



HAL
open science

Caractéristiques modales des mouvements d'arbre pour des structures à symétrie cyclique

Nicolas Salvat, Alain Batailly, Mathias Legrand

► **To cite this version:**

Nicolas Salvat, Alain Batailly, Mathias Legrand. Caractéristiques modales des mouvements d'arbre pour des structures à symétrie cyclique. [Rapport de recherche] Université McGill. 2013. hal-00881272v2

HAL Id: hal-00881272

<https://hal.science/hal-00881272v2>

Submitted on 14 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Caractéristiques modales des mouvements d'arbre pour des structures à symétrie cyclique



Nicolas Salvat

Laboratoire de Dynamique des Structures et Vibrations, Département de Génie Mécanique,
Université McGill, 817 rue Sherbrooke Ouest, Montréal, Québec H3A 0C3
courriel : nicolas.salvat@mail.mcgill.ca

Alain Batailly

Laboratoire de Dynamique des Structures et Vibrations, Département de Génie Mécanique,
Université McGill, 817 rue Sherbrooke Ouest, Montréal, Québec H3A 0C3

Mathias Legrand

Laboratoire de Dynamique des Structures et Vibrations, Département de Génie Mécanique,
Université McGill, 817 rue Sherbrooke Ouest, Montréal, Québec H3A 0C3

Contexte industriel et présentation du phénomène

Dans le domaine des turbomachines modernes, lors de la recherche d'amélioration du rendement des moteurs, les concepteurs se concentrent généralement sur les aspects suivants : (1) réduction de fuites parasites entre chaque étage du compresseur, (2) conception d'aubes plus fines et légères, et (3) augmentation de la conicité du carter afin d'améliorer les taux de compression. La réduction des fuites suppose une diminution du jeu en sommet d'aube entre les parties tournantes et les parties fixes du moteur, réduction parfois obtenue par l'ajout d'une couche dite de *matériau abrasable* [1]. Ce type de solution technologique, adoptée par des industriels, amène à considérer le contact unilatéral entre le sommet des aubes du compresseur et le carter environnant comme faisant partie des conditions normales d'utilisation du moteur. Cependant, ces contacts peuvent engendrer des interactions rotor/stator complexes et potentiellement dangereuses [2, 3].

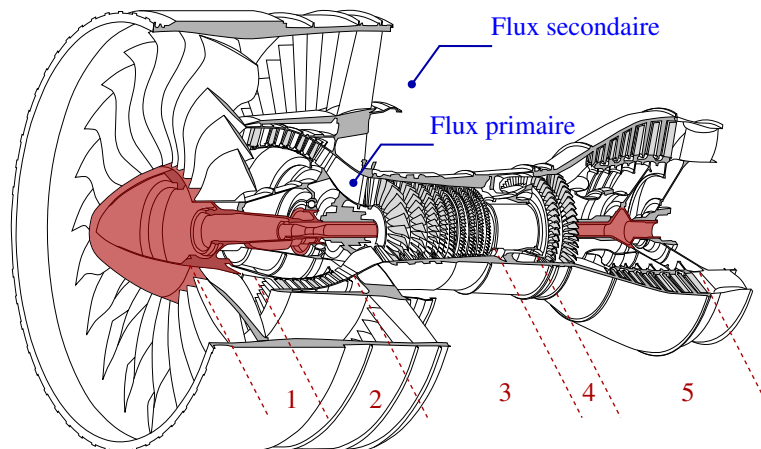


FIGURE 1 – Moteur d'avion double corps - double flux : (1) soufflante, (2) compresseur haute pression, (3) compresseur basse pression, (4) chambre de combustion et (5) turbines haute et basse pression

En particulier, au niveau de la soufflante du moteur ou étage *fan*—mis en évidence sur la figure 1— des phénomènes divergents ont été observés après une série de contacts aubes/carter. Parmi ceux-ci, le phénomène de tournoisement ou *whirl*, est généré par les forces de frottement issues du contact et le moment que celles-ci produisent au niveau de l’arbre. Il s’agit d’une rotation d’ensemble qui se caractérise par un mouvement de précession de l’arbre associé à un mode couplé aube/disque/arbre spécifique. La compréhension de ce phénomène, vastement étudié pour des systèmes de type rotor/roulement [4, 5], passe donc par un étude des caractéristiques modales du système d’intérêt, *i.e.* les structures à symétrie cyclique [6] en portant une attention particulière au couplage arbre/roue aubagée.

Un sous-cas de ce type de structure sont les structures à symétrie axiale. Notamment les *plaques circulaires* présentent la particularité que seuls les modes à 1 diamètre nodal admettent des déplacements non nuls en son centre. Farag et al. [7] ont étudié les modes propres d’une plaque circulaire encastrée sur son bord. Ce travail a été repris par Park [8] où une comparaison d’une méthode analytique et une analyse EF est réalisée, permettant ainsi d’illustrer les modes propres. Finalement, Kim et al. [9] ont généralisé les équations du mouvement pour une plaque circulaire avec le bord restreint par des raideurs afin de simuler différents types de conditions aux limites (raideurs nulles = bord libre, raideurs infinies = bord encastré, et raideurs moyennes). Les modes propres y sont également illustrés grâce à un modèle EF.

Le propos de cette note est donc d’étendre ce raisonnement pour des structures à symétrie cyclique et de montrer que les déplacements des nœuds reposant sur l’axe de symétrie, *i.e.* mouvements d’arbre, ne font participer que les modes à 1 diamètre nodal, et que pour autant le phénomène de tournoisement doit être étroitement lié à ce type de mode.

La première section concerne le formalisme mathématique du passage du domaine EF à l’espace cyclique. Par la suite, une analyse modale d’une roue aubagée 3D est présentée afin d’illustrer le phénomène.

1 Approche théorique

1.1 Introduction

L’objectif de cette section est d’expliquer comment un déplacement d’un nœud central dans le domaine EF peut s’écrire dans l’espace de Fourier (espace de symétrie cyclique), et ainsi évaluer son impact sur les différentes harmoniques du système.

Considérons donc une structure possédant des propriétés de symétrie cyclique, telle que celle sur la figure 2. Ce type de structure est composée de N secteurs identiques, et pour autant possède des modes propres qui peuvent être regroupés par famille ainsi que par nombre d’harmoniques ou diamètre nodal k :

- harmoniques simples : $k = 0$ et $k = N/2$ (si N est pair) ;
- harmoniques doubles : $k \in [1; K]$ avec,

$$K = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{N-2}{2} & \text{si } N \text{ est pair.} \end{cases}$$

Les harmoniques doubles correspondent à des modes propres de même fréquence orthogonaux, pouvant ainsi être recomposés comme des modes tournants, alors que les harmoniques simples correspondent à des ondes fixes. Par ailleurs, l’harmonique $k = N/2$ existe uniquement lorsque N est pair, pour cela, si N est impair la dernière harmonique de la structure est double [6].

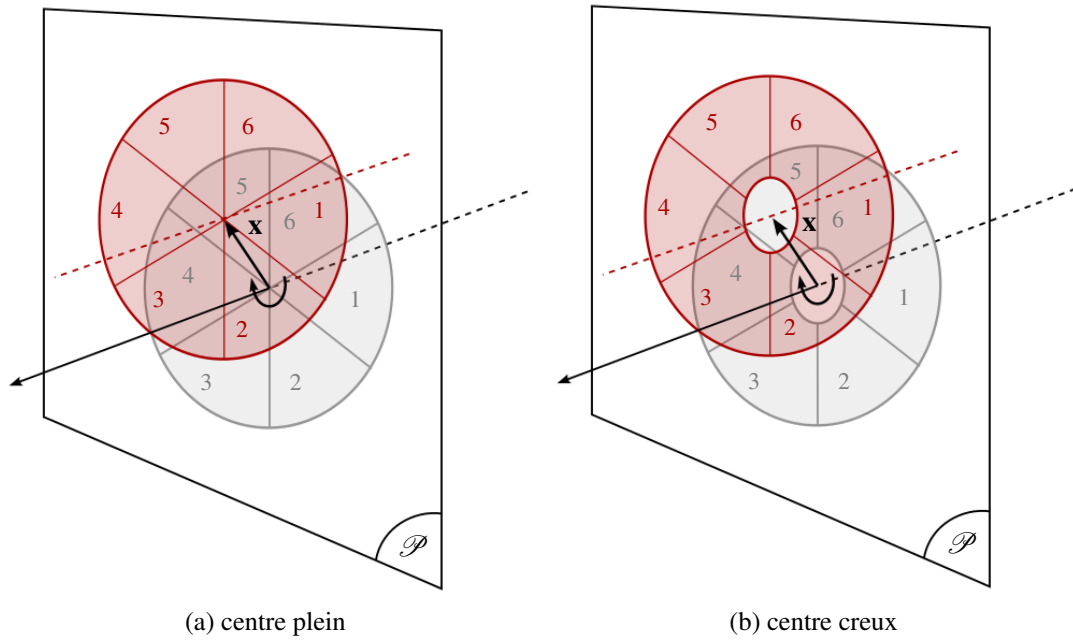


FIGURE 2 – Structure à symétrie cyclique : $N = 6$

1.2 Démonstration mathématique

Le mouvement de n'importe quel point appartenant à l'axe de symétrie de la structure¹ (---) peut être décrit par un vecteur déplacement \mathbf{x} , dont les coordonnées s'expriment dans un plan \mathcal{P} illustré dans la figure 2. Ainsi, à un instant donné, le déplacement du nœud central (pouvant être physique c.f. Fig. 2a ou virtuel c.f. Fig. 2b) peut s'écrire dans le repère local du n -ième secteur de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\alpha) \\ -a \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}_2 = \dots = \begin{pmatrix} a \cdot \cos((N-1)\alpha) \\ -a \cdot \sin((N-1)\alpha) \end{pmatrix}_N \quad (1)$$

où a est l'amplitude du déplacement et $\alpha = 2\pi/N$ est la largeur angulaire d'un secteur. De manière condensée, cette équation devient :

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(n\alpha) \\ -a \cdot \sin(n\alpha) \end{pmatrix}_{n=1\dots N} \quad (2)$$

Afin de passer du déplacement physique \mathbf{x} au déplacement correspondant dans l'espace de Fourier en coordonnées cycliques \mathbf{u} , le changement de variable présenté dans la thèse de Bladh [10] est adopté.

1.2.1 Harmonique simple $k = 0$

Pour l'harmonique $k = 0$, le changement de variable est le suivant :

$$\mathbf{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \quad (3)$$

1. Tout point appartenant à l'axe de symétrie de la structure—confondu avec l'axe de rotation (---) lorsque la structure est au repos—est également appelé nœud central par la suite.

en remplaçant \mathbf{x}_n par l'expression (2) et en adoptant une écriture sous forme exponentielle complexe ($i^2 = -1$), l'équation (3) devient :

$$\mathbf{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N a \cdot \cos(n\alpha) \\ \sum_{n=1}^N -a \cdot \sin(n\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N a \cdot \operatorname{Re}(\exp(in\alpha)) \\ \sum_{n=1}^N -a \cdot \operatorname{Im}(\exp(in\alpha)) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cette somme d'exponentielles est une suite géométrique de raison $\exp(i\alpha)$:

$$\sum_{n=1}^N a \cdot \exp(in\alpha) = a \cdot \exp(i\alpha) \frac{1 - \exp(i\alpha)^N}{1 - \exp(i\alpha)} \quad (5)$$

or,

$$\exp(i\alpha)^N = \exp\left(i \frac{2\pi}{N}\right)^N = \exp(i2\pi) = 1 \quad (6)$$

donc,

$$\sum_{n=1}^N a \cdot \exp(in\alpha) = 0 + i0 \Rightarrow \mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

la projection du déplacement physique (ou virtuel) du nœud central sur l'harmonique 0 est nulle.

1.2.2 Harmonique simple $k = N/2$

Le même formalisme mathématique de l'harmonique 0 est mis en place pour le changement de variable de l'harmonique $N/2$, à la différence que celle-ci n'existe que lorsque N est pair.

$$\mathbf{u}^{N/2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \mathbf{x}_n \quad (8)$$

puis en appliquant l'écriture exponentielle introduite dans l'équation (4), l'expression (8) devient :

$$\mathbf{u}^{N/2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} a \cdot \cos(n\alpha) \\ \sum_{n=1}^N -(-1)^{n-1} a \cdot \sin(n\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N -a \cdot \operatorname{Re}((-1)^n \exp(in\alpha)) \\ \sum_{n=1}^N a \cdot \operatorname{Im}((-1)^n \exp(in\alpha)) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ainsi, en suivant le même raisonnement conduisant à l'équation (5), la somme d'exponentielles se traduit par une suite géométrique de raison $-\exp(i\alpha)$:

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n a \cdot \exp(-in\alpha) = -a \cdot \exp(i\alpha) \frac{1 - (-\exp(i\alpha))^N}{1 - (-\exp(i\alpha))} \quad (10)$$

or,

$$(-\exp(i\alpha))^N = \left(-\exp\left(i \frac{2\pi}{N}\right)\right)^N = \exp(i2\pi) = 1 \quad \text{car } N \text{ est pair,} \quad (11)$$

donc,

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n a \cdot \exp(-in\alpha) = 0 + i0 \Rightarrow \mathbf{u}^{N/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

la projection du déplacement physique (ou virtuel) du nœud central sur l'harmonique $N/2$ —pour N pair—est nulle.

1.2.3 Harmoniques doubles $k = 1 \dots K$

Les harmoniques doubles se traduisent par le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{k,c} &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \cos((n-1)k\alpha) \\ \mathbf{u}^{k,s} &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \sin((n-1)k\alpha)\end{aligned}\tag{13}$$

En manipulant les sommes de cosinus et de sinus de l'équation (13), on peut montrer que :
– $\forall k \in]1; K]$:

$$\mathbf{u}^{k,c} = \mathbf{u}^{k,s} = \mathbf{0}\tag{14}$$

– pour $k = 1$:

$$\mathbf{u}^{k,c} = \mathbf{u}^{k,s} = a \cdot \sqrt{2N} \cos(\alpha)\tag{15}$$

Des équations (14) et (15) nous pouvons conclure que les déplacements des nœuds reposant sur l'axe de rotation de la structure (ou axe de symétrie), n'ont une influence que sur l'harmonique 1, et pour autant le whirl implique nécessairement la participation de cette famille modale.

2 Application : roue aubagée 3D

À l'aide du logiciel ANSYS, une analyse modale en symétrie cyclique est réalisée dans cette section afin d'illustrer les concepts mathématiques développés ci-dessus.

2.1 Modélisation

Le modèle de roue aubagée considéré dans cette étude, développé entièrement au sein du laboratoire, est un modèle académique dont la géométrie et le maillage n'ont aucune application industrielle.

Les caractéristiques du modèle EF, dont le maillage est illustré par la figure 2.1, sont les suivantes :

- secteur de roue aubagée avec arbre représentant la soufflante d'un moteur d'avion ;
- roue complète composée de $N = 22$ secteurs ;
- conditions de symétrie cyclique appliquées sur les deux surfaces latérales ;
- encastrement de l'extrémité de l'arbre ;
- nœuds appartenant à l'axe de rotation (axe de symétrie) au niveau du nez.

Du fait du nombre de secteurs dont la roue complète est composée, ce modèle possède deux harmoniques simples ($k = 0$ et $k = 11$) ainsi que dix harmoniques doubles ($k = 1 \dots 10$) par famille modale.

2.2 Analyse modale

Une fois la géométrie définie et le maillage par éléments tétraédriques construit, l'analyse modale linéaire de la structure permet d'observer ses modes propres. On s'intéresse aux trois premières familles de modes (1F, 2F et 1T)², pour lesquels les harmoniques $k = 0, 1, 2, 3$ sont illustrées dans les figures respectivement.

2. Notations : F pour les modes de flexion et T pour les modes de torsional

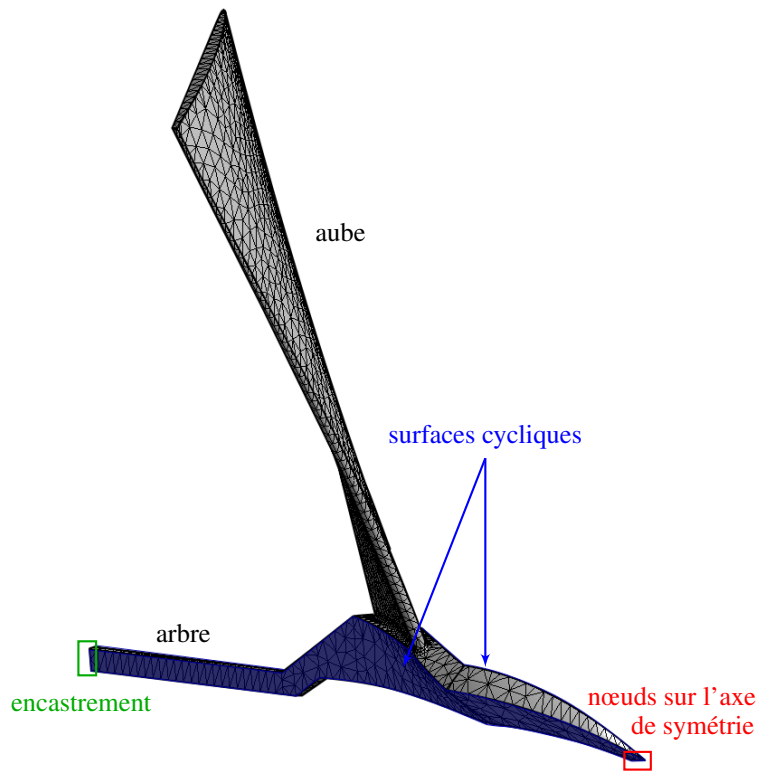


FIGURE 3 – Maillage du secteur (ANSYS)

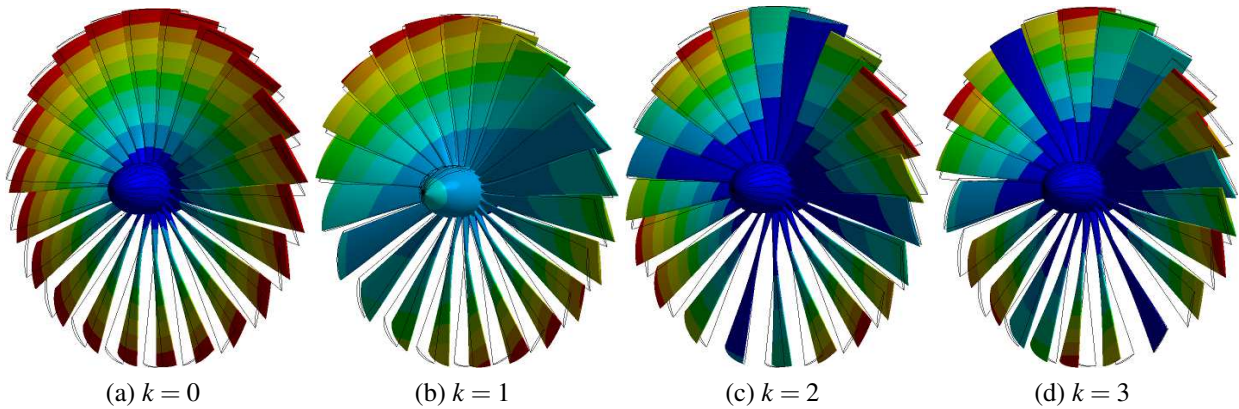


FIGURE 4 – Famille de modes 1F

En accord avec ce qui a été exposé plus haut, on observe sur les figures 4, 5 et 6, grâce au code couleur adopté (rouge = maximum de déplacement et bleu = déplacements nuls), que quelle que soit la famille de modes considérée, les nœuds du centre ne participent que à la dynamique des harmoniques $k = 1$. Cependant, pour la famille de modes 1T, ces nœuds sont pratiquement immobiles (figure 6b), ce qui indique que les harmoniques $k = 1$ n'impliquent pas nécessairement une participation des nœuds centraux de la structure.

Finalement, les animations de la figure 7, comparant les harmoniques $k = 1$ et $k = 2$ du premier mode de flexion, permettent encore une fois d'illustrer le phénomène où les déplacements du nez de la soufflante sont visibles uniquement pour le mode à 1 diamètre nodal.

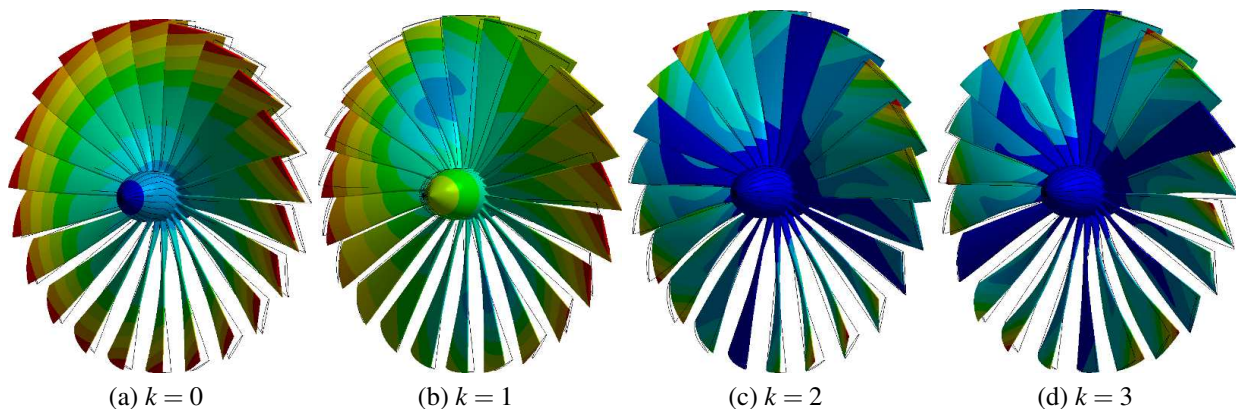


FIGURE 5 – Famille de modes 2F

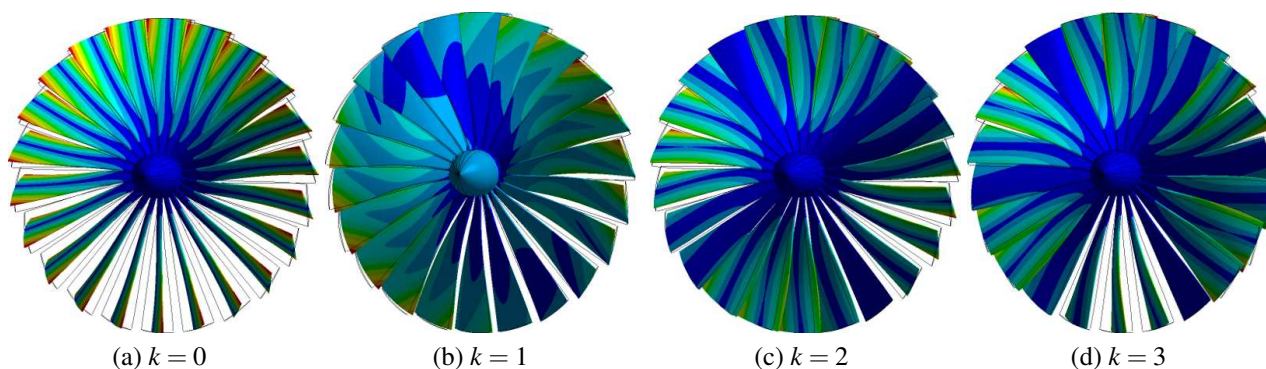


FIGURE 6 – Famille de modes 1T

Conclusion

Pour des structures à symétrie axiale telles que les plaques circulaires, des travaux réalisés par Farag et al. [7], Park [8] et Kim et al. [9] ont permis de montrer que seuls les modes à 1 diamètre nodal admettent un déplacement du centre de la plaque, et pour cela, tout mouvement de ce point est nécessairement composé d'une combinaison de modes à 1 diamètre nodal.

Dans le cadre des structures à symétrie cyclique, nous avons montré un comportement analogue. Les nœuds reposant sur l'axe de symétrie ne participent qu'à la dynamique des harmoniques $k = 1$ du système et leur projection sur tout autre harmonique est nulle. Ce raisonnement est également valable pour les structures à symétrie cyclique ne possédant pas de nœuds physiques sur l'axe de rotation. Dans ce cas, le déplacement introduit \mathbf{x} correspond à un déplacement virtuel de l'axe de symétrie et n'est possible que sur les modes à 1 diamètre nodal.

Par conséquent, tout mouvement d'arbre est constitué d'une combinaison de modes à $k = 1$ et pour autant, le tournoiement ou *whirl*—qu'il soit rétrograde ou direct suivant le sens de précession de l'arbre par rapport à la vitesse de rotation—implique nécessairement la participation de ce type de mode. Inversement, une harmonique $k = 1$ n'implique pas forcément un mouvement des nœuds centraux, comme observé pour les modes de torsion de la roue aubagée présentée en exemple, dans la figure 6.

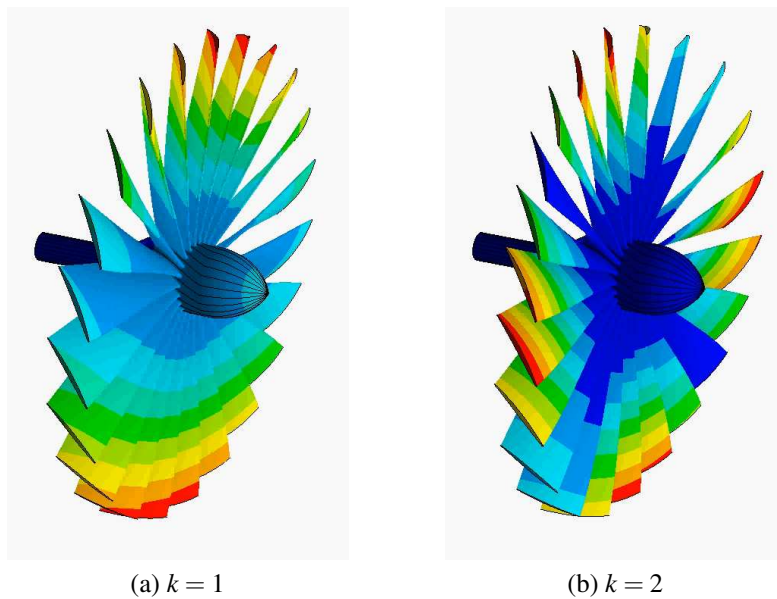


FIGURE 7 – Animation des harmoniques $k = 1$ et $k = 2$ du mode 1F

Bibliographie

- [1] M. YI, J. HE, B. HUANG et H. ZHOU. « Friction and wear behaviour and abrasability of abradable seal coating ». *Wear* 231.1 (1999), p. 47–53. DOI : [10.1016/S0043-1648\(99\)00093-9](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00093-9).
- [2] A. BATAILLY, M. LEGRAND, A. MILLECAMPS et F. GARCIN. « Numerical-Experimental Comparison in the Simulation of Rotor/Stator Interaction Through Blade-tip/Abradable Coating Contact ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.8, 082504 (2012), p. 082504. DOI : [10.1115/1.4006446](https://doi.org/10.1115/1.4006446).
- [3] N. SALVAT, A. BATAILLY et M. LEGRAND. « Modeling of Abradable Coating Removal in Aircraft Engines Through Delay Differential Equations ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 135.10 (2013), p. 102102. DOI : [10.1115/1.4024959](https://doi.org/10.1115/1.4024959).
- [4] A. MUSZYNSKA. « Whirl and whip–Rotor/bearing stability problems ». *Journal of Sound and vibration* 110.3 (1986), p. 443–462. DOI : [10.1016/S0022-460X\(86\)80146-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80146-8).
- [5] D.W. CHILDS. *Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, and analysis*. Wiley-Interscience, 1993.
- [6] D.L. THOMAS. « Dynamics of rotationally periodic structures ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.1 (1979), p. 81–102. DOI : [10.1002/nme.1620140107](https://doi.org/10.1002/nme.1620140107).
- [7] N. H. FARAG et J. PAN. « Modal characteristics of in-plane vibration of circular plates clamped at the outer edge ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 113.4 (2003), p. 1935–1946. DOI : [10.1121/1.1553456](https://doi.org/10.1121/1.1553456).
- [8] C. I. PARK. « Frequency equation for the in-plane vibration of a clamped circular plate ». *Journal of Sound and Vibration* 313.1–2 (2008), p. 325–333. DOI : [10.1016/j.jsv.2007.11.034](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.11.034).
- [9] C-H. KIM, H. S. CHO et H. G. BEOM. « Exact solutions of in-plane natural vibration of a circular plate with outer edge restrained elastically ». *Journal of Sound and Vibration* 331.9 (2012), p. 2173–2189. DOI : [10.1016/j.jsv.2011.12.027](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.027).
- [10] R. BLADH. « Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling ». Thèse de doct. University of Michigan, 2001.