



HAL
open science

Les nombres complexes : entre mathématiques, physique et philosophie

Manuel Bächtold, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Manuel Bächtold, Thomas Hausberger. Les nombres complexes : entre mathématiques, physique et philosophie. La réforme des programmes des lycées : et alors?, May 2013, Lyon, France. ISBN 978-2-86612-350-5, pp. 78-88. hal-00879219

HAL Id: hal-00879219

<https://hal.science/hal-00879219v1>

Submitted on 2 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES NOMBRES COMPLEXES : ENTRE MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE ET PHILOSOPHIE

Manuel Bächtold, LIRDEF & IREM de Montpellier – Université Montpellier 2

Thomas Hausberger, I3M & IREM de Montpellier - Université Montpellier 2

Les nombres complexes sont des objets qui se situent à la transition entre lycée et université. Mais ce sont également des objets interdisciplinaires : construits par le mathématicien, ils sont utilisés par le physicien et discutés par le philosophe. Nous examinons au cours de cet atelier des exemples de scénarios pédagogiques visant à croiser les regards sur les nombres complexes. Nous montrons également, en nous appuyant sur cet exemple, comment la réflexion épistémologique peut-être utile afin de faciliter la transition lycée-université.

INTRODUCTION

Les nombres complexes sont à double titre un objet de transition : du point de vue institutionnel, puisqu'ils sont enseignés en fin du cycle secondaire et à l'entrée de l'université, et du point de vue épistémologique, dans la mesure où ils constituent un objet de connaissance qui peut servir d'initiation à la pensée mathématique avancée. Cet atelier a pour objectif de clarifier ce point et de montrer que l'étude des nombres complexes peut contribuer à faciliter la transition secondaire-supérieur dans le domaine de l'apprentissage des mathématiques. Dans cette optique, nous avons développé des scénarios pédagogiques adaptés. L'approche que nous proposons a pour originalité d'être historique et épistémologique. Nous tenterons de montrer que cette approche permet (i) de favoriser l'appropriation des nombres complexes, (ii) de faciliter la transition lycée-université, mais aussi (iii) d'établir des ponts entre les mathématiques et la physique – ces trois points étant interconnectés.

LES NOMBRES COMPLEXES : UN OBJET DE TRANSITION SECONDAIRE-SUPÉRIEUR POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Nous posons les deux questions suivantes : 1. En quoi les nombres complexes sont-ils un objet de transition ? 2. Comment introduire les nombres complexes ? Avant d'y répondre, il est utile de situer les nombres complexes dans le contexte actuel de leur enseignement, en relation avec le thème du colloque.

Un coup d'oeil sur les nouveaux programmes de Terminale Scientifique

Les nombres complexes constituent, comme dans le précédent programme, le premier thème du chapitre géométrie. Pour autant, l'articulation avec la géométrie se résume à l'interprétation géométrique des complexes qui « sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres ». Ceci est à comparer avec l'ancien programme qui stipulait : « l'objectif est de montrer la puissance des calculs dans les problèmes de géométrie », l'étude des similitudes à l'aide des complexes occupant de plus une heure hebdomadaire de l'enseignement de spécialité mathématique pendant un trimestre.

Au-delà de l'introduction générale au nouveau programme, les nombres complexes constituent l'un des principaux thèmes (voire le seul ?) dotés explicitement d'une référence à l'histoire des

mathématiques : « on introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique ». Bien qu'il s'agisse d'une recopie du texte de l'ancien programme, d'autres raisons peuvent expliquer cet encart dans les programmes. Nous en discuterons ci-dessous, ainsi que de la mise en œuvre de cette approche.

Les applications concernent essentiellement la résolution des équations et la trigonométrie (pas d'application à la géométrie ni à la physique) : en définitive, les nombres complexes sont présentés essentiellement comme des objets théoriques formels aux multiples facettes (algébrique, géométrique,...), sans se donner les moyens d'articuler ces facettes et d'en montrer la force applicative. Les ambitions affichées sont réduites : « cette introduction s'inscrit dans la perspective d'une poursuite d'étude », reléguant au supérieur les tâches d'approfondissement.

L'enseignement des nombres complexes en première année de Licence à Montpellier

A Montpellier, les nombres complexes sont enseignés aux étudiants du portail mathématiques-physique-informatique dans le cadre d'un module de 84h du premier semestre de licence (nombres réels, nombres complexes, premières notions d'algèbre linéaire, analyse). Le plan de ce chapitre du cours est le suivant : Description des nombres complexes - Propriétés fondamentales des opérations - Forme algébrique d'un nombre complexe, parties réelle et imaginaire - L'absence de relation d'ordre sur \mathbb{C} - Représentation géométrique des nombres complexes - Conjugué d'un nombre complexe - Module et argument - Propriétés du module et de l'argument - Forme polaire, notation exponentielle - Multiplication par un nombre complexe et géométrie - Formules trigonométriques - Racine carrée d'un nombre complexe - Équation du second degré à coefficients complexes - Racines n-ièmes d'un nombre complexe - Racines des polynômes à coefficients complexes - Le cercle unité - L'exponentielle complexe - Appendice : une construction des nombres complexes.

En définitive, le contenu est en gros identique à celui du programme de Terminale S, mais le mode d'exposition est plus théorique et systématique. Les complexes ne sont pas appliqués à la géométrie (ce qui reflète un certain cloisonnement des modules). Par contre, ils font parti des prérequis mathématiques d'un grand nombre de modules de physique (électronique, optique, électromagnétique,...) qui ouvrent à de vastes champs d'application.

En quoi les nombres complexes sont-ils un objet de transition ?

Les complexes se situent de fait à la transition lycée-université par leur place dans le curriculum. Pour autant, des raisons plus profondes permettent de les concevoir comme des objets liés à cette transition. Partons des analyses des didacticiens :

- La transition lycée-université oppose deux cultures différentes, un nouveau contrat didactique étant mis en place à l'université.
- D'un point de vue épistémologique, cette transition est marquée par le passage de « décrire à définir, de convaincre à prouver ».
- Parmi les obstacles identifiés figurent l'obstacle du formalisme et l'accroissement du niveau d'abstraction.
- Les mathématiques du supérieur font apparaître un enrichissement des objets et concepts, lesquels sont organisés en réseaux conceptuels.
- Les tâches à l'université nécessitent de la flexibilité et de l'autonomie dans les changements de cadres et de registres de représentations sémiotiques.

Il est remarquable que l'organisation mathématique du cours de L1 exposée précédemment prenne en charge la transition de « décrire à définir » : le cours débute par une « description », la définition formelle (héritée de Hamilton) des nombres complexes n'étant donnée qu'à la fin, et ceci sans que les collègues du supérieur n'aient pris connaissance des travaux en didactique. Cette transition, pour les nombres complexes, a donc lieu au cours du L1.

Les nombres complexes s'insèrent dans ce tableau de la transition lycée-université sous deux aspects principaux : l'obstacle du formalisme abstrait et l'articulation de différents cadres (géométrique, algébrique, numérique) et formes de représentations (cartésienne, trigonométrique) qui en font des objets riches (en ce sens, ils méritent leur nom !). Nous allons discuter plus en détail ces deux points.

Nombres complexes et formalisme

Nous faisons deux hypothèses :

a) L'étude des nombres complexes permet d'éclairer le processus de constitution et le fonctionnement du formalisme mathématique.

b) Un enjeu didactique important de la construction des nombres complexes à la transition lycée-université pourrait être de faciliter l'appropriation des démarches formelles abstraites en mathématiques.

Une activité sera proposée à la fin de cette première partie afin d'étayer l'hypothèse b). Voici des éléments soutenant l'hypothèse a) :

- Les complexes sont des objets formels : ils sont décrits par des symboles nouveaux ou définis comme des couples appelés nombres uniquement parce qu'ils sont munis d'opérations.
- La construction de ce formalisme a une histoire qui permet de la problématiser.
- Le principe de construction a été érigé en méthode par Hilbert : cette dernière consiste à adjoindre des éléments idéaux (i ou un point « à l'infini »), par commodité et simplicité, de façon à obtenir la permanence de certaines lois (un polynôme de degré n possède n racines, 2 droites se coupent en un point).
- Ce formalisme « attrape » *a posteriori* plus que ce que l'on y a mis (interprétation géométrique des complexes, applications en physique,...) : c'est le gain de l'abstraction, qui la justifie *a posteriori*.

L'articulation entre algèbre et géométrie

Nous faisons également deux hypothèses :

a) L'articulation entre algèbre et géométrie, au sein d'un objet à « double-face », est un des enjeux mathématiques et épistémologiques fondamentaux des nombres complexes.

b) Un enjeu didactique important de l'introduction des nombres complexes en fin de lycée est de favoriser la flexibilité dans les changements de cadres et de registres requise par la pensée mathématique avancée à l'université.

Pour soutenir l'hypothèse a), c'est en effet la découverte des complexes qui permettra d'obtenir ultérieurement une extension significative des possibilités d'algébrisation de la géométrie et de géométrisation de l'algèbre. Les algèbres géométriques deviennent ainsi le langage de la physique du XX^e siècle, comme l'illustre la théorie de l'électron relativiste de Dirac. Ainsi que le décrit Parrochia (2012), un chemin de pensée conduit des complexes jusqu'aux grands programmes d'unification

contemporains (Langlands, supercordes). La philosophie de cette entreprise pourrait être décrite comme suit : l'algèbre crée des nombres pour traduire des propriétés géométriques (irrationnels, complexes, quaternions,...) et réciproquement, la géométrie fournit des intuitions pour décrire les propriétés des équations des courbes, surfaces et variétés algébriques. L'origine de cette articulation est probablement à situer au niveau de la géométrie de Descartes que l'on peut interpréter comme une réécriture de la géométrie en algèbre, établissant ainsi une correspondance encore imparfaite. La difficulté de définir géométriquement les opérations sur les complexes sera vaincue par Argand avec la naissance d'un nouveau cadre : le cadre vectoriel

Concernant l'hypothèse b), voici une situation destinée à travailler la flexibilité dans les changements de cadres :

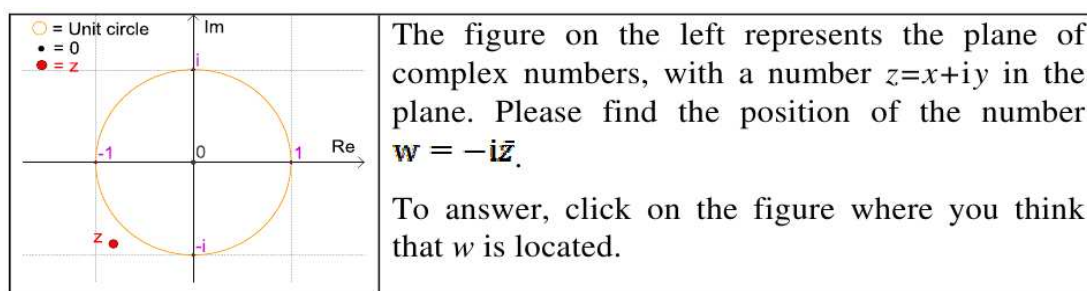


Figure 1 : exemple de tâche proposée par Wims (Vandebrouck 2006)

Cette situation a été rencontrée en troisième année de Licence par l'un des auteurs, lorsqu'il s'est agi de choisir un système de représentants des irréductibles de l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ (modulo les inversibles) en prenant ceux qui sont situés dans le premier quadrant. La dévolution de cette tâche aux étudiants a révélé à cette occasion une difficulté persistante.

Comment introduire les nombres complexes ?

Les différentes dénominations des complexes à travers les âges : nombres ou solutions impossibles, qui « sont plus sophistiqués que réels » (Cardan 1545, Bombelli 1560), nombres imaginaires (Descartes, 1637), nombres complexes (Gauss, 1837) sont révélateurs d'un obstacle de nature épistémologique. Il s'agit de l'*irrationnel épistémique*, selon la formulation de Gaston-Granger (1998), chap. II :

L'irrationnel épistémique apparaît dans le procès même de la connaissance, lorsque ce procès rencontre inopinément une propriété de son objet qui interdit de poursuivre ce processus tel quel. Il s'agit donc, dans ce domaine, d'un cas typique d'*irrationnel comme obstacle, considéré dans l'acte de connaître*. Mais il peut arriver aussi que le sujet connaissant ait recours délibérément à une contradiction de ce genre qu'il introduit lui-même dans l'objet et qu'il assume, au moins provisoirement, pour obtenir des résultats nouveaux. Il s'agit toujours alors d'un moment du *travail de constitution de l'objet scientifique*, et l'irrationnel ne qualifie nullement une attitude et un comportement pratique de l'acteur.

L'enjeu d'une ingénierie dédiée à l'introduction des complexes est alors de faire en sorte que les nombres complexes n'apparaissent pas comme un irrationnel introduit arbitrairement par le mathématicien ou le professeur, mais bien d'un irrationnel *a priori* introduit délibérément et justifié *a posteriori* par les fruits de son introduction.

Dans cet esprit, le groupe IREM « Mathématiques et Philosophie » de Montpellier a construit une ressource « L'équation du troisième degré : une histoire complexe », disponible à l'adresse <http://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees>. En voici les idées directrices :

- Ne pas partir de l'équation de degré 2 mais de degré 3, qui fait apparaître un *conflit cognitif* : la formule de Cardan n'est a priori plus applicable alors qu'il existe trois racines réelles.
- Faire fonctionner la *dialectique outil-objet*, la dimension outil étant première.
- Se donner le temps de présenter la démarche de construction de l'outil et de discuter la pertinence des notations (qui conduit à abandonner la notation $\sqrt{-1}$).
- Restaurer ainsi la rationalité des nombres complexes : l'introduction de la racine carrée d'un nombre négatif, historiquement située, apparaît comme un procédé délibéré justifié par son succès dans la résolution du conflit cognitif.

Cette approche historique, basée sur les travaux de Bombelli, figure dans bon nombre de manuels de Terminale S. Cependant, lorsqu'elle est menée « à la hussarde » ou avec un mauvais contrôle des variables didactiques, les objectifs pédagogiques ne sont pas atteints. C'est pourquoi nous avons approfondi le travail d'ingénierie. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la ressource pour les détails du scénario.

LES LIENS ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LA PHYSIQUE : LE CAS DES NOMBRES COMPLEXES

Des ressources IREM produites sur ce thème

Le groupe IREM « Mathématiques et Philosophie » de Montpellier¹ conçoit des activités d'enseignement pour la classe de Terminale où interviennent conjointement des professeurs de philosophie et de mathématiques ou de philosophie et de physique. En particulier, il a constitué deux ressources présentant chacune un scénario pédagogique sur le thème des liens entre les mathématiques et la physique basé sur le cas des nombres complexes. Ces deux ressources, intitulées respectivement « Le réel et la raison 1 » et « Le réel et la raison 3 : utilisation des nombres complexes en physique » s'appuient sur une vidéo présentant l'exemple de la réflexion totale frustrée. Ces trois documents sont accessibles sur le site <http://www.irem.univ-montp2.fr/Actions-en-direction-des-lycees>.

Signalons que le thème « La raison et le réel » est inscrit au programme de philosophie de Terminale et que l'exemple des nombres complexes est parfois mobilisé pour alimenter la réflexion sur ce thème. C'est ce qui a motivé le groupe à produire ces ressources à la croisée de la philosophie, des mathématiques et de la physique.

Quel est l'intérêt de ces scénarios ?

Les scénarios pédagogiques développés présentent un intérêt multiple :

- Ils donnent à voir aux élèves une application concrète en physique de ces objets abstraits que sont les nombres complexes.
- Ils montrent, ce faisant, que les nombres complexes peuvent être utiles, ou autrement dit, constituer des instruments théoriques pour la résolution de problèmes. L'étude de cet aspect

¹ Les membres du groupe sont Bächtold Manuel, François Thomas, Guin Daniel, Guin Dominique, Hausberger Thomas, Pinet Véronique, Reboul Henri et Vergnerie Cédric.

opérateur des nombres complexes dans le cadre d'une réflexion épistémologique est un moyen de donner du sens à ces objets abstraits. En effet, comprendre l'usage qui peut être fait des nombres complexes est un moyen d'accéder à la signification de ces objets.

- Dans l'exemple de la réflexion totale frustrée, les nombres complexes interviennent dans la modélisation de la lumière en termes d'ondes électromagnétiques. Or, les ondes électromagnétiques sont l'objet de nombreux cours de physique à l'université. Ces scénarios pédagogiques font donc entrevoir aux élèves l'usage qui pourra être fait de ces objets mathématiques dans leur possible future formation universitaire en physique.
- Les trois points précédents peuvent motiver les élèves à travailler les nombres complexes en mathématiques.
- La co-intervention d'un enseignant de physique et d'un enseignant de philosophie crée un dynamisme nouveau dans la classe et permet de capter davantage l'attention et l'intérêt des élèves.
- En s'appuyant sur des exemples concrets et en mobilisant des connaissances empruntés aux domaines des mathématiques et de la physique (accessibles aux élèves de Terminale S), l'enseignant de philosophie alimente la réflexion épistémologique menée avec ses élèves.

Dans ce qui suit, il ne sera pas question de décrire ces scénarios pédagogiques en détails. En revanche, nous allons présenter les principaux points d'épistémologie traités par ces scénarios et indiquer comment ils permettent de les aborder.

La vidéo sur la réflexion totale frustrée

Dans cette vidéo, Henri Reboul, astrophysicien de l'Université Montpellier 2 et membre du groupe IREM « Mathématiques et Philosophie » de Montpellier, commente une sélection de diapositives tirées d'un diaporama conçu par l'équipe et accessible également sur son site internet. Il rappelle la loi de Snell-Descartes de la réfraction de rayons lumineux lorsqu'ils passent d'un milieu 1 à un milieu 2 dont l'indice de réfraction n n'est pas le même. Il souligne qu'il existe un angle d'incidence limite au-delà duquel les rayons lumineux sont totalement réfléchis. C'est le phénomène bien connu de la « réflexion totale ».

Il présente ensuite une petite expérience réalisée avec un prisme. Le phénomène de réflexion totale peut être obtenu sur la base du prisme, face intérieure (voir Figure 1). Lorsque l'on presse un doigt sur cette même base du prisme, face extérieure, on constate que les rayons lumineux ne sont plus totalement réfléchis (voir Figure 2). Au niveau des parties du doigt qui sont en contact avec la base du prisme, les rayons lumineux sont transmis à travers cette base, puis diffusés dans toutes les directions par la peau du doigt sous forme de rayons plus sombres : la réflexion totale est dite « frustrée ».

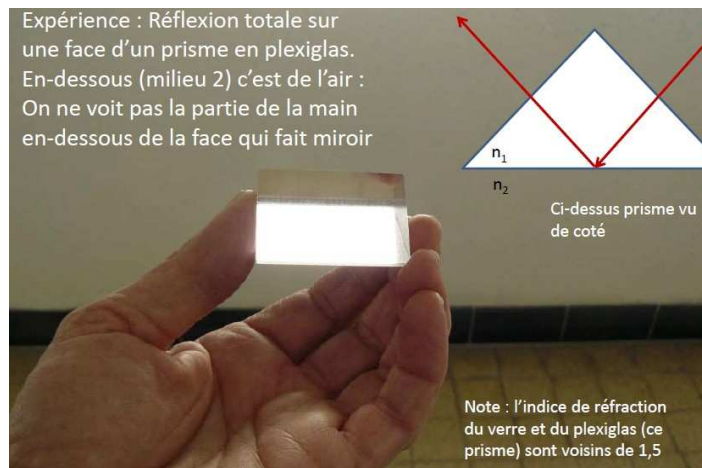


Figure 2 – Phénomène de réflexion totale avec un prisme (extrait du diaporama)



Figure 3 – Phénomène de réflexion totale frustrée avec un prisme (extrait du diaporama)

La suite de la présentation concerne la modélisation de ce phénomène de réflexion totale frustrée. Deux questions peuvent être discutées avec les élèves afin de les aider à clarifier le contenu de cette présentation. Premièrement : « Quel est le problème posé par l'expérience du doigt ? » La réponse pourrait être formulée ainsi : « Les lois disponibles en physique (lois de Snell-Descartes) ne permettent pas d'expliquer que l'on voit l'empreinte digitale (qui résulte d'un phénomène de réflexion totale frustrée) ». Deuxièmement : « Comment surmonter le problème ? ». La réponse à laquelle la discussion est supposée aboutir peut s'exprimer ainsi : « En modélisant la lumière à l'aide des nombres complexes. Il est possible ainsi de trouver des solutions pour les angles d'incidence au-delà de l'angle limite ("limite" dans le cadre d'une modélisation sans nombres complexes) ».

Pour les détails de ces solutions, nous renvoyons le lecteur aux diapositives de la ressource. Indiquons ici qu'elles sont obtenues au moyen d'une modélisation mathématique en termes de fonctions d'onde *avec des nombres complexes*. Ajoutons que ces solutions impliquent l'existence d'ondes évanescentes qui se forment dans le milieu 2 (constitué d'air, dans l'exemple du prisme). Lorsque ces ondes évanescentes peuvent se former, elles assurent la réflexion totale. Lorsqu'elles ne peuvent pas se former (en raison de la présence de la peau du doigt, dans l'exemple du prisme), la réflexion totale est frustrée. La dernière partie de la présentation pointe le fait que ces ondes ont été mises en évidence expérimentalement. Henri Rebol discute alors de l'exploitation technologique de la nouvelle connaissance ainsi acquise (exemples des capteurs d'empreintes digitales et de la

microscopie optique à champ proche) et de l'analogie pouvant être faite entre la frustration de la réflexion totale et l'effet tunnel de la mécanique quantique. Il termine sa présentation en donnant l'exemple du processus de fusion (entre deux protons) qui s'opère dans le Soleil par un effet tunnel à travers une barrière de potentiel (celle créée par la force de répulsion électrostatique entre les deux protons).

Quelle est l'utilité des mathématiques en physique ?

Cette question peut être abordée à partir de l'exemple de la réflexion totale frustrée. En effet, cet exemple illustre l'élément de réponse suivant :

(a) L'introduction d'objets mathématiques en physique peut offrir de nouvelles possibilités pour la modélisation des phénomènes problématiques et la prédiction de nouveaux phénomènes.

Cet élément de réponse peut être précisé en distinguant deux cas. Un premier cas est celui de phénomènes problématiques : lorsque les physiciens ne parviennent pas à modéliser certains phénomènes (par exemples, la réflexion totale frustrée ou la fusion dans le Soleil), le recours à certains objets mathématiques (nombres complexes) peut permettre de débloquer la situation et de dépasser, voire transgresser, les lois existantes (respectivement, les lois de Snell-Descartes et le caractère infranchissable d'une barrière de potentiel). Un second cas est celui de la prédiction de nouveaux phénomènes : le recours à certains objets mathématiques peut permettre de prédire de nouveaux phénomènes dont les physiciens ne soupçonnaient pas l'existence (par exemple, les ondes évanescentes évoquées plus haut).

Afin de compléter le propos sur la question de l'utilité des mathématiques en physique, nous pouvons ajouter deux autres éléments de réponse qui ne sont pas apportés par l'exemple de la réflexion totale frustrée :

(b) Exprimer les résultats d'expérience (constatés ou prédits) au moyen de nombres leur confère une portée universelle (un nombre étant perçu et reconnu de la même manière par tous), et ce, par contraste avec la qualité d'un objet dont la perception par les sens peut varier d'un observateur à un autre. En d'autres termes, le passage du qualitatif au quantitatif permet de s'émanciper de la subjectivité de l'expérience sensible.

(c) Cette expression mathématique des résultats d'expérience rend possible l'établissement de liens précis entre les grandeurs. Ceci, à son tour, rend possible le point (a), c'est-à-dire la modélisation de phénomènes problématiques et la prédiction de nouveaux phénomènes.

Pourquoi peut-on appliquer les mathématiques au monde physique ?

La question de l'utilité des mathématiques en physique peut être articulée à une seconde question, celle de la possibilité même de pouvoir appliquer les mathématiques au monde physique. Nous proposons de problématiser cette seconde question à partir du cas des nombres complexes : comment expliquer le fait que les nombres complexes, qui n'ont pas été tirés de l'expérience, puissent néanmoins servir à modéliser et prédire des phénomènes ? Cette question peut ensuite être généralisée à la question de la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles » (selon l'expression de Wigner, 1960), que nous pouvons reformuler en ces termes : comment expliquer le fait que les mathématiques, qui sont des produits de notre activité intellectuelle, soient efficaces lorsqu'on les applique au monde physique ? Remarquons que le

traitement de cette question constitue une façon possible de s'emparer du thème « la raison et le réel » inscrit au programme de philosophie de Terminale.

Dans la ressource « Le réel et la raison 3 : utilisation des nombres complexes en physique », la démarche proposée ne vise pas à fournir aux élèves une réponse fermée à cette question, mais à les conduire à identifier le problème, c'est-à-dire à saisir le caractère surprenant de l'efficacité des mathématiques, et à envisager des pistes de réponses. Notre hypothèse est que l'étude du cas des nombres complexes permet de rendre problématique la question concernant l'efficacité des mathématiques.

En quoi cette question est-elle problématique ? Pour s'en convaincre, nous proposons de présenter deux réponses à la fois simples et de prime abord sensées, puis de montrer que le cas des nombres complexes les rend difficilement défendables. La première réponse a été apportée notamment par Aristote. Elle revient à soutenir que les mathématiques s'appliquent au monde sensible parce que ce dernier est la source première de laquelle sont tirées les mathématiques (voir par exemple Espinoza, 1997). À la rigueur, ce point de vue peut être maintenu si l'on considère le cas des nombres entiers naturels ou celui de la géométrie euclidienne. Cependant, dans le cas des nombres complexes, cette idée n'est pas vérifiée : les nombres complexes ont été forgés dans la sphère des mathématiques, en réponse à un problème purement mathématique (voir Partie 1).

La seconde réponse a été avancée par Galilée : « La philosophie est écrite dans ce grand livre – je veux dire l'Univers – continuellement ouvert sous nos yeux. Mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre sa langue et à lire les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot » (*Il saggiaiore*, 1623). En substance, Galilée affirme que les mathématiques s'appliquent au monde physique parce que ce dernier possède une structure mathématique. Or, dans le cas des nombres complexes, la relation entre ces objets mathématiques et le monde physique est très indirecte. Dans l'exemple de la modélisation de la réflexion totale frustrée, seule la partie dite « réelle » de la fonction d'onde complexe est mise en relation avec les phénomènes. Rien ne permet de conclure qu'il existe un isomorphisme entre les nombres complexes (côté théorie physique) et le monde physique.

L'examen critique de ces deux tentatives de réponse met en évidence le point suivant : le fait que les mathématiques puissent s'appliquer au monde physique ne s'explique pas aisément. Afin de ne pas clore la discussion sur la remise en cause de ces deux réponses et d'inviter les élèves à poursuivre leur réflexion sur cette question, d'autres pistes de réponse peuvent être présentées. Nous en évoquons ici quatre :

- (i) Les théories physiques mathématisées peuvent modéliser et prédire des phénomènes parce que ces derniers sont eux-mêmes déjà exprimés au moyen des mathématiques. Cette réponse a par exemple été suggérée par Duhem (2007 [1906]).
- (ii) Nous pouvons appliquer les mathématiques pour décrire les phénomènes notamment parce qu'ils sont caractérisés par une certaine régularité. Il s'agit là d'une transposition de l'idée de Hume pour justifier l'applicabilité du principe de causalité (voir 2008 [1748, 1751]).
- (iii) Certains outils mathématiques ont été développés pour s'adapter à la modélisation des phénomènes. Cette idée a été développée plus récemment par Lambert (1999).

(iv) Enfin, nous pourrions retourner la question. Après tout, les mathématiques constituent un langage parmi d'autres. Pourquoi les mathématiques *ne* pourraient-elles *pas* être utilisées pour modéliser et prédire les phénomènes ? D'ailleurs, ce langage ne présente-t-il pas des avantages sur les autres, en particulier pour formuler des liens précis entre les grandeurs et pour mener des raisonnements déductifs ?

Cette seconde partie a permis de faire entrevoir que les nombres complexes constituent un exemple très riche permettant d'alimenter efficacement la réflexion épistémologique sur les liens entre les mathématiques et la physique.

CONCLUSION

Nous avons mis en évidence la richesse des nombres complexes en tant qu'objets de connaissance et leur potentiel en terme d'apprentissages (mathématiques, méta-mathématiques, philosophiques,...). Les nombres complexes offrent la possibilité de construire et de pratiquer un formalisme mathématique abstrait articulant différents cadres, de l'appliquer à la modélisation des phénomènes physiques (et de s'émerveiller de son efficacité), enfin d'en discuter la portée philosophique. Si les ambitions affichées contrastent avec la place qui est faite aux nombres complexes dans les nouveaux programmes, les ressources produites par l'IREM de Montpellier ont été conçues pour permettre aux enseignants motivés d'être porteurs de ces ambitions, en usant de différents leviers (histoire des mathématiques, réflexivité, pratiques interdisciplinaires,...). Les nombres complexes, pierre d'achoppement, pourront peut-être trouver ainsi un contexte de réalisation à même de leur permettre de jouer leur rôle dans le cheminement vers la pensée mathématique avancée. Aux praticiens d'expérimenter !

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie (1998). *Images, imaginaires, imaginations : une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*. Paris : ellipses.
- Duhem, P. (2007 [1906]). *La théorie physique : son objet, sa structure*. Paris : Vrin.
- Espinoza, M. (1997). *Les mathématiques et le monde sensible*. Paris: Ellipses.
- Flament, D. (2003). *Histoire des nombres complexes : entre algèbre et géométrie*. Paris : CNRS Editions.
- Galilée (1623). *Il saggiaiore*.
- Gaston-Granger, G (1998). *L'irrationnel*. Paris : Odile Jacob.
- Hume, D. (2008 [1748, 1751]). *Enquête sur l'entendement humain*. Paris : Vrin.
- Lambert, D. (1999). L'incroyable efficacité des mathématiques. *La Recherche*, 316, 48.
- Parrochia, D., Artibano, M. et Anglès, P. (2012). L'unification des mathématiques, Cachan : Lavoisier.
- Vandebrouck, F. (2006). Enseigner autrement les mathématiques en licence de sciences : des exemples utilisant les nouvelles technologies. Dans N. Bednarz, C. Mary (dir.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Actes de colloque EMF 2006 (cédérom), Sherbrooke : Editions du CRP.
- Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1-14.