



Mécanique de l'arbre sur pied : modélisation d'une structure en croissance soumise à des chargements permanents et évolutifs. 2. Analyse tridimensionnelle des contraintes de maturation, cas du feuillu standard

M Fournier, B Chanson, B Thibaut, D Guitard

► To cite this version:

M Fournier, B Chanson, B Thibaut, D Guitard. Mécanique de l'arbre sur pied : modélisation d'une structure en croissance soumise à des chargements permanents et évolutifs. 2. Analyse tridimensionnelle des contraintes de maturation, cas du feuillu standard. Annales des sciences forestières, 1991, 48 (5), pp.527-546. hal-00882772

HAL Id: hal-00882772

<https://hal.science/hal-00882772>

Submitted on 11 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Article original

Mécanique de l'arbre sur pied : modélisation d'une structure en croissance soumise à des chargements permanents et évolutifs.

2. Analyse tridimensionnelle des contraintes de maturation, cas du feuillu standard

M Fournier ¹, B Chanson ², B Thibaut ², D Guitard ¹

CNRS UMR CO23, laboratoire de rhéologie du bois de Bordeaux, domaine de l'Hermitage,
BP 10, 33610 Cestas Gazinet;

² Université de Montpellier II, URA 1214 du CNRS, laboratoire de mécanique et de génie civil,
place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France

(Reçu le 5 février 1991; accepté le 3 juin 1991)

Résumé — L'outil d'analyse des contraintes mécaniques supportées par le bois de l'arbre précédemment développé (partie 1) est ici appliqué à l'étude tridimensionnelle des contraintes mécaniques engendrées par la maturation cellulaire du bois en différenciation, compte tenu d'une modélisation rhéologique simple de ce phénomène. Il permet de généraliser les modélisations antérieures des contraintes internes dites de «croissance», les paramètres du modèle (constantes élastiques du bois vert, diamètre de l'arbre, déformations résiduelles à la surface de l'arbre sur pied) restant évaluable par des essais usuels. Les distributions d'efforts sont alors calculées dans un cas «standard» représentant un ordre de grandeur moyen et réaliste de ces paramètres pour un arbre feuillu, constitué d'un bois homogène radialement mais présentant la dissymétrie angulaire de déformations résiduelles pratiquement toujours observée. Ces distributions montrent classiquement une tension longitudinale et une compression tangentielle superficielles, équilibrées par une compression longitudinale et des tensions transverses internes. La dissymétrie angulaire fait apparaître d'une part, des valeurs plus élevées de ces composantes et de leurs gradients radiaux sur une face de l'arbre et d'autre part, des cisaillements transverses. Ces contraintes de maturation sont finalement étudiées en superposition aux contraintes de support dues au poids propre de l'arbre (partie 1) et aux contraintes d'abattage dues à la suppression de ce poids (Fournier *et al*, 1990). Cette superposition montre que la distribution des contraintes de maturation détermine en général la répartition et l'ordre de grandeur des efforts supportés par le bois de l'arbre sur pied ou d'une grume mais qu'il convient de rester prudent pour des interprétations particulières.

mécanique de l'arbre / bois / contrainte de croissance / contrainte de maturation / croissance cambiale

Summary — **Mechanics of standing trees: modelling a growing structure submitted to continuous and fluctuating loads. 2. Tridimensional analysis of maturation stresses. Case of standard hardwood.** A model of tridimensional mechanical stresses due to wood differentiation is derived from the previously presented theoretical analysis (see Part 1) of mechanical stresses which develop in stems as the tree grows. The model is based on a simple rheological scheme for cellular maturation: wood is supposed to have a tendency to strain during the formation of the secondary cell

wall. In normal wood, this tendency takes the form of a longitudinal shrinkage and a transverse swelling, that agrees with micro-mechanical modelling of lignification and crystallizing of cellulose in the S2 layer. In the living tree, this trend is impeded by the mass of the whole trunk, so wood is submitted to internal stresses, namely maturation stresses. This model generalizes former theories on growth stress patterns in tree stems, and the parameters of the model (the elastic compliances of green wood, the tree diameter, the residual strains at the standing stem surface) are still evaluated by current experiments. Stresses patterns are then computed in a standard situation, which uses realistic averaged values of parameters for a hardwood cross-section, composed of radially homogeneous wood, but which shows the circumferential asymmetry of residual strains usually observed. These patterns commonly show longitudinal tensile stresses and tangential compressive ones in the outer part of the trunk, equilibrated by longitudinal compressive stresses and transverse tensile ones in the inner part of the trunk. The angular asymmetry induces, on the one hand, higher values of these components and their radial variations on one side of the tree; on the other hand, transverse shear stresses. These maturation stresses are finally superimposed to support stresses due to tree self-weight – the addition of support stresses and maturation stresses are called “growth stresses”, and to felling stresses due to the removal of this self-weight, analysed in former papers (see Part 1). As analysed in Part 1, support stresses are not the opposite of felling stresses but depend on the entire history of the tree; so it is quite difficult to separate the effects of support and maturation when experimental results on internal stresses in living trees or logs are observed. Nevertheless, the conclusion is that in general, maturation stress distributions determine the patterns and the magnitude of growth stresses in a living tree or a log, although particular problems may require careful consideration: for instance, in the standard situation of a highly disymmetric leaning reorienting tree, the longitudinal growth stress gradient near the surface (which is responsible for the deflections of planks) is lower than the longitudinal maturation stress gradient.

standing tree mechanics / wood / growth stress / maturation stress / cambial growth

INTRODUCTION

Le bois de tous les arbres sur pied emmagasine une énergie mécanique qui peut se manifester sur certaines essences feuillues (hêtre, peuplier, eucalyptus, wapa...) par des déformations instantanées importantes à la transformation (Archer, 1986a; Kubler, 1987) : les troncs «éclatent», les faces fraîchement tronçonnées des grumes fendent, les planches de dosses se courbent, les débits sur maille se tordent...

Ces phénomènes sont attribués à la présence de forces intérieures, regroupées sous le nom de «contraintes de croissance». L'objectif de la présente publication est de proposer un mécanisme d'apparition de ces efforts intérieurs, fondé sur des connaissances physiques et anatomiques, qui rend compte des diverses

évidences expérimentales, puis une modélisation de ces champs de contraintes et un outil de calcul qui permette la simulation numérique de nombreuses situations. L'application de l'outil concernera ici un jeu de paramètres – le feuillu standard – qui servira de référence aux applications ultérieures.

ÉVIDENCE EXPÉRIMENTALE DE CONTRAINTES SIGNIFICATIVES À LA SURFACE DE L'ARBRE SUR PIED

Différentes méthodes existent pour évaluer expérimentalement les efforts internes supportés par le bois à la surface de l'arbre :

– mesures de déplacements résultant de la perturbation du champ des contraintes par perçage d'un trou (Archer, 1986b);

– mesures de déformations résiduelles ε^* après découpe (2 trous, rainure...) autour du point de mesure (Nicholson, 1971; Saurat *et al*, 1976; Ferrand, 1982a; Okuyama, 1983; Langbour, 1986...);

– mesures du diamètre tangentiel d'une carotte de sondage extraite par une tarière de 5 mm en utilisant la corrélation empirique entre cette grandeur et la déformation longitudinale résiduelle évaluée par les techniques décrites ci-dessus (Polge et Thiercelin, 1979; Ferrand, 1982b).

Dans la plupart des cas, ces mesures montrent que le bois situé juste sous le cambium est soumis à une tension longitudinale pouvant atteindre plusieurs dizaines de MPa, et à une compression tangentielle de l'ordre du MPa.

Comment expliquer de telles observations ?

LA MATURATION DU BOIS, MOTEUR D'APPARITION DE CONTRAINTES INTERNES

La partie 1 de la présente publication a développé une modélisation des contraintes dans l'arbre en croissance soumis à un chargement permanent et évolutif, en postulant qu'une particule de bois ne supporte d'efforts qu'à partir de l'instant où elle existe. Ce principe ne semblant pas devoir être mis en cause, si la surface de l'arbre est fortement contrainte, cela ne peut être que le fait d'un phénomène instantané qui se produit dans le bois lors de la formation de la paroi secondaire, entre l'instant où les cellules sont différenciées dans le cambium et celui où elles prennent leur structure définitive, rigide et lignifiée.

La formation de la membrane secondaire S2, processus qui peut durer quelques semaines, au cours duquel une cellule à paroi mince faite de cellulose peu cristalline devient une cellule à paroi

épaisse, rigide et lignifiée, sera appelée «maturation». À l'échelle macroscopique, il est reconnu que le matériau subit lors de ce processus une tendance à se déformer : une quantité élémentaire de bois isolé avant et après maturation n'aurait pas la même forme et occuperait un volume différent. Cette assertion s'appuie sur deux phénomènes principaux possibles à l'échelle de la paroi S2 :

– puisque la lignine occupe dans cette paroi les mêmes types de sites que l'eau, la lignification provoque des variations dimensionnelles analogues à une reprise d'humidité; la matrice de lignine et hémicelluloses pousse le filet de microfibrilles; il en résulte une expansion transverse et une contraction longitudinale (Boyd, 1972);

– la cristallisation de la cellulose dans les microfibrilles s'accompagne d'un retrait. Dans le milieu 'fibrilles' + 'matrices', il en résulte encore une contraction longitudinale et un gonflement transverse (Bamber, 1987).

La combinaison des deux théories permet de rendre compte de toutes les situations structurales (bois de réaction, feuillus, résineux...), avec peut-être une prédominance du premier phénomène chez les résineux (hélices plus inclinées surtout dans le bois de compression), et du second chez les feuillus (déformations résiduelles plus élevées, hélices peu inclinées, beaucoup de cellulose, notamment dans le bois de tension) (Sasaki *et al*, 1978; Wilson, 1981). À l'échelle de la paroi S2, l'analyse quantitative micromécanique des phénomènes a été entreprise par différents auteurs (Boyd, 1972; Archer, 1987 et 1989; Yamamoto, 1988; Gril, 1988). À l'échelle du tronc d'arbre, la modélisation mécanique la plus simple possible du phénomène implique de postuler l'existence d'un changement d'état du bois lors de la maturation, représenté par une variable interne M , passant de la valeur 0 pour le bois issu du cambium à la valeur 1 pour le

bois mature, et source d'apparition de déformations macroscopiques α .

Ces déformations s'apparentent donc aux dilatations ou contractions thermiques des matériaux, ou aux retraits et gonflements de séchage du bois; le «moteur» de la déformation n'est cependant ni la température, ni l'humidité, mais une autre variable d'état physico-chimique, l'état de «maturation» M . L'analogie la plus forte est celle d'un matériau tel qu'une colle ou résine qui se rétracte en polymérisant, le retrait étant au premier ordre proportionnel au degré de polymérisation. On notera donc à ce stade, que les coefficients de déformations de maturation α sont une caractéristique rhéologique intrinsèque du matériau bois, alors que les contraintes internes qui vont être analysées sont une caractéristique de la structure, le tronc d'arbre, sollicitée par le processus de maturation.

UN OUTIL MÉCANIQUE D'ANALYSE DES CONTRAINTES DE MATURATION

Quel est l'état des contraintes dans une section d'un tronc d'arbre de rayon R_f , dont le bois s'est formé et est devenu mature par couches concentriques successives d'épaisseur dR , entre un état initial de rayon faible R_i , et l'état final de rayon R_f ? Comme développé précédemment dans la partie 1, le problème étant posé sur une structure évolutive en croissance, demande une analyse pas à pas (entre R et $R + dR$), puis la superposition de ces étapes élémentaires.

Effet de la maturation d'une couche élémentaire, entre R et $R + dR$

Entre R et $R + dR$, une nouvelle couche externe élémentaire de bois d'épaisseur

dR est créée par le cambium. Dans le même temps, une couche externe de bois devient plus ou moins mature. Cette couche externe tend donc à se déformer. Comme elle est solidaire d'un massif inerte, le tronc interne, cette tendance ne peut *a priori* s'exprimer totalement; il en résulte un état de déformations $d\epsilon$ et de contraintes internes $d\sigma$ dans toute la structure (Fournier, 1989), que l'on se propose d'évaluer.

Le problème étant de calculer l'état mécanique d'une structure cylindrique de rayon $R + dR$, « M », élastique, soumise dans la nouvelle couche en différenciation à un champ de variation de la variable interne moteur de déformation « M », l'outil de calcul utilisé repose sur des hypothèses et des méthodes relativement classiques pour le mécanicien des structures (déformations pseudo-planes, résolution analytique dans chaque couche radiale du tronc composite), détaillées par ailleurs (Fournier, 1989, Fournier *et al*, 1990a); il a été également développé pour calculer l'état des contraintes internes dans un billon soumis à un séchage (Tahani, 1988) ou dans un tronc d'arbre multi-couches soumis à un gel (Fournier, 1989; Cinotti, 1989). La méthode de calcul est résumée en annexe; nous rappellerons simplement ici les données nécessaires à la simulation numérique qui sont, outre les grandeurs géométriques R et dR :

- les rigidités ou les souplesses élastiques (Guitard, 1987), dans le référentiel R, T, L , du bois du tronc, formé d'un empilement de N couches concentriques; soit la donnée de $9 \times N$ rigidités élastiques C_{ij}^p (ou souplesses S_{ij}^p) ($p = 1..N$), et de N rayons R_p d'apparition de la couche p ($R_0 = 0$);
- l'angle éventuel de la fibre torse dans chaque couche ψ_p qui permet de fixer la position de R, T, L par rapport au repère du tronc r, θ, z ; ces données schématisent de façon générale le tronc d'arbre comme une structure élastique, orthotrope (avec une

structure éventuellement en hélice), multicouches;

– le profil de maturation ΔM (entre R et $R + dR$) et les coefficients de déformations de maturation α_R , α_T , α_L partout où ΔM est non nul. Ces grandeurs peuvent *a priori* être définies couche par couche de façon très générale en double série, polynomiale en r , de Fourier en θ ; ces dernières données sont caractéristiques du problème posé (ie les conséquences mécaniques de la maturation cellulaire).

Pour fixer le profil $\Delta M(r, \theta)$, nous allons supposer que la maturation est un phénomène instantané qui suit rigoureusement la cinétique de la croissance secondaire : entre R et $R + dR$, seule la nouvelle couche d'épaisseur dR change d'état et devient complètement mature, alors que le bois plus interne n'est plus modifié. Le profil de la variable d'état ΔM est donc discontinu, égal à 1 dans la couche d'épaisseur dR , nul partout ailleurs. Cette hypothèse, implicitement adoptée par Archer et Byrnes (1974) et Archer (1986a) est liée à l'absence d'idée plus précise concernant la physico-chimie de la maturation car notre outil de calcul pourrait, lui, tenir compte de cinétiques de maturation plus complexes (il a, en effet, permis l'étude de l'influence de profils de température ou d'humidité très généraux : Tahani, 1988; Cinotti, 1989). Il reste alors à se donner dans la couche externe d'épaisseur dR le profil $\alpha(R, \theta)$, fonction de la coordonnée angulaire θ .

Évaluation expérimentale des déformations de maturation à la surface de l'arbre sur pied

Les coefficients de déformations induites sont des grandeurs rhéologiques qui doivent être évaluées expérimentalement. Si le moteur de déformations était une va-

riable d'état, telle que la température ou l'humidité, contrôlable sur de petits échantillons qui se déforment librement, α serait estimé par la mesure des variations dimensionnelles de ces petits échantillons.

Or, nous ne savons pas pour l'instant provoquer et observer la maturation du bois sur éprouvettes détachées de l'arbre. Le comportement du bois à la maturation, α , sera donc déduit indirectement des mesures de déformations relâchées à la surface des arbres : soient ϵ_{LL}^* et ϵ_{TT}^* , les déformations longitudinales et tangentielles mesurées classiquement (*cf Evidences expérimentales de contraintes significatives à la surface de l'arbre sur pied*) juste sous le cambium, dues à la libération des contraintes élastiques autour du point de mesure. Ces déformations dans la dernière couche d'épaisseur dR résultent du passage de l'état précontraint $d\sigma$ dû à sa maturation récente, à un état naturel non contraint.

En utilisant la loi de comportement élastique du bois dans cette couche et le fait que la composante radiale σ_{RR} est nulle à la surface libre du tronc, il vient :

$$\begin{aligned}\epsilon_{TT}^* &= S_{22} (-d\sigma_{TT}) + S_{23} (-d\sigma_{LL}) \\ \epsilon_{LL}^* &= S_{23} (-d\sigma_{TT}) + S_{33} (-d\sigma_{LL})\end{aligned}\quad (1)$$

Or, la modélisation précédente de la maturation *in situ* dans l'arbre et la loi de comportement «M» élastique du bois de la dernière couche permet d'écrire :

$$\begin{aligned}S_{22} (d\sigma_{TT}) + S_{23} (d\sigma_{LL}) &= d\epsilon_{TT} - \alpha_{TT} \\ S_{23} (d\sigma_{TT}) + S_{33} (d\sigma_{LL}) &= d\epsilon_{LL} - \alpha_{LL}\end{aligned}\quad (2)$$

où, selon les définitions introduites au paragraphe précédent, $d\epsilon_{LL}$ et $d\epsilon_{TT}$ sont les déformations tangentielles et longitudinales qui se sont produites dans l'arbre dans la nouvelle couche au moment de la maturation. Cette expression signifie simplement que les contraintes qui sont apparues sont dues à la partie «gênée» des dé-

formations α_{LL} et α_{TT} , qui n'a pu s'exprimer librement lors de la maturation du fait de l'effet du tronc interne massif.

De (1) et (2), on déduit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{LL}^* &= \alpha_{LL} - d\varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT}^* &= \alpha_{TT} - d\varepsilon_{TT}\end{aligned}\quad (3)$$

Les déformations résiduelles enregistrées lors de la libération des contraintes internes à la surface de l'arbre sont la différence entre la tendance naturelle originelle du matériau, c'est-à-dire les déformations de maturation et la partie de cette tendance qui n'a pas été gênée lors de la maturation.

Supposons alors que le tronc interne soit suffisamment massif ($dR \ll R$) et rigide pour que $d\varepsilon_{LL}$ et $d\varepsilon_{TT}$ soient très faibles par rapport aux déformations induites α_{LL} et α_{TT} , ce qui pourra être vérifié *a posteriori* pour chaque application, la mesure des déformations résiduelles donne directement accès aux grandeurs rhéologiques cherchées α_{LL} et α_{TT} . Cette mesure, répétée en plusieurs points de la circonférence, permet alors naturellement d'évaluer par lissage le profil $\alpha_{LL}(\theta)$, $\alpha_{TT}(\theta)$.

α_{RR} reste une grandeur inconnue. Le calcul montre (Archer et Byrnes, 1974; Fournier, 1989) que dès lors que les hypothèses ci-dessus (tronc interne insuffisamment gros et rigide) sont satisfaites, α_{RR} n'est pas gênée (l'épaisseur de nouvelle couche externe varie librement lors de sa maturation) et n'influence donc pas les distributions de contraintes $d\sigma$. Par la suite, nous choisirons donc arbitrairement pour le calcul numérique $\alpha_{RR} = \alpha_{TT}$.

Contraintes de maturation à l'instant R_f

Un arbre observé à l'instant R_f (c'est-à-dire à l'instant où la section droite de référence

étudiée a pour rayon externe R_f) s'est constitué par empilements successifs de couches radiales de bois d'épaisseur dR , depuis R_0 (rayon de la moelle résultant de la croissance primaire) jusqu'à R_f .

L'état des contraintes de maturation à l'instant R_f en un point repéré par ses coordonnées (r, θ) dans la section actuelle dans l'état final, noté $\sigma(r, \theta, R_f)$, est donc défini par la somme des contraintes de maturation accumulées en ce point depuis sa création à l'instant r soit :

$$\sigma(r, \theta, R_f) = \partial\sigma(r, \theta, r) + \int_r^{R_f} \partial\sigma(r, \theta, R) \quad (4)$$

où $\partial\sigma(r, \theta, R)$ est l'incrément de contraintes au point $M(r, \theta)$ dû à sa propre maturation $\partial\sigma(r, \theta, R)$ pour $r < R \leq R_f$ est l'incrément de contraintes au point $M(r, \theta)$ dû à la maturation des points en différenciation au rayon R .

Un programme de calcul a été écrit (Fournier, 1989; Fournier *et al*, 1990a) qui permet le calcul de $\sigma(r, \theta, R_f)$ à partir d'une formulation discrétisée du problème en N pas d'itérations en superposant numériquement les états mécaniques analytiques, calculés avec l'outil exposé au paragraphe *Effet de la maturation d'une couche élémentaire, entre R et $R + dR$* , de N croissances et maturation successives de la couche externe d'épaisseur $\Delta R = R_Q - R_{Q-1}$ au pas Q :

$$\sigma(r, \theta, R_f) = \Delta\sigma_Q(r, \theta) + \sum_{q=Q+1}^{N_{pas}} \Delta\sigma_q(r, \theta) \quad (5)$$

où $\Delta\sigma_Q(r, \theta)$ est l'incrément de contraintes au point $M(r, \theta)$ dû à sa propre maturation, c'est-à-dire celle de la couche Q où M a été créé et différencié; (r, θ) est l'incrément de contraintes au point $M(r, \theta)$ dû à la maturation des couches suivantes $q > Q$.

Ce logiciel de calcul semi-analytique, qui donne les résultats sous la forme d'un

fichier «position - contraintes» en chaque point r_Q situé au centre de chaque couche Q , est un complément aux formulations analytiques proposées par Kubler (1959a et b) d'une part (qui postule la symétrie de révolution du problème, ainsi que l'isotropie transverse du matériau), par Archer et Byrnes (1974) et Archer (1976, 1986a) d'autre part. Il permet en effet de simuler des variations radiales très générales (de la fibre torse, du comportement élastique et du comportement à la maturation) dont l'étude est au cœur des préoccupations actuelles des recherches sur la qualité des bois (bois juvénile des essences à croissance rapide).

APPLICATION AU FEUILLU «STANDARD»

Le feuillu «standard»

L'outil de calcul construit s'appuie sur une modélisation mécanicienne de l'apparition des contraintes internes de maturation, qui repose sur la modélisation des conséquences dans l'arbre d'un comportement rhéologique particulier du bois lors de la différenciation cellulaire. L'intérêt d'un tel outil est moins de s'adapter avec précision à une situation expérimentale donnée que de permettre, par des simulations successives, de qualifier et de quantifier les variations d'état de contraintes entre deux situations données, définies par des variations du jeu de paramètres d'entrée du modèle : rayon de la section droite, propriétés élastiques du bois et déformations de maturation avec leurs hétérogénéités respectives. Ces paramètres qualifient en effet la géométrie de l'arbre et la nature de son bois (son plan ligneux, sa microstructure et son ultrastructure et la localisation de singularités telles que bois juvénile ou bois de réaction...) et peuvent *a priori* être reliées à

des situations de croissance endogènes (architecture de l'espèce, génotype) ou liées au milieu (station, sylviculture).

Il est donc utile de proposer une «stratégie» d'expérimentation numérique, à partir d'une situation de référence «standard» définie par un jeu de paramètres réalistes. L'influence de chaque paramètre (sens de variation, sensibilité) sera ensuite étudiée par rapport à ce «standard».

L'analyse de la bibliographie conduit à définir :

- une section droite «standard» circulaire, de droit fil, de rayon R_f , comportant une moelle assimilée à un trou (c'est-à-dire faite d'un matériau de rigidités négligeables par rapport à celles du bois);
- le comportement élastique du bois vert feuillu standard (tableau I) à partir du comportement moyen du bois feuillu sec à l'air ($H \approx 12\%$) de masse volumique $\rho = 0,65 \text{ g/cm}^3$ (Guitard, 1987, El Amri, 1987; Guitard et El Amri, 1987) et de corrections moyennes d'humidité proposées par différents auteurs (Kollman et Cote, 1968; Palka, 1973; Guitard, 1987);
- le comportement du bois feuillu standard à la maturation défini par une hétérogénéité circonférentielle :

$$\alpha = \alpha^0 + \alpha^1 \sin\theta$$

Le choix d'un comportement standard «dissymétrique», et des valeurs numériques des coefficients α_{ij}^0 et α_{ij}^1 , figurées dans le tableau I s'appuie :

- sur l'observation de déformations résiduelles toujours dissymétriques sur la circonférence dès que leur ordre de grandeur est significatif (Saurat *et al*, 1976; Langbour, 1986; Archer, 1986a);
- sur les valeurs de déformations résiduelles longitudinales négatives habituellement mesurées à la surface des arbres

Tableau I. Paramètres rhéologiques du bois vert feuillu standard (de masse volumique du bois sec à l'air : $\rho = 0,65 \text{ g/cm}^3$). Les S_{ij} sont les souplesses du bois sous l'hypothèse classique d'un comportement orthotrope, en notation contractée dans les directions radiale R , tangentielle T et longitudinale L de symétrie matérielle du bois ($1 = R, 2 = T, 3 = L$). ($1/S_{11}, 1/S_{22}, 1/S_{33}$ sont les modules de Young radial, tangentiel et longitudinal du bois, $1/S_{44}, 1/S_{55}, 1/S_{66}$ les modules de cisaillement dans les plans LT, LR et RT, les termes $1/S_{12}, 1/S_{13}, 1/S_{23}$ sont les rapports entre le coefficient de Poisson et le module de Young afférent; Guitard, 1987). La valeur «sec à l'air» est celle donnée par Guitard (1987); le coefficient de passage vert-sec est proposé à partir de la synthèse de plusieurs travaux (Fournier, 1989). Les déformations de maturation comportent une partie moyenne α^0_{ij} et une partie dissymétrique α^1_{ij} de sorte que sur la circonférence de la section circulaire $\alpha_{ij} = \alpha^0_{ij} + \alpha^1_{ij} \sin\theta$. Les valeurs proposées représentent un ordre de grandeur moyen réaliste compte tenu des mesures de déformations résiduelles couramment rapportées.

	Constantes élastiques du bois standard (MPa)			Déformations de maturation (%)		
	Sec à l'air	Coeff vert/sec	Vert		α^0_{ij}	α^1_{ij}
$1/S_{33}$	14 400	0,82	11 810	α_{LL}	- 0,1%	+ 0,05%
$1/S_{22}$	1 030	0,46	475	α_{TT}	+ 0,2%	- 0,1%
$1/S_{11}$	1 810	0,46	830	α_{RR}	+ 0,2%	- 0,1%
$1/S_{66}$	366	0,64	235	α_{LT}	0	0
$-1/S_{12}$	2 680	0,46	1 230	α_{LR}	0	0
$-1/S_{23}$	31 200	0,785	24 460	α_{RT}	0	0
$-1/S_{13}$	37 300	1,00	37 300			

(Archer, 1986; Kubler, 1987) qui montrent un ordre de grandeur de 1 000 microdéformations (0,1%) (habituellement retenu par les expérimentateurs pour le choix de capteurs extensométriques);

– sur les observations de certains auteurs (Sasaki *et al*, 1978; Archer, 1986a), qui montrent que la déformation résiduelle tangentielle positive mesurée à la surface des arbres est de l'ordre de 2 fois la déformation longitudinale;

– sur les observations de cisaillements résiduels mesurés dans le plan LT très faibles (Archer, 1986a; Fournier, 1989), qui montrent que l'hypothèse d'un comportement orthotrope du bois à la maturation est licite.

Il convient toutefois de souligner que les variations interarbres des déformations de maturation restent grandes, de même que les variations intra-arbres (longitudinales, radiales et circonférentielles). Les

déformations de maturation étant un paramètre rhéologique, leurs variations peuvent être reliées à des variations de la structure du bois et en particulier (*cf La maturation du bois, moteur d'apparition de contraintes internes*) de son ultrastructure (Watanabe, 1965; Boyd, 1972; Archer 1986a, 1987, 1988; Bamber, 1987; Yamamoto *et al*, 1988; Gril, 1988).

Résultats de la modélisation tridimensionnelle

Dans le cas présent, d'une hétérogénéité circonférentielle sinusoïdale de comportement à la maturation l'état des contraintes est défini par :

– une partie moyenne et une partie dissymétrique en $\sin\theta$ pour les composantes $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$;

– une partie dissymétrique en $\cos\theta$ pour la composante $\sigma_{r\theta}$.

Les composantes $\sigma_{z\theta}$ et σ_{zr} sont nulles en raison de l'absence de fibre torse et de conicité du tronc. Les résultats sont alors présentés sur la figure 1, le long du diamètre de plus grande dissymétrie (c'est-à-dire $\theta = \pm 90^\circ$, $R_0 \leq r \leq R_f$) pour σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , sur le rayon $\theta = 0^\circ$ pour σ_{Rr} . Ils sont comparés aux valeurs calculées avec le même jeu de paramètres en utilisant la formulation analytique d'Archer (Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1976).

La composante longitudinale σ_{zz} (R_f) est classiquement une tension moyenne sur la circonférence externe, équilibrée à l'intérieur par une compression (Kubler, 1959a; Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1986a) maximale au cœur. De fait, la couche externe n'a subi que les effets de sa propre maturation où son retrait de maturation gêné s'est traduit par une tension. Alors que les zones internes ont été sollici-

tées par leur propre maturation (tension initiale) puis par les maturations des couches suivantes qui les ont progressivement comprimées, compte tenu de l'hypothèse d'un retrait de maturation longitudinal tout au long de la croissance de l'arbre, les zones les plus anciennes sont donc les plus comprimées.

La dissymétrie du comportement à la maturation induit naturellement une dissymétrie de $\sigma_{zz}(R_f)$ à la surface, qui se traduit par une dissymétrie à l'intérieur du tronc. Le gradient de contrainte longitudinale $\partial\sigma_{zz} / \partial r$, souvent considéré comme responsable des courbures importantes observées sur les débîts au sciage, varie donc fortement d'une face à l'autre : en accord avec les constatations des scieurs, la position du débî, l'orientation du trait de scie et le plan de débî par rapport à cette face (sciage en plot, avec retournement) auront donc *a priori* des conséquences importantes sur les déformations des pièces extraites.

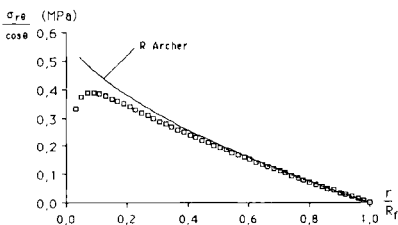
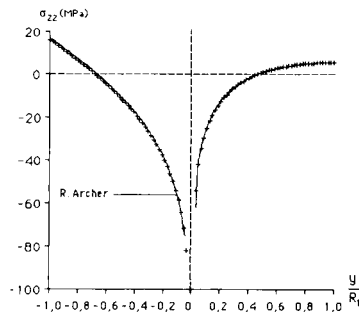
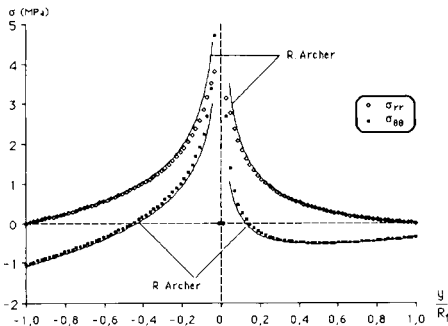


Fig 1. a) Contraintes de maturation, σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$; **b)** σ_{zz} le long du diamètre $\theta = \pm 90^\circ$; **c)** σ_{Rr} le long du rayon $\theta = 0^\circ$, pour une section droite du feuillu «standard». Les résultats de la superposition numérique d'étapes successives de croissance (en des points situés à la surface de chaque nouvelle couche, menée en 50 pas constants, à partir d'une moelle de rayon $R_f/100$) sont comparés à la formulation analytique d'Archer (Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1976) calculée avec le même jeu de paramètres.

L'ordre de grandeur des contraintes longitudinales σ_{zz} est très supérieur (d'environ 10 fois) à celui des contraintes transverses. Dans l'esprit de la résistance des matériaux classiques appliquée aux poutres, cela justifie d'imaginer une analyse unidirectionnelle découplée (Fournier, 1989) pour la modélisation et l'estimation expérimentale de ces contraintes longitudinales et des déformations longitudinales des débits, analyse implicitement adoptée par d'autres auteurs (Kubler, 1959a; Post, 1979; Gillis *et al*, 1979; Bege, 1982).

La composante tangentielle $\sigma_{\theta\theta}(R_f)$ est une compression moyenne à la surface, et une tension interne, maximale au cœur (Kubler, 1959b; Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1986a). La dissymétrie du comportement à la maturation se traduit par une dissymétrie de $\sigma_{\theta\theta}(R_f)$ à la surface, et à l'intérieur du tronc. Notamment, alors que le modèle classique de Kubler (1959b) prévoit que la valeur de r où $\sigma_{\theta\theta}$ s'annule est constante, égale à $r = R_f/3$, il apparaît ici que $\sigma_{\theta\theta}$ s'annule autour de $r = 0.4 R_f$ sur la face la plus contrainte (ie pour $\theta = 90^\circ$), autour de $r = 0.15 R_f$ sur la face opposée. Ces valeurs ne représentent qu'un ordre de grandeur et dépendent du comportement élastique du bois et de l'intensité de la dissymétrie, rien ne justifie donc de localiser *a priori* l'endroit où $\sigma_{\theta\theta}$ est nulle.

La composante radiale σ_{rr} , nulle à la surface et à l'interface avec la moelle, est une tension radiale moyenne (Kubler, 1959b; Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1986a) maximale au voisinage de la moelle, plus élevée sur la face $\theta = -90^\circ$, la plus tendue (longitudinalement).

La dissymétrie induit également une contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$, proportionnelle à $\cos\theta$, donc maximale sur l'axe $\theta = 0^\circ$, nulle sur l'axe $\theta = \pm 90^\circ$ (Archer, 1976). Cette composante reste faible, elle est maximale près du cœur, dans les zones les plus anciennes, sollicitées par les ma-

turations de toutes les couches postérieures.

Enfin, la prise en compte d'une dissymétrie angulaire montre que sur la face $\theta = 90^\circ$, la différence $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ atteint son maximum non pas à la surface mais en un rayon intermédiaire $r \approx 0,2R_f$ où de plus $\sigma_{r\theta}$ est grand, ce qui pourrait favoriser, à cet endroit, sur cette face la moins contrainte, le déclenchement de fissurations telles que des roulures.

Lorsqu'on compare les distributions de contraintes calculées pas à pas avec celles proposées par Archer (Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1976, 1986a), il apparaît que les valeurs calculées numériquement à chaque pas sont très proches, excepté dans les toutes premières couches, les plus internes. De fait, les modèles d'Archer et de Kubler conduisent à des valeurs infinies au voisinage de l'axe, car ils ne raisonnent pas à partir d'un noyau primaire (une moelle) de dimension et de propriétés élastiques données. Compte tenu du peu d'informations disponibles sur cette moelle (l'assimilation à un trou depuis le début de la croissance cambiale est sans doute abusive) et de son peu d'influence sur l'état des contraintes loin de l'axe, nous ne discuterons pas plus loin ce problème. Il faut cependant rester conscient de ce que les modèles classiques sont à reconsidérer pour de très jeunes axes ou pour des espèces particulières où la moelle a des dimensions importantes.

CONTRAINTES DE CROISSANCE DANS L'ARBRE : SUPERPOSITION DES CONTRAINTES DE SUPPORT ET DE MATURATION – CONTRAINTES RÉSIDUELLES DANS UNE GRUME

Un point du tronc supporte en permanence, outre des efforts de courte durée (dus au gel, aux vents, aux poids occa-

sionnels de neige ou de givre...) aux effets supposés réversibles, des contraintes dues au support du poids propre de la structure, étudiées dans la première partie de la présente publication, et des contraintes de maturation que nous venons d'analyser. En l'absence d'autres chargements permanents identifiés dans le bois de tous les arbres, la superposition de ces deux effets donne lieu à ce que nous appellerons les contraintes «de croissance». Les contraintes exercées en un point du tronc par le poids propre supporté sont d'autant plus faibles que ce point est proche de la surface. Au voisinage de l'assise cambiale, les contraintes de croissance se limitent donc aux contraintes de maturation, ce qui a justifié le raisonnement du paragraphe *Évaluation expérimentale des déformations de maturation à la surface de l'arbre sur pied*, pour estimer des paramètres rhéologiques du bois en différenciation, les déformations de maturation, à partir des mesures de déforma-

tions résiduelles dans l'arbre. Il en va *a priori* différemment à l'intérieur de l'arbre : la figure 2 représente la composante longitudinale des contraintes de croissance, superposition des contraintes de support σ_{zz} dues au moment fléchissant et à la compression exercée par le poids propre (partie 1) et des contraintes de maturation, dans le cas «standard». L'allure de la distribution des contraintes de croissance apparaît conditionnée par celle des contraintes de maturation, ce qui peut justifier de négliger en première approche les contraintes de support pour décrire les distributions de contraintes internes de croissance dans l'arbre sur pied. Une interprétation plus précise est délicate, en l'absence de données sur l'histoire du chargement et de la géométrie de la ligne moyenne de l'arbre qui permettraient d'estimer la distribution des contraintes de support (qui dépendent des déformées successives de la tige et de la cinétique de mise en place du poids supporté). Nous

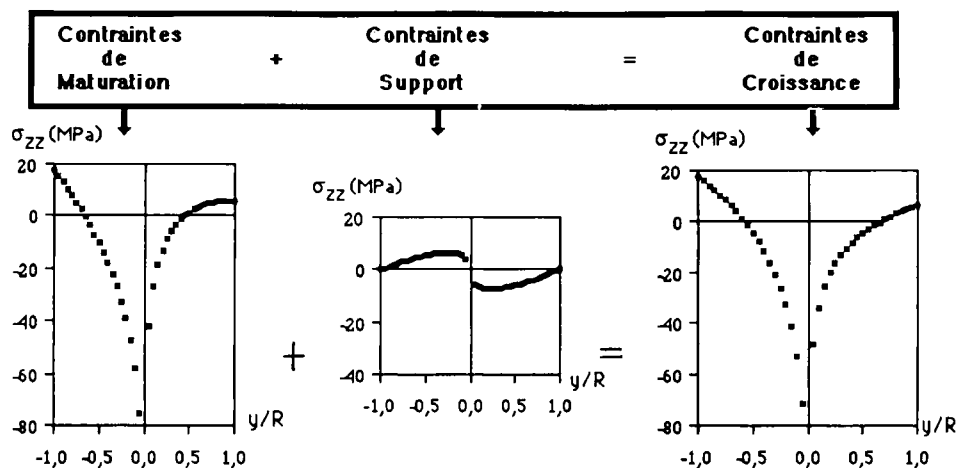


Fig 2. Contraintes de croissance le long de l'axe $\theta = \pm 90^\circ$ dans un billon standard, superposition des contraintes de maturation (cf fig 1) et des contraintes de support calculées pour un poids final supporté de $P_f = 1\,000$ daN, un rayon final $R_f = 15$ cm, une excentricité finale de ce poids de $e_f = 1,5$ m et une variation au cours du temps du poids supporté et de l'excentricité de ce poids en loi puissance du rayon R , lois d'exposants respectifs $b = 2,5$, $ex = 1$ (cf fig 4 de la partie 1).

pouvons toutefois remarquer que, dans le cas présenté d'un arbre qui se serait incliné régulièrement dans une direction fixe, négliger l'apport des contraintes de support aux contraintes de croissance conduit à surestimer les gradients radiaux $\partial\sigma_{zz} / \partial r$, donc les courbures longitudinales des sciages, sur la face la plus tendue $\theta = -90^\circ$, et à les sous-estimer en contrepartie sur l'autre face.

Ce raisonnement peut être poursuivi pour l'interprétation des déformations résiduelles mesurées dans un billon lors de découpes successives en vue de reconstituer la distribution originelle des contraintes internes de croissance ou de maturation dans l'arbre (Archer, 1986a; Kubler, 1987). Conceptuellement, les contraintes internes dans un billon sont la superposition des contraintes de maturation, des contraintes de support dans l'arbre sur pied et des contraintes exercées par l'abattage et le tronçonnage. Loin

des extrémités du billon, ces dernières sont les contraintes dues à la suppression du torseur équivalent au poids total supporté dans l'état final (Fournier *et al*, 1990b), et ne sont pas, du fait de la cinétique de mise en place du chargement exercé par le poids propre dans l'arbre, l'opposé des contraintes de support (voir partie 1). Comme schématisé sur la figure 3, la composante longitudinale résiduelle comporte donc, outre la composante des contraintes de maturation, une composante résiduelle de support. Comme énoncé précédemment, il peut être justifié d'interpréter qualitativement en première approximation ces contraintes internes comme des contraintes de maturation bien que l'influence éventuelle des contraintes résiduelles de support ne soit pas forcément négligeable : à la surface par exemple, l'abattage induit des déformations dues au moment fléchissant supprimé, qui peuvent atteindre quelques cen-

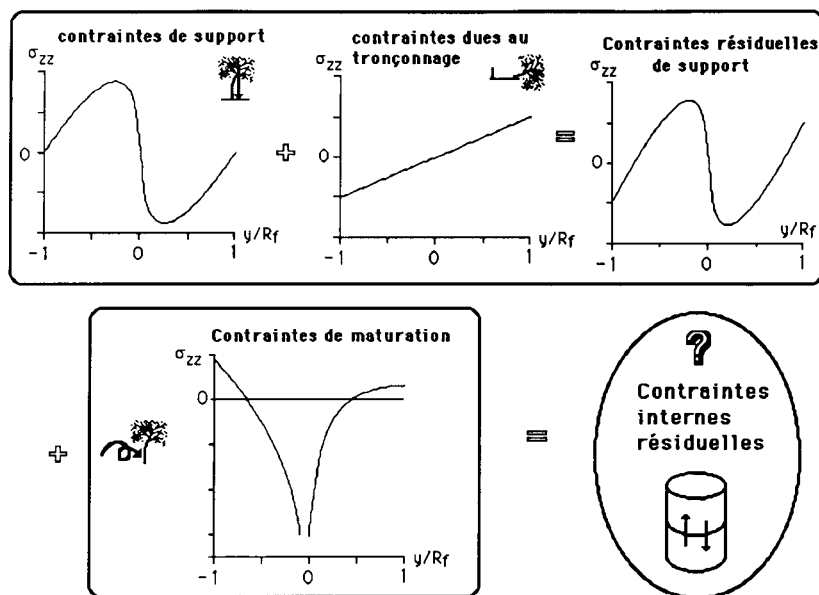


Fig 3. Les contraintes résiduelles dans un billon sont la superposition des contraintes de maturation, des contraintes de support ainsi que des contraintes dues au tronçonnage.

taines de microdéformations sur un individu fortement incliné, positives en $\theta = 90^\circ$ (face « comprimée », négatives en $\theta = -90^\circ$) (Fournier *et al.*, 1990b). Les déformations résiduelles mesurées à la surface du billon différeront donc de ces quelques centaines de microdéformations de celles que l'on aurait mesuré sur l'arbre (Okuyama *et al.*, 1983). Les déformations qui traduisent le mieux les déformations de maturation sont celles mesurées dans l'arbre sur pied, à la surface, puisque ce bois ne participe que très faiblement au support du chargement. Ces déformations sont des caractéristiques rhéologiques du changement d'état du bois lors de ses premières semaines de croissance (voir paragraphe *Évaluation expérimentale des déformations de maturation à la surface de l'arbre sur pied*), c'est-à-dire des caractéristiques locales du bois à l'endroit du point de mesure que l'on peut donc chercher à relier à son ultrastructure, à sa nature « bois juvénile » ou « bois de réaction »... Par contre, pour étudier l'état des contraintes dans un billon et leurs conséquences mécaniques (déformations, ruptures des pièces sciées) il faut *a priori* étudier l'influence de chaque opération de débit en superposition au champ de contraintes initial dans l'arbre, influence qui ne dépend pas que de la nature du bois à l'endroit où les contraintes s'exercent, mais aussi de toute la structure de la pièce et de l'arbre dont elle est issue. Les contraintes résiduelles de support à l'intérieur de la grume sont alors difficilement chiffrables.

Dans la plupart des cas, nous pouvons donc admettre que la distribution des contraintes de maturation donne l'allure et l'ordre de grandeur des contraintes de croissance dans l'arbre et des contraintes résiduelles dans une grume (loin des extrémités et en l'absence de fentes d'abatage), et réciproquement. Il faut cependant se garder d'interprétations trop précises, notamment lorsque les déformations résiduelles sont faibles ($\approx 0,01\%$).

CONCLUSION

Une modélisation de l'apparition de contraintes internes dans le bois d'un arbre sur pied a été proposée à partir d'une schématisation rhéologique simple de la différenciation cellulaire et de la simulation de la croissance cambiale couche par couche. Elle généralise celle proposée par Archer (Archer et Byrnes, 1974; Archer, 1986a); elle rejoint dans ses résultats les modèles proposés par d'autres auteurs (Boyd, 1950; Kubler, 1959a et b) en insistant toutefois sur la notion de « déformation de maturation » gênée lors de l'édification de la tige. Il s'agit donc d'une modélisation « mécaniste », qui cherche à décrire, à l'échelle de la section droite de la tige et du bois macroscopique, les phénomènes qui conduisent à l'apparition des contraintes de croissance.

Elle donne alors lieu à la conception d'un outil de simulation très général. Celui-ci intègre en effet les modèles précédents mais permet d'imaginer la simulation de situations variées : hétérogénéités radiales, circonférentielles, fibre torse. L'application a ici porté sur une situation de référence « standard » qui servira ultérieurement de référence pour l'étude de ces situations variées (Fournier, 1989; Fournier *et al.*, 1990a).

Sous réserve que les contraintes dues au support du poids propre restent négligeables, le modèle permet de relier le comportement du bois différencié à chaque étape de croissance cambiale aux contraintes de croissance, chargements permanents dans l'arbre libérés de l'abatage à la transformation (avec d'éventuels effets néfastes sur les produits). Il laisse donc envisager la possibilité de relier des paramètres technologiques caractéristiques de l'aptitude à la transformation (les contraintes résiduelles dans les débits) à des paramètres de la structure du bois

formé dans l'arbre, donc liés à la biologie de l'individu, et contrôlés par des facteurs endogènes (génétiques, architecturaux) ou exogènes (climat, sol, sylviculture). Une telle idée est à la base d'un programme scientifique pluridisciplinaire «architecture, structure, mécanique de l'arbre» en cours de développement, financé par le ministère de la Recherche et de la Technologie, réunissant spécialistes de la mécanique, de l'anatomie du bois et de la biologie des arbres (Thibaut, 1989; Loup *et al*, 1990).

ANNEXE

Résumé des formules de calcul utiles à la conception du logiciel de simulation de l'état tridimensionnel des contraintes dans un billon.

Données nécessaires à la résolution du problème mécanique de la formation et de la maturation d'une couche élémentaire périphérique d'épaisseur ΔR

La structure tronc, cylindrique circulaire, est définie par N_c couches radialement concentriques de propriétés élastiques ($C_{p,j}$ ($p = 1 \dots N_p$)). Dans l'application au feuillu standard, 3 couches sont utiles à la modélisation : un noyau central de rayon R_0 , la moelle, supposée, en l'absence d'informations plus précises, de rigidités négligeables, une bille de bois, le tronc pré-existant de rayon R , une nouvelle couche externe d'épaisseur ΔR , qui va être le siège d'une déformation induite α .

Nous cherchons :

– les champs de déplacements, notés Δu^p (Δu_r^p , Δu_θ^p , Δu_z^p) dans chaque couche, (r , θ , z sont les indices associés aux coordonnées cylindriques liées à l'axe du tronc;

– les champs de déformations associés – notés de façon analogue $\Delta \epsilon^p$ dans chaque couche – entre un état initial naturel et un état final où la déformation induite de maturation est apparue dans la couche externe;

– les champs de contraintes dans l'état final notés $\Delta \sigma^p$ dans chaque couche.

En l'état actuel, le logiciel de calcul comporte 2 modules, l'un pour les problèmes axisymétriques (traction-compression-torsion et champ de déformation induite indépendant de la coordonnée angulaire θ), l'autre pour les problèmes asymétriques d'ordre 1 (flexion et champ de déformation induite dépendant sinusoidalement de θ). Un problème tel que la maturation du feuillu standard, qui comporte une partie à symétrie de révolution (l'effet de la valeur moyenne de la déformation de maturation α^0) et une partie d'ordre 1 (l'effet de la dissymétrie angulaire α^1) est résolu par superposition, en utilisant successivement les 2 modules).

Le comportement des 3 zones est choisi élastique : chaque couche est homogène et orthotrope cylindrique, son comportement étant défini en tout point par les tenseurs des rigidités C^p ($C_{p,j}$). Le logiciel de calcul permet de définir les $C_{p,j}$ directement (en rentrant les 9 valeurs) ou en utilisant les modèles «standard» (à partir donc de la masse volumique du bois sec à l'air) (Guitard, 1987); une option permet de rentrer des rigidités nulles pour la moelle. Pour les problèmes axisymétriques, il est possible de tenir compte d'une fibre torse ψ^p , définie dans chaque couche.

La sollicitation mécanique caractéristique du problème est donnée : par la sollicitation externe globale sur la section droite : effort normal de traction ou compression, moment fléchissant, moment de torsion; pour les problèmes de contraintes internes, sous la forme d'une série polynomiale de la coordonnée radiale r dans cha-

que couche : $\alpha^{0p} = \sum \alpha^{0p}_j r^j$ pour les problèmes à symétrie de révolution $\alpha^{1p} = \sum \alpha^{1p}_j r^j$ pour les problèmes d'ordre 1. Dans le cas de l'application au feuillu standard étudiée ici, seul α^{03}_0 et α^{13}_0 sont non nuls.

Forme générale de la solution du problème mécanique de la formation et de la maturation d'une couche élémentaire périphérique d'épaisseur ΔR

La résolution est semi-analytique : à partir des équations d'équilibre ($\text{div } d\sigma = 0$), écrites en déplacement dans chaque couche (Guitard, 1987, chapitre 5), la forme générale des déplacements est intégrée. Puis, à partir de la définition des déformations $\Delta \varepsilon_{ij}$ par dérivation des déplacements, le champ des contraintes est calculé en utilisant la loi de comportement dans chaque couche $\Delta \sigma^p = C^p (\Delta \varepsilon^p - \alpha^p)$:

– cas axisymétrique :

$$\Delta u z^p = A1 z$$

$$\Delta u \theta^p = A2 z r$$

$$\Delta u r^p = A3_p r^{\gamma p} + A4_p r^{-\gamma p} - \frac{C^{p13} - C^{p23}}{C^{p11} - C^{p22}} A1 r$$

$$- \frac{2C^{p14} - C^{p24}}{4C^{p11} - C^{p22}} A2 r^2$$

$$+ \sum_i \frac{B_i p_{rr}(i+1) - B_i p_{\theta\theta}}{C^{p11}(i+1)^2 - C^{p22}} r^{i+1}$$

$$\text{avec } \gamma p = \left[\frac{C^{p22}}{C^{p11}} \right]^{1/2} \text{ et } B_i p = C \alpha^{0p}_i$$

et

$$\Delta \sigma_{rr}^p = A3_p (\gamma p C^{p11} + C^{p12}) r^{\gamma p-1} - A4_p (-\gamma p C^{p11} + C^{p12}) r^{-\gamma p-1}$$

$$+ A1 [-(C^{p11} + C^{p12}) \frac{C^{p13} - C^{p23}}{C^{p11} - C^{p22}} + C^{p13}]$$

$$+ A2 r [-(2 C^{p11} + C^{p12}) \frac{2C^{p14} - C^{p24}}{4C^{p11} - C^{p22}} + C^{p14}]$$

$$+ \sum_i [((i+1)C^{p11} + C^{p12})$$

$$\frac{B_i p_{rr}(i+1) - B_i p_{\theta\theta}}{C^{p11}(i+1)^2 - C^{p22}} - B_i p_{rr}] r^i$$

$$\Delta \sigma_{\theta\theta}^p = A3_p (\gamma p C^{p12} + C^{p22}) r^{\gamma p-1} - A4_p (-\gamma p C^{p12} + C^{p22}) r^{-\gamma p-1}$$

$$+ A1 [-(C^{p12} + C^{p22}) \frac{C^{p13} - C^{p23}}{4C^{p11} - C^{p22}} + C^{p23}]$$

$$+ A2 r [-(2C^{p12} + C^{p22}) \frac{2C^{p14} - C^{p24}}{4C^{p11} - C^{p22}} + C^{p24}]$$

$$+ \sum_i [((i+1)C^{p12} + C^{p22})$$

$$\frac{B_i p_{rr}(i+1) - B_i p_{\theta\theta}}{C^{p11}(i+1)^2 - C^{p22}} - B_i p_{\theta\theta}] r^i$$

$$\Delta \sigma_{zz}^p = A3_p (\gamma p C^{p13} + C^{p23}) r^{\gamma p-1} - A4_p (-\gamma p C^{p13} + C^{p23}) r^{-\gamma p-1}$$

$$+ A1 [-(C^{p13} + C^{p23}) \frac{C^{p13} - C^{p23}}{C^{p11} - C^{p22}} + C^{p33}]$$

$$+ A2 r [-(2 C^{p13} + C^{p23}) \frac{2C^{p14} - C^{p24}}{4C^{p11} - C^{p22}} + C^{p34}]$$

$$+ \sum_i [((i+1)C^{p13} + C^{p23})$$

$$\frac{B_i p_{rr}(i+1) - B_i p_{\theta\theta}}{C^{p11}(i+1)^2 - C^{p22}} - B_i p_{zz}] r^i$$

$$\Delta \sigma_{\theta z}^p = A3_p (\gamma p C^{p14} + C^{p24}) r^{\gamma p-1} - A4_p (-\gamma p C^{p14} + C^{p24}) r^{-\gamma p-1}$$

$$+ A1 [-(C_{p14} + C_{p24}) \frac{C_{p13} - C_{p23}}{C_{p11} - C_{p22}} + C_{p34}]$$

$$+ A2 r [-(2C_{p14} + C_{p24}) \frac{2C_{p14} - C_{p24}}{4C_{p11} - C_{p22}} + C_{p44}]$$

$$+ \Sigma [(i+1) C_{p14} + C_{p24} \frac{B_i p_{rr} (i+1) - B_i p_{\theta\theta}}{C_{p11} (i+1)^2 - C_{p22}} - B_i p_{\theta z}] r^i$$

$$\Delta \sigma_{\theta r}^p = \Delta \sigma_{rz}^p = 0$$

$A1, A2, A3_p, A4_p$ sont des constantes d'intégration, à déterminer en fonction des conditions aux frontières du problème considéré. $A2 = 0$ en l'absence de fibre torse;

– cas asymétrique d'ordre 1 :

$$\Delta u_z^p = A r z \cos \theta$$

$$\Delta u_r^p = [L_p r^{\alpha p} + M_p r^{-\alpha p} + U_p - \frac{A z^2}{2}] \cos \theta$$

$$\Delta u_{\theta}^p = [L_p \lambda_p r^{-\alpha p} + M_p \mu_p r^{-\alpha p} - U_p + \frac{A z^2}{2} - \frac{A}{2} b^p r^2 + \sum_i \frac{d^p r^{i+1}}{i}] \sin \theta$$

avec :

$$\alpha p^2 = \frac{(C_{p22} + C_{p66})(C_{p11} + C_{p66}) - (C_{p12} + C_{p66})^2}{C_{p11} C_{p66}}$$

$$\lambda_p = - \frac{C_{p11} \alpha p + C_{p12} + C_{p66}}{C_{p12} + C_{p66} - C_{p66} \alpha p}$$

$$\text{et } \mu_p = - \frac{-C_{p11} \alpha p + C_{p12} + C_{p66}}{C_{p12} + C_{p66} + C_{p66} \alpha p}$$

a^p et b^p définis par :

$$\begin{cases} (4C_{p11} - C_{p22} - C_{p66}) a^p \\ + (2C_{p12} + C_{p66} - C_{p22}) b^p = 4C_{p13} - C_{p23} \\ (2C_{p12} + C_{p22} + 3C_{p66}) a^p \\ + (-3C_{p66} + C_{p22}) b^p = 2C_{p23} \end{cases}$$

c_i^p et d_i^p définis par :

$$\begin{cases} (C_{p11} (i+1)^2 - C_{p22} - C_{p66}) c_i^p \\ + ((C_{p12} + C_{p66}) (i+1) - C_{p22} - C_{p66}) d_i^p \\ = B_i p_{rr} (i+1) - B_i p_{\theta\theta} \\ ((C_{p12} + C_{p66}) (i+1)^2 + C_{p22} + C_{p66}) c_i^p \\ + (-C_{p66} (i+1)^2 + C_{p22} + C_{p66}) d_i^p = B_i p_{\theta\theta} \end{cases}$$

et :

$$B_i^p = C \alpha_i^1 p$$

puis,

$$\Delta \sigma_{rr}^p = [L_p r^{\alpha p-1} (\alpha p C_{p11} + C_{p12} (1 + \lambda_p)) + M_p r^{-\alpha p-1} (-\alpha p C_{p11} + C_{p12} (1 + \mu_p)) - \frac{A}{2} r (2C_{p11} a^p + C_{p12} (a^p + b^p) - 2C_{p13}) + \sum_i r^i (C_{p11} c^p(i+1) + C_{p12} (c^p + d^p) - B_i p_{rr}) \cos \theta]$$

$$\Delta \sigma_{\theta\theta}^p = [L_p r^{\alpha p-1} (\alpha p C_{p12} + C_{p22} (1 + \lambda_p)) + M_p r^{-\alpha p-1} (-\alpha p C_{p12} + C_{p22} (1 + \mu_p)) - \frac{A}{2} r (2C_{p12} a^p + C_{p22} (a^p + b^p) - 2C_{p23}) + \sum_i r^i (C_{p12} c^p(i+1) + C_{p22} (c^p + d^p) - B_i p_{\theta\theta}) \cos \theta]$$

$$\Delta \sigma_{zz}^p = [L_p r^{\alpha p-1} (\alpha p C_{p13} + C_{p23} (1 + \lambda_p)) + M_p r^{-\alpha p-1} (-\alpha p C_{p13} + C_{p23} (1 + \mu_p)) - \frac{A}{2} r (2C_{p13} a^p + C_{p23} (a^p + b^p) - 2C_{p33}) + \sum_i r^i (C_{p13} c^p(i+1) + C_{p23} (c^p + d^p) - B_i p_{zz}) \cos \theta]$$

$$\Delta \sigma_{r\theta}^p = C_{p66} [L_p (-1 + \lambda_p (\alpha p - 1)) r^{-\alpha p-1} - M_p (1 + \mu_p (\alpha p + 1)) r^{-\alpha p-1}]$$

$$A + \frac{(a^p - b^p)}{2} r + \sum_i \frac{(-c^p + i d^p)}{i} r^i \sin \theta$$

$$\Delta \sigma_{\theta z}^p = 0 \text{ et } \Delta \sigma_{rz}^p = 0$$

A, L_p, M_p, U_p sont des constantes d'intégration, à déterminer en fonction des conditions aux frontières du problème considéré.

Détermination des constantes d'intégration

Les conditions aux limites sont :

- aux interfaces entre 2 couches successives p et $p+1$, il faut assurer la continuité des déplacements ainsi que la continuité des contraintes qui s'exercent sur toute facette de ces interfaces : $\Delta \sigma_{rr}, \Delta \sigma_{r\theta}$ et $\Delta \sigma_{rz}$;
- à la surface externe de la nouvelle couche, l'effort exercé par le milieu extérieur soit le phloème ou l'écorce sera négligé; les conditions aux limites sont donc des contraintes nulles $\Delta \sigma_{rr}, \Delta \sigma_{r\theta}$ et $\Delta \sigma_{rz}$ sur toute facette de cette surface;
- en $Z = \pm h$, dans une grume abattue les conditions aux limites sont des conditions de bord libre, mais dans un arbre, le houpier et la patte jouent un rôle de «frette»; les efforts qu'ils exercent sont complexes. Nous admettons classiquement des conditions intégrales sur le torseur des efforts appliqués; d'où les conditions énoncées ci-dessous.

Cas axisymétrique

Les $2Nc + 2$ constantes A_1, A_2, A_{3p}, A_{4p} ($p = 1 \dots Nc$) d'un problème particulier sont déterminées par les $2Nc + 2$ conditions suivantes du problème particulier.

La première couche contient l'axe $r = 0$, donc pour assurer des déplacements finis sur l'axe, $A_{41} = 0$.

Au bord $r = R + \Delta R$, $\Delta \sigma_{rr}^{Nc}(1) = 0$.

Aux $Nc-1$ interfaces, $\Delta u_r^p(Rp) = \Delta u_r^{p+1}(Rp)$ et $\Delta \sigma_{rr}^p(Rp) = \Delta \sigma_{rr}^{p+1}(Rp)$.

$$\begin{array}{l} Nc \quad Rp \quad N \\ \text{Conditions intégrales : } \Sigma \int_{p=1}^{Rp-1} \Delta \sigma_{zz}^p r \, dr = \frac{2\pi}{2\pi} \\ Nc \quad Rp \quad MT \\ \Sigma \int_{p=1}^{Rp-1} \Delta \sigma_{\theta z}^p r^2 \, dr = \frac{2\pi}{2\pi} \end{array}$$

L'ensemble de ces conditions, qui sont bien au nombre de $1 + 1 + 2(Nc - 1) + 2 = 2Nc + 2$, écrites en utilisant la forme générale définie au paragraphe *Forme générale de la solution du problème...* forme donc un système linéaire permettant sans ambiguïté de déterminer A_1, A_2, A_{3p}, A_{4p} $p = 1 \dots Nc$. Ce système est résolu numériquement (Méthode de Gauss avec Pivot Partiel).

Cas asymétrique d'ordre 1

Les $3Nc + 1$ constantes A, L_p, M_p, U_p du problème sont déterminées comme suit.

Dans la première couche, les déplacements sont finis sur l'axe donc M_1 est nul. De plus, U_p représente un déplacement de corps solide de la couche p selon x . Or, pour fixer le déplacement de corps solide, le point 0 a été supposé immobile, donc $U_1 = 0$.

Les fonctions de la variable r , $\Delta \sigma_{rr}^p / \cos \theta$ et $\Delta \sigma_{r\theta}^p / \sin \theta$ sont identiques. Cela peut se montrer sur les expressions des contraintes ci-dessus compte tenu des définitions de $\lambda_p, \mu_p, a^p, b^p, c_i^p$ et d_i^p , mais apparaît aussi directement sur les équations d'équilibre exprimées en contraintes :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^p - \sigma_{\theta\theta}^p}{r} = 0$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r\theta}^p}{r} = 0$$

Si $\sigma_{rr}^p = F(r) \cos \theta$, $\sigma_{\theta\theta}^p = H(r) \cos \theta$ et $\sigma_{r\theta}^p = G(r) \sin \theta$ alors ces équations impliquent en éliminant $G(r)$ que $d(r F) / dr = d(r G) / dr$ d'où le résultat.

Les conditions au bords $r = R$ se limitent donc à l'unique condition $\Delta \sigma_{rr}^{Nc}(1) = 0$.

De même, les conditions aux $Nc - 1$ interfaces se réduisent à la condition $\sigma_{rr}^p(R_p) = \sigma_{rr}^{p+1}(R_p)$ et aux 2 conditions de continuité cinématique $u_r^p(R_p) = u_r^{p+1}(R_p)$ et $u_\theta^p(R_p) = u_\theta^{p+1}(R_p)$.

Les conditions intégrales se limitent à la condition :

$$\sum_{p=1}^{Nc} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \frac{\sigma_{zz}^p}{\cos \theta} r^2 dr = - \frac{M^F y}{\pi}$$

L'ensemble de ces $(1 + 1 + 1 + 3(Nc - 1) + 1) = 3Nc + 1$ conditions, forme un système linéaire qui détermine de façon unique A , L_1 , L_p , M_p , U_p ($p = 2$ à Nc). Ce système est résolu numériquement.

Formulation du modèle d'accumulation

La formation d'un arbre est une succession de n transformations élémentaires. Un programme numérique permet de simuler les transformations successives, en calculant à chaque pas Q , les déplacements, les déformations et l'incrément de contraintes en des particules données sur le rayon, pour obtenir finalement par superposition σ en ces points matériels (apparus au fur et à mesure de la croissance radiale). Il a été vérifié que dès que le nombre d'itérations est suffisant, les solutions trouvées ne dépendent pas significativement de la largeur de la couche élémentaire; les résultats seront donnés pour 50 pas, pour un pas ΔR_Q constant.

RÉFÉRENCES

- Archer RR, Byrnes FE (1974) On the distribution of tree growth stresses, part I: an anisotropic plane strain theory. *Wood Sci Technol* 8, 184-196
- Archer RR (1976) On the distribution of tree growth stresses, part 2: stresses due to asymmetric growth strain. *Wood Sci Technol* 10, 293-309
- Archer RR (1986a) *Growth stresses and strains in trees*. Springer series in wood science. E Timell, Springer Verlag, Berlin
- Archer RR (1986b) Application of a new method for growth stress measurement to *Pinus caribaea*. *Proc IUFRO, Proj Group P 501, Properties and utilization of tropical woods*, Manaus, Brazil (19-23 novembre 1984)
- Archer RR (1987) On the origin of growth stresses in trees, part 1: micromechanics of the developing cambial cell wall. *Wood Sci Technol* 21, 139-154
- Archer RR (1989) On the origin of growth stresses in trees, part 2: stresses generated in a tissue of developing cells. *Wood Sci Technol* 23, 311-322
- Bamber RK (1987) *The origin of growth stresses: a rebuttal*. IAWA Bull ns, vol 8 (1), 80s-84s IAWA
- Bege P (1982) Détermination de la distribution des contraintes de croissance dans les essences feuillues. Analyse des résultats en métropole. Compte rendu de fin d'étude DGRST, centre technique du bois, Paris
- Boyd JD (1950) Tree growth stresses 1. Growth stress evaluation. *Aust J Sci Res B*, 3, 270-293
- Boyd JD (1972) Tree growth stresses V. Evidence of an origin in differentiation and lignification. *Wood Sci Technol* 6, 251-262
- Cinotti B (1989) La gélivure des chênes : front de gel source de contraintes internes, incidence des propriétés anatomiques et mécanophysiques. Thèse de Doctorat de l'INP de Lorraine
- El Amri F (1987) Contribution à la modélisation élastique anisotrope du matériau bois, feuillus et résineux. Thèse de Doctorat INP de Lorraine

- Ferrand JC (1982a) Un capteur d'extensométrie miniature à deux voies. *Ann Sci For* 39, 143-150
- Ferrand JC (1982b) Étude des contraintes de croissance, première partie : méthode de mesure sur carottes de sondage. *Ann Sci For* 39, 109-142
- Fournier M (1989) Mécanique de l'arbre sur pied. Maturation, poids propre, contraintes climatiques dans la tige standard. Thèse de l'INP de Lorraine
- Fournier M, Bordonne PA, Guitard D, Okuyama T (1990a) Growth stress patterns in tree stems: a model assuming evolution with the tree age of maturation strains. *Wood Sci Technol* 24, 131-142
- Fournier M, Langbour P, Guitard D (1990b) Mécanique de l'arbre sur pied : les relevés dendrométriques classiques pour quantifier les efforts gravitationnels supportés par un tronc – leurs limites. *Ann Sci For* 21, 565-577
- Fournier M, Chanson B, Guitard D, Thibaut B (1991) Mécanique de l'arbre sur pied : modélisation d'une structure en croissance soumise à des chargements permanents et évolutifs. 1. Analyse des contraintes de support. *Ann Sci For* 48, 513-525
- Gillis PP, Hsu CH (1979) An elastic theory of longitudinal growth stresses. *Wood Sci Technol* 13, 97-115
- Gril J (1988) Une modélisation du comportement hygro-rhéologique du bois à partir de sa microstructure. Thèse de l'université Paris VI
- Guitard D (1987) *Mécanique du matériau, bois et composites*. Collection Nabla, Cépadués, Éditions, Toulouse
- Guitard D, El Amri F (1987) Modèles prévisionnels du comportement élastique des bois feuillus ou résineux. *Ann Sci For* 44, 335-358
- Kollman FFP, Cote WA (1968) *Principles of wood Science and technology. I. Solid Wood*. Springer Verlag, Berlin
- Kubler H (1959a) Studien über Wachstumsspannungen des Holzes. Erste Mitteilung. Die Ursache der Wachstumsspannungen und die Spannungen quer zur Faserrichtung. *Holz als Roh- und Werkstoff* 1, 1-9
- Kubler H (1959b) Studien über Wachstumsspannungen des Holzes. Zweite Mitteilung. Die Spannungen in Faserrichtung. *Holz als Roh- und Werkstoff* 17, 2, 44-54
- Kubler H (1987) Growth stresses in trees and related wood properties. *For Abstr* 48, 3, 130-189
- Langbour P (1986) Relations entre contraintes de croissance et veine verte chez le merisier (*Prunus avium*). DEA sciences du bois, station qualité des bois, Institut national de la recherche agronomique (centre de recherches forestières, Champenoux)
- Loup C, Fournier M, Chanson B (1990) Relations entre architecture, mécanique et anatomie de l'arbre : cas d'un pin maritime (*Pinus pinaster* Soland). In : 2^e Coll Int sur l'arbre, Montpellier, 10-15 septembre 1990, actes édités par *Naturalia monspeliensa* (à paraître)
- Nicholson JE (1971) A rapid method for estimating longitudinal growth stresses in logs. *Wood Sci Technol* 5, 40-48
- Okuyama T, Kawai A, Kikata Y (1983) Growth stresses and uneven gravitational stimulus in trees containing reaction wood. *Mokuzai Gakkaishi* 29, 190-196
- Palka LC (1973) Predicting the effect of specific gravity, moisture content, temperature, and strain rate on the elastic properties of softwood. *Wood Sci Technol* 7, 127-141
- Polge H, Thiercelin F (1979) Growth stress measurement through increment core measurement. *Wood Sci Technol* 12, 86-92
- Post IL (1979) An incremental longitudinal growth stress distribution model. *Holzforschung* 33, 107-111
- Sasaki Y, Okuyama T, Kikata Y (1978) The evolution process of the growth stress in the tree: the surface stresses on the tree. *Mokuzai Gakkaishi* 24, 149-157
- Saurat J, Gueneau P (1976) Growth stress in beech. *Wood Sci Technol* 10, 111-123
- Tahani N (1988) Modélisation des contraintes internes dans les matériaux orthotropes cylindriques : séchage d'un billon soumis à un gradient radial d'humidité. Thèse de Doctorat de l'INP de Lorraine
- Thibaut B (1989) *Intérêt d'une approche globale «Architecture, structure, mécanique de l'arbre»*, LMGMC, USTL, Montpellier

- Watanabe H (1965) A study of the origin of growth stresses in tree stems. *IUFRO* Section 41, vol 1, colloque de Melbourne
- Wilson BF (1981) The development of growth strains and stresses in reaction wood. *In: Xylem cell development* (JR Barnett, ed). Castle House Publications Ltd
- Yamamoto H, Okuyama T (1988) Analysis of the generation process of growth stresses in cell walls. *Mokuzai Gakkaishi* 34, 788-793