ne peut pas avoir

d'utilité pratique (sauf peut-être pour juger instantanément d'une anomalie grave dans la détermination de la densité ou de la matière grasse). D'ailleurs l'importance relative du terme e vis-à-vis du terme B , et par conséquent la grande incidence des variations de e sur la valeur de P , ne permet pas de retenir pratiquement l'hypothèse de e constant pour utiliser l'équation n° 5 au calcul de la densité du lait, en fonction de sa matière grasse.

Toute autre est la situation dans le cas des crèmes où, en raison de la grande importance de B vis-à-vis de e , les variations de la valeur fondamentale de ce dernier terme (c'est-à-dire dans un litre de lait écrémé contenu dans la crème) ont une influence presque insignifiante sur le résultat final. On conçoit que l'on puisse, comme nous le ferons, en utilisant la notion de « courbe de densité » exposée ci-dessus, exprimer la densité de la crème en fonction de sa seule teneur en matière grasse. La courbe obtenue pourra être de quelque utilité dans le contrôle de ces produits, où la densité est pratiquement impossible à déterminer dans le travail industriel courant.

* * *

RELATIONS DE DENSITÉ DANS LES LAITS ÉCRÉMÉS

L'application de l'équation n° 5 au cas du lait écrémé nous donne, en faisant $B = 0$:

$$P = \frac{e + 2666}{2,666} = 1,000 + 0,375 e \quad (\text{équation n° 6})$$

Cela traduit, comme on pouvait évidemment le prévoir, que la densité du lait écrémé est fonction de son extrait sec.

N'oublions pas que le coefficient de e (0,375) n'est autre que β ou $\frac{d_2 - 1}{d_2}$, c'est-à-dire que, sous cette forme, la fonction précédente implique que la densité d_2 des matières sèches non grasses soit constante. Or, tel n'est pas le cas. Nous avons pris $d_2 = 1,600$ (valeur moyenne). Si l'on prend pour valeurs extrêmes 1,580 et 1,620, la valeur de P est comprise entre les deux droites :

$$P = 1,000 + 0,367 e \quad \text{et} \quad P = 1,000 + 0,382 e$$

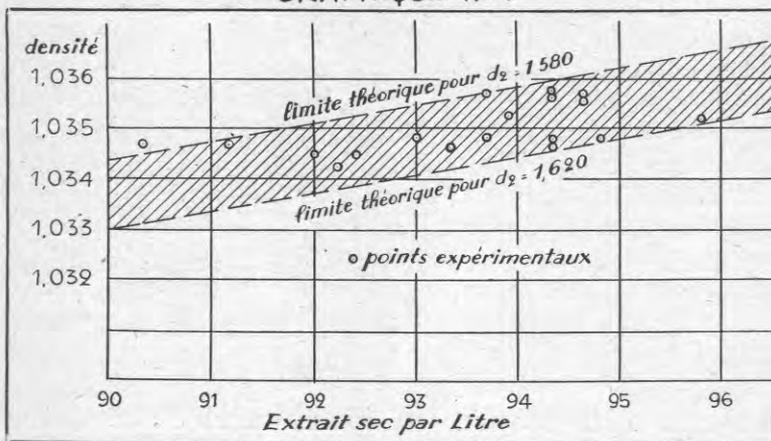
Là encore, nous avons une « zone » rectiligne comprise entre ces deux droites et exprimant la variation de la densité en fonction de l'extrait sec. (Voir ci-joint le graphique, n° 1, exprimant cette variation.)

Inversement, il va de soi qu'on peut calculer l'extrait sec du lait écrémé connaissant sa densité à l'aide de la formule ci-dessous :

$$e = \frac{P - 1.000}{0,375} = 2,666 (P - 1.000)$$

On reconnaît l'équation n° 3 où l'on a fait $B = 0$.

GRAPHIQUE N°1



Laits écrémés. — Zone de variation de la densité en fonction de l'extrait sec.

* * *

CORRECTION DE LA DENSITÉ ET DE L'EXTRAIT SEC DES LAITS BICHROMATÉS

La densité d'un lait bichromaté est évidemment supérieure à celle du lait non bichromaté correspondant.

Il peut donc être utile de corriger dans l'analyse courante cette densité lue, à condition de connaître, par l'analyse ou autrement, la quantité de bichromate introduit.

Prenons le cas le plus fréquent de laits bichromatés à raison de 1 gramme par litre. Déterminons d'abord la densité réelle du bichromate.

Expérimentalement nous avons constaté qu'un litre de solution aqueuse de bichromate à 10% pèse 1.068 gr. 8.

Appelons d la densité du bichromate et exprimons le poids d'un litre de cette solution à 100 grammes par litre. On a :

$$1.068 \text{ gr. } 8 = 100 \text{ gr. (Pds du bichromate)} + \left(1.000 - \frac{100}{d}\right) (\text{pds de l'eau})$$

d'où : $d = 3,20$.

Le poids d'un litre d'une solution aqueuse à 1 gramme par L. est donc égale à :

$$1 + 1.000 - \frac{1}{d} \text{ ou } 1.000 + 0,688$$

Donc, l'apport d'un gramme de bichromate par litre de solution (quelle qu'elle soit) majore sa densité de 0,000688, soit 0,0007 en chiffres ronds.

Le poids du litre d'un lait bichromaté à 1 gramme par litre doit donc être diminué de 0,7 pour le ramener à celui du lait pur correspondant (exemple : 1.032,7 devient 1.032,0).

Bien entendu, cette correction de la densité introduite dans les formules d'extrait sec ne suffirait pas à fournir un chiffre exact pour cet extrait. En retranchant 0,7 à P, on diminue l'extrait de $0,7 \times 2,666$ soit de 1 gr. 86 d'extrait sec *de lait*, alors que cet extrait n'était faussé en trop, par la présence du bichromate, que de 1 gramme.

Il convient donc, ayant rectifié la densité et calculé l'extrait, de majorer celui-ci de la différence $1,86 - 1 = 0,86$.

* * *

RELATIONS DE DENSITÉ DANS LES LAITS CONCENTRÉS

CALCUL DE LA DENSITÉ DES LAITS CONCENTRÉS CONNAISSANT LE TAUX DE CONCENTRATION ET CALCUL DU TAUX DE CONCENTRATION CONNAISSANT LA DENSITÉ

I. Calcul de la densité connaissant le taux de concentration

Pour des laits très concentrés, la densité est difficile à déterminer directement avec exactitude. Si l'on connaît le taux de concentration, cette densité est facile à calculer. En effet :

Appelons C le taux de concentration, c'est-à-dire la quantité d'eau enlevée à 100 centimètres cube de lait initial. Si un litre de lait est réduit à 300 cm³ par élimination de 700 cm³ d'eau, nous dirons que le taux de concentration a été de 70% ; C = 70.

L'extrait sec total E d'un litre de lait initial est toujours présent dans ce volume final (de 300 cm³ par exemple). Or, ce volume final vaut $1.000 - 10 C$ cm³.

L'extrait sec *d'un litre de lait concentré* vaut donc :

$$E_1 = \frac{E \times 1.000}{1.000 - 10 C}$$

La matière grasse B d'un litre de lait initial est toujours contenue dans $1.000 - 10 C$ de lait concentré. La matière grasse *d'un litre de lait concentré* vaut donc :

$$B_1 = \frac{B \times 1.000}{1.000 - 10 C}$$

Reprenons maintenant l'équation n° 4 exprimant la densité d'un lait quelconque en fonction de l'extrait sec total et du poids de matière grasse B au litre.

On a :

$$P = \frac{E - 1,247 B}{2,666} + 1.000$$

Cette formule est évidemment applicable au cas des laits concentrés. Elle donnerait ainsi P_1 (poids du litre de lait concentré) si l'on connaissait E_1 et B_1 extrait total et matière grasse par litre du lait concentré.

Or, nous pouvons très bien éviter d'effectuer ces déterminations sur le lait concentré si nous connaissons E et B (du lait initial) en faisant intervenir le terme C (taux de concentration).

L'équation n° 4 peut s'écrire :

$$P_1 = \frac{E_1}{2,666} - \frac{1,247 B_1}{2,666} + 1.000$$

Or nous avons calculé ci-dessus les valeurs de E_1 et de B_1 en fonction de E et de B. Introduisons-les dans cette équation. Nous aurons :

$$P_1 = \frac{E}{2,666} \times \frac{1.000}{1.000 - 10 C} - \frac{1,247 B}{2,666} \times \frac{1.000}{1.000 - 10 C} + 1.000$$

ou :

$$P_1 = \frac{1.000}{1.000 - 10 C} \left(\frac{E - 1,247 B}{2,666} \right) + 1.000 \quad (\text{équation n° 7})$$

Telle est l'expression du poids du litre d'un lait concentré connaissant l'extrait et la matière grasse du lait initial et le taux de concentration.

Nous pouvons également exprimer P_1 en fonction de P (poids du litre de lait initial).

En effet, l'équation n°7 peut s'écrire :

$$P_1 = \frac{1.000}{1.000 - 10 C} \left(\frac{E - 1,247 B}{2,666} \right) + \frac{1.000 (1.000 - 10 C)}{1.000 - 10 C}$$

ou encore :

$$P_1 = \frac{1.000}{1.000 - 10 C} \left(\frac{E - 1,247 B}{2,666} + 1.000 - 10 C \right)$$

c'est-à-dire finalement, en faisant intervenir l'équation n° 4 :

$$P_1 = \frac{1.000}{1.000 - 10 C} (P - 10 C) \quad (\text{équation n° 8})$$

Cette équation qui donne la densité d'un lait concentré en fonction de celle du lait initial est évidemment valable pour tous les laits, écrémés ou non.

Exemple : soit 1.032 le poids d'un litre de lait entier avant concentration. On le concentre à 300 cm³ par exemple (c'est-à-dire des 7/10.) C = 70%. On a donc :

$$P_1 = \frac{1.000}{1.000 - 700} (1.032 - 700) = 1.106,6$$

En calculant de la même manière on peut, en partant d'un lait à 1.032 par exemple, constituer le tableau suivant :

1 litre de lait concentré à :	Taux de concentration	C	P ₁
1.000 cm ³	néant	0	1.032,0
900 cm ³	1/10	10	1.035,5
800 cm ³	2/10	20	1.040,0
700 cm ³	3/10	30	1.045,7
600 cm ³	4/10	40	1.053,3
500 cm ³	5/10	50	1.064,0
400 cm ³	6/10	60	1.080,0
300 cm ³	7/10	70	1.106,6
200 cm ³	8/10	80	1.160,0

Le graphique n° 2 qui représente ces variations est un arc d'hyperbole. D'ailleurs si l'on se fixe P (comme nous l'avons fait dans le tableau ci-dessus pour un exemple) et si l'on étudie la variation de P₁ (= y) en fonction de la variable C (= x) on a une équation de la forme

$$y = \frac{A - ax}{B - bx}$$

Cette fonction du 2^e degré se représente effectivement par une hyperbole.

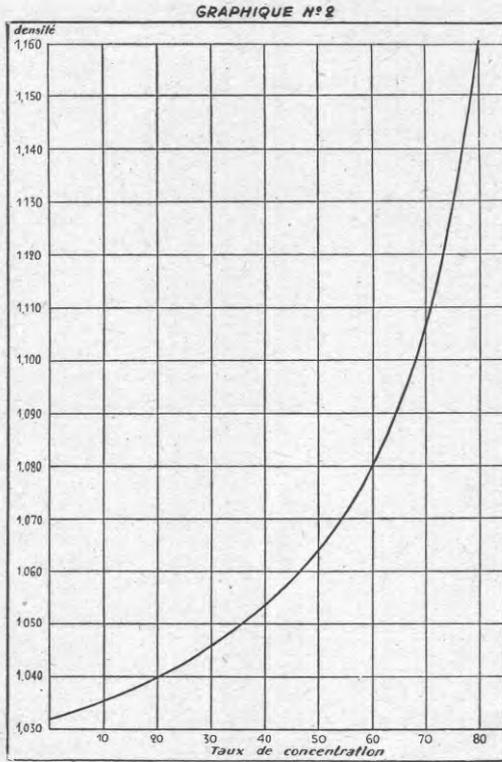
Pour diverses densités du lait initial on aurait un faisceau d'arcs hyperboliques coupant l'axe des y au point qui correspond à la valeur de la densité du lait initial et comportant évidemment une asymptote verticale unique pour C = 100 (P₁ = ∞).

II. Calcul du taux de concentration connaissant la densité

Le problème inverse du précédent est tout aussi facile à résoudre. Reprenons l'équation n° 8.

De :

$$P_1 = \frac{1.000}{1.000 - 10 C} (P - 10 C)$$



Laits concentrés. — Variation de la densité en fonction du taux de concentration. (Equation n° 8).

on tire :

$$1.000 P_1 - 10 P_1 C = 1.000 P - 10.000 C$$

d'où :

$$10 C (P_1 - 1.000) = 1.000 (P_1 - P)$$

et enfin :

$$C = \frac{1.000 (P_1 - P)}{10 (P_1 - 1.000)} \quad (\text{équation n° 9})$$

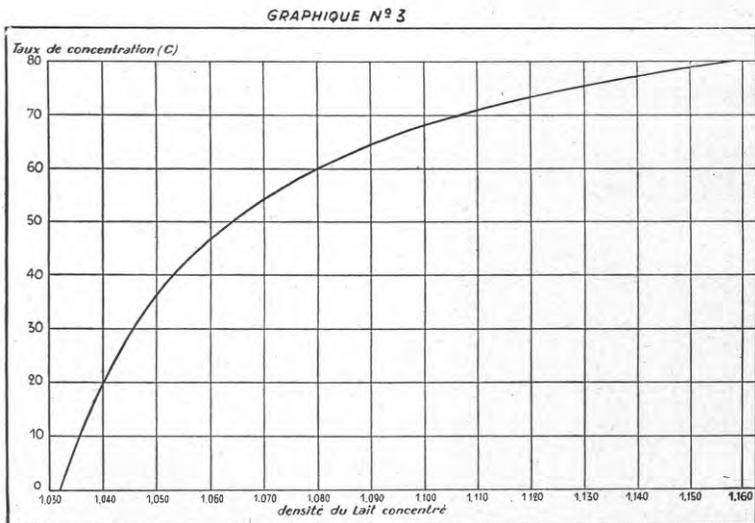
Cette équation permet, connaissant la densité du lait initial et la densité du lait concentré, de déduire le taux de concentration.

Si l'on pose $P = 1.032$ par exemple, la fonction C ne dépend plus que de P_1 , et, comme celle de l'équation n° 8, elle permet l'établissement d'un tableau tel que le suivant :

Poids du litre de lait concentré	Taux de concen- tration
1.032	0
1.034	5,9
1.036	11,1
1.038	15,8
1.040	20,0
1.045	23,8
1.050	36,0
1.060	46,6
1.070	54,3
1.080	60,0
1.090	64,4
1.100	68,0
1.120	73,3
1.140	77,1
1.160	80,0

Cette fonction, comme celle que représente l'équation n° 8, se traduit graphiquement par un arc d'hyperbole (voir graphique n° 3). En effet, se fixant P et en faisant $P_1 = x$ et $C = y$ on a une équation de la forme :

$$y = \frac{ax - A}{bx - B} \text{ (fonction hyperbolique)}$$



Laits concentrés. — Variation du taux de concentration en fonction de la densité. (Equation n° 9).

Les équations n° 8 et n° 9, les tableaux qu'elles permettent d'établir ainsi que les graphiques qui les représentent dans le cas

de $P = 1.032$, ou les tableaux et les graphiques analogues qu'on peut construire pour toute autre densité initiale, donnent le moyen de contrôler la marche de certaines fabrications : l'équation n° 8 par exemple permet de déterminer à quelle densité il faut aboutir pour obtenir un taux de concentration donné ; l'équation n° 9 permet de suivre la marche de la concentration en prenant simplement la densité à 15° du produit en cours de fabrication.

* * *

RELATIONS DE DENSITÉ DANS LES CRÈMES

I. Nécessité de la connaissance de la densité des crèmes

De nombreuses fabrications nécessitent l'apport de crème dans des pâtes de fromage par exemple (cœurs à la crème, doubles-crèmes, triples-crèmes) ou dans des mélanges à base de lait ou de poudre de lait (crèmes glacées).

La réglementation précise de tous ces produits exige la connaissance exacte du poids de matière grasse pure introduite pour parvenir dans le produit final à une richesse bien déterminée.

Pendant de longues années on s'est contenté d'apprécier les quantités de crème par les *volumes* mis en œuvre et sa richesse par son taux de *matière grasse au litre*.

Or, de fréquentes et parfois graves erreurs ont été constatées ; les prévisions de l'analyse et du calcul ne se trouvaient pas vérifiées dans la pratique.

Les mêmes difficultés se sont rencontrées dans la comptabilité intérieure d'usines recevant de la crème pour la transformer en beurre. Les bilans faisaient apparaître des écarts en plus ou en moins entre les entrées et les sorties de matière grasse pure.

Une étude attentive a montré que toutes ces erreurs et ces écarts provenaient d'inexactitudes commises tant sur l'appréciation des volumes de crème, que sur l'analyse volumétrique elle-même.

La crème, à sa sortie de l'écrémeuse, contient en effet une quantité d'air variable et non négligeable. Certaines fermentations, et non pas seulement des fermentations alcooliques, donnent naissance à du gaz carbonique.

Le volume de crème déterminé lors de la mise en pots ou en citernes ne se trouve jamais identique après un certain nombre d'heures de repos ou de transport. Il se produit un « tassement » de la crème bien connu des praticiens. Si l'analyse volumétrique est effectuée à l'arrivée, la crème est trouvée plus riche qu'elle n'a été expédiée ; et s'il n'est pas tenu compte de cette diminution de volume, la quantité totale de matière grasse pure trouvée à

l'entrée est supérieure à la réalité et ne concordera pas avec celle que l'on retrouvera à la sortie sous forme de beurre par exemple.

De même, il est difficile d'apprécier, avec exactitude, de petits volumes de crème introduits dans une fabrication, surtout si cette crème est épaisse.

Enfin, l'analyse elle-même est affectée par l'état physique ou bactériologique de la crème. Suivant la quantité d'air ou de CO² qu'elle contient, suivant sa température et sa viscosité, les prélèvements de 10 cm³ des méthodes classiques sont le plus souvent erronés, parfois d'une quantité notable et l'analyse s'en trouve faussée.

Ces deux causes d'erreur ont conduit de nombreux industriels à apprécier les *quantités de crème par pesée* et à effectuer également *l'analyse sur une prise d'essai pondérale*.

Cette méthode de travail est rigoureuse. Malheureusement elle n'est pas encore généralisable. La plupart des transactions, en effet, se font en volume et les fabricants qui utilisent la crème dans leurs préparations déterminent encore les quantités mises en œuvre par des volumes. Il est possible du moins de supprimer la cause d'erreur due à l'analyse en effectuant celle-ci en poids. La détermination de la quantité de matière grasse totale nécessite alors *la connaissance de la densité de la crème*. En multipliant le résultat de l'analyse au kilogramme par la densité, on obtient, en effet, la richesse au litre.

Inversement, il peut arriver qu'on n'ait pas le moyen d'effectuer l'analyse en poids (pour laquelle une balance de précision est nécessaire) mais qu'on puisse, en revanche, apprécier les quantités de crème par pesée. La connaissance de la densité est encore indispensable. En divisant le résultat de l'analyse volumétrique de la crème par sa densité on obtient sa richesse au kilogramme.

Il est donc nécessaire, dans de nombreux cas, de connaître exactement la densité de la crème. Or, il est très difficile, même en disposant d'un laboratoire bien outillé, de la déterminer directement avec précision. Dans le contrôle industriel courant, la chose est totalement impossible.

Il convenait donc d'essayer de tourner cette difficulté. Nous allons montrer que la chose est parfaitement réalisable et que la densité de la crème peut être déduite de sa seule teneur en matière grasse (par litre ou par kilogramme).

II. Expression de la densité en fonction du taux de matière grasse au litre.

Nous avons dit plus haut, à propos de l'équation n° 5 (expression de la densité d'un lait entier en fonction de son extrait dégraissé et de sa matière grasse au litre) que, si le terme e était constant,

la densité du lait serait rigoureusement fonction du terme B. (Notion de « courbe de densité ».)

Dans les laits entiers, le terme e varie entre certaines limites assez larges pour rendre une telle courbe inutilisable pratiquement.

Dans les crèmes, ce même terme e varie d'une façon encore plus considérable. Le volume de lait écrémé contenu dans un litre de crème peut varier entre 400 et 700 cm³, par exemple. L'extrait sec de cette quantité, qui constitue la matière sèche, non grasse, du litre de crème (e), varie donc aussi très notablement. L'équation n° 5, sous sa forme primitive, est ici encore moins employable que dans le cas des laits entiers.

Mais on sait que le terme e des laits écrémés présente une certaine constance (il varie entre 90 et 95) qui correspond elle-même à une certaine régularité de leur densité.

Au lieu d'exprimer le poids du litre de crème en fonction de sa matière grasse et de son extrait dégraissé propre (e), faisons intervenir, à côté de la matière grasse, la *composition* du lait écrémé exprimée par son extrait moyen (93 environ) ou par sa densité moyenne (1,035). Nous obtiendrons ainsi une formule où e (extrait dégraissé de la crème) ne figurera pas et où P sera seulement fonction de B.

Pour établir aisément cette relation, posons d'abord :

P (poids du litre de crème) = B (poids de matière grasse en grammes par litre) + P₁ (poids de lait écrémé contenu dans un litre de crème).

Or, le volume en centimètres cubes du lait écrémé contenu dans un litre de crème vaut :

$$1.000 \text{ cm}^3 - \frac{B}{0,915} \text{ (volume de la matière grasse)}$$

Le poids en grammes de ce volume vaut :

$$P_1 = 1,035 \left(1.000 - \frac{B}{0,915} \right)$$

d'où :

$$P = B + 1,035 \left(1.000 - \frac{B}{0,915} \right) = B + 1035 - 1,1311 B$$

et finalement :

$$P = 1035 - 0,1311 B \quad (\text{équation n}^\circ 10)$$

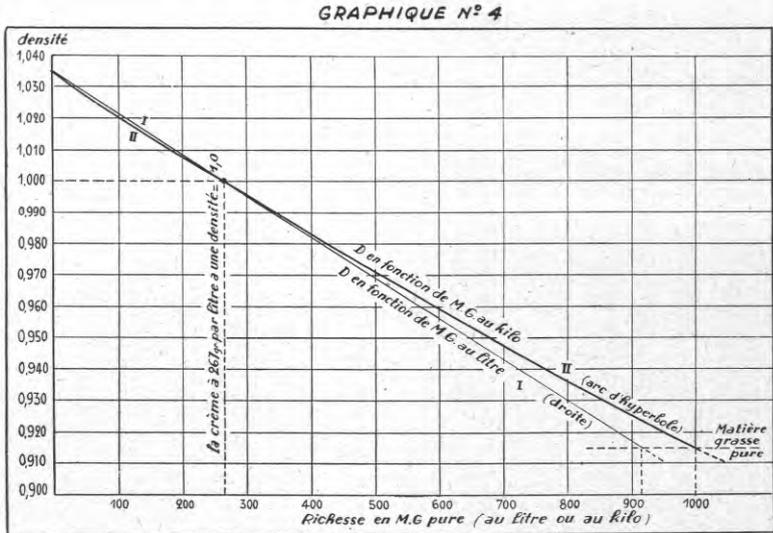
Cette équation permet donc de calculer le poids d'un litre de crème connaissant sa richesse en matière grasse par litre.

Voici quelques exemples d'application :

Richesse en matière grasse par litre	Poids du litre
0 (lait écrémé)	1.035,0
100	1.021,9
200 (1)	1.008,8 (1)
300	995,6
400	982,5
500	969,4
600	956,3
700	943,2
800	930,1
915	915,0

(M. G. pure)

Le graphique n° 4, qui représente les variations de P en fonction de B, permet de trouver instantanément la densité de la crème connaissant sa richesse en matière grasse au litre.



Crèmes. — Variation de la densité en fonction de la matière grasse au litre (I) ou au kilo (II). (Equations nos 10 et 11).

Il est intéressant de se demander si la densité déterminée directement au laboratoire correspond bien aux valeurs données par la formule ou le graphique. Il en est bien ainsi ; en effet :

(1) La crème dont la densité est exactement égale à 1,0 contient 267 grammes de matière grasse par litre (voir plus loin).

Richesse en matière grasse au litre	Densité calculée	Densité obtenue directement
190	1.010,1	1.011,3
430	978,6	977,0
470	973,4	975,6
527	965,9	963,8
545	963,5	962,5
550	962,9	962,1

REMARQUE

Le graphique comporte deux points intéressants :

celui qui correspond à $B = 0$ représente la densité moyenne des laits écrémés.

celui qui correspond à la matière grasse pure (« crème » à 915 grammes de matière grasse par litre) donne bien pour P la valeur de 915 grammes, poids du litre d'une telle « crème ».

III. Expression de la densité de la crème en fonction du taux de matière grasse au kilo.

Nous avons dit que la détermination précise de la richesse en matière grasse des crèmes devait se faire sur un prélèvement pondéral, non susceptible d'être faussé par l'air occlus ou par les gaz de fermentation. Une telle analyse donne la richesse de la crème au kilogramme.

Il peut être utile, dans ce cas également, de pouvoir calculer la densité.

Désignons par B_k la teneur en matière grasse de la crème en grammes par kilogramme.

On a évidemment :

$$B_k = \frac{B \times 1.000}{P} \text{ d'où } B = \frac{B_k \times P}{1.000}$$

Portons cette valeur dans l'équation n° 10. Nous aurons :

$$P = 1035 - \frac{0,1311 \times B_k P}{1.000}$$

d'où :

$$1.000 P = 1035 \times 1.000 - 0,1311 P B_k$$

dont on tire :

$$P (1.000 + 0,1311 B_k) = 1035 \times 1.000$$

et finalement :

$$P = 1.000 \frac{1.035}{1.000 + 0,1311 B_k} \quad (\text{équation n° 11})$$

Cette fonction, de la forme $y = \frac{1}{1 + x}$, se traduit graphique-

ment par un arc d'hyperbole (voir graphique n° 4). Elle permet de calculer la densité de la crème connaissant sa richesse en matière au kilogramme.

Voici quelques exemples d'applications :

Richesse en matière grasse au kilogramme de crème	Poids du litre
0 (lait écrémé)	1.035,0
100	1.021,6
200	1.008,5
300	995,8
400	983,4
500	971,3
600	959,6
700	948,0
800	936,7
900	925,7
1.000	915,0

(M. G. pure)

IV. Expression de la matière grasse au kilogramme en fonction de la matière grasse au litre et inversement.

Nous avons vu que la matière grasse au litre (B) et la matière grasse au kilogramme (B_k) sont liées par la relation :

$$B_k = \frac{B \times 1.000}{P}$$

Remplaçons, dans cette équation, P par la valeur donnée par l'équation n° 10.

Nous avons :

$$B_k = \frac{1.000 B}{1.035 - 0,1311 B} \quad (\text{équation n° 12})$$

Cette équation peut s'écrire :

$$1.035 B_k - 0,1311 B B_k = 1.000 B$$

d'où :

$$B (1.000 + 0,1311 B_k) = 1.035 B_k$$

et finalement :

$$B = \frac{1.035 B_k}{1.000 + 0,1311 B_k} \quad (\text{équation n° 13})$$

Ces deux formules permettent, en particulier, de retrouver qu'une « crème » à 915 grammes de matière grasse par litre correspond bien à de la matière grasse pure (à 1.000 grammes par kilogramme.)

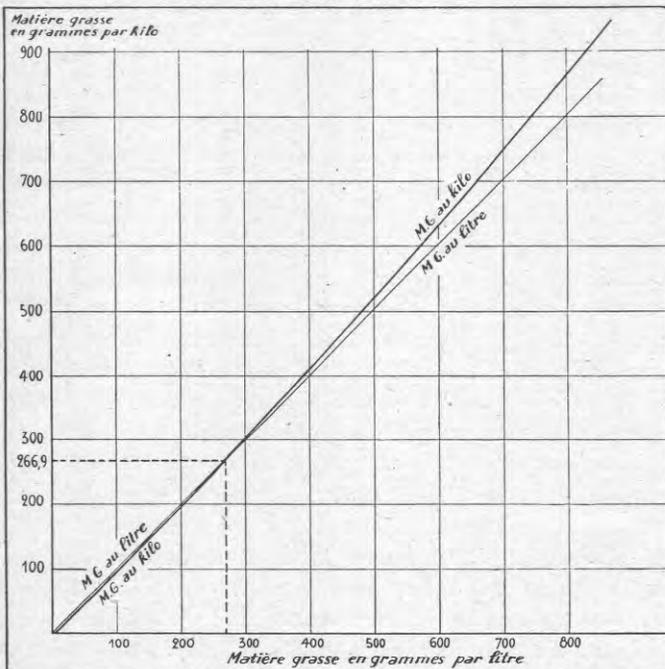
Si l'on fait $B = 915$, dans l'équation n° 12, on trouve $B_k = 1.000$.
Si l'on fait $B_k = 1.000$, dans l'équation n° 13, on trouve $B = 915$.

Le tableau ci-dessous exprime quelques-unes des valeurs correspondantes de B et de B_k :

Matière grasse par litre de crème	Matière grasse par kilogramme de crème	Ecart
100	97,8	— 2,2
200	198,2	— 1,8
300	301,3	+ 1,3
400	407,1	+ 7,1
500	515,7	+ 15,7
600	627,4	+ 27,4
700	742,1	+ 42,1
800	860,1	+ 60,1

Il existe donc un point pour lequel la matière grasse au kilogramme a la même valeur que la matière grasse au litre. C'est évidemment celui pour lequel la crème a une densité égale à 1,0. Pour ce point, on aura $B_k = B$ ce qui correspond à :

GRAPHIQUE N°5



Crèmes. — Variation de la matière grasse par kilo en fonction de la matière grasse par litre. (Equation n° 12).

$1.035 - 0,1311 B = 1.000$, c'est-à-dire $B = 266,9$ ou bien à :
 $1.000 + 0,1311 B_k = 1.035$, c'est-à-dire $B_k = 266,9$.

Ces deux matières grasses (au litre ou au kilogramme) s'expriment l'une en fonction de l'autre par une courbe qui est un arc d'hyperbole. La différence d'ordonnée entre la valeur de B_k ou de B et la bissectrice de l'angle des coordonnées donne, en tout point, la différence numérique entre ces deux valeurs (voir graphique n° 5).

* * *

Nous espérons que quelques-unes de ces formules, ainsi que les tableaux et les graphiques qu'elles ont permis d'établir, pourront rendre certains services dans la pratique courante de plusieurs industries.

REVUE

LES PROBLÈMES QUI RESTENT A RÉSOUDRE DANS L'INDUSTRIE LAITIÈRE

par

G. GÉNIN

Ingénieur E. P. C.

A l'occasion de la Conférence technologique des produits alimentaires qui a eu lieu au « Massachusetts Institute of Technology », en septembre 1937, et dont nous avons donné un court compte rendu, M. H. S. JUDKINS, vice-président des « Sealtest System Laboratories », a présenté une communication sur les problèmes qui restent encore à résoudre dans l'industrie laitière dont nous avons extrait les lignes qui suivent.

Les problèmes qui se posent dans l'industrie laitière apparaissent dès la production du lait à la ferme. Le lait est produit dans des millions de fermes ayant des caractéristiques très diverses, depuis la très petite installation qui ne dispose que de quelques pâturages, jusqu'aux fermes spécialisées qui sont de véritables industries. Dès la production, se posent tout d'abord certaines difficultés qui ont trait au problème de la production économique du lait, de l'obtention d'un lait de bonne qualité et de l'utilisation des excédents de lait non consommables sur place et qu'il faut par conséquent ramasser dans un grand nombre d'établissements dispersés.

Aux Etats-Unis, le Ministère de l'Agriculture subventionne un certain nombre d'associations de producteurs de lait dont le but est d'arriver à améliorer la production du lait à la ferme, mais le nombre