



Solutions quasi analytiques de l'équation d'absorption de l'eau par les sols non saturés. I. – Analyse critique

Michel Vaucelin, Randel Haverkamp

► To cite this version:

Michel Vaucelin, Randel Haverkamp. Solutions quasi analytiques de l'équation d'absorption de l'eau par les sols non saturés. I. – Analyse critique. *Agronomie*, 1985, 5 (7), pp.597-606. <hal-00884789>

HAL Id: hal-00884789

<https://hal.science/hal-00884789v1>

Submitted on 11 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Solutions quasi analytiques de l'équation d'absorption de l'eau par les sols non saturés. I. — Analyse critique

Michel VAUCLIN & Randel HAVERKAMP

Institut de Mécanique de Grenoble, L.A. C.N.R.S. n° 6, B.P. 68 - F 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

RÉSUMÉ

On présente une analyse critique des solutions approchées de l'équation non linéaire d'absorption d'eau par les sols non saturés fondées sur la relation flux-concentration introduite par PHILIP (1973). Six expressions différentes de cette relation obtenues à partir de la synthèse d'études théoriques sont considérées. Pour un sol particulier (sable de Grenoble), la comparaison entre solutions expérimentales, exactes (obtenues à partir de la transformation de Boltzmann) et approchées montrent que les solutions proposées par PARLANGE (1975) et BRUTSAERT (1976) conduisent aux meilleures estimations des profils hydriques (à 2 p. 100 près) et de la sorptivité capillaire (à 0,4 p. 100 près) respectivement.

Cette étude est ensuite généralisée à 8 autres sols très différents, pour lesquels les variations de la diffusivité capillaire avec l'humidité sont de type exponentiel.

Ces solutions, outre leur très bonne précision, présentent l'avantage de pouvoir être mises en œuvre très facilement sur de simples calculatrices de poche puisqu'elles ne requièrent que le calcul d'intégrales.

Mots clés additionnels : *Equation de diffusion non linéaire, transformée de Boltzmann, relation flux-concentration, sorptivité capillaire.*

SUMMARY

Quasi-analytical solutions of the equation for water absorption by unsaturated soils. I. — Critical analysis.

A critical analysis of approximated solutions of the non-linear equation for water absorption by non-saturated soils is presented. The solutions were based on the flux-concentration approach as proposed by PHILIP (1973). Six different expressions derived from theoretical studies were successively considered. In the particular case of Grenoble sand, comparison between experimental, exact (obtained through the Boltzmann transform) and approximate solutions showed that the solutions proposed by PARLANGE (1975) and BRUTSAERT (1976) led to the best results in terms of water content profiles (about 2 %) and sorptivity (about 0.4 %) respectively. The study was then extended to 8 other soils with an exponential diffusivity function. Besides their accuracy, these solutions have the great advantage of being worked very easily on pocket calculators because they only require integral calculations.

Additional key words : *Non linear diffusion equation, Boltzmann transform, flux-concentration relation, capillary sorptivity.*

I. INTRODUCTION

Le processus d'absorption horizontale d'eau par un sol non saturé obéit à une équation classique de diffusion non linéaire. La solution quasi-analytique exacte de PHILIP (1955), fondée sur la transformée de Boltzmann, montre que la quantité d'eau infiltrée est contrôlée par la sorptivité capillaire. Ce paramètre traduit en effet la capacité d'un sol à absorber l'eau par capil-

larité, pour des conditions initiales et aux limites données.

Sa connaissance est importante dans la pratique. En physique du sol, elle permet de déterminer directement (sans résolution de l'équation des transferts) les flux et les quantités d'eau infiltrées lorsque les effets capillaires sont prépondérants devant les effets gravitaires (écoulement horizontal, phase initiale de l'infiltration verticale).

En hydrologie, elle permet d'estimer le temps de submersion correspondant au début du ruissellement engendré par un apport d'eau (pluies naturelles, irrigation par aspersion) supérieur à l'infiltrabilité du sol.

De plus certaines méthodes expérimentales de détermination des propriétés hydrodynamiques des sols sont fondées sur la connaissance préalable de la sorptivité.

Une étude bibliographique montre que de nombreuses formules de calcul approché ont été établies à partir d'hypothèses sur le comportement hydraulique des sols.

On se propose ici d'effectuer une analyse critique de 6 formulations différentes de la sorptivité capillaire à partir de la relation flux-concentration introduite par PHILIP (1973) et d'étudier leur influence sur la solution du problème d'absorption horizontale d'eau par les sols non saturés.

II. ASPECTS THÉORIQUES

Considérons une colonne horizontale de sol initialement à une humidité volumique θ_n^* uniforme et inférieure à la saturation θ_s^* du milieu poreux. A l'instant $t^* = 0$, l'une des faces ($x^* = 0$) est soumise à un échelon positif d'humidité $\theta_s^* - \theta_n^*$. Cela correspond à une absorption d'eau par effets capillaires dans un milieu semi-infini. Il est bien connu que ce problème est correctement décrit par l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ D^*(\theta^*) \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right\} \quad (1a)$$

avec

$$x^* > 0, \quad t^* < 0, \quad \theta^* = \theta_n^* \quad (1b)$$

$$x^* = 0, \quad t^* \geq 0, \quad \theta^* = \theta_s^*, \quad (1c)$$

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$\theta = \frac{\theta^* - \theta_n^*}{\theta_s^* - \theta_n^*}; \quad x = \frac{x^*}{L}; \quad t = D_r^* \cdot \frac{t^*}{L^2}$$

où L est une longueur caractérisant la géométrie du système et D_r^* une valeur de référence de la diffusivité capillaire $D^*(\theta^*)$, le système d'équations (1) se normalise sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} \quad (2a)$$

$$x > 0 \quad t < 0 \quad \theta = 0 \quad (2b)$$

$$x = 0 \quad t \geq 0 \quad \theta = 1 \quad (2c)$$

où $D(\theta)$ est la diffusivité capillaire adimensionnelle : $D^*(\theta^*)/D_r^*$.

Le système (2) peut être résolu quasi-analytiquement selon les 2 méthodes suivantes.

A. Utilisation de la transformée de Boltzmann

L'utilisation de la variable de Boltzmann $\phi(\theta) = xt^{-1/2}$ (PHILIP, 1955) transforme l'équation aux dérivées partielles (2a) en l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\phi \cdot \frac{d\theta}{d\phi} = -2 \frac{d}{d\phi} \left\{ D(\theta) \cdot \frac{d\theta}{d\phi} \right\} \quad (3a)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \infty \quad \theta &= 0 \\ \phi = 0 \quad \theta &= 1. \end{aligned} \quad (3b)$$

La variable $\phi(\theta) = \phi^*/\phi_r^*$ (avec $\phi_r^* = \sqrt{D_r^*}$) est alors obtenue par l'intégration du système (3) soit :

$$\int_0^\theta \phi(\theta) d\theta = -2 D(\theta) \cdot \frac{d\theta}{d\phi}. \quad (4)$$

La résolution de l'équation intégral-différentielle (4) conduit à la solution exacte $\phi_{\text{réf}}$ du problème, aux erreurs numériques près, que l'on sait quantifier en fonction de la méthode d'intégration utilisée.

On notera que PARLANGE (1975) propose une résolution optimale de cette équation fondée sur l'utilisation d'un principe variationnel.

B. Utilisation de la relation flux-concentration

Plus récemment, PHILIP (1973) a introduit la fonction F définie par :

$$F = \frac{q_x}{q_0} \quad (5)$$

où q_x et q_0 sont les flux volumiques de l'abscisse x quelconque et $x = 0$ respectivement, donnés par l'équation :

$$q_x = - \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_x. \quad (6)$$

En introduisant la variable de Boltzmann dans (6), F prend la forme suivante :

$$F = \frac{\left[D(\theta) \frac{d\theta}{d\phi} \right]_x}{\left[D(\theta) \frac{d\theta}{d\phi} \right]_{x=0}} \quad (7)$$

qui compte tenu de l'équation (4) s'écrit également :

$$F = \frac{\int_0^\theta \phi(\bar{\theta}) d\bar{\theta}}{\int_0^1 \phi(\theta) d\theta}. \quad (8)$$

En posant $S = \int_0^1 \phi(\theta) d\theta$, le report de l'équation (8) dans (4) donne :

$$\phi(\theta) = \frac{2}{S} \int_0^1 \frac{D(\bar{\theta})}{F(\bar{\theta})} d\bar{\theta} \quad (9)$$

d'où

$$S = \int_0^1 \phi(\theta) d\theta = \frac{2}{S} \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{D(\bar{\theta})}{F(\bar{\theta})} d\bar{\theta} \right] d\theta. \quad (10)$$

Soit, en intégrant par parties l'équation (10)

$$S^2 = 2 \int_0^1 \theta \cdot \frac{D(\theta)}{F(\theta)} \cdot d\theta. \quad (11)$$

Les équations (9) et (11) donnent explicitement la solution du problème, à condition que la fonction $F(\theta)$, qui par ailleurs est indépendante du temps comme le montre l'équation (8), soit connue. Cependant cette fonction est *a priori* inconnue et la détermination de la solution nécessite alors soit l'utilisation d'une procédure itérative de résolution des équations (9) et (11) (PHILIP et KNIGHT, 1974), soit une bonne estimation de $F(\theta)$. Dans ce dernier cas, seule une solution approchée ϕ_a et S_a est obtenue.

La quantité S est la sorptivité capillaire adimensionnelle (PHILIP, 1969). Elle traduit physiquement la capacité du sol à absorber l'eau par capillarité, pour des conditions initiales et aux limites prescrites.

Mathématiquement, elle correspond à la solution intégrale du problème d'absorption telle que la quantité d'eau infiltrée soit donnée par :

$$I = S \sqrt{t}. \quad (12)$$

L'analyse dimensionnelle montre que la sorptivité réelle est :

$$S^* = S(\theta_s^* - \theta_n^*) \sqrt{D_r^*}.$$

On notera que l'équation (11) est l'expression générale de la sorptivité qui a été l'objet de nombreuses études en physique du sol.

C. Etude de la relation flux-concentration $F(\theta)$

Dans 2 cas particuliers il est possible de dériver théoriquement la fonction $F(\theta)$.

1. Cas du milieu « linéaire »

Assimiler un sol à un milieu « linéaire » revient à supposer que la diffusivité capillaire est constante : $D(\theta) = D_0$.

La solution triviale du problème d'absorption (CRANK, 1964) est alors donnée par :

$$\theta = \operatorname{erfc} \left(\frac{\phi}{2 \sqrt{D_0}} \right) \quad (13a)$$

et

$$S^2 = \frac{4}{\pi} D_0. \quad (13b)$$

L'introduction de l'équation (13a) dans (8) donne :

$$F(\phi) = \exp \left\{ -\frac{\phi^2}{4 D_0} \right\} \quad (13c)$$

soit, par élimination de θ entre (13a) et (13c) :

$$F(\theta) = \exp \left\{ -(\operatorname{inverfc} \theta)^2 \right\}. \quad (13d)$$

On notera que cette expression est très bien approchée par la fonction plus simple et plus aisément calculable (WHITE *et al.*, 1979) suivante :

$$F(\theta) = \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \theta^{\pi/4} \right\}. \quad (14)$$

2. Cas du milieu de « Dirac »

Assimiler un sol à un milieu de « Dirac » suppose que la diffusivité capillaire puisse se mettre sous la forme :

$$D(\theta) = \frac{1}{2} S^2 \delta(1 - \theta) \quad (15)$$

où δ est la fonction de Dirac. L'équation (15) signifie que $D(\theta)$ est très grand au voisinage de $\theta = 1$ et négligeable pour toute valeur inférieure. L'intégration de l'équation (15) sur le segment $[0, 1]$ conduit à :

$$S^2 = 2 \int_0^1 D(\theta) d\theta. \quad (16)$$

La comparaison avec la formule générale (11) montre qu'assimiler un sol à un milieu de « Dirac » revient à poser :

$$F(\theta) = \theta. \quad (17)$$

Cela correspond également à la 1^{re} approximation de la relation flux-concentration dans la procédure itérative de PHILIP et KNIGHT (1974).

3. Cas du milieu « réel »

On peut légitimement penser que le sol a un comportement intermédiaire entre les milieux fictifs « linéaire » et de « Dirac ». Deux approches sont alors possibles pour appréhender cette réalité.

a) Extension du cas « linéaire »

L'extension de l'équation (13b) au cas non linéaire peut se faire en utilisant une diffusivité moyenne pondérée (CRANK, 1964) définie par :

$$D_0 \equiv D_\gamma = (1 + \gamma) \int_0^1 \theta^\gamma D(\theta) d\theta \quad (18)$$

d'où

$$S^2 = \frac{4(1 + \gamma)}{\pi} \int_0^1 \theta^\gamma D(\theta) d\theta \quad (19)$$

γ est un paramètre à déterminer, compris entre 0 et 1.

Le rapprochement des équations (11) et (19) donne :

$$F(\theta) = \frac{\pi}{2(1 + \gamma)} \cdot \theta^{1-\gamma}. \quad (20)$$

En donnant à γ les valeurs particulières $\gamma \neq 1$ et $\gamma = 0,67$, on retrouve les expressions de la sorptivité données respectivement par PHILIP (1955) et DIRKSEN (1975). De plus, imposer à l'équation (19) d'être exacte quand la diffusivité capillaire tend vers une fonction de Dirac (eq. 15) revient à $\gamma = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,57$.

b) Recherche de solutions optimales

L'autre approche est fondée sur la résolution directe de l'équation (3a) sous certaines approximations :

— au 1^{er} ordre, la solution de PARLANGE (1971) conduit à :

$$S^2 = 2 \int_0^1 \theta \cdot D(\theta) d\theta \quad (21)$$

soit

$$F(\theta) = 1 \quad (22)$$

— utilisant un principe variationnel qui conduit à une solution optimale de l'équation (3a), PARLANGE (1975) propose l'expression suivante :

$$S^2 = \int_0^1 (1 + \theta) D(\theta) d\theta \quad (23)$$

dont le rapprochement avec l'équation (11) donne :

$$F(\theta) = \frac{2\theta}{\theta + 1}. \quad (24)$$

Cette dernière solution, contrairement à celle proposée par PHILIP & KNIGHT (1974), ne requiert aucune procédure itérative.

De plus, il est intéressant de remarquer que l'hypothèse du milieu de « Dirac » (Eq. 15) conduit à :

$$S^2 = 2 \int_0^1 \theta^\mu \cdot D(\theta) d\theta \quad (25)$$

où μ est un paramètre à déterminer. Le développement limité au 2^e ordre de θ^μ au voisinage de 1 donne alors :

$$S^2 = 2 \int_0^1 \{ 1 - \mu(1 - \theta) \} D(\theta) d\theta \quad (26)$$

dont la comparaison avec l'équation (23) conduit à

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ soit :}$$

$$S^2 = 2 \int_0^1 \theta^{1/2} \cdot D(\theta) d\theta \quad (27)$$

et

$$F(\theta) = \theta^{1/2}. \quad (28)$$

On remarquera que l'équation (27) a été obtenue par BRUTSAERT (1976) à partir d'autres considérations relatives notamment à l'existence d'une discontinuité brutale au voisinage du front d'humidification en sol sec.

L'ensemble des expressions $F(\theta)$ présentée ici est reporté tableau 1 et visualisé figure 1. L'établissement de toutes ces relations ne présuppose pas une expression analytique particulière $D(\theta)$. Seuls des comportements plus ou moins réalistes ont été considérés. On notera que pour certaines formes de la relation $D(\theta)$, les solutions deviennent analytiques. La facilité de mise en œuvre de ces solutions par rapport à la solution de l'équation (4), à la procédure itérative de PHILIP & KNIGHT (1974) et à la méthode des perturbations (BABU, 1976), rend théoriquement attrayante leur utilisation. Pratiquement, il est important d'étudier leur sensibilité à la relation flux-concentration pour laquelle seule une estimation est possible.

Le but de cet article en 2 parties est double :

— étudier pour différents sols (sable, limon, argile) l'influence du choix de l'expression $F(\theta)$ sur la sorptivité, donc sur la loi d'infiltration, et sur la solution $\phi(\theta)$ elle-même ;

— utiliser les résultats obtenus pour résoudre le problème inverse : détermination de la diffusivité capillaire d'un sol à partir d'une mesure expérimentale de la sorptivité et de la meilleure estimation possible de $F(\theta)$.

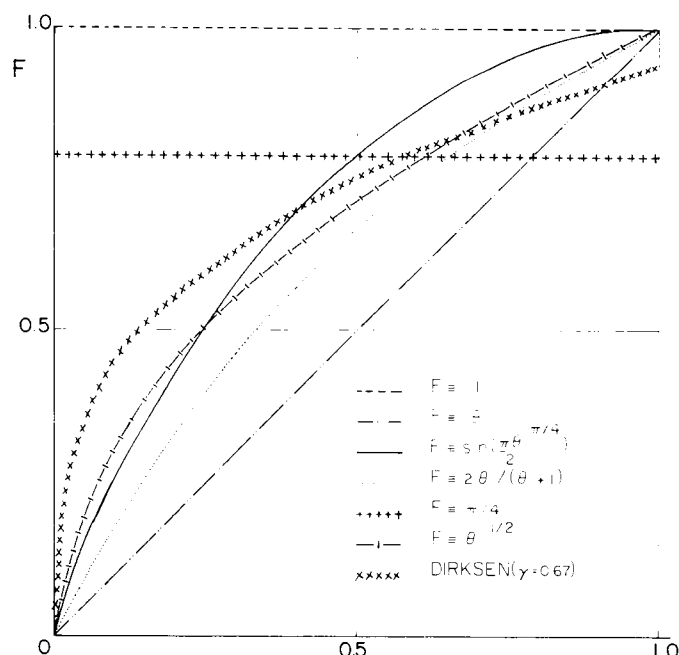


Figure 1

Relations flux-concentration.

Flux-concentration relationships.

TABLEAU 1

Relations flux-concentration (F) correspondant à différentes expressions de la sorptivité capillaire réduite (S).
 Flux-concentration relationships (F) corresponding to different reduced sorptivity expressions (S).

Relations flux-concentration - $F(\theta)$ -	Sorptivité réduite - S^2 -	Références
$\exp \{ - (\text{inverf } c\theta)^2 \}$ $\# \sin \left(\frac{\pi}{2} \theta^{\pi/4} \right)$	$2 \int_0^1 \frac{\theta D(\theta)}{F(\theta)} d\theta$	PHILIP (1973) milieu « linéaire »
θ	$2 \int_0^1 D(\theta) d\theta$	PHILIP (1973) milieu de « Dirac »
$\frac{\pi}{2(1+\gamma)} \theta^{1-\gamma}$	$\frac{4(1+\gamma)}{\pi} \int_0^1 \theta^\gamma D(\theta) d\theta$	PHILIP (1955) avec $\gamma = 1$ DIRKSEN (1975) avec $\gamma = 0,67$ $\gamma = \frac{\pi}{2} - 1$
1	$2 \int_0^1 \theta D(\theta) d\theta$	PARLANGE (1971)
$\frac{2\theta}{\theta+1}$	$\int_0^1 (1+\theta) D(\theta) d\theta$	PARLANGE (1975)
$\theta^{1/2}$	$2 \int_0^1 \theta^{1/2} D(\theta) d\theta$	BRUTSAERT (1976)

TABLEAU 2

Propriétés des sols utilisés.

Properties of soils studied a) VAUCLIN (1971), b) REICHARDT et al. (1972), c) ELRICK et ROBIN (1981).

Sols	Texture (%)			ρ_d (g/cm ³)	θ_a^* (cm ³ /cm ³)	θ_s^* (cm ³ /cm ³)	$10^9 A$ (m ² s ⁻¹)	B	$10^9 D^*(\theta^*)$ (m ² s ⁻¹)	β
	Argile	Limon	Sable							
Sable de Grenoble ^(a)										
« SG »	0	0,5	99,5	1,32	0,13	0,37	87,5	16	700	3,84
Fresno « fine sand » ^(b)										
« FFS »	4,9	8,4	86,7	—	0,007	0,31	6,35	26,3	7,63	7,97
Handford « Sandy loam »										
« HSL »	11,2	15,5	73,3	—	0,012	0,35	1,18	24,6	1,58	8,31
Guelph « loam » ^(c)										
« GL »	14,0	45,0	41,0	1,1	0,066	0,522	5,28	15,5	14,68	7,07
Yolo « silty loam » ^(b)										
« YSL »	17,5	16,2	66,3	—	0,04	0,41	2,82	22,0	6,80	8,14
Yolo « clay loam » ^(b)										
« YCL »	25,0	25,5	54,5	—	0,04	0,42	0,417	20,7	0,95	7,86
Panoche « clay loam » ^(c)										
« PCL »	27,4	16,8	55,8	—	0,05	0,46	2,78	19,4	7,33	7,95
Brookston « silty clay loam » ^(c)										
« BSCL »	35,0	48,0	17,0	1,1	0,12	0,53	0,098	22,0	1,39	9,02
Sacramento « clay » ^(b)										
« SC »	63,2	33,6	3,2	—	0,07	0,55	0,067	16,7	0,21	8,02

III. MATÉRIEL ET MÉTHODES

Les 2 méthodes, précédemment exposées (équation (4), d'une part, équations (9) et (11), d'autre part) sont mises en œuvre pour résoudre l'équation d'absorption horizontale d'eau pour 9 sols différents

dont les principales propriétés, prises dans la littérature, sont reportées tableau 2.

La diffusivité capillaire est exprimée par l'expression :

$$D^*(\theta^*) = A \exp B\theta^*. \quad (29)$$

Compte tenu des conditions initiales et aux limites utilisées dans les calculs, l'introduction des grandeurs réduites θ et D conduit à :

$$D(\theta) = \frac{D^*(\theta^*)}{D^*(\theta_n^*)} = \exp \beta \theta \quad (30)$$

où D_r^* est ici assimilé à $D^*(\theta_n^*)$ et $\beta = B(\theta_s^* - \theta_n^*)$. Les coefficients A , B et β ainsi que les valeurs $D^*(\theta_n^*)$ sont reportés au tableau 2 pour les 9 sols.

On notera que les sols retenus pour cette étude couvrent une large gamme s'étendant des sables grossiers (Grenoble) de forte diffusivité capillaire, aux argiles lourdes (Sacramento) de plus faible diffusivité.

L'étude critique des solutions approchées, obtenues par les équations (9) et (11) pour les différentes expressions $F(\theta)$, est effectuée sur le sable de Grenoble, par comparaison avec la solution exacte (Equation 4). De plus, pour ce sol, on dispose de la solution expérimentale (VAUCLIN, 1971) $\phi_{\text{exp}}(\theta)$ déterminée par le suivi gammamétrique de l'évolution spatio-temporelle des humidités pour les conditions initiales et aux limites données tableau 2.

La représentativité des résultats ainsi obtenus est ensuite testée sur les autres sols, afin d'élargir la portée de cette analyse.

IV. RÉSULTATS

A. Etude du sable de Grenoble

Les valeurs approchées de la sorptivité capillaire réduite S_a , calculées par l'équation (11) en utilisant successivement les différentes expressions $F(\theta)$ (tabl. 1), sont données tableau 3 ainsi que les écarts relatifs $\varepsilon_s = (S_{\text{réf}} - S_a)/S_a$ à la valeur exacte

$S_{\text{réf}} = \int_0^1 \phi_{\text{réf}}(\theta) d\theta$, déterminée selon l'algorithme donné par VAUCLIN *et al.* (1979).

On notera que, compte tenu de la relation exponentielle $D(\theta)$ utilisée, la sorptivité approchée peut s'exprimer sous la forme générale suivante

$$S_a^2 = K_1(\beta) \frac{2\beta - 1}{\beta^2} \exp \beta \left\{ 1 + K_2(\beta) \frac{\exp(-\beta)}{2\beta - 1} \right\} \quad (31)$$

où $K_1(\beta)$ et $K_2(\beta)$ sont fonction du choix de la relation $F(\theta)$. Les valeurs correspondantes sont données tableau 4 dans lequel $M(a, b, \beta)$ est une fonction hypergéométrique confluyente tabulée (ABRAMOWITZ & STEGUN, p. 516).

Les solutions approchées $\phi_a(\theta)$ calculées par l'équation (9) sont reportées figure 2, ainsi que les solutions expérimentales $\phi_{\text{exp}}(\theta)$ (VAUCLIN, (1971)) et exacte (eq. 4) obtenue avec un pas de discrétisation $\Delta\theta = 2,5 \cdot 10^{-3}$ considéré comme optimal (HAVERKAMP, 1983).

Afin de mieux visualiser l'influence de la relation flux-concentration, les écarts relatifs $\varepsilon_\phi(\theta) = [\phi_{\text{réf}}(\theta) - \phi_a(\theta)]/\phi_{\text{réf}}(\theta)$ sont donnés figure 3. L'ensemble de ces résultats amène les commentaires suivants :

1 — Par comparaison avec la solution exacte, la relation $F(\theta) = \theta^{1/2}$ fournit la meilleure estimation de la sorptivité (précision relative $\varepsilon_s = 0,38$ p. 100). Elle conduira donc à la meilleure prédiction de loi d'infiltration. En revanche, elle sous-estime sensiblement ($\varepsilon_\phi = 10$ p. 100) la solution au voisinage du front d'humidification (fig. 3) assimilé arbitrairement à $\theta_f = 0,010$.

2 — La procédure d'optimisation proposée par PARLANGE (1975) conduisant à $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ donne globalement la meilleure estimation ϕ_a (2 p. 100 près environ). Elle conduit à une prédiction, certes acceptable ($-0,8$ p. 100) mais non optimale de la sorptivité pour ce sol.

3 — Certaines expressions de la relation flux-concentration $\left(F = \frac{\pi}{4}; F = 1\right)$ conduisent à de mauvais résultats. Elles ont été intégrées, pour mémoire,

TABLEAU 3

Influence de $F(\theta)$ sur la sorptivité capillaire réduite pour le sable de Grenoble. $S_{\text{réf}} = 4,533$ 4.

Influence of $F(\theta)$ on the reduced sorptivity value for Grenoble sand. $S_{\text{réf}} = 4.533$ 4.

$F(\theta)$	S_a	$\varepsilon_s = \frac{(S_{\text{réf}} - S_a)}{S_{\text{réf}}}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \theta^{0.4}\right)$	4,390	0,031 6
θ	4,869	- 0,074 0
$\frac{\pi}{2(1 + \gamma)} \theta^{1-\gamma} \begin{cases} \gamma = 1 \\ \gamma = 0,67 \\ \gamma = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$	4,795	- 0,057 7
	4,596	- 0,013 8
	4,474	0,013 1
1	4,249	0,062 7
$2\theta/(\theta + 1)$	4,570	- 0,008 1
$\theta^{1.2}$	4,516	0,003 8

TABLEAU 4

Coefficients de l'expression analytique de la sorptivité approchée (eq. 31).
Coefficients of the analytical expression of the approximate sorptivity (eq. 31).

F	K_1	K_2	Remarques
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\theta^{\pi/4}\right)$	$\frac{4\beta^2}{\pi(2\beta-1)\exp\beta}$	0	Milieu linéaire
θ	1	$\exp\beta - 2\beta$	Milieu de Dirac
$\frac{\pi}{2(1+\gamma)}\theta^{1-\gamma}$	$\frac{4}{\pi}\frac{(1+\gamma)(\beta-\gamma)}{2\beta-1}$	$\frac{\gamma(2\beta-1)}{\beta-\gamma}M(\gamma-1, \gamma, \beta)$	valable pour $\gamma = 1; 0,67; \frac{\pi}{2} - 1$
1	2	$1 - \beta \exp\beta$	
$\frac{2\theta}{\theta+1}$	1	$1 - \beta$	
$\theta^{1/2}$	1	$M(-1/2, 1/2, \beta)$	

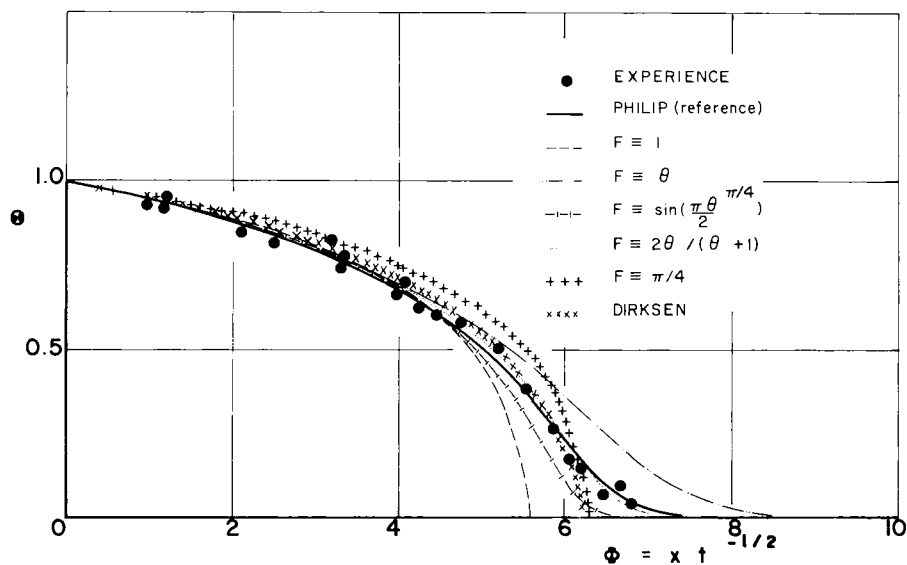


Figure 2

Profils $\phi(\theta) = x t^{-1/2}$ pour le sable de Grenoble.

$\phi(\theta) = x t^{-1/2}$ profiles for Grenoble sand.

dans cette analyse, les mêmes auteurs (PHILIP, PAR-LANGE) ayant proposé ultérieurement de meilleures approximations.

4 — La valeur $\gamma = \frac{\pi}{2} - 1$ utilisée dans la pondération de la diffusivité (eq. 18) améliore très sensiblement les estimations de la sorptivité et de $\phi_a(\theta)$ par rapport à $\gamma = 0,67$ utilisé par DIRKSEN (1975).

5 — Assimiler le sable considéré à un milieu de « Dirac » ($F(\theta) = \theta$) surestime fortement la solution au voisinage du front d'humectation ($\epsilon_\theta(\theta_f) = -15$ p. 100) et la sorptivité ($\epsilon_S = -7,4$ p. 100). En revanche, la solution aux fortes valeurs de l'humidité est sous-estimée.

Ce comportement est révélateur d'un effet diffusif exacerbé. L'effet inverse se produit si l'on suppose que le sol se comporte comme un milieu linéaire. De plus on notera que les écarts à la solution exacte,

obtenus avec $F(\theta) = 2\theta/(1+\theta)$ et $F(\theta) = \theta^{1/2}$, se trouvent pratiquement compris dans le domaine limité par les 2 comportements limites (zone hachurée fig. 3).

6 — Bien que l'accord entre les solutions expérimentales $\phi_{\text{exp}}(\theta)$ et exacte $\phi_{\text{réf}}(\theta)$ soit satisfaisant, la dispersion des points expérimentaux liée aux incertitudes de mesure n'aurait pas permis à eux seuls cette analyse comparative des solutions approchées. Cela justifie pleinement l'utilisation de la solution de l'équation (4) comme référence.

A l'issue de cette étude effectuée sur un sol particulier, il apparaît que les relations flux-concentration à retenir sont :

— $F(\theta) = \theta^{1/2}$ qui a donné la meilleure approximation de la sorptivité capillaire et une prédiction très correcte de la solution $\phi(\theta)$, à l'exception peut-être du front d'humectation ;

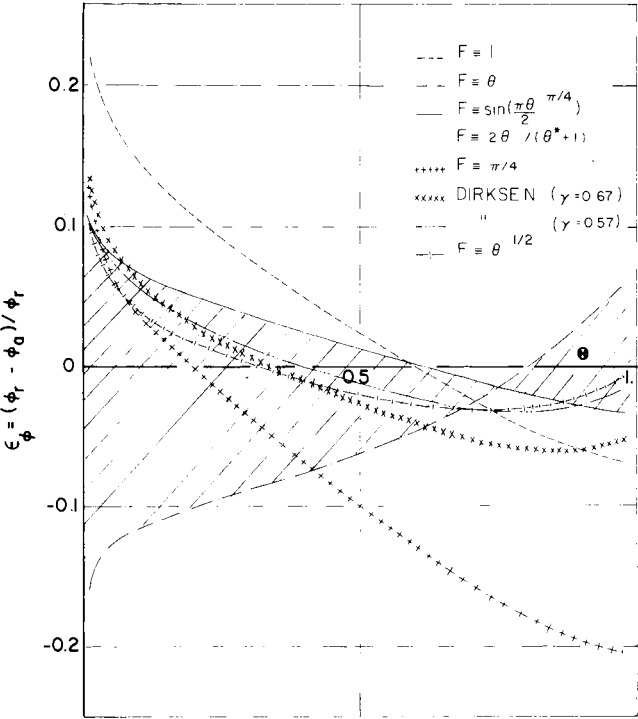


Figure 3
Ecarts relatifs ε_ϕ entre solutions approchées et la solution de référence pour le sable de Grenoble.
Relative differences ε_ϕ between approximate and exact solutions for Grenoble sand.

— $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ qui a conduit globalement à la meilleure estimation des profils, la sorptivité étant toutefois légèrement surestimée.

Cependant, compte tenu du poids de la diffusivité capillaire dans la solution de l'équation de diffusion non linéaire, il nous a paru important d'étudier l'extension de ces résultats à d'autres sols.

B. Généralisation à d'autres sols

La même étude systématique a été effectuée sur les 8 autres sols avec les caractéristiques fournies

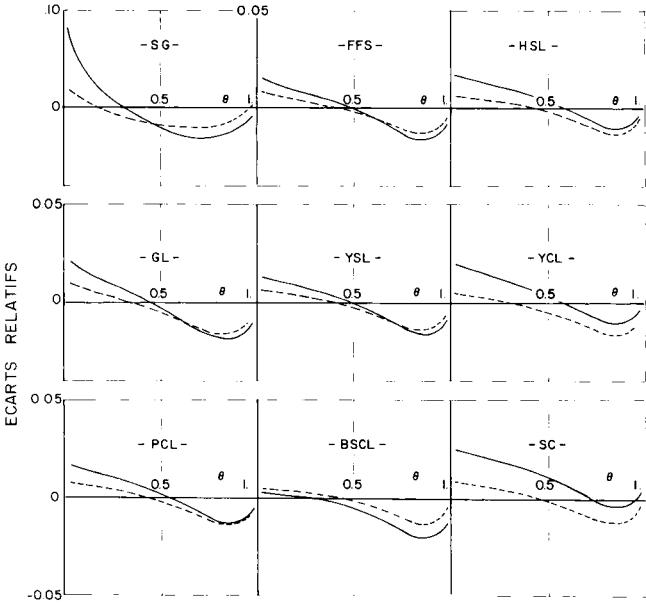


Figure 5
Ecarts relatifs ε_ϕ entre solutions approchées ($F = \theta^{1/2}$ — ; $F = 2\theta/(\theta + 1)$ - - -) et de référence pour les 9 sols.
Relative differences ε_ϕ between approximate ($F = \theta^{1/2}$ — ; $F = 2\theta/(\theta + 1)$ - - -) and exact solutions for the 9 soils.

tableau 2. Afin de mettre en évidence les différences de comportement vis-à-vis de l'absorption d'eau, la figure 4 donne les solutions $\phi_{\text{réf}}(\theta)$ calculées par l'équation (4). A titre indicatif, la solution pour le sable de Grenoble est également reportée.

Dans le but de ne pas trop alourdir le texte, seuls les résultats relatifs aux solutions approchées par $F(\theta) = \theta^{1/2}$ et $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ sont présentées ici.

Le tableau 5 donne, pour tous les sols, la sorptivité de référence $S_{\text{réf}}$ ainsi que les écarts relatifs avec les valeurs approchées. La figure 5 fournit, pour les mêmes sols, les écarts ε_ϕ en fonction de l'humidité.

1) Contrairement au sable de Grenoble (SG), la prédiction de la sorptivité par $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ s'avère légèrement meilleure pour ces 8 sols (tabl. 5).

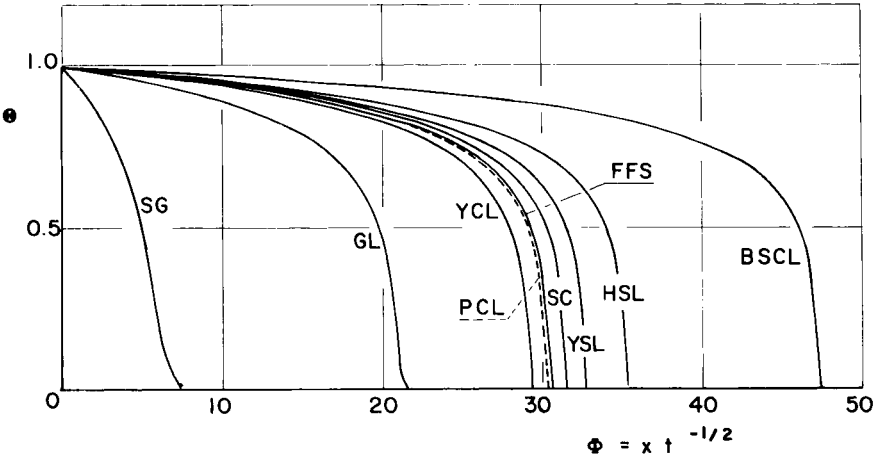


Figure 4
Profils $\phi_{\text{réf}} = \times t^{-1/2}$ pour les 9 sols considérés.
profiles $\phi_{\text{réf}} = \times t^{-1/2}$ for the 9 soils in this study.

TABLEAU 5

Sorptivité réduite de référence ($S_{réf}$) et approchée (S_a) pour les 9 sols. ε_S est l'écart relatif $(S_{réf} - S_a)/S_{réf}$.
 Exact ($S_{réf}$) and approximate (S_a) reduced sorptivity values for the 9 soils. ε_S is the relative difference $(S_{réf} - S_a)/S_{réf}$.

Sols	$S_{réf}$	S_a		ε_S	
		$F \equiv \frac{2\theta}{\theta + 1}$	$F \equiv \theta^{1/2}$	$F \equiv \frac{2\theta}{\theta + 1}$	$F \equiv \theta^{1/2}$
SG	4,533 4	4,569 9	4,516	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
FFS	26,056 1	26,082 3	26,012	$-1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
HSL	30,291 3	30,318 5	30,250	$-0,9 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
GL	17,555 8	17,580 2	17,518	$-1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$
YSL	28,091 4	28,118 1	28,047	$-0,9 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
YCL	24,821 0	24,846 8	24,778	$-1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
PCL	25,836 8	25,853 0	25,784	$-0,6 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
BSCL	41,578 0	41,608 7	41,525	$-0,7 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
SC	26,638 4	26,664 7	26,595	$-0,9 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$

TABLEAU 6

Sorptivité réduite approchée dans le cas du milieu « linéaire » ($\beta = 0$).
 Reduced approximate sorptivity values for the "linear" medium ($\beta = 0$).

$F(\theta)$	S	$\varepsilon_S = \frac{S_{réf} - S_a}{S_{réf}}$	Remarques
$\frac{\pi}{4}$	1,128	0	Solution de référence (eq. 13b avec $D_0 = 1$)
$\sin \left\{ \frac{\pi}{2} \theta^{\pi/4} \right\}$	1,131	$-0,002 6$	Milieu « linéaire »
θ	1,414	$-0,253 5$	Milieu de « Dirac »
$\frac{\pi}{2(1+\gamma)} \theta^{1-\gamma}$	1,128	0	par construction
1	1	0,113 4	$\left(\gamma = 1; 0,67; \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
$\frac{2\theta}{\theta + 1}$	1,224	$-0,085 1$	
$\theta^{1/2}$	1,154	$-0,023 0$	

Pour l'ensemble des sols étudiés, les 2 relations $F(\theta) = \theta^{1/2}$ et $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ conduisent à des valeurs de la sorptivité bornant la sorptivité réelle $S_{réf}$. Ces 2 expressions de $F(\theta)$ définissent le domaine dans lequel se situe la relation « réelle » $F(\theta)$. Cette remarque prendra toute son importance pour l'étude du problème inverse comme nous le verrons dans la 2^e partie.

2) Pour les 8 sols considérés (β variant entre 7 et 9), le degré de précision atteint sur la sorptivité est supérieur à celui obtenu pour le sable de Grenoble ($\beta = 3,84$). Cela est dû au fait que les hypothèses sous-tendant l'établissement des 2 relations $F(\theta)$ sont d'autant mieux vérifiées que les sols ont un comportement voisin de celui du milieu de « Dirac » ($\beta \rightarrow \infty$). A l'inverse, le cas le plus contraignant vis-à-vis de ces 2 relations est celui du milieu « linéaire » ($\beta = 0$). A titre indicatif, le tableau 6 donne les estimations de la sorptivité par les différentes formulations $F(\theta)$ pour $\beta = 0$ ainsi que leurs écarts relatifs à la valeur exacte $S_{réf} = 1,128$ (eq. 13b). Il apparaît que l'erreur maximum maximorum associée au calcul de la sorptivité

par $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ et $F(\theta) = \theta^{1/2}$ sera $-8,5$ p. 100 et $-2,3$ p. 100 respectivement. Cela explique la meilleure estimation S_a par $F(\theta) = \theta^{1/2}$ pour le sable de Grenoble.

De plus, on notera (tabl. 6) que l'approximation de la relation réelle $F(\theta) = \exp \{-(\operatorname{inverfc} \theta)^2\}$ par la fonction simple :

$$F(\theta) = \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \theta^{\pi/4} \right\}$$

n'induit qu'une très faible erreur ($\varepsilon_S = -0,2$ p. 100).

3) L'utilisation de $F(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ donne globalement la meilleure estimation de $\phi_a(\theta)$, notamment au voisinage des fronts d'infiltration. Cette constatation doit toutefois être pondérée pour les sols à diffusivité fortement non linéaire (cas de Brookston « Silty clay loam » avec $\beta = 9,02$ pour lesquels l'approximation $F(\theta) = \theta^{1/2}$ devient meilleure.

4) L'évolution des écarts ε_ϕ avec l'humidité est la même quel que soit le type de sol et pour les 2 approximations de la relation flux-concentration.

V. CONCLUSIONS

Cette étude systématique, effectuée sur 9 sols de propriétés très différentes, a montré l'intérêt de l'introduction de la relation flux-concentration pour résoudre l'équation non linéaire d'absorption de l'eau. Elle a permis de mettre en évidence l'influence du choix de cette relation tant sur les profils hydriques (par l'intermédiaire de la transformée de Boltzmann) que sur la sorptivité et d'en quantifier la précision.

L'expression $F(\theta) = \theta^{1/2}$ conduit à la meilleure estimation de la sorptivité donc de la loi d'infiltration, pour des sols de diffusivité faiblement non linéaire. En revanche, la relation $\bar{F}(\theta) = 2\theta/(\theta + 1)$ donne une meilleure approximation de la sorptivité et des profils

hydriques dans le cas des sols à diffusivité fortement non linéaire. Ces 2 relations constituent les limites entre lesquelles les valeurs réelles de $F(\theta)$ et de la sorptivité se situent.

Dans la 2^e partie de cet article, ces 2 expressions seront utilisées pour la résolution du problème inverse : détermination de la diffusivité capillaire d'un sol à partir de la mesure de la sorptivité (VAUCLIN et HAVERKAMP, 1985).

Bien que ces résultats aient été acquis avec une relation exponentielle $D(\theta)$, ils ne requièrent pas cette hypothèse de base et la même analyse eût pu être effectuée avec d'autres expressions.

Reçu le 2 septembre 1984.

Accepté le 7 mars 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abramowitz M., Stegun I. A.**, 1970. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc, New York, 1046 p.
- Babu D. K.**, 1976. Infiltration analysis and perturbation methods. 1. Absorption with exponential diffusivity. *Water Resour. Res.*, 12 (1), 89-93.
- Brutsaert W.**, 1976. The concise formulation of diffuse sorption of water in a dry soil. *Water Resour. Res.*, 12 (6), 1118-1124.
- Crank H.**, 1964. *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, Oxford, 347 p.
- Dirksen C.**, 1975. Determination of soil water diffusivity by sorptivity measurements. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 39, 22-27.
- Elrick D. E., Robin M. J.**, 1981. Estimating the sorptivity of soils. *Soil Sci.*, 132 (2), 127-133.
- Haverkamp R.**, 1983. *Résolution de l'équation de l'infiltration de l'eau dans le sol. Approches analytiques et numériques*. Thèse Doct. es Sci. Univ. Sci. Méd. Grenoble, 250 p.
- Parlange J. Y.**, 1971. Theory of water movement in soils. 1. One dimensional absorption. *Soil Sci.*, 111, 134-137.
- Parlange J. Y.**, 1975. On solving the flow equation in unsaturated soils by optimization horizontal infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 39, 415-418.
- Philip J. R.**, 1955. Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. *Trans. Faraday Soc.*, 51, 885-892.
- Philip J. R.**, 1969. Theory of infiltration. *Adv. Hydro Sci.*, 5, 215-296.
- Philip J. R.**, 1973. On solving the unsaturated flow equation 1 : the flux-concentration relation. *Soil Sci.*, 116, 328-335.
- Philip J. R., Knight J. H.**, 1974. On solving the unsaturated flow equation. 3. New quasi-analytical technique. *Soil Sci.*, 117, 1-13.
- Reichardt K., Nielsen D. R., Biggar J. W.**, 1972. Scaling of horizontal infiltration into homogeneous soil. *Soil Sci. Am. Proc.*, 36, 241-245.
- Vauclin M.**, 1971. *Effets dynamiques sur la relation succion-teneur en eau, lors d'écoulements en milieu non saturé*. Thèse Univ. Sci. Méd. Grenoble, 113 p.
- Vauclin M., Haverkamp R.**, 1985. Solutions quasi-analytiques de l'équation d'absorption de l'eau par les sols non saturés. II. Problème inverse : détermination de la diffusivité capillaire. *Agronomie*, 5 (7).
- Vauclin M., Haverkamp R., Vachaud G.**, 1979. *Résolution numérique d'une équation de diffusion non linéaire*. Presses Univ. Grenoble, 183 p.
- White I., Smiles D. E., Perroux K. M.**, 1979. Absorption of water by soil : the constant flux boundary condition. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 43, 659-664.